ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. *(Μονάδες: 4)*

Α2. Πότε μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]; *(Μόν: 4)*

Α3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ, με $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ. *(Μονάδες: 7)*

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ):

1. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(a)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε αναγκαστικά θα είναι $f(\beta)>0$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

4. Η κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f δεν μπορεί να έχει κοινό σημείο με την C_f.

5. Αν μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ είναι κυρτή, τότε $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. *(Μονάδες: 10)*

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x-1, \text{αν } x<0 \\ x^2+1, \text{αν } x\geq 0\end{cases}$

Β1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. *(Μονάδες: 7)*

Β2) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με $g(x)=f^{-1}(x)$, με $x\geq 1$.

i) Να βρεθεί η συνάρτηση που εκφράζει την κατακόρυφη απόσταση AB μεταξύ των σημείων $A(x,f(x))$ και $B(x,g(x))$. *(Μονάδες: 7)*

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in[1,+\infty)$, τέτοιο ώστε η απόσταση να γίνεται ελάχιστη. *(Μονάδες: 10)*

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{-x^2}$.

Γ1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. *(Μονάδες: 4)*

Γ2) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. *(Μον: 4)*

Γ3) Να βρείτε το Σύνολο Τιμών της f. *(Μονάδες: 4)*

Γ4) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες: 4)

Γ5) Να αποδείξετε ότι $1-x^2 \le e^{-x^2} \le 1$ για κάθε $x \in R$. *(Μονάδες: 5)*

Γ6) Να αποδείξετε ότι $|f'(x)| \le \sqrt{\frac{2}{e}}$ για κάθε $x \in R$. *(Μονάδες: 4)*

ΘΕΜΑ Δ

Εστω συνάρτηση $f:[-1,1] \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και συνεχής στο $[-1,1]$, για την οποία ισχύει : $f^2(x)+x^2=4f(x)-3$

Δ1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση δεν έχει σημεία καμπής.

(Μονάδες: 3)

Δ2) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,1)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία με τετμημένες x_1, x_2 να είναι παράλληλες.

(Μονάδες: 3)

Δ3) Αν επιπλέον είναι $f(0)=3$, τότε:

ι) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2+\sqrt{1-x^2}$.

(Μονάδες 5)

Ιι) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(Μονάδες: 3)

Ιιι) Δίνεται το ορθογώνιο ΚΛΜΝ με $K(0,2), \Lambda(\alpha,2), M(\alpha, f(\alpha)), N(0, f(\alpha))$, με $0<\alpha<1$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του α. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ, έτσι ώστε το ορθογώνιο να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

(Μονάδες: 7)

iv) Ενα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=2+\sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le 1$ και τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία βρίσκεται στη θέση M του προηγούμενου ερωτήματος, η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 1 μονάδα ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

(Μονάδες: 4)