Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
Φυλλο 23, 21 Ιουνιου 2021

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα
Διανέμεται & αναπαράγεται ελεύθερα
e-mail: info@ekthetis.gr
Δικτυακός Τόπος:
http://www.ekthetis.gr/
Στοιχειοθετείται με το LaTeX2ε
Έκδοση-Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Διευθύνεται από Συντακτική Επιτροπή

Η αναγκαιότητα ενίσχυσης της γεωμετρικής σκέψης στην ελληνική εκπαίδευση. Μια μελέτη και μια πρόταση με αφορμή ένα θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων

Γιώργος Ρίζος
Μαθηματικός
rizosgeo@sch.gr

Περίληψη

Το κείμενο που ακολουθεί, ασχολείται στο πρώτο μέρος με την ανάδειξη μιας παρενέργειας που προκαλεί η υποβάθμιση του ρόλου της Γεωμετρίας στα σχολικά Μαθηματικά, μέσω της μελέτης της περίπτωσης που ανέκυψε με τη λανθασμένη διατύπωση του θέματος Γ (παλαιού τύπου) των Μαθηματικών στις πανελλαδικές εξετάσεις του 2020. Διατυπώνεται μια πρόταση για τη διδακτική αξιοποίηση του θέματος. Κατόπιν, στο δεύτερο μέρος δίνονται στοιχεία για την ιστορική διαδρομή του θέματος αυτού. Στο τρίτο μέρος δίνεται μια μελέτη του γενικευμένου προβλήματος της εγγραφής του τριγώνου με το μέγιστο εμβαδόν σε δοσμένο κύκλο.

Περιεχόμενα

Jean Dieudonné: «*Να φύγει ο Ευκλείδης*».[1]

Douglas Quadling: «*Ο Ευκλείδης έχει φύγει, αλλά στο κενό που άφησε πίσω του επικρατεί χάος*».[2]

1 Μέρος πρώτο

1.1 Εισαγωγή: Η «γεωμετρική σκέψη»

– Και γιατί τα σημεία να είναι συνευθειακά;
– Μα τι λέτε κύριε. Μάς δουλεύετε; Τι άλλο μπορεί να είναι; Αφού φαίνεται στο σχήμα.

Όσοι διδάσκουν, αλλά δεν θυμούνται να έχουν ζήσει τέτοιους διαλόγους στην τάξη ή όσοι συμφωνούν με τη γνώμη των μαθητών, ας σταματήσουν την ανάγνωση του κειμένου εδώ.

Δεν θα αναφερθώ γενικώς στην υποβάθμιση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση τα τελευταία χρόνια. Υπάρχουν άφθονες σχετικές εργασίες και αναφορές για την αναγκαιότητα διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας,[3] καθώς και φωνές αγωνίας για τις επιπτώσεις της ελλιπούς ενασχόλησης των μαθητών με την αναλυτική και συνθετική μέθοδο απόδειξης και διερεύνησης που προάγει η Γεωμετρία.

Θα αναφερθώ σε μια παρενέργεια που προκαλεί η υποβάθμιση του ρόλου της Γεωμετρίας στα σχολικά Μαθηματικά, μέσω της μελέτης μιας περίπτωσης, με αφορμή ένα θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων.

Η (όποια) ενασχόληση των μαθητών με τη Γεωμετρία στο Λύκειο έχει εγκλωβιστεί αυστηρά στα πλαίσια του ομότιτλου μαθήματος της Α′ και Β′ Λυκείου. Στη συνείδηση των μαθητών[4] η Γεωμετρία φαντάζει ως μια «νεκρή» γλώσσα, όπως π.χ. τα Λατινικά, που δεν είναι καν εξεταζόμενο μάθημα στη Β′ Λυκείου και η ενασχόλησή τους μ' αυτήν δεν αποτελεί προαπαιτούμενο για την επιτυχία τους στις Πανελλαδικές εξετάσεις. Την κύρια ευθύνη γι' αυτό έχει ο προσανατολισμός των Αναλυτικών προγραμμάτων Σπουδών των τελευταίων ετών, που ουσιαστικά απεμπολεί τη γεωμετρική σκέψη από την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, αφού «ότι δεν εξετάζεται, πεθαίνει».

Έτσι, οι όποιες προσπάθειες των διδασκόντων να αναδείξουν την αξία της μεθοδολογίας αντιμετώπισης των γεωμετρικών προβλημάτων (ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη, διερεύνηση), προσκρούουν σε ένα τείχος άρνησης, ακόμα κι από μαθητές που εν δυνάμει θα είχαν την ικανότητα να κατανοήσουν σε βάθος τις έννοιες αυτές. Σιγά-σιγά οι προσπάθειες ατονίζουν, η διδασκαλία προσαρμόζεται στις δυνατότητες των συμμετεχόντων και το μάθημα μετατρέπεται σε μια τυπική διαδικασία (για την πλειοψηφία των μαθητών). Ταυτόχρονα κι εμείς (: οι διδάσκοντες, οι συγγραφείς μαθηματικών βιβλίων, οι θεματοδότες) προσαρμοζόμαστε σε μεγάλο βαθμό σ' αυτήν την κατάσταση και τα αντανακλαστικά μας ατονίζουν. Κατά κανόνα σκεπτόμαστε «γεωμετρικά» όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε ατόφιο γεωμετρικό πρόβλημα κι όχι όταν σε ένα πρόβλημα π.χ. Ανάλυσης ή Άλγεβρας εμπλέκονται γεωμετρικές έννοιες. Ίσως ο παραπάνω αφορισμός να φαίνεται υπερβολικός και άδικα ισοπεδωτικός. Ας δούμε, όμως, ένα παράδειγμα, που επεξηγεί την παραπάνω απόψη:

Στο βιβλίο Μαθηματικών της Γ′ Γυμνασίου,[5] στο κεφάλαιο Α. 3.3 (Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος) υπάρχει η εξής άσκηση:

> Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν $12cm$. Αν οι κύκλοι μετατοπισθούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά τότε τα κέντρα τους απέχουν $58cm$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

Πριν διαβάσετε τα σχόλια παρακάτω δώστε μια λύση στην άσκηση αυτή απευθυνόμενοι σε μαθητές Γ′ Γυμνασίου. Εννοείται ότι γνωρίζετε το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών Δημοτικού και Γυμνασίου.

Εδώ ακριβώς είναι το ενδιαφέρον! Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων πρωτοδιδάσκονται στην Α′ Λυκείου,[6] άρα οι μαθητές του Γυμνασίου καλούνται να απαντήσουν στο πρόβλημα διαισθητικά, αποδεχόμενοι ότι η διάκεντρος διέρχεται από το σημείο επαφής, αφού «φαίνεται»! Ομολογώ ότι από το 2007, που διδάσκεται το βιβλίο αυτό, δεν έκανα τέτοιες σκέψεις και ποτέ, μα ποτέ, μαθητές δεν με προκάλεσαν με σχετικό ερώτημα. Ανάμεσά τους και μαθητές που τα επόμενα χρόνια αρίστευσαν στις πανελλαδικές εξετάσεις. Μόνο τώρα, έχοντας στο μυαλό μου το συμβάν, που θα δούμε παρακάτω, συνδύασα τα θέματα αυτά.

Δεν υπάρχουν «επίσημες» λύσεις στο πρόβλημα, οπότε δεν ξέρουμε αν οι συγγραφείς ήθελαν να γίνει ειδική αναφορά στην εξήγηση της συνευθειακότητας των τριών

[1] Σεμινάριο Royaumont, 1959

[2] Βλέπε στο [1], *σ.* 11

[3] Από την απέραντη σχετική βιβλιογραφία, αναφέρουμε ως χαρακτηριστικά τα [2], [3] και την εισαγωγή από το [1], *σσ.* 11-26.

[4] Ας επιτραπεί εδώ μια γενίκευση. Γράφοντας «οι μαθητές» αναφερόμαστε στην πλειοψηφική τάση και αντίληψη. Προφανώς, υπάρχουν πάντα φωτεινές εξαιρέσεις.

[5] Στο [4], *σ.*137

[6] Στη σελίδα 70 της Ευκλείδειας Γεωμετρίας Α′ Λυκείου (βλ. [5]) η ιδιότητα «το σημείο επαφής είναι σημείο της διακέντρου» αποδεικνύεται με άτοπο, αλλά το άτοπο συμπέρασμα ($\delta < R + \rho$) προκύπτει από την ικανή και αναγκαία συνθήκη επαφής δύο κύκλων, η οποία στο βιβλίο συνάγεται διαισθητικά από το σχήμα (βλ. λίγο παραπάνω στην ίδια σελίδα). Αυτό είναι αποτέλεσμα της όλο και μεγαλύτερης διείσδυσης της εποπτείας (εις βάρος της θεωρητικής προσέγγισης) στη διδασκαλία της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Στο συγκεκριμένο ζήτημα το πρόγραμμα σπουδών, σύμφωνα με το οποίο γράφτηκε το βιβλίο, αναφέρει ότι οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων θα διαπιστωθούν εποπτικά. Στα παλαιότερα βιβλία οι προτάσεις αυτές αποδεικνύονταν. Δείτε, π.χ. στο [6], *σσ.*129-130.

σημείων ή όχι (πιστεύω, μάλλον όχι). Πάντως, με μια μικρή αναζήτηση στα βιβλία λύσεων που κυκλοφορούν ελεύθερα στο διαδίκτυο, στα τρία πρώτα βρέθηκαν τα εξής:

Στο πρώτο δίνεται απευθείας το σύστημα

$$\begin{cases} R - \rho = 12 \\ R + \rho = 58 \end{cases}$$

και στη συνέχεια επιλύεται δίχως άλλη εξήγηση.

Στο δεύτερο αναφέρεται: Αν x και y οι ακτίνες με $x > y$, σύμφωνα με την εκφώνηση, όταν εφάπτονται εσωτερικά θα ισχύει

$$x - y = 12 \ \ (1)$$

και εξωτερικά θα ισχύει

$$x + y = 58 \ \ (2)$$

κ.ο.κ.

Στο τρίτο γράφεται: Αν ρ_1,ρ_2 είναι οι ακτίνες των δύο κύκλων με $\rho_1 > \ \rho_2$, από τη Γεωμετρία έχουμε ότι, όταν εφάπτονται εσωτερικά ισχύει

$$\rho_1 - \ \rho_2 = 12 \ \ (1')$$

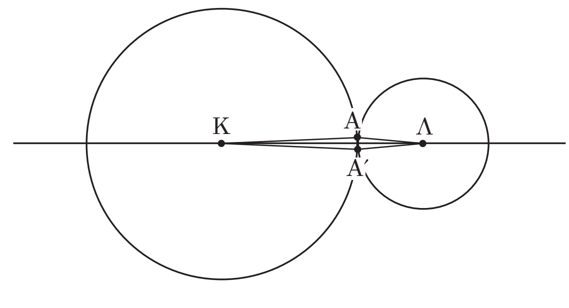
και όταν εφάπτονται εξωτερικά ισχύει

$$\rho_1 + \ \rho_2 = 58 \ \ (2')$$

Εδώ λοιπόν τίθεται ένα ερώτημα: Ποιος πρέπει να είναι ο στόχος αυτού του προβλήματος; Ο πρώτος στόχος μας είναι η επίλυση συστήματος, οπότε η γεωμετρική διατύπωση καλείται απλώς να αναδείξει τη χρησιμότητα των συστημάτων στην επίλυση προβλημάτων ή μήπως η άλγεβρα (εδώ η επίλυση συστήματος) είναι απλώς το εργαλείο για την αντιμετώπιση ενός γεωμετρικού προβλήματος;

Αν επιλέξουμε το πρώτο, ας μεταφέρουμε αυτό το πρόβλημα στην Α΄ Λυκείου, όταν θα έχει συζητηθεί (έστω κι εποπτικά) η συνευθειακότητα των σημείων. Αν επιλέξουμε το δεύτερο, έχουμε μια καλή αφορμή να παρακινήσουμε κάποιους μαθητές θέτοντας το ερώτημα με το οποίο ξεκινήσαμε το κείμενο αυτό: «Και γιατί τα σημεία να είναι συνευθειακά;». Συνεχίζοντας το διάλογο, αντικρούουμε τον ισχυρισμό: «φαίνεται στο σχήμα», λέγοντας ότι πολλές φορές τα φαινόμενα απατούν και ότι η Γεωμετρία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την απόδειξη και την εξήγηση των φαινομένων.

Θα αποδείξουμε, λοιπόν ότι το σημείο επαφής δύο κύκλων είναι στην ευθεία της διακέντρου τους. Μια ενδιαφέρουσα και κατανοητή σε μαθητές Γυμνασίου απόδειξη είναι η εξής: Αρχικά, έχουμε ως δεδομένα ότι κάθε διάμετρος είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και ότι η ευθεία της διακέντρου περιέχει διαμέτρους και των δύο κύκλων, άρα είναι άξονας συμμετρίας όλου του σχήματος. Επίσης, ότι το σημείο επαφής δύο κύκλων είναι μοναδικό. Κάνοντας λοιπόν, μια ψευδή υπόθεση (τους εισάγουμε έτσι στην έννοια της εις άτοπον απαγωγής), λέμε: Έστω ότι η διάκεντρος δεν περνά από το κοινό σημείο τους.



Τότε αυτό το σημείο θα έχει το συμμετρικό του, ως προς τη διάκεντρο, πάνω στο ίδιο το σχήμα, άρα θα είχαμε δύο σημεία τομής, που δεν μπορεί να συμβαίνει. Άρα η διάκεντρος περιέχει το σημείο επαφής των δύο κύκλων.

Προφανώς, δεν προτείνω, να εκτροχιάσουμε το μάθημά μας, κάνοντας τέτοιες υπερβάσεις κάθε φορά που συναντάμε ένα παρόμοιο θέμα. Θέλω, απλώς, να αναδείξω το πόσο δύσκολο, μα συνάμα σημαντικό είναι να μην ατονίζει το γεωμετρικό μας ένστικτο στην πράξη της διδασκαλίας.

Η προβληματική αυτή κατάσταση μπορεί να μένει στην αφάνεια για χρόνια, αλλά αρκεί ένα «ατυχές» συμβάν για να έλθει στην επιφάνεια. Ας δούμε λοιπόν ως μια πολύ ενδιαφέρουσα «μελέτη περίπτωσης» αυτό που συνέβη στις Πανελλαδικές εξετάσεις του 2020, στις εξετάσεις «παλαιού τύπου» και έφερε στην επιφάνεια το φαινόμενο που περιγράψαμε παραπάνω.

1.2 Το χρονικό

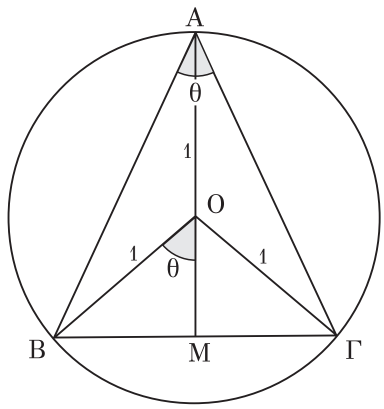
Επειδή σε πολλά Λύκεια της χώρας δεν ολοκληρώθηκε η διδασκαλία της διδακτέας ύλης, εξαιτίας της πανδημίας του covid 19, δόθηκε η δυνατότητα στους τελειόφοιτους να επιλέξουν αν θέλουν να εξεταστούν στις πανελλαδικές εξετάσεις των ημερησίων ΓΕΛ του 2020 με θέματα «νέου τύπου» με μειωμένη ύλη ή με θέματα «παλαιού τύπου», που κάλυπταν όλη τη διδακτέα ύλη. Οι απόφοιτοι παλαιών ετών εξετάστηκαν με τα θέματα «παλαιού τύπου». Οι υποψήφιοι γνώριζαν ότι όσοι εξεταστούν στα θέματα «παλαιού τύπου» θα καταλάβουν το $9,51\%$ επί των θέσεων του αριθμού εισακτέων που αντιστοιχούν στην κατηγορία των συμμετεχόντων στις πανελλαδικές εξετάσεις ημερησίων ΓΕΛ 2020. Τελικά λίγοι περίπου $9,51\%$ επί του συνόλου των υποψηφίων επέλεξαν να εξεταστούν στα θέματα παλαιού τύπου.[7]

1.3 Η διατύπωση του θέματος

Στις Πανελλαδικές εξετάσεις του 2020, στις εξετάσεις «παλαιού τύπου» δόθηκε το εξής θέμα Γ:

[7] Πηγή: esos.gr

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\widehat{\mathrm{BOM}} = \theta$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:

$$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\,\eta\mu\theta,\ \theta \in (0,\ \pi).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2, με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

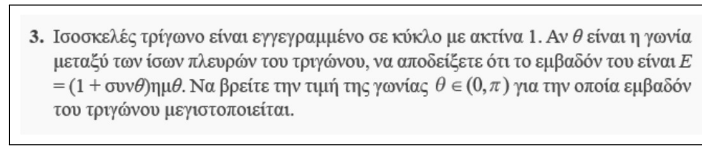
Μονάδες 6

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2, του ερωτήματος Γ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (0,\ \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)\mathrm{E}'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)\mathrm{E}'(\xi_2).$$

Μονάδες 6

Είναι προφανές ότι οι θεματοδότες θέλησαν να διαμορφώσουν σε θέμα κατάλληλο για πανελλαδικές εξετάσεις την εξής άσκηση του σχολικού βιβλίου: [8]



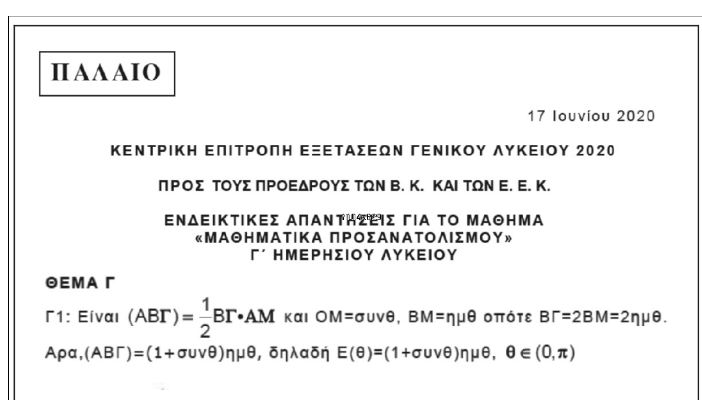
3. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι $E = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$ για την οποία εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Στο θέμα των πανελλαδικών προστέθηκε στην εκφώνηση το σχήμα από το βιβλίο λύσεων και συμπληρώθηκε η εκφώνηση με τη συνθήκη $\widehat{\mathrm{BOM}} = \theta$. Προφανώς η προσθήκη αυτή έγινε για να διευκολυνθούν (καθοδηγηθούν) οι υποψήφιοι να εκφράσουν τα μήκη ΒΜ και ΟΜ συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΜ. Τα ερωτήματα Γ1 και Γ2 καλύπτουν τις 13 από τις 25 μονάδες του θέματος. Κατόπιν, προστέθηκαν άλλα δύο ερωτήματα 6 μονάδων το καθένα, που ελέγχουν τη γνώση βασικών θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού, κι έτσι *μετασχηματίστηκε* η άσκηση του σχολικού βιβλίου σε θέμα συμβατό με το ύφος των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων.

Ως ιδέα επιλογής θέματος μπορεί να χαρακτηριστεί αρχικά επιτυχημένη. Τα προβλήματα μεγίστων ελαχίστων χρησιμοποιούνται διεθνώς και διαχρονικά ως θέματα εισαγωγικών εξετάσεων. Οι μέθοδοι εντοπισμού μεγίστων ελαχίστων, με αλγεβρικά και γεωμετρικά εργαλεία παλαιότερα και με τα εργαλεία του Διαφορικού Λογισμού από τη δεκαετία του '80 κι έπειτα, καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος της σχετικής βιβλιογραφίας.

1.4 Το λάθος στην εκφώνηση

Στις ενδεικτικές απαντήσεις προς τα βαθμολογικά κέντρα η ΚΕΓΕ προτείνει:



ΠΑΛΑΙΟ

17 Ιουνίου 2020

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2020

ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ Β. Κ. ΚΑΙ ΤΩΝ Ε. Ε. Κ.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ»
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1: Είναι $(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{AM}$ και ΟΜ=συνθ, ΒΜ=ημθ οπότε ΒΓ=2ΒΜ=2ημθ.

Αρα,(ΑΒΓ)=(1+συνθ)ημθ, δηλαδή Ε(θ)=(1+συνθ)ημθ, $\theta \in (0,\pi)$

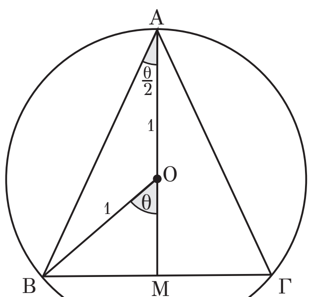
Η προσθήκη του σχήματος και της συνθήκης $\widehat{\mathrm{BOM}} = \theta$, αντί να βοηθήσει τους μαθητές, δημιουργεί πρόβλημα ασυμβατότητας στην άσκηση.

[8] Βλέπε [7], σ. 173.

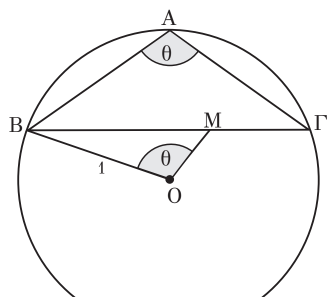
[9] Για το θέμα αυτό αναπτύχθηκε δυσανάλογα μικρός διάλογος ως προς τη σοβαρότητά του. Πολλές ιστοσελίδες και φροντιστήρια ανάρτησαν λύσεις δίχως καμία σχετική αναφορά, ούτε μαθεύτηκε αν διατυπώθηκε ερώτημα από εξεταστικό κέντρο. Δεν δόθηκε καμία επίσημη διευκρίνιση, διόρθωση ή σχετική οδηγία βαθμολόγησης από την Κ.Ε.Ε. . Πιθανόν αν ήταν θέμα «νέου τύπου», ο αντίκτυπος να ήταν ισχυρότερος, εφόσον θα αφορούσε δεκαπλάσιους υποψηφίους. Η πρώτη χρονικά αναφορά που εντοπίσαμε είναι εδώ: https://www.mathematica.gr/forum/....(#10) και (#12).
Πιθανόν να υπήρχαν κι άλλες αναφορές, σε άλλους χώρους μαθηματικών συζητήσεων, που δεν εντοπίσαμε. Δείτε ένα διάλογο σχετικά με το θέμα εδώ:
https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=95&t=67354

Όπως δίνεται η εκφώνηση, δεν υπάρχει κάποιος ορισμός για το Μ, εκτός του σχήματος, στο οποίο φαίνεται ότι είναι ένα σημείο της ΒΓ, ώστε $\widehat{\mathrm{BOM}} = \widehat{\mathrm{A}} = \theta$. Με δεδομένη αυτή τη συνθήκη, για να είναι συνευθειακά τα Α, Ο, Μ και να ισχύει ΑΜ⊥ΒΓ, πρέπει $\theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, (βλέπε σχ. 1), οπότε η συνθήκη $\theta \in (0,\ \pi)$ της εκφώνησης *είναι λάθος*.[9].

Πράγματι, αν $\theta > \frac{\pi}{2}$, τότε το σημείο Μ της ευθείας που ορίζουν τα Β, Γ για το οποίο είναι $\widehat{\mathrm{BOM}} = \widehat{\mathrm{A}} = \theta$ δεν είναι το μέσο της ΒΓ (βλέπε σχ. 2)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Οπότε, τα ερωτήματα Γ3 και Γ4 φαίνεται να είναι «στον αέρα». Επίσης, η επισήμανση στην εκφώνηση ότι «το τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, *όπως φαίνεται στο σχήμα*», οδηγεί τον μαθητή να ασχοληθεί μόνο με την περίπτωση οξυγωνίου τριγώνου (με το κέντρο του κύκλου εντός του τριγώνου).

Ας πάρουμε την περίπτωση $\theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Κι εδώ, βεβαίως, *χρειάζεται* να αποδειχθεί ότι τα Α, Ο, Μ είναι συνευθειακά και ότι ΑΜ⊥ΒΓ.

Η απόδειξη είναι απλή: Το Ο είναι περίκεντρο του ισοσκελούς ΑΒΓ, οπότε τα Α, Ο βρίσκονται στη μεσοκάθετή του. Επίσης, $\widehat{\mathrm{BO\Gamma}} = 2\widehat{\mathrm{A}} = 2\theta$, άρα ΟΜ διχοτόμος της $\widehat{\mathrm{BO\Gamma}}$, οπότε είναι και ύψος στη ΒΓ, άρα τα Α, Ο, Μ είναι συνευθειακά και ΑΜ⊥ΒΓ.

Τίθεται αυτομάτως το ερώτημα: *Αυτό το τμήμα της απόδειξης ήταν ζητούμενο στις εξετάσεις ή όχι;*

Από ότι φαίνεται από τις ενδεικτικές απαντήσεις, αλλά και από τη μικρή βαθμολογική αξία του ερωτήματος, δεν ήταν στις προθέσεις των θεματοδοτών. Πόσο θα μπορούσε, εξάλλου, να λάβει η αιτιολόγηση αυτή από τις 5 μονάδες όλες κι όλες του ερωτήματος Γ1; Προφανώς, λοιπόν, η συνευθειακότητα των Α, Ο, Μ και η καθετότητα ΑΜ⊥ΒΓ εκλαμβάνεται ως προφανής, δίχως ανάγκη απόδειξης.

Έτσι, όμως, αναδεικνύεται η εξής αντίφαση που αφορά το πώς διδάσκουμε την Ανάλυση και τη Γεωμετρία στη Β′ βάθμια εκπαίδευση: Πώς είναι δυνατόν από τη μια να δεχόμαστε ως προφανή τόσο σημαντικά στοιχεία της λύσης, ενώ από την άλλη συμβουλεύουμε τους μαθητές μας ότι αν δεν γράφουν με κάθε λεπτομέρεια π.χ.: «η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $y = \eta\mu x$ και $y = \sigma\upsilon\nu x$ κ.λπ.» πιθανόν να χάσουν μονάδες;

• Έτσι, λοιπόν, στην περίπτωση $\theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΜ είναι

$$\eta\mu\theta = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BO}} = \frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{1} \Rightarrow \mathrm{B\Gamma} = 2\eta\mu\theta$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{OM}}{1} \Rightarrow \mathrm{OM} = \sigma\upsilon\nu\theta,$$

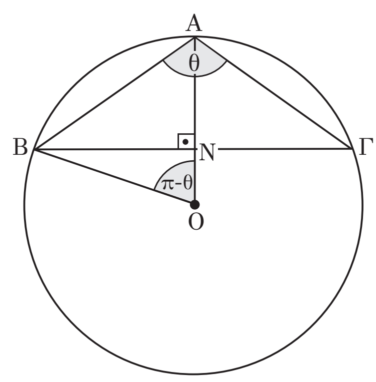
οπότε

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AO} + \mathrm{OM} = \sigma\upsilon\nu\theta + 1.$$

Άρα $(\mathrm{AB\Gamma}) = 2(\mathrm{AOB}) + (\mathrm{BO\Gamma}) = 2 \cdot \frac{1}{2}\eta\mu\theta + \frac{1}{2}\eta\mu 2\theta$ $\Leftrightarrow \mathrm{E}(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta,\ \ \theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

• Αποδεικνύεται ότι ο ίδιος τύπος του εμβαδού ισχύει για κάθε $\theta \in (0,\ \pi)$.

Παραβλέπουμε την αρχική συνθήκη της υπόθεσης $\widehat{\mathrm{BOM}} = \widehat{\mathrm{A}} = \theta$, καθώς και την ύπαρξη του σημείου Μ και εργαζόμαστε στο σχήμα 3.



Σχήμα 3

Έστω Ν το σημείο τομής των τμημάτων ΑΟ και ΒΓ. Αφού το Ν ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, θα είναι ΑΝ⊥ΒΓ. Τότε

$$\widehat{\mathrm{BON}} = \frac{\widehat{\mathrm{BO\Gamma}}}{2} = \frac{2\pi - 2\theta}{2} = \pi - \theta.$$

Οπότε, στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΟΝ είναι

$$\eta\mu\,(\mathrm{BON}) = \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{BO}} = \frac{\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{1} \Rightarrow$$

$$\mathrm{B\Gamma} = 2\eta\mu\,(\mathrm{BON}) = \eta\mu\,(\pi - \theta) = \eta\mu\theta$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BON}) = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{BO}} = \frac{\mathrm{ON}}{1} \Rightarrow$$

$$\mathrm{ON} = \sigma\upsilon\nu\,(\mathrm{BON}) = \sigma\upsilon\nu\,(\pi - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$$

οπότε

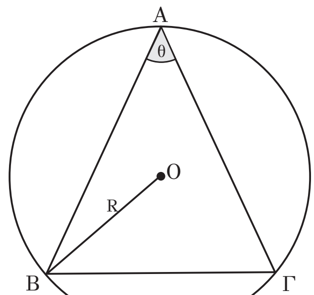
$$\mathrm{AN} = \mathrm{AO} - -\mathrm{ON} = \sigma\upsilon\nu\theta + 1,$$

κ.ο.κ.

• Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε το Μ ταυτίζεται με το Ο. Η περίπτωση είναι τετριμμένη. Ο τύπος προφανώς ισχύει.

1.5 Αν και μόνο αν...

Αν(ν) τα μαθηματικά που διδάσκουμε στο Λύκειο έδιναν μεγαλύτερη βαρύτητα στην Άλγεβρα, τη Γεωμετρία και την Τριγωνομετρία, τότε το πρόβλημα θα αντιμετωπιζόταν εύκολα από τους μαθητές, δίχως το «βοηθητικό» σχήμα της εκφωνήσεως. Πράγματι, έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\widehat{\mathrm{A}} = \theta$, $\theta \in (0, \pi)$, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R.



Τότε, από Ν. Ημιτόνων είναι

$$\mathrm{B\Gamma} = 2R\eta\mu\theta,$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = 2R\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 2R\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}$$

οπότε (για $R = 1$), είναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{A\Gamma}}{4R} =$$

$$\frac{(2\eta\mu\theta\cdot R)\cdot\left(4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}\cdot R^2\right)}{4R} =$$

$$\eta\mu\theta\cdot\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}\right) = \eta\mu\theta\,(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$$

για κάθε $\theta \in (0, \pi)$.

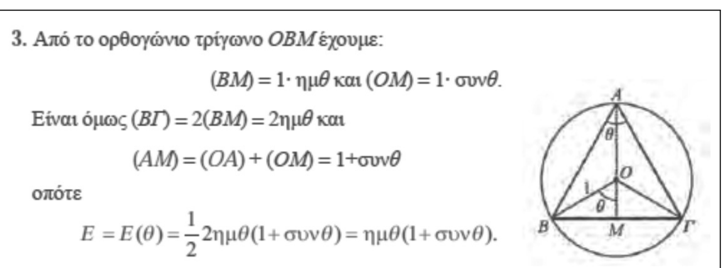
1.6 Δυο παρατηρήσεις για το Γ4

1η. Στην εκφώνηση θα έπρεπε να προβλέπεται η συνθήκη $\xi_1 \neq \xi_2$, ειδάλως, μπορούμε να πούμε απλώς ότι για $\xi_1 = \xi_2 = \frac{\pi}{3}$ επαληθεύεται η ισότητα της εκφωνήσεως, ακυρώνοντας νομιμότατα το περιεχόμενο του ερωτήματος.

2η. Ας δούμε προσεκτικά το ερώτημα, για το οποίο η ανακοίνωση της ΕΜΕ αναφέρει ότι το βρήκαν ιδιαίτερα ενδιαφέρον.[10] Είναι εμφανής η προσπάθεια των θεματοδοτών να προσθέσουν ένα επιπλέον «υπαρξιακό» ερώτημα, στο ύφος των συνηθισμένων θεμάτων των Πανελλαδικών εξετάσεων. Ενώ, όμως, τα τρία πρώτα ερωτήματα έχουν μια συνοχή κι έχουν μια ρεαλιστική υπόσταση, αφού ασχολούνται με τις τιμές που μπορεί να λάβει το εμβαδόν ενός μεταβλητού τριγώνου, το τελευταίο είναι εντελώς αταίριαστο με τα προηγούμενα και δεν φαίνεται να έχει κάποια άλλη χρησιμότητα, πέραν του ελέγχου (;) της γνώσης (;) του Θεωρήματος Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Η αναγκαιότητα διαμόρφωσης θεμάτων με το υπάρχον σφιχτό πλαίσιο, που ταυτόχρονα να καλύπτουν όλη την ύλη, οδηγεί σε τέτοιου είδους κατασκευές. Η αναθεώρηση της μορφής των θεμάτων είναι, νομίζουμε, επιβεβλημένη.

1.7 Τριάντα χρόνια στην αφάνεια

Η προτεινόμενη λύση στο σχολικό βιβλίο λύσεων [11] για το πρώτο ερώτημα είναι η εξής:



3. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OBM έχουμε:

$$(BM) = 1\cdot\eta\mu\theta \text{ και } (OM) = 1\cdot\sigma\upsilon\nu\theta.$$

Είναι όμως $(B\Gamma) = 2(BM) = 2\eta\mu\theta$ **και**

$$(AM) = (OA) + (OM) = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$$

οπότε

$$E = E(\theta) = \frac{1}{2}2\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta) = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta).$$

Παρατηρούμε ότι η ενδεικτική απάντηση της Κ.Ε.Ε. είναι πανομοιότυπη με τη απάντηση στο βιβλίο λύσεων της παρόμοιας άσκησης του σχολικού βιβλίου. Κι εδώ η μελέτη περιορίζεται για οξείες γωνίες, αν και στην εκφώνηση δίνεται ως πεδίο ορισμού το $(0, \pi)$, οπότε *έπρεπε* να μελετηθούν και οι άλλες περιπτώσεις. Επίσης στις απαντήσεις του σχολικού βιβλίου δίνεται το ίδιο σχήμα (όχι όμως στην εκφώνηση), ούτε εδώ αναγράφεται τι είναι το σημείο Μ και τέλος θεωρείται δεδομένο από τη Γεωμετρία ότι η γωνία $\widehat{\mathrm{BOM}}$ είναι ίση με τη $\widehat{\mathrm{BAM}} = \theta$.

Εφόσον επί τριάντα και πλέον χρόνια η λύση της άσκησης αυτής παραμένει ως έχει στο σχολικό βιβλίο, πλέον η ευθύνη για το φαινόμενο αυτό, μπορούμε να πούμε, ότι είναι συλλογική, της μαθηματικής μας κοινότητας, επειδή έχει ατονίσει η γεωμετρική σκέψη μας. Απλά, τώρα έτυχε να έλθει στην επιφάνεια, ως θέμα εξετάσεων. Η ισορροπία θα επανέλθει όταν εντάξουμε τέτοια θέματα στη διδασκαλία μας. Τέτοια παραδείγματα υπάρχουν κι άλλα και μάλιστα πρόσφατα. Το 2017 ζητήθηκε στη θεωρία η αιτιολόγηση ερωτήσεως σωστού λάθους με χρήση αντιπαραδείγματος. Η αποτυχία των μαθητών ήταν μεγάλη. Την επόμενη χρονιά που τέθηκε ξανά τέτοιο θέμα, το ποσοστό επιτυχίας

[10] Βλέπε: `http://www.hms.gr/?q=node/1676`

[11] Βλέπε [8], *σ.* 159.

[12] Περισσότερα για αυτό το θέμα στο [9]. Ενδιαφέρον έχει και η διαδικτυακή συζήτηση στον ιστότοπο mathematica.gr με τίτλο: «Συγχαρητήρια στην Επιτροπή Θεμάτων; Φυσικά!». https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=107&t=59233

των μαθητών υπερδιπλασιάστηκε, αφού η διδασκαλία μας εστιάστηκε περισσότερο σε τέτοια θέματα.[12]

1.8 Συμπεράσματα και μια πρόταση για το θέμα Γ του 2020, «παλαιού τύπου».

Όπως φάνηκε από την εμπειρία των βαθμολογικών κέντρων, το όλο ζήτημα δεν επηρέασε τη βαθμολογία των μαθητών. Ορθώς δεν αφαιρέθηκαν μονάδες από τους μαθητές που, όπως ήταν αναμενόμενο, δεν διερεύνησαν τις άλλες περιπτώσεις. Κανείς δεν θα τολμούσε να ζητήσει από τους μαθητές να ανακαλύψουν την ελλιπή διερεύνηση, που έμενε στην αφάνεια από τη μαθηματική κοινότητα για δεκαετίες!

Προφανώς δεν ζητούσαν οι θεματοδότες τη διερεύνηση των περιπτώσεων αυτών, από τους μαθητές, δίχως να δίνεται σχετική υπόδειξη. Στο συγκεκριμένο θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων, αντί η ύπαρξη του διαστήματος $(0,\ \pi)$ στην άσκηση του σχολικού βιβλίου να γίνει αντικείμενο προβληματισμού και σχετικού ελέγχου από την επιτροπή θεματοδοτών, αξιοποιήθηκε με «ασκησιολογικά» κριτήρια ώστε να δημιουργηθεί και προστεθεί το τελευταίο «υπαρξιακό» ερώτημα.

Αστοχίες αυτού του είδους έχουν γίνει επανειλημμένα στην επιλογή των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων καθώς και λάθη που εντοπίστηκαν την τελευταία στιγμή (ή δεν εντοπίστηκαν καθόλου, όπως στο περιβόητο 4ο θέμα το 2003). Όλα αυτά βέβαια δεν είναι άσχετα με τον εντελώς απηρχαιωμένο και άκρως πιεστικό και αγχωτικό τρόπο λειτουργίας της επιτροπής των θεματοδοτών, τη νύχτα που προηγείται της εξέτασης του μαθήματος.[13]

Όμως, επειδή η θεματογραφία των Πανελλαδικών επηρεάζει (ή μάλλον καθορίζει) για τις επόμενες, τουλάχιστον, χρονιές τη διδασκαλία στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, θα πρέπει να διδασκόμαστε από τα λάθη μας και να τα διορθώνουμε διαρκώς. *Το χειρότερο* που θα μπορούσε να συμβεί *θα ήταν η αποδοχή της ελλιπούς διαπραγμάτευσης του θέματος* ως κανόνα και η διδασκαλία της «επίσημης» λύσης της ΚΕΕ, ως αρκετή, αφού έδωσε όλες τις μονάδες στους υποψηφίους! Οφείλουμε ως εκπαιδευτικοί να διατυπώσουμε με πληρότητα το θέμα. Όταν, λοιπόν, τις επόμενες χρονιές το παραπάνω θέμα θα ενταχθεί στο υλικό προετοιμασίας των μελλοντικών υποψηφίων, ας αφιερώσουμε λίγο χρόνο συζητώντας με τους μαθητές τη διερεύνηση των περιπτώσεων και ας αποδείξουμε τα φαινομενικά «προφανή».

Στην ενίσχυση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών θα συνέβαλε μια μορφή διατύπωσης των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων με ερωτήματα που απαιτούν γεωμετρικές γνώσεις και ικανότητα γεωμετρικών συλλογισμών. *Η σταθερή εμφάνιση ενός τέτοιου θέματος κάθε χρόνο μπορεί να συμβάλει πολύ πιο αποτελεσματικά στη αναβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, από ότι η ένταξή της στα εξεταζόμενα μαθήματα.* Π.χ. στο συγκεκριμένο θέμα, θα προτείναμε την εξής διατύπωση, (δίχως σχήμα):

> Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και M το μέσο της ΒΓ, τότε:
>
> **Γ1.** Να αποδείξετε ότι
> i. αν $\theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τα Α, Ο, Μ είναι συνευθειακά και $\widehat{\mathrm{BOM}} = \theta$.
> ii. αν $\theta = \frac{\pi}{2}$ τα Ο, Μ ταυτίζονται.
> iii. αν $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ τα Α, Μ, Ο είναι συνευθειακά και $\widehat{\mathrm{BOM}} = \pi - \theta$.
>
> Μονάδες (3×2) 6
>
> **Γ2.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:
>
> $$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\,\eta\mu\theta, \quad \theta \in (0,\ \pi).$$
>
> Μονάδες 6
>
> **Γ3.** Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0,\ \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.
>
> Μονάδες 8
>
> **Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες $\theta_1,\ \theta_2$, με $\theta_1 < \theta_2$ για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.
>
> Μονάδες 5

Η διατύπωση των θεμάτων των εξετάσεων σε μια τέτοια μορφή, οδηγεί στην ανάγκη αναζήτησης ιδεών για τη διαμόρφωση θεμάτων στην Άλγεβρα και Ανάλυση με ερωτήματα που να έχουν πλούσιο γεωμετρικό υπόβαθρο, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.[14] Πολλές ιδέες αυτού του είδους μπορούν να βρεθούν στην παραδοσιακή, πολύ πλούσια βιβλιογραφία των προβλημάτων μεγίστων και ελαχίστων. Στο δεύτερο μέρος του κειμένου επιχειρούμε μια ιστορική καταγραφή μερικών εμφανίσεων του συγκεκριμένου θέματος στην ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία.

[13] Δείτε σχετικά στο [10], *σσ.* 12-16, όπου περιγράφεται αναλυτικά η λειτουργία των επιτροπών εξετάσεων.

[14] Μια σχετική πρόταση έχει διατυπωθεί στο [11]. Βεβαίως, είναι ηθικό και δίκαιο, οι όποιες αλλαγές να μην αιφνιδιάζουν τους υποψηφίους. Τα θέματα των εξετάσεων πρέπει να ακολουθούν και να συντονίζονται με το περιεχόμενο και το ύφος της διδασκαλίας μας, αντί του αντιθέτου, που κατά κανόνα συμβαίνει σήμερα. Άρα, θα πρέπει οι μαθητές να έχουν προετοιμαστεί για το ύφος και το περιεχόμενο των θεμάτων.

2 Μέρος δεύτερο

2.1 Ιστορίες από τα παλιά

Το πρόβλημα αυτό το εντοπίζουμε στη βιβλιογραφία από πολύ παλιά. Ο ινδός μαθηματικός *Ramchundra* το 1850 το αντιμετωπίζει με τη μέθοδο της Διακρίνουσας, μετασχηματίζοντας τη συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου σε δευτεροβάθμια, με μια ιδιαίτερη τεχνική που, όπως φαίνεται από τη βιβλιογραφία, δεν διαδόθηκε ευρέως.[15]

Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει σε βιβλίο προετοιμασίας των υποψηφίων για τις εξετάσεις Baccalauréat των Γαλλικών πανεπιστημίων στις αρχές του 20ου αιώνα.[16]

953. De tous les triangles isocèles inscrits dans un cercle de rayon donné R, quel est celui dont la surface est maximum?

Στην *ελληνική βιβλιογραφία*, που έχει επηρεαστεί σε μεγάλο βαθμό, από την αντίστοιχη γαλλική βιβλιογραφία και τη θεματοδοσία των εξετάσεων Baccalauréat, το συναντάμε π.χ. στη διάρκεια του μεσοπολέμου στα βιβλία των Π. Τόγκα και Γ . Παπανικολάου, που ασχολούνται σε βάθος με τη μελέτη μεγίστων-ελαχίστων με αλγεβρικές μεθόδους. [17]

84) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος ρ.

Όπως είναι γνωστό, το πρωτοποριακό αυτό βιβλίο του Π. Τόγκα ενσωματώθηκε σχεδόν αυτούσιο στο μεταγενέστερο έργο του συγγραφέα, την Άλγεβρα και Συμπλήρωμα Άλγεβρας (βλ. [17]), που γνώρισε δεκάδες επανεκδόσεις σχεδόν για 40 χρόνια, έως τις αρχές της δεκαετίας του ΄80. Οι προτεινόμενες ασκήσεις συνοδεύονται από ξεχωριστούς τόμους με λύσεις.[18]

Και στα δύο συγγράμματα παρατηρούμε ότι αντιμετωπίζεται μόνον η περίπτωση του οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ, στο οποίο το κέντρο του κύκλου είναι εσωτερικό του τριγώνου. Ότι ακριβώς συνέβη και στο θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων, καθώς και στην αντίστοιχη άσκηση του σχολικού βιβλίου!

Λύσις 2α. Ἐὰν θέσωμεν ΒΕ=x καὶ ΟΕ=y, θὰ ἔχωμεν ΑΕ=y+R καὶ

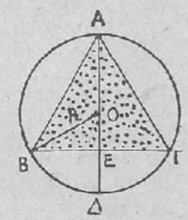
E=x(y+R) (1), $x^2+y^2=R^2$ (2).

Τὸ μέγιστον τοῦ Ε συμβαίνει συγχρόνως μὲ τὸ μέγιστον τοῦ τετραγώνου του. Ἀλλὰ $E^2=x^2(y+R)^2$ ἤ, λόγῳ τῆς (2),

$E^2=(R^2-y^2)(y+R)^2$ ἤ

$E^2=(R+y)(R-y)(R+y)^2$ ἤ

$E^2=(R-y)(R+y)^3$ (3).



Σχ. 18.

Π. Τόγκας, [14], σ. 43

307. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ.

Ἔστω ΑΒΓ ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος ΟΑ=ρ. Ἂν ΒΔ=x καὶ ΔΟ=y, τότε ΔΑ=y+ρ.

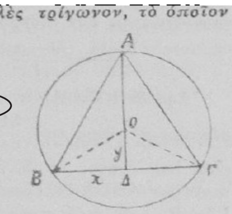
Ἔχομεν λοιπὸν Ε=x(ρ+y) καὶ $x^2+y^2=\rho^2$.

Ἡ δευτέρα γράφεται $x^2=(\rho+y)(\rho-y)$ ἡ δὲ α΄ ὑψουμένη εἰς τὸ τετράγωνον δίδει

$x^2(\rho+y)^2=E^2$

Διαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις εὑρίσκομεν

$(\rho+y)^3(\rho-y)^1=E^2$ (6)



Γ. Παπανικολάου, [15], σ. 197

Επίσης, η πρώτη έκδοση του βιβλίου Μαθηματικών 2ης–4ης Δέσμης το 1993, περιείχε την ίδια άσκηση με την ίδια διατύπωση και την ίδια λύση με το βιβλίο Μαθηματικών της Γ΄ Γενικού Λυκείου (Β΄ μέρος) που χρησιμοποιείται σήμερα.[19] Μελετά, δηλαδή, μόνον την περίπτωση του οξυγωνίου τριγώνου, δίχως να διερευνώνται οι άλλες περιπτώσεις.

4. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ έχουμε: (ΒΜ) = 1 · ημθ και (ΟΜ) = 1 · συνθ.

Είναι όμως (ΒΓ) = 2(ΒΜ) = 2ημθ

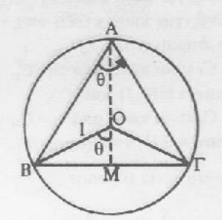
και (ΑΜ) = (ΟΑ) + (ΟΜ) = 1 + συνθ,

οπότε

$$E = E(\theta) = \frac{1}{2} 2ημθ\ (1 + συνθ) = ημθ\ (1 + συνθ).$$

Για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ ισχύει:

$$E'(\theta) = συνθ(1 + συνθ) - ημ^2θ = συν^2θ - ημ^2θ + συνθ = συν2θ + συνθ,$$ οπότε



Ανδρεαδάκης Σ. κ.α., [20], σ. 113

2.2 Δυο σωστές διατυπώσεις (1991 και 2020)

Το 1991, δύο χρόνια πριν την έκδοση του βιβλίου αυτού, δημοσιεύτηκε στον Ευκλείδη Γ΄ το πρόβλημα του μεγίστου

[15] Βλέπε [12], σσ. 137-139. Ο *Ramchundra* στο βιβλίο *A Treatise on Problems of Maxima and Minima solved by Algebra* αντιμετωπίζει αλγεβρικά 130 προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων, με, ομολογουμένως, εξαιρετικά πολύπλοκους μετασχηματισμούς. Η πρώτη έκδοση του 1850 στην Καλκούτα, ανατυπώθηκε στο Λονδίνο το 1859. Γράφτηκε ως απόδειξη της δύναμης των εργαλείων της Άλγεβρας έναντι αυτών του Διαφορικού Λογισμού. Ο συγγραφέας επέλεξε προβλήματα ακροτάτων που περιέχονται σε γνωστά συγγράμματα Διαφορικού Λογισμού της εποχής και τα αντιμετώπισε με αλγεβρικές τεχνικές.

[16] Βλέπε [13], σ. 340.

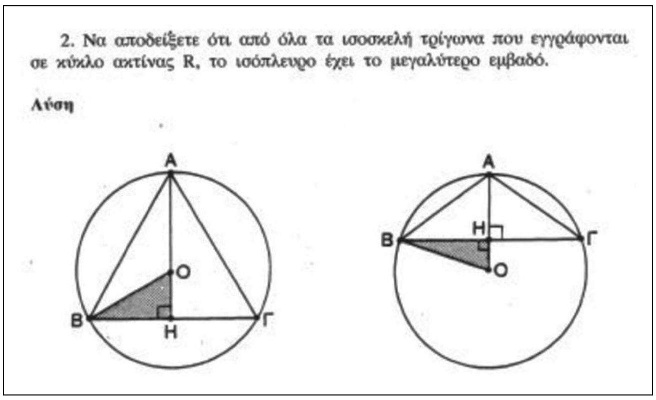
[17] Βλέπε [14], σ.43, θέμα 84 και [15], σ. 197, θέμα 307. Για περισσότερες πληροφορίες, δείτε στο [16].

[18] Τα προβλήματα «μεγίστων-ελαχίστων» περιέχονται στον 9ο τόμο των λύσεων. Το πρόβλημα αυτό είναι λυμένο στο [18], σσ.54-55, άσκηση 2908.

[19] Βλέπε [19], ς. 239 άσκηση 4, γενικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου, Γ΄ ομάδας και [20], σ. 113. Το εν χρήσει βιβλίο της Γ΄ Λυκείου (Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Β΄ μέρος) είναι σε μεγάλο βαθμό βασισμένο στο παλαιό βιβλίο 2ης, 4ης Δέσμης και περιέχει αυτούσιες πολλές ασκήσεις απ' αυτό.

[20] Βλέπε [21], σσ. 113-114.

ισοσκελούς τριγώνου που εγγράφεται σε κύκλο, σε μια εργασία που αναφέρεται στις εφαρμογές των παραγώγων. Εκεί, ο συγγραφέας διερευνά όλες τις περιπτώσεις σχετικά με τη θέση του κέντρου του κύκλου εντός ή εκτός του τριγώνου και αποφεύγει τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών.[20]

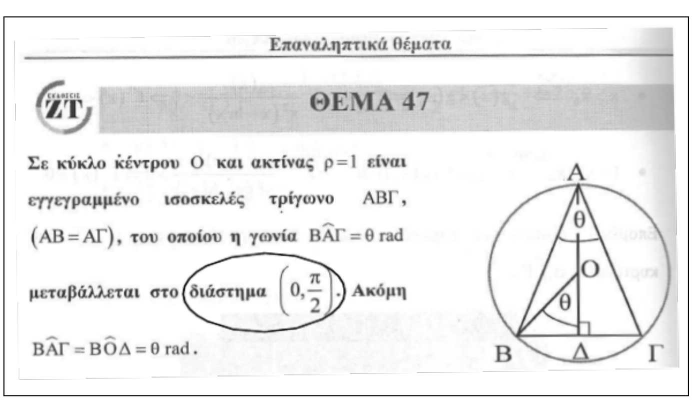

2. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα που εγγράφονται σε κύκλο ακτίνας R, το ισόπλευρο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Λύση

Κ. Μηλιαράκης, (περιοδικό Ευκλείδης Γ΄), [22], *σσ.* 113-114

Όπως φαίνεται, λοιπόν, η ελλιπής διερεύνηση των δυνατών περιπτώσεων έχει μακρόχρονη ιστορία και δεν διορθώθηκε για δεκαετίες, τουλάχιστον στα επίσημα σχολικά βιβλία. Η ειδοποιός διαφορά, όμως, είναι ότι στις εξετάσεις δόθηκε και το σχήμα στην εκφώνηση, καθώς και το ότι, από τη φύση τους, στα θέματα των εξετάσεων δίνουμε μεγαλύτερη βαρύτητα σε ένα λάθος παρά σε μία άσκηση του σχολικού βιβλίου.

Να επισημάνουμε εδώ ότι σε τουλάχιστον ένα βιβλίο, που μάλιστα εκδόθηκε λίγους μήνες πριν τις εξετάσεις, (άνοιξη του 2020), υπάρχει η ίδια διατύπωση, με σχήμα στην εκφώνηση και με σωστό το διάστημα της γωνίας θ, ώστε το σχήμα να είναι συμβατό με την εκφώνηση.[21]


Επαναληπτικά θέματα

ΘΕΜΑ 47

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $\rho=1$ είναι εγγεγραμμένο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, (ΑΒ = ΑΓ), του οποίου η γωνία $B\widehat{A}\Gamma=\theta$ rad μεταβάλλεται στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Ακόμη $B\widehat{A}\Gamma = B\widehat{O}\Delta=\theta$ rad.

Κ. Τηλέγραφος, Π. Παντούλας, Θ. Ντρίζος, [22], *σ.* 266

3 Μέρος τρίτο

3.1 Γενική περίπτωση

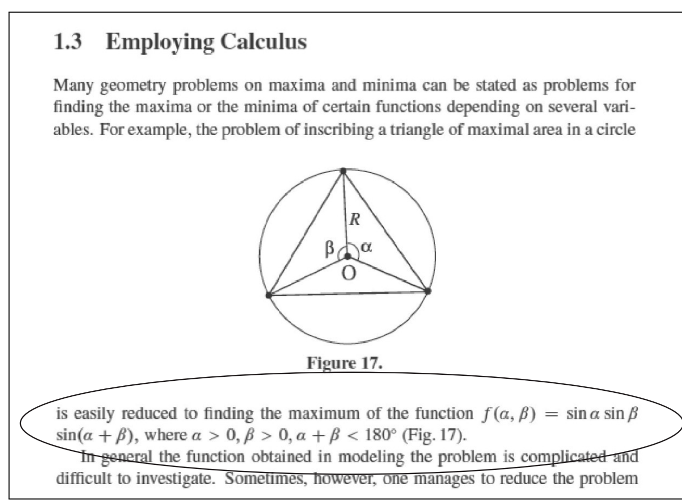
Το πρόβλημα της εύρεσης του ισοσκελούς τριγώνου, εγγεγραμμένου σε κύκλο, που να έχει το μέγιστο εμβαδόν είναι μια ειδική περίπτωση του επόμενου προβλήματος.

> Να βρεθεί το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο σταθερής ακτίνας.

Στο πρόβλημα αυτό εμπλέκονται δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, οπότε η επίλυσή του ξεπερνά τις δυνατότητες των «σχολικών» μαθηματικών, όπου μελετώνται συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Στο παράρτημα δίνουμε δύο λύσεις στο πρόβλημα αυτό, με τη χρήση ανισότητας Jensen[22] και με μελέτη ακροτάτου συνάρτησης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών.

3.2 Διεθνείς αβλεψίες;

Τη συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών προκρίνουν οι T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov στο [23], *σ.* 27. Εκεί περιγράφουν το πρόβλημα του μεγίστου τριγώνου που εγγράφεται σε κύκλο ως παράδειγμα που αξιοποιεί τα θεωρήματα ακροτάτων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.


1.3 Employing Calculus

Many geometry problems on maxima and minima can be stated as problems for finding the maxima or the minima of certain functions depending on several variables. For example, the problem of inscribing a triangle of maximal area in a circle

Figure 17.

is easily reduced to finding the maximum of the function $f(\alpha,\beta) = \sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$, where $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta<180°$ (Fig. 17).

In general the function obtained in modeling the problem is complicated and difficult to investigate. Sometimes, however, one manages to reduce the problem

T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov, [23], *σ.* 27

Όμως, ο τύπος που δίνουν δεν είναι σωστός. Αναφέρουν ότι απαιτείται η εύρεση του μέγιστου της συνάρτησης

$$f(\alpha,\beta) = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\eta\mu(\alpha+\beta),$$

όπου $\alpha>0,\ \ \beta>0,\ \ \alpha+\beta<180°$.

Στο σχήμα (Fig. 17), που περιγράφει την περίπτωση, το κέντρο του κύκλου φαίνεται να είναι εσωτερικό του τριγώνου. Όμως, τότε θα ήταν $\alpha+\beta>180°$.

[21] Βλέπε [22], *σ.* 266.

[22] Η μέθοδος αυτή θα μπορούσε να δοθεί ως εφαρμογή της ανισότητας Jensen σε επιλεγμένες ομάδες μαθητών, που ασχολούνται π.χ. με διαγωνιστικά μαθηματικά. Δεν έχουμε εντοπίσει κάπου στη βιβλιογραφία λύση του προβλήματος με αυτή τη μέθοδο, δίχως, ασφαλώς, να αποκλείεται η περίπτωση να υπάρχει σχετική δημοσίευση.

Επίσης, στον ίδιο τύπο, ακόμα κι αν παραβλέψουμε τον περιορισμό $\alpha + \beta < 180°$ και θέσουμε $\alpha = \beta = 120°$, δηλαδή τις τιμές που δίνουν το μέγιστο εμβαδό, θα πάρουμε αρνητικό αποτέλεσμα.

Στο παράρτημα, έχει υπολογιστεί ο τύπος που δίνει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ:

$$f(\alpha,\ \beta) = \frac{R^2}{2}\left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta - \eta\mu\left(\alpha + \beta\right)\right),\ \alpha, \beta \in (0,\ \pi)$$

Αν μετασχηματίσουμε το μεταβλητό τμήμα του τύπου αυτού, έχουμε

$$\eta\mu\alpha\ +\ \eta\mu\beta\ -\ \eta\mu\ (\alpha\ +\ \beta)\ =$$

$$2\eta\mu\,\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$4\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Για τις τιμές $\alpha = \beta = 120°$, έχουμε

$$(\mathrm{AB\Gamma})_{\max} = \frac{R^2}{2}\cdot 4(\eta\mu 120°)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

3.3 Από τη σκοπιά των Γεωμετρών

Ο Νίκος Κισκύρας στον 5ο τόμο της Επιπεδομετρίας του περιλαμβάνει στις προτεινόμενες ασκήσεις το γενικευμένο πρόβλημα:[23]

1.340. Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τρίγωνον.

Δεν γνωρίζουμε ποια λύση πρότεινε ο συγγραφέας, αλλά αποκλείουμε την περίπτωση να χρησιμοποίησε παραγώγους ή ανισότητες. Πιθανόν είχε κάποια λύση με γεωμετρικά εργαλεία όπως των Ιησουιτών. Οι Ιησουίτες στη Γεωμετρία τους αντιμετωπίζουν γεωμετρικά το πρόβλημα, με τη μέθοδο του «προς στιγμήν σταθερού μεγέθους».[24] Στο ίδιο βιβλίο, οι Ιησουίτες δίνουν ακόμα μια γεωμετρική λύση με χρήση του λήμματος:

> Από όλα τα παραλληλόγραμμα που είναι εγγεγραμμένα σε τρίγωνο, μέγιστο είναι αυτό που έχει τις τρεις κορυφές του στα μέσα των πλευρών του τριγώνου[25]

Το πρόβλημα αυτό περιέχεται και στην Άλγεβρα του Π. Τόγκα.

2926. *Εἰς κύκλον ἀκτῖνος* R *νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τρίγωνον.*

Το αντιμετωπίζει με την ίδια μέθοδο (του «προς στιγμήν σταθερού μεγέθους»).[26]

Εκεί, υποθέτοντας ότι η μία πλευρά του τριγώνου είναι σταθερή, συμπεραίνει ότι μέγιστο εμβαδόν έχει το τρίγωνο με μέγιστο αντίστοιχο ύψος, δηλαδή το ισοσκελές με βάση τη σταθερή πλευρά. Κατόπιν επαναλαμβάνει τη 2η λύση της άσκησης 2908[27] και καταλήγει στο ότι το τρίγωνο με το μέγιστο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο είναι το ισόπλευρο.

Την τεχνική του «προς στιγμήν σταθερού μεγέθους», είχε χρησιμοποιήσει πολύ παλαιότερα, το 1850, ο Ramchundra αντιμετωπίζοντας το ίδιο πρόβλημα. Στη λύση του εμπλέκει ως μεταβλητές τις πλευρές a, b, c του τυχαίου τριγώνου, τα μέτρα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\widehat{B}\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \widehat{C}$, τον Νόμο των Ημιτόνων, τη μετρική σχέση

$$bc = 2R\cdot AD$$

(AD ύψος στη BC), τον τύπου εμβαδού τριγώνου συναρτήσει ακτίνας περιγεγραμμένου κύκλου, τριγωνομετρικές ταυτότητες και τη μέθοδο της Διακρίνουσας, θεωρώντας «προς στιγμήν» τη μια γωνία σταθερή! [28]

Στο βιβλίο του ο Ramchundra ξεκινά τον πρόλογό του γράφοντας:

> For the last four or five years I was desirous of solving almost all problems of Maxima and Minima by the principles of Algebra, and not by those of the Differential Calculus.
> (Τα τελευταία τέσσερα ή πέντε χρόνια ήθελα να λύσω σχεδόν όλα τα προβλήματα των Μεγίστων και Ελαχίστων με τις αρχές της Αλγεβρας, και όχι με εκείνες του Διαφορικού Λογισμού).

Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε ότι το όλο εγχείρημα είναι προσπάθεια να αποδείξει ότι τα εργαλεία της Άλγεβρας, της κλασικής Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας είναι ικανά να αντιμετωπίσουν τέτοια προβλήματα, σε μια εποχή, που διαδίδεται και επεκτείνεται ταχύτατα ο Διαφορικός Λογισμός, τουλάχιστον σε ακαδημαϊκό επίπεδο. Για πολλά χρόνια ακόμα σε όλη την Ευρώπη η διαμάχη αυτή θα συνεχίζεται. Στην ελληνική μαθηματική εκπαίδευση μόλις τη δεκαετία του 1980 θα επικρατήσει πλήρως η χρήση των εργαλείων του Διαφορικού Λογισμού σε προβλήματα ακροτάτων. Η εξέλιξη των επόμενων δεκαετιών δικαίωσε, βεβαίως, τους «αναλύστες» σ' αυτόν τον τομέα, έναντι των «αλγεβριστών».

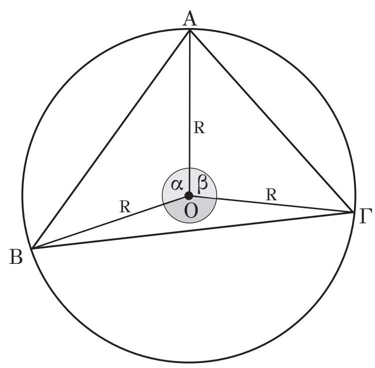
[23] Βλέπε [24], σ. 363.
[24] Βλέπε [25], προβλ;με 354, σ. 188.
[25] Βλέπε [25], προβλ;μες 360, 364, σ. 191.
[26] Βλέπε [18], σσ. 68-69. Πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι δεν έχουμε εντοπίσει στην παλαιότερη ή στη σύγχρονη βιβλιογραφία την τεκμηρίωση της μεθόδου αυτής, αλλά, επίσης ούτε αντιπαραδείγματα που να την καταρρίπτουν. Δείτε σχετικά και στο [26], σσ. 28-29.
[27] Βλέπε [18], σσ.54-55.
[28] Βλέπε [12], σσ. 166-168.

4 Παράρτημα

Να βρεθεί το τριγώνο με το μέγιστο εμβαδόν, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο σταθερής ακτίνας.

ΛΥΣΗ:
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Έστω $\widehat{\text{ΑΟΒ}} = \alpha$, $\widehat{\text{ΑΟΓ}} = \beta$. Οι γωνίες α, β είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ισχύει $0 < \alpha,\ \beta < \pi$.

• Αν $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$, τότε το Ο είναι εσωτερικό του τριγώνου, αφού το τόξο είναι μη κυρτό, άρα η προέκταση της ΒΟ τέμνει τη χορδή ΑΓ.



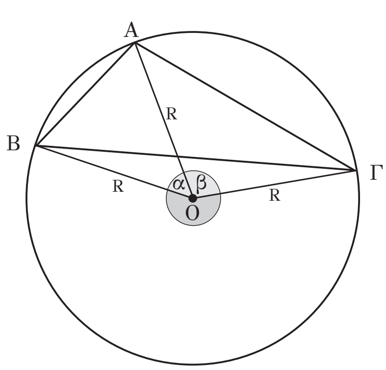
Τότε:

$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΑΟΓ}) + (\text{ΒΟΓ}) =$$

$$\frac{R^2}{2}\left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\left(2\pi - \alpha - \beta\right)\right) =$$

$$\frac{R^2}{2}\left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta - \eta\mu\left(\alpha + \beta\right)\right)$$

• Αν $0 < \alpha + \beta < \pi$, τότε το Ο είναι εξωτερικό του τριγώνου, αφού το τόξο είναι κυρτό, άρα η προέκταση της ΒΟ δεν τέμνει τη χορδή ΑΓ.

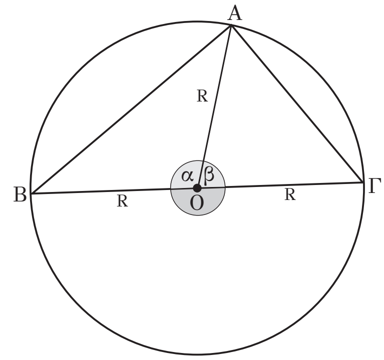


Τότε:

$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΑΟΓ}) - (\text{ΒΟΓ}) =$$

$$\frac{R^2}{2}\left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta - \eta\mu\left(\alpha + \beta\right)\right)$$

• Αν $\pi = \alpha + \beta$, τότε το Ο είναι σημείο της διαμέτρου ΒΓ.



Τότε:

$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΑΟΓ}) = \frac{R^2}{2}\left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta\right).$$

Σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τη συνάρτηση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών α, β, με τύπο:

$$f\left(\alpha,\ \beta\right) = \frac{R^2}{2}\left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta - \eta\mu\left(\alpha + \beta\right)\right), \alpha, \beta \in \left(0,\ \pi\right)$$

Εύρεση μεγίστου με χρήση ανισότητας Jensen.

• Αν $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$, τότε $0 < 2\pi - \alpha - \beta < \pi$ και $-\eta\mu\left(\alpha + \beta\right) = \eta\mu\left(2\pi - \alpha - \beta\right)$. Η συνάρτηση

$$f\left(x\right) = \eta\mu x,\ \ x \in \left(0,\ \pi,\right)$$

είναι κοίλη, άρα από την ανισότητα Jensen ισχύει

$$\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\left(2\pi - \alpha - \beta\right)}{3} \leq$$

$$\eta\mu\left(\frac{\alpha + \beta + 2\pi - \alpha - \beta}{3}\right) = \eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα (ΑΒΓ) $\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2$ με το «ίσον» όταν:

$$\alpha = \beta = 2\pi - \alpha - \beta\ \ \Leftrightarrow \alpha = \beta = \frac{2\pi}{3},$$

οπότε το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

• Αν $0 < \alpha + \beta \leqslant \pi$, τότε επειδή $2\pi - \alpha - \beta \notin \left(0,\ \pi\right)$, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η ανισότητα Jensen. Όμως, είναι:

$$(\text{ΑΒΓ}) \leq (\text{ΑΟΒ}) + (\text{ΑΟΓ}) = \frac{R^2}{2}\left(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta\right) \leq \frac{R^2}{2} \cdot 2 = R^2$$

Άρα για κάθε α, $\beta \in (0, \pi)$, η μέγιστη τιμή του (ΑΒΓ) είναι $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

Εύρεση μεγίστου με μελέτη ακροτάτου συνάρτησης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών.

Ζητάμε τα ακρότατα της συνάρτησης f με

$$f(\alpha,\beta)=\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta-\eta\mu(\alpha+\beta)$$

όπου $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ με $0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi$.
Απαντηση:
Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης f ως προς α και β

$$f_a=\frac{\partial f}{\partial\alpha}=\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$f_\beta=\frac{\partial f}{\partial\beta}=\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta),$$

Είναι

$$\left\{\begin{array}{l} f_\alpha=0\\ \\ f_\beta=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0\\ \sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0\\ 0<\alpha,\beta<\pi\end{array}\right\}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta\\ 0<\alpha,\ \beta<\pi\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=\beta\\ 0<\alpha,\ \beta<\pi\end{array}\right\}$$

Οπότε

$$f_\alpha=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu2\alpha\\ 0<\alpha<\pi\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}2\alpha=\alpha\\ \quad\text{ή}\\ 2\alpha=2\pi-\alpha\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=0,\ \ (\text{απορρίπτεται})\\ \quad\text{ή}\\ \alpha=\frac{2\pi}{3}\end{array}\right\}$$

Τότε και $\beta=\frac{2\pi}{3}$ και $f_\beta=0$. Επομένως το σημείο $(\alpha,\beta)=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$, είναι σημείο στασιμότητας.

Υπολογίζουμε τις

$$f_{\alpha\alpha}=\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}=-\eta\mu\alpha+\eta\mu(\alpha+\beta),$$

$$f_{\beta\beta}=\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}=-\eta\mu\beta+\eta\mu(\alpha+\beta)$$

$$f_{\beta\alpha}=\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha}=\eta\mu(\alpha+\beta)$$

και τις

$$f_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}=\eta\mu(\alpha+\beta),$$

Επειδή η ορίζουσα

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_{\alpha\alpha} & f_{\alpha\beta}\\ f_{\beta\alpha} & f_{\beta\beta}\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}-\eta\mu\alpha+\eta\mu(\alpha+\beta) & \eta\mu(\alpha+\beta)\\ \eta\mu(\alpha+\beta) & -\eta\mu\beta+\eta\mu(\alpha+\beta)\end{vmatrix}$$

για $\alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}$ ισούται με

$$\begin{vmatrix}-\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\eta\mu\frac{4\pi}{3} & \eta\mu\frac{4\pi}{3}\\ \eta\mu\frac{4\pi}{3} & -\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\eta\mu\frac{4\pi}{3}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}>0$$

και

$$f_{\alpha\alpha}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\eta\mu\frac{4\pi}{3}=-\sqrt{3}<0$$

συμπεραίνουμε ότι η f έχει στο σημείο $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ τοπικό μέγιστο, που είναι ίσο με:

$$f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Η προφανής συνεχής επέκταση $\widetilde{f}$ της f στο συμπαγές $K=[0,\pi]\times[0,\pi]$ θα παίρνει μέγιστη τιμή τουλάχιστον $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Η τιμη της $\widetilde{f}$ στο σύνορο του K δεν υπερβαίνει το 2 αφού η $\widetilde{f}$ γίνεται 0 όταν $\alpha=0$ ή $\beta=0$, $2\eta\mu\beta$ όταν $\alpha=\pi$ και $2\eta\mu\alpha$ όταν $\beta=\pi$. Επομένως η μέγιστη τιμή της $\widetilde{f}$ (που θα είναι και μέγιστη τιμή της f) επιτυγχάνεται στο εσωτερικό του K άρα στο $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$. Άρα

$$f_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Τότε, πράγματι, το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Ευχαριστιες

Ευχαριστώ τους φίλους Γιάννη Θωμαΐδη και Νίκο Μαυρογιάννη για τις παρατηρήσεις και συμπληρώσεις στο αρχικό κείμενο.

Παραπομπές

[1] Θωμαΐδης Γ., Πουλος Α., *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000. `https://ziti.gr/wp-content/uploads/2020/01/thomaidis-giannis-poylos-andreas-didaktiki-tis-eykleideias-geometrias.pdf`

[2] Καστανης Ν., *«Να φύγει ο Ευκλείδης» – «Δε θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες». Μια ιστορικο – διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία.* Μαθηματική Επιθεώρηση, έκδοση Ε.Μ.Ε., τ. 31, 1986, *σσ.* 3-18. `http://www.hms.gr/apothema/?s=sa&i=4652`

[3] Αγγελοπουλος Ε., *«Γεωμετρίας Εγκώμιον»*, Ομιλία σε Συνέδριο ΕΜΕ., Βιβλίο Καθηγητή, Ευκλείδια Γεωμετρία, 1η έκδοση ΟΕΔΒ, 2000, *σσ.* 149-158.

[4] Αργυρακης Δ, κ.α. *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, εκδ. Διόφαντος, 2019.

[5] Αργυροπουλος Η. κ.α., *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, τεύχος Α΄, εκδόσεις ΙΤΥΕ Διόφαντος, 2019
EC

[6] Παπαμιχαηλ Δ., Σκιαδας Α., *Θεωρητική Γεωμετρία Α΄Λυκείου*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1981
`http://e-library.iep.edu.gr/iep/collection/browse/item.html?tab=02&code=01-47967`

[7] Ανδρεαδακης Στ. κ.α, *Μαθηματικά, Β΄ μέρος, Γ΄ Γενικού Λυκείου*, ΙΤΥΕ Διόφαντος, Αθήνα 2019.

[8] Ανδρεαδακης Στ. κ.α, *Μαθηματικά, Β΄μέρος, Γ΄ Γενικού Λυκείου, Λύσεις των ασκήσεων*, ΙΤΥΕ Διόφαντος, Αθήνα 2019.

[9] Θωμαΐδης Γ, Μπαρουτης Δ., Σαραφης Γ., *Μια «ακτινογραφία» της νέας δομής του πρώτου θέματος στις Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών*, Πρακτικά 36ου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε. 2019, *σσ.* 279-289.

[10] Θωμαΐδης Γ., *Πανελλαδικές εξετάσεις Μαθηματικών: Επιλογή των θεμάτων, βαθμολόγηση των γραπτών και επιδόσεις των υποψηφίων την τελευταία τετραετία*, Θεσσαλονίκη, Μάιος 2020.
`https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=107&t=67181`

[11] Θωμαΐδης Γ., Ριζος Γ., *Αναζητώντας σημεία ισορροπίας ανάμεσα στις ασκήσεις των σχολικών βιβλίων, τα «προβλήματα» των Πανελλαδικών Εξετάσεων και τα θέματα «μαθηματικού αλφαβητισμού» του PISA*, 9η Ημερίδα Μαθηματικών, Ελληνογαλλική σχολή Καλαμαρί, Μάρτιος 2019, Θεσσαλονίκη,
http://www.kalamari.gr...

[12] Ramchundra, *A Treatise on Problems of Maxima and Minima solved by Algebra*, WM. H. Allenn & Co, London, 1859 (1η έκδοση 1850).
https://archive.org/...

[13] F.I.C. *Éléments d' algèbre avec de nombreux exercises* 1907.

[14] Τογκας Πετρος, *Μέγιστα και ελάχιστα αλγεβρικών παραστάσεων*, 1934.

[15] Παπανικολαου Γ. *Μαθήματα Αλγέβρας. Δια τους μαθητάς των Πρακτικών Λυκείων, τους υποψηφίους των Ανωτάτων Σχολών του Κράτους, τους φοιτητάς των Μαθηματικών, κ.λ.π.* 2α έκδοσις. Έκδοσις Ακαδημίας «Ο Πυθαγόρας». Εν Αθήναις, 1936.

[16] Θωμαΐδης, Γ., Ριζος, Γ., *Όψεις της Ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης στα χρόνια του Μεσοπολέμου: Επικίνδυνες ακροβασίες για τον εντοπισμό ακροτάτων στη στοιχειώδη Άλγεβρα.* Πρακτικά 10ης Μαθηματικής Εβδομάδας, Θεσσαλονίκη, 2018.
`https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?t=61855`

[17] Τογκας Πετρος, *Άλγεβρα και συμπλήρωμα Άλγεβρας*, τόμος β, 15η εκδ. χ.χ.

[18] Τογκας Πετρος, *Ασκήσεις και Προβλήματα Άλγεβρας*, τόμος Θ, 8η εκδ. χ.χ.

[19] Ανδρεαδακης Σ. κ.α., *Μαθηματικά Γ΄Λυκείου (2ης και 4ης Δέσμης)*, ΟΕΔΒ, 1η έκδοση 1993.

[20] Ανδρεαδακης Στ. κ.α., *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου (2ης και 4ης Δέσμης), Λύσεις των ασκήσεων*, ΟΕΔΒ, (1η έκδοση 1993).

[21] Μηλιαρακης Κ., *Εφαρμογές παραγώγων*, Ευκλείδης Γ΄ τ. 30-31, Νοέμβριος 1991, *σσ.* 113-114. `http://www.hms.gr/apothema/?s=sa&i=2612`

[22] Τηλεγραφος Κ., Παντουλας Π., Ντριζος Θ., *Επαναληπτικά θέματα Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου για εξετάσεις*, Εκδόσεις Ζανταρίδη-Τηλέγραφου, 2020.

[23] T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov, *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser, 2006.

[24] Κισκυρας Νικος, *Θεωρήματα και Προβλήματα Γεωμετρίας*, τόμος 5ος,Αθήνα 1978.

[25] F.G.M., *Exercices De Geometrie*, Maison A Mame et fils, 1912, Paris.

[26] Τσαπακιδης, Γ., *Ακρότατα με τη μέθοδο της προς στιγμή σταθεράς.* Ευκλείδης Β΄ τεύχος 26, *σσ.* 28-29 (1997).