ΘΑΝΑΣΗΣ ΞΕΝΟΣ

Για μαθητές Β’ & Γ’ Λυκείου

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΧΩΡΙΣ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΧΩΡΙΣ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Πολλές συναρτήσεις μπορούν να παρασταθούν γραφικά, χωρίς τη χρήση της παραγώγου, εφαρμόζοντας ορισμένες βασικές ιδιότητες, όπως είναι η συμμετρία και η μετατόπιση.

Α - Ιδιότητες γραφικών παραστάσεων

Συγκεντρώνουμε όλες τις ιδιότητες που πρέπει να γνωρίζει ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου, σχετικά με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

1) Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y=f(x)$, δηλαδή:

$$M(\alpha,\beta)\in C_f \Leftrightarrow f(\alpha)=\beta$$

2) Μια καμπύλη C στο επίπεδο είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, αν και μόνο αν οποιαδήποτε κατακόρυφη ευθεία έχει με την C το πολύ ένα κοινό σημείο.

3) Οι καμπύλες $y=f(x)$ και $y=-f(x)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

4) Οι καμπύλες $y=f(x)$ και $y=f(-x)$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

5) Οι καμπύλες $y=f(x)$ και $y=-f(-x)$ είναι συμμετρικές ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

6) Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$

7) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

8) Η καμπύλη $y=|f(x)|$ αποτελείται:

i) Από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και

ii) Από τα συμμετρικά ως προς τον $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

9) Η καμπύλη $y=f(x)+c$ προκύπτει από την καμπύλη $y=f(x)$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|c|$ μονάδες :

- Προς τα πάνω αν $c>0$ • Προς τα κάτω αν $c<0$

10) Η καμπύλη $y=f(x-c)$ προκύπτει από την καμπύλη $y=f(x)$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $|c|$ μονάδες : • Προς τα δεξιά αν $c>0$ • Προς τα αριστερά αν $c<0$.

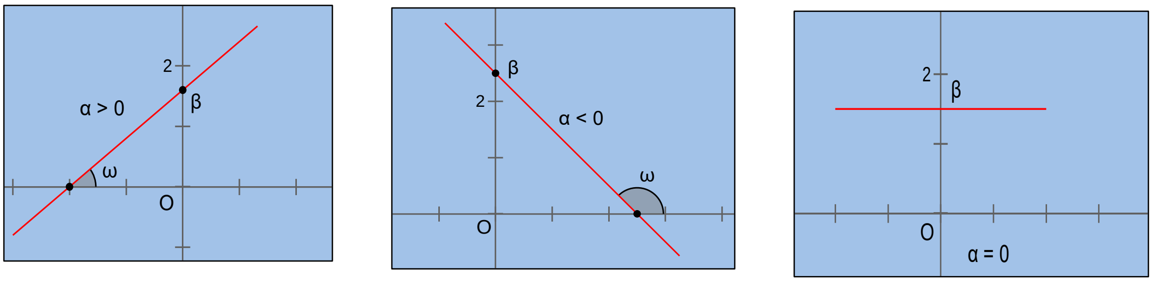
11) Η καμπύλη $y = f(x - c_1) + c_2$ με $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ προκύπτει από την καμπύλη $y = f(x)$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $|c_1|$ μονάδες και κατακόρυφη κατά $|c_2|$ μονάδες.

12) Η καμπύλη $y = f(\alpha x)$, $\alpha > 0$ προκύπτει από την καμπύλη $y = f(x)$,

- Με συστολή αν $\alpha > 1$
- Με διαστολή αν $0 < \alpha < 1$.

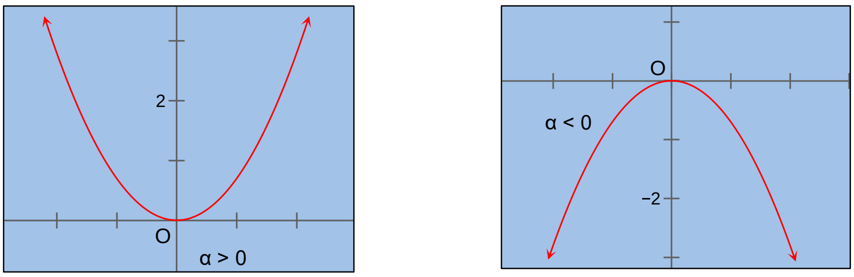
Β - Γνωστές γραφικές παραστάσεις

1) $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ευθεία)

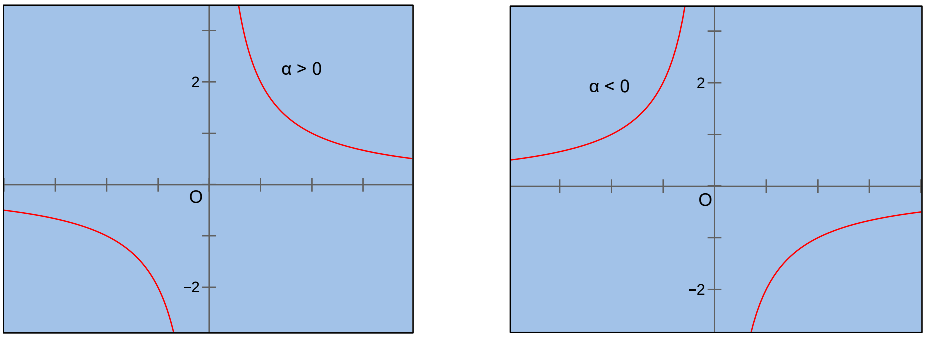


Ο αριθμός α είναι η κλίση της ευθείας, δηλαδή $\alpha = \varepsilon\varphi\omega$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$.

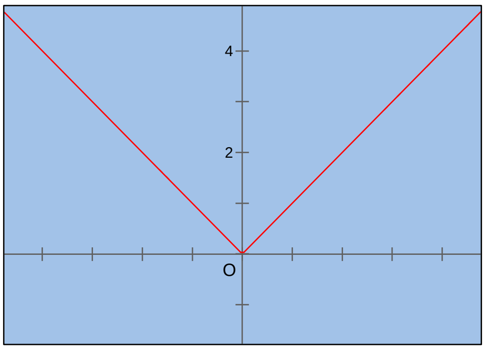
2) $y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$ (παραβολή)



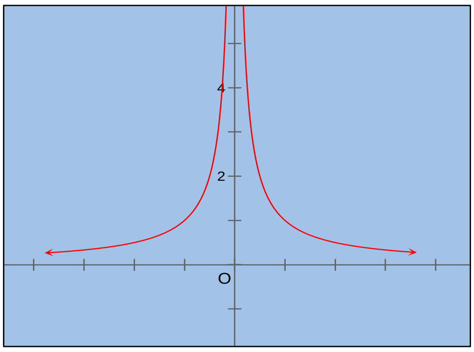
3) $y = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$ (υπερβολή)



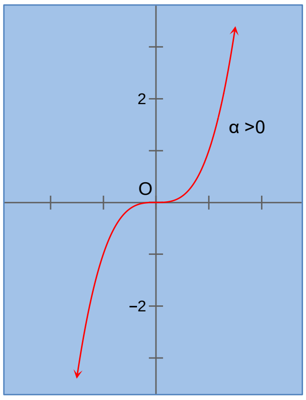
4) $y = |x|$

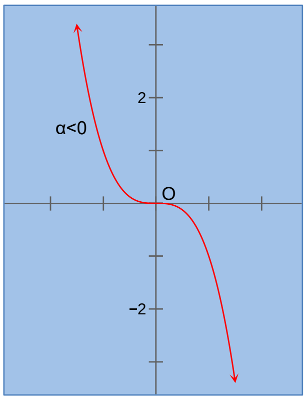


5) $y = \frac{1}{|x|},\ x \neq 0$

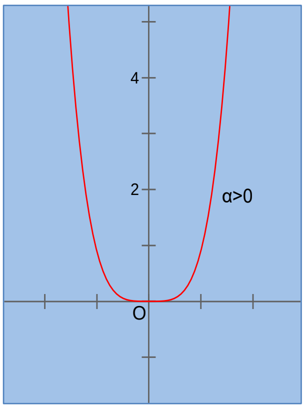


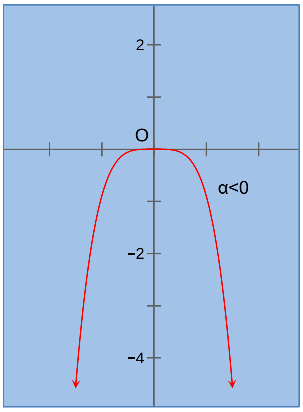
6) $y = \alpha x^3,\ \alpha \neq 0$



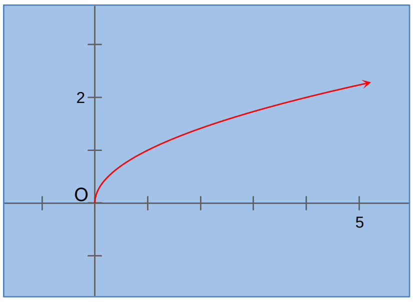


7) $y = \alpha x^4,\ \alpha \neq 0$

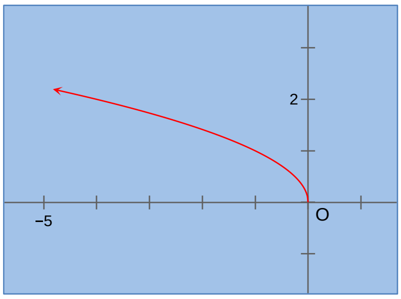




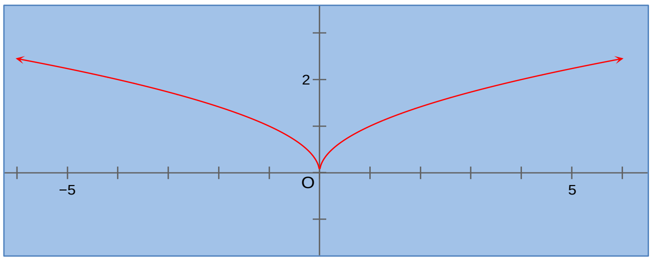
8) $y = \sqrt{x}$ (όμοια η $y = \sqrt{\alpha x}\ ,\alpha > 0$)



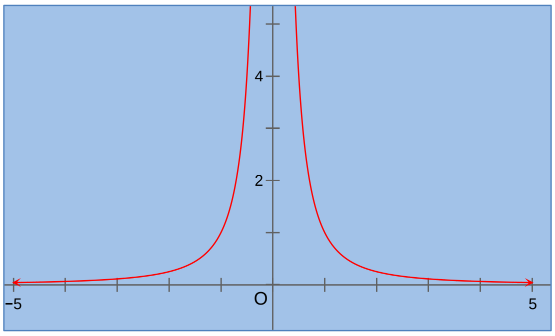
9) $y = \sqrt{-x}$ (Όμοια η $y = \sqrt{\alpha x}\ ,\alpha < 0$)



10) $y=\sqrt{|x|}$

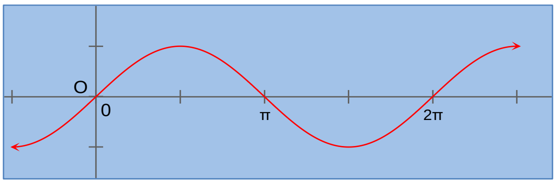


11) $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$ Ομοίως σχεδιάζεται η καμπύλη με εξίσωση: $y=\dfrac{\alpha}{x^2}$, $x\neq 0$

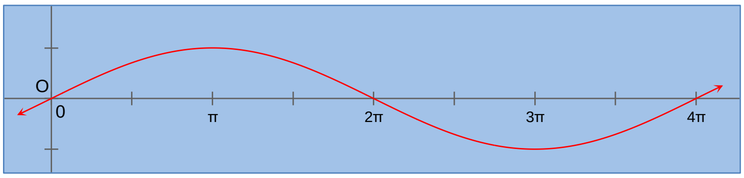


12) Οι συναρτήσεις :

- $y=\eta\mu x$, με περίοδο $T=2\pi$



- $y=\eta\mu(\omega x),\ \omega>0$ με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$. Για παράδειγμα: $y=\eta\mu\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ με $T=4\pi$



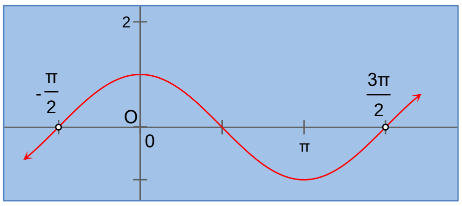
Ομοίως σχεδιάζονται οι καμπύλες :

- $y=\alpha\cdot\eta\mu(\omega x)\pm\kappa$, $\alpha>0$ με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ και ακρότατα: $y_{max}=\alpha\pm\kappa$, $y_{min}=-\alpha\pm\kappa$.

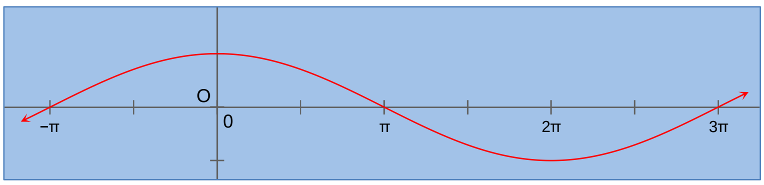
13) Οι συναρτήσεις:

- $y=\sigma\upsilon\nu x$, με περίοδο $T=2\pi$.

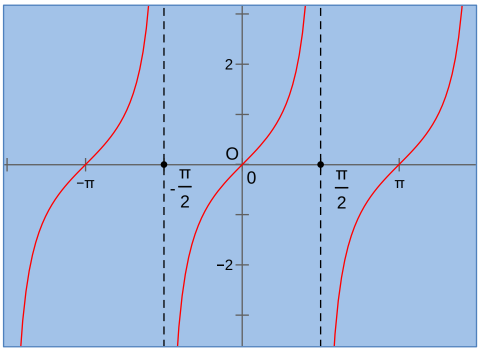
$$\left(\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$



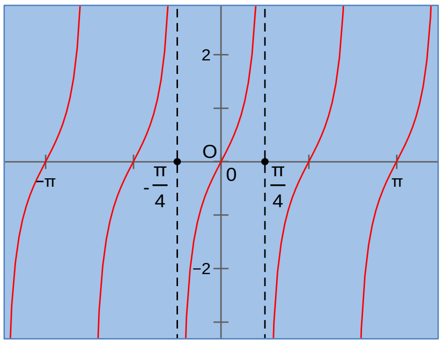
- $y=\sigma\upsilon\nu(\omega x),\ \omega>0$ με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ Για παράδειγμα: $y=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ με $T=4\pi$



14) • $y = \varepsilon\varphi x$, με περίοδο $T = \pi$ • $y = \varepsilon\varphi(\omega x)$, $\omega > 0$ με περίοδο $T = \dfrac{\pi}{\omega}$.

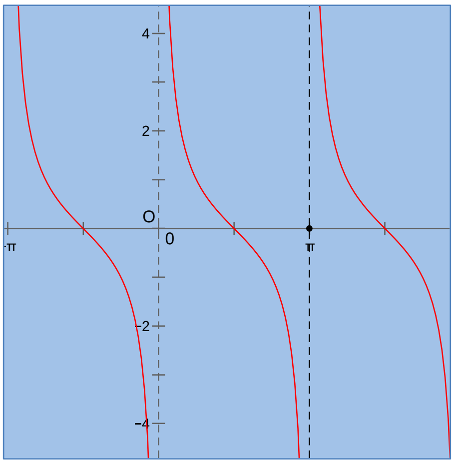


Για παράδειγμα: $y = \varepsilon\varphi(2x)$ με περίοδο $T = \dfrac{\pi}{2}$.

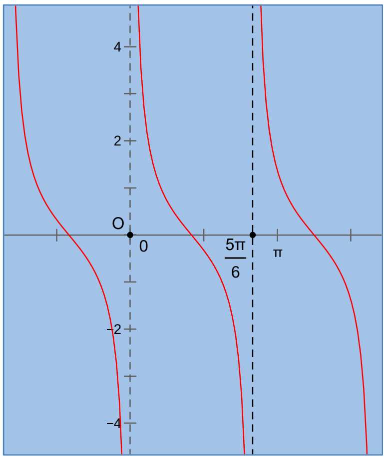


15) • $y = \sigma\varphi x = -\varepsilon\varphi\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ • $y = \sigma\varphi(\omega x)$, $\omega > 0$ με περίοδο $T = \dfrac{\pi}{\omega}$

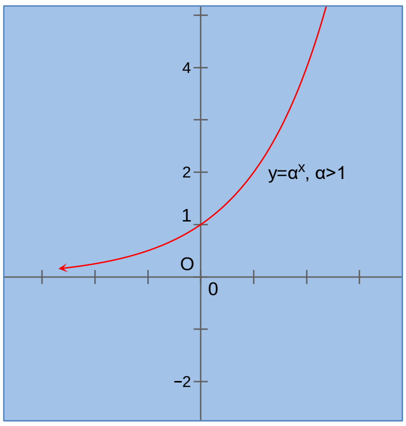
με περίοδο $T = \pi$

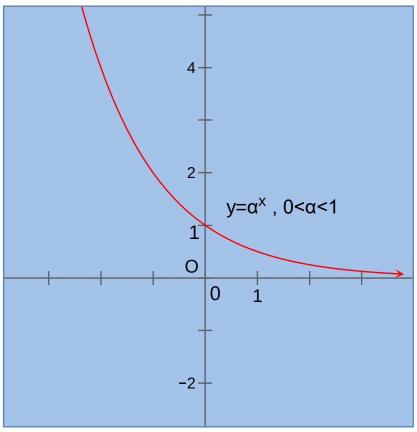


Για παράδειγμα: $y = \sigma\varphi\left(\dfrac{6}{5}x\right)$ με περίοδο $T = \dfrac{5\pi}{6}$.



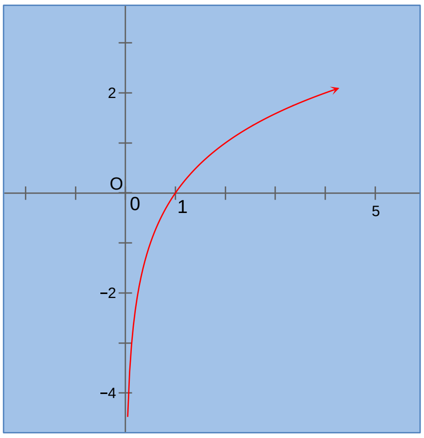
16) Η εκθετική συνάρτηση



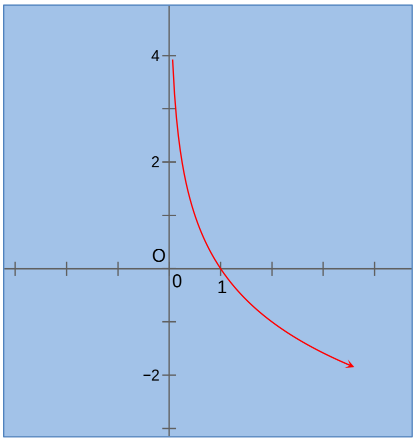


17) Η λογαριθμική συνάρτηση

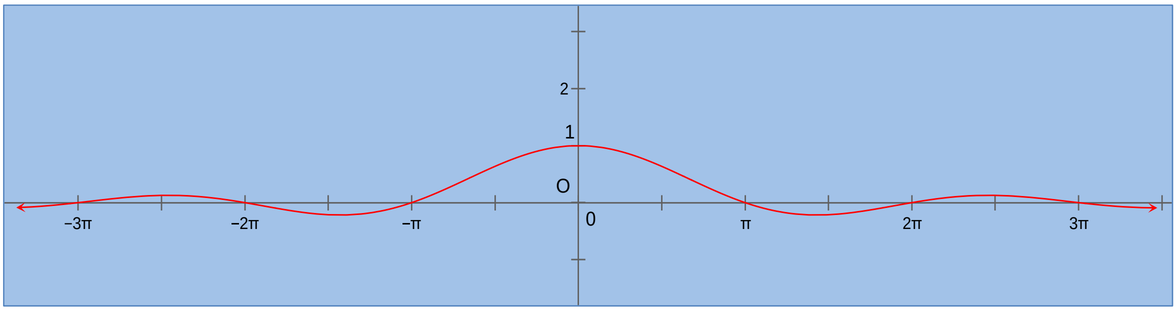
α) $y = \log_\alpha x,\ \alpha > 1$



β) $y = \log_\alpha x,\ 0 < \alpha < 1$



18) Η συνάρτηση $y = \dfrac{\eta\mu x}{x},\ x \neq 0$



Γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από γνωστές καμπύλες

1) Η παραβολή: $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$

Με την συμπλήρωση τετραγώνου έχουμε:

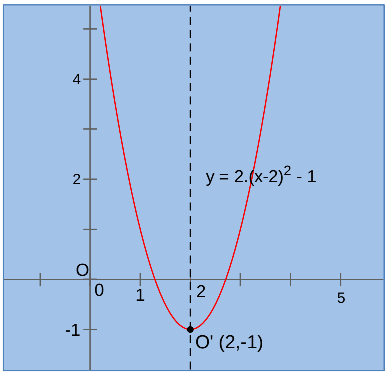
$$y=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x\right)+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha},\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma.$$

Η παραβολή αυτή προκύπτει από την $y=\alpha x^2$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|$ μονάδες και κατακόρυφη μετατόπιση κατά $\left|\frac{\Delta}{4\alpha}\right|$ μονάδες.

Σχόλιο: Η παραβολή αυτή έχει κορυφή το σημείο $O'\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ που είναι ίδιο με το $O'\left(-\frac{\beta}{2\alpha},f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $\varepsilon: x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Μπορούν να βρεθούν κι άλλα σημεία της παραβολής , εκτός της κορυφής, όπως τα σημεία τομής με τους άξονες (αν υπάρχουν).

Παράδειγμα: Η παραβολή $y=2x^2-8x+7=2(x-2)^2-1$, με κορυφή το σημείο $O'(2,-1)$.



2) Η υπερβολή: $y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, με $\gamma\neq 0$ και $\alpha\delta\neq\beta\gamma$.

Η εξίσωση αυτή, με διαίρεση πολυωνύμων, γράφεται: $y=\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta-\frac{\alpha\delta}{\gamma}}{\gamma\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)}=\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{x+\frac{\delta}{\gamma}}$,

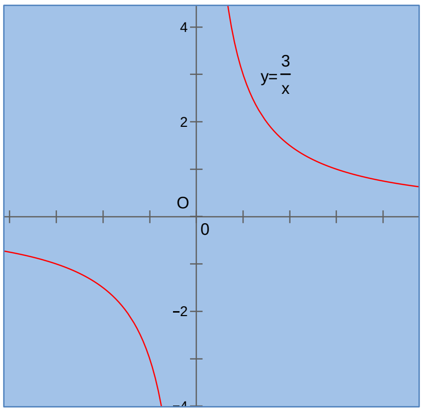
οπότε η καμπύλη αυτή προκύπτει από την υπερβολή $y=\dfrac{\kappa}{x}$, όπου $\kappa=\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}\neq 0$,

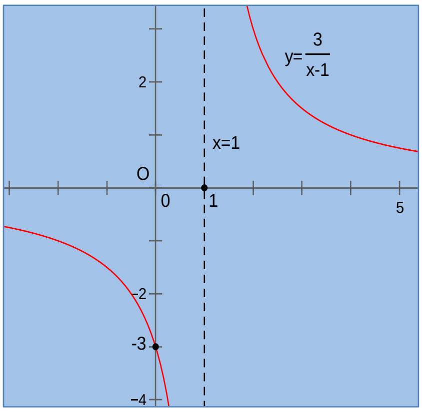
με οριζόντια μετατόπιση κατά $\left|\dfrac{\delta}{\gamma}\right|$ μονάδες και κατακόρυφη μετατόπιση κατά $\left|\dfrac{\alpha}{\gamma}\right|$ μονάδες.

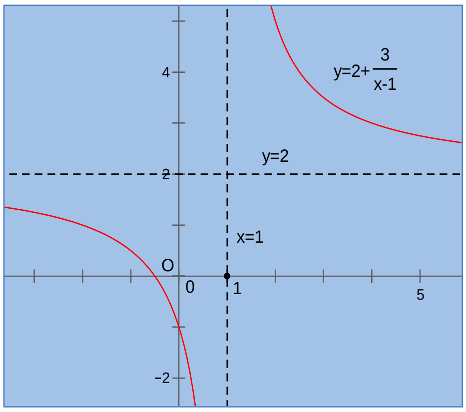
Η υπερβολή αυτή έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-\dfrac{\delta}{\gamma}$ και $y=\dfrac{\alpha}{\gamma}$.

Παράδειγμα:

Η εξίσωση $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ γράφεται ως $y=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1}$, οπότε έχουμε:

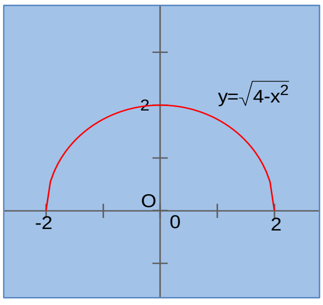


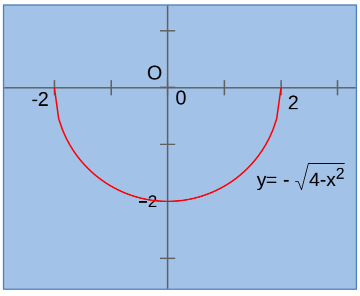




3) Οι εξισώσεις $y=\sqrt{\rho^2-x^2}$, $y=-\sqrt{\rho^2-x^2}$ με $\rho>0$ προκύπτουν από την εξίσωση του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$. Άρα παριστάνουν τα ημικύκλια με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα ρ.

Για παράδειγμα: $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=-\sqrt{4-x^2}$





4) Η εξίσωση $y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$, με $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$ (**ημιέλλειψη**)

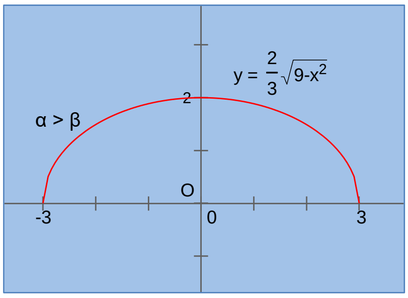
Για $y\geq 0$ η εξίσωση γράφεται:

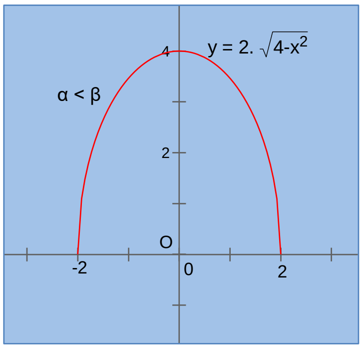
$$y^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(\alpha^2-x^2\right)\Leftrightarrow \alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2-\beta^2x^2\Leftrightarrow \beta^2x^2+\alpha^2y^2=\alpha^2\beta^2\Leftrightarrow \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Παράδειγμα:

Από τις ελλείψεις $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ παίρνουμε αντίστοιχα τις εξισώσεις:

$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ και $y=2\sqrt{4-x^2}$ με τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις.



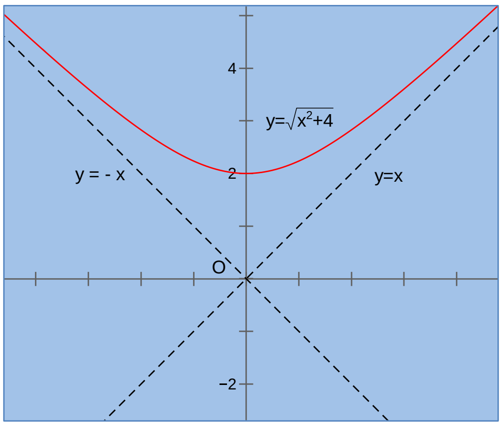


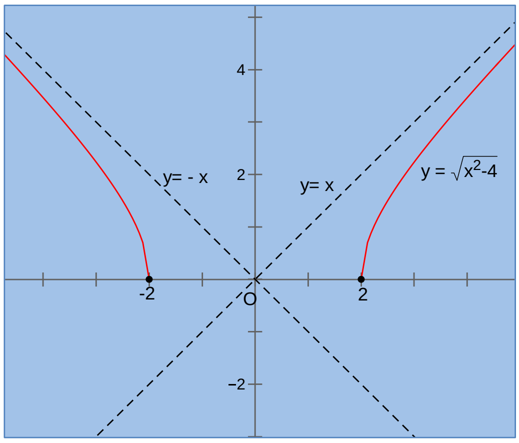
5) Οι εξισώσεις $y=\sqrt{x^2+\alpha^2}$ και $y=\sqrt{x^2-\alpha^2}$ με $\alpha>0$ (**ημιυπερβολές**) προκύπτουν αντίστοιχα από τις ισοσκελείς υπερβολές: $y^2-x^2=\alpha^2$ και $x^2-y^2=\alpha^2$ για $y\geq 0$.

Παράδειγμα:

Από τις υπερβολές $y^2-x^2=4$ και $x^2-y^2=4$ παίρνουμε αντίστοιχα τις εξισώσεις

$y=\sqrt{x^2+4}$ και $y=\sqrt{x^2-4}$ για $y\geq 0$, με τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις.





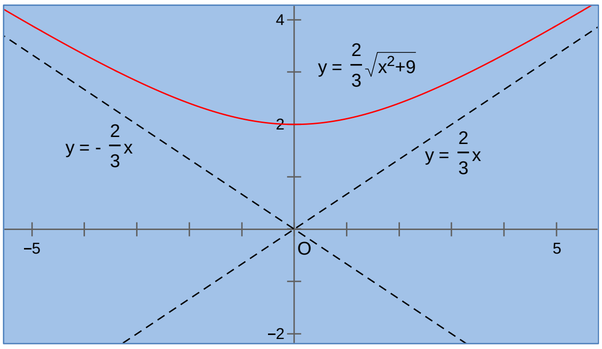
Ομοίως με τις παραπάνω ημιυπερβολές έχουμε και τις καμπύλες :

$$y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2+\alpha^2} \text{ και } y=\pm\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$$

που προκύπτουν από τις υπερβολές: $\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα:

Η εξίσωση $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+9}$ που προκύπτει από την $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, για $y>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο επόμενο σχήμα.



6) Η καμπύλη $y=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\alpha>0$.

Η εξίσωση αυτή γράφεται $y=\sqrt{\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}}=\sqrt{\alpha}.\sqrt{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}}$, και η καμπύλη

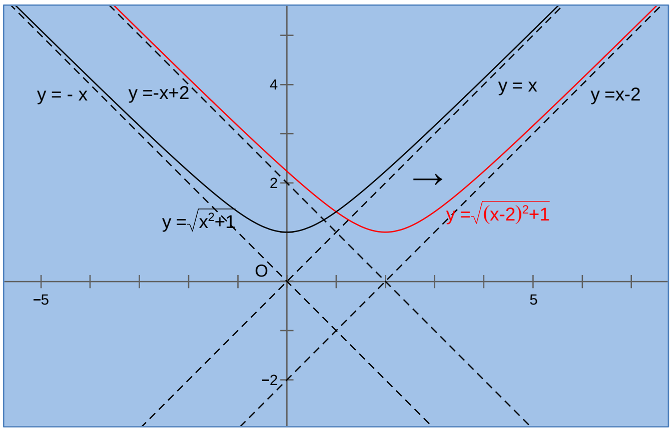
της προκύπτει από την ημιυπερβολή $y=\sqrt{\alpha}.\sqrt{x^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}}$, με οριζόντια μετατόπιση

κατά $\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|$ μονάδες.

Παράδειγμα: $y=\sqrt{x^2-4x+5}=\sqrt{(x-2)^2+1}$, οπότε η ημιυπερβολή $y=\sqrt{x^2+1}$ μεταφέρεται δύο θέσεις δεξιά.

Ανάλογη αντιμετώπιση έχουμε και για την καμπύλη:

$y=\frac{\kappa}{\lambda}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\alpha>0$ και $\lambda\neq 0$.



7) Η καμπύλη $y=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, $\alpha<0$. Η εξίσωση αυτή γράφεται :

$$y=\sqrt{\gamma+\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x\right)}=\sqrt{-\alpha\left[-\frac{\gamma}{\alpha}-\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x\right)\right]}=\sqrt{-\alpha}.\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}-\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}=$$

$$\sqrt{-\alpha}.\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}-\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}.$$

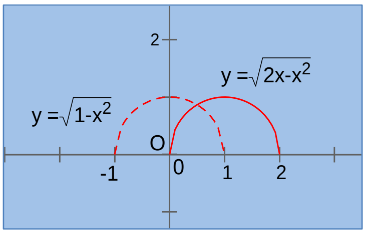
Η καμπύλη αυτή προκύπτει από την ημιέλλειψη $y=\sqrt{-\alpha}.\sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}-x^2}$, με οριζόντια

μετατόπιση κατά $\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|$ μονάδες (ή από ημικύκλιο όταν $\alpha=-1$).

Παράδειγμα:

Η καμπύλη $y=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$, προκύπτει από το ημικύκλιο $y=\sqrt{1-x^2}$, $y\geq 0$

με μετατόπιση κατά μια μονάδα δεξιά.



Ανάλογη αντιμετώπιση έχουμε και για την καμπύλη:

$$y=\frac{\kappa}{\lambda}\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}\ ,\ \alpha<0 \text{ και } \lambda\neq 0.$$

8) Η καμπύλη $y=\sqrt{\alpha x+\beta}$, $\alpha\neq 0$.

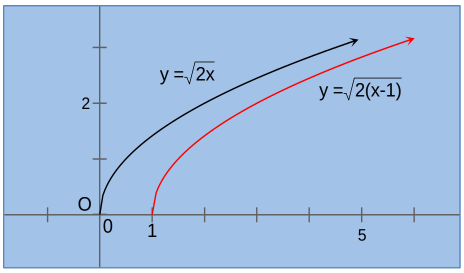
- Αν $\alpha>0$, η εξίσωση γράφεται: $y=\sqrt{\alpha}.\sqrt{x+\frac{\beta}{\alpha}}$, οπότε προκύπτει από την

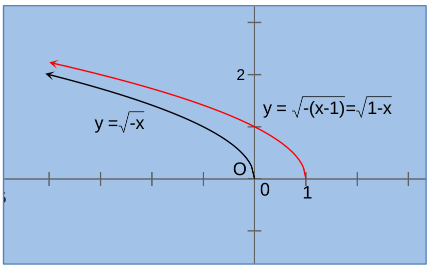
$y=\sqrt{\alpha}.\sqrt{x}=\sqrt{\alpha x}$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ μονάδες.

- Αν $\alpha<0$, η εξίσωση γράφεται: $y=\sqrt{-\alpha\left(-x-\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\sqrt{-\alpha}.\sqrt{-\left(x+\frac{\beta}{\alpha}\right)}$, οπότε προκύπτει

από την ημιπαραβολή $y=\sqrt{-\alpha}.\sqrt{-x}$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$ μονάδες.

Παραδείγματα:





9) Η καμπύλη $y = x^3 \pm 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x,\ \alpha \neq 0$

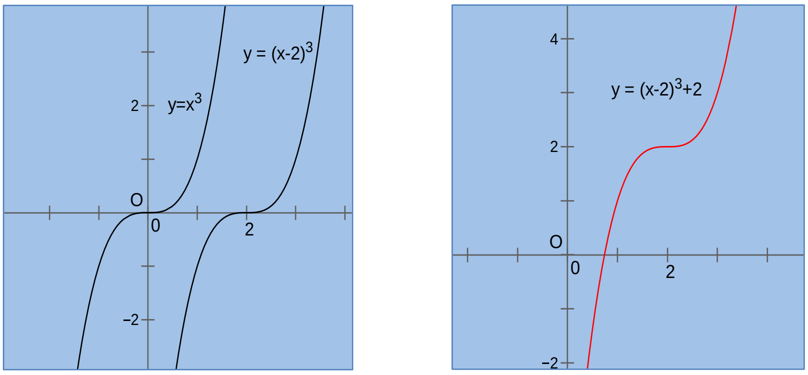
Κάνοντας συμπλήρωση κύβου παίρνουμε: $y = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3 - \alpha^3 = (x+\alpha)^3 - \alpha^3$.

Η καμπύλη αυτή προκύπτει από την $y = x^3$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $|\alpha|$ μονάδες

και στη συνέχεια με κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|\alpha^3|$ μονάδες.

Παράδειγμα:

Η καμπύλη $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 6 = (x-2)^3 + 2$, έχει την παρακάτω γραφική παράσταση:



10) Η καμπύλη $y = \alpha + \frac{\beta}{(x-\gamma)^2},\ \alpha, \beta, \gamma \neq 0$

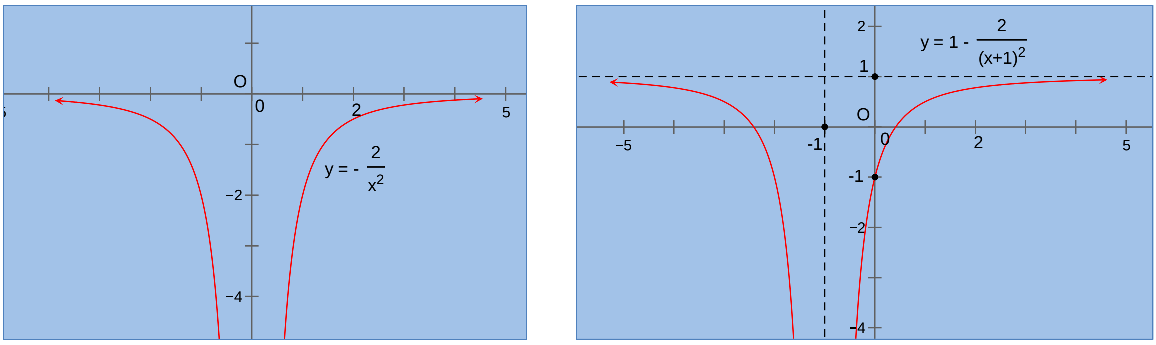
Η καμπύλη αυτή προκύπτει από την $y = \frac{\beta}{x^2}$ με οριζόντια μετατόπιση κατά $|\gamma|$ μονάδες

και στη συνέχεια με κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|\alpha|$ μονάδες.

Παράδειγμα:

Η καμπύλη $y = \frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1} = \frac{(x^2+2x+1)-2}{x^2+2x+1} = 1 - \frac{2}{(x+1)^2}$, προκύπτει από την $y = -\frac{2}{x^2}$

με μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα αριστερά και μια μονάδα προς τα πάνω.



΄Ασκηση

Να παρασταθούν γραφικά οι καμπύλες με τις παρακάτω εξισώσεις, χωρίς τη χρήση της παραγώγου.

1	$y=3x^2-5x+2$	2	$y=-x^2-x+2$
3	$y=\frac{x-1}{x}$	4	$y=\frac{x}{x+1}$
5	$y=\frac{3x-1}{x+1}$	6	$y=\sqrt{-3x}$
7	$y=\sqrt{2-x}$	8	$y=\sqrt{4-x^2}$
9	$y=-\sqrt{1-x^2}$	10	$y=2\sqrt{x^2+1}$
11	$y=-2\sqrt{5-x^2}$	12	$y=\frac{2}{3}\sqrt{9+x^2}$
13	$y=\sqrt{x^2-2x}$	14	$y=\sqrt{4x-x^2}$
15	$y=x^3-3x^2+3x$	16	$y=x\left(x^2-6x+12\right)$
17	$y=1-3x-3x^2-x^3$	18	$y=\frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2}$
19	$y=\left\|1-\ln(1-x)\right\|$	20	$y=\left\|1-e^{\|x\|-1}\right\|$
21	$y=\sqrt{2x^2-x+1}$	22	$y=x^4-4x^3+6x^2-4x$
23	$y=1-2ημ\left(2x-\frac{π}{3}\right)$	24	$y=\|x\|\left(x^2-3x+3\right)$