

Μέρος III

Γ' Λυκείου

14 Συναρτήσεις

14.1 Προγραμματισμένες δεξιότητες

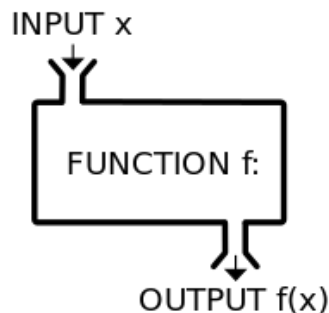
Σε αυτήν την παράγραφο αναμένεται να μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τις παρακάτω διαδικασίες.

- Σ141 Πραγματική Συνάρτηση
- Σ142 Πεδίο Ορισμού Πραγματικής συνάρτησης
- Σ143 Σύνολο τιμών πραγματικής συνάρτησης
- Σ144 Επίλυση προβλημάτων με συνάρτηση
- Σ145 Γραφική παράσταση συνάρτησης
 - Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων
 - Εύρεση Π.Ο. και Σ.Τ. από τη γραφική παράσταση
- Σ146 Σχετικές θέσεις γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων
- Σ147 Ισότητα Συναρτήσεων
- Σ148 Πράξεις Συναρτήσεων
- Σ149 Σύνθεση Συναρτήσεων
- Σ1410 Μονοτονία συναρτήσεων
- Σ1411 Συναρτήσεις 1-1
- Σ1412 Αντίστροφη συνάρτησης
- Σ1413 Συμμετρίες Συναρτήσεων
- Σ1414 Αντίστροφη και Γραφική παράσταση
- Σ1415 Φραγμένες Συναρτήσεις
- Σ1416 Ακρότατα Συναρτήσεων
- Σ1417 Συναρτησιακές Εξισώσεις

14.2 Ορισμός Συνάρτησης

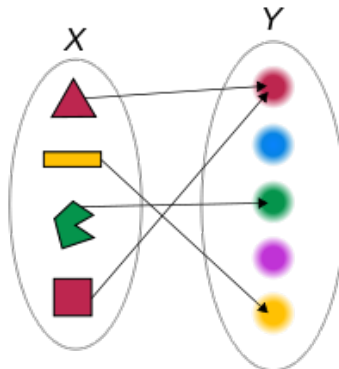
Ορισμός 2. Μία **πραγματική συνάρτηση** f με πεδίο ορισμού το $A = D_f$ ονομάζεται **έναν κανόνας** (ή διαδικασία) μέσω του οποίου κάθε στοιχείο $x \in D_f$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y λέγεται **τιμή της συνάρτησης f στο x** και γράφεται $y = f(x)$. Το σύνολο όλων των τιμών στις οποίες αντιστοιχίζει η συνάρτηση f τους αριθμούς του πεδίου ορισμού της λέγεται **Σύνολο Τιμών** της f και γράφουμε $f(A)$ ή $f(D_f)$. Η μεταβλητή x , μέσω των τιμών της οποίας ορίζεται η συνάρτηση λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ η μεταβλητή $y = f(x)$, η οποία καθορίζεται από τον κανόνα που αντιστοιχεί κάθε αριθμό x σε μία και μοναδική τιμή λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Παράδειγμα 14.1. Μία γενική εικόνα της έννοιας της συνάρτησης. Μία «μηχανή», στην οποία ρίχνουμε αντικείμενα, αριθμούς x , κλπ και εξάγει κάποια άλλα αντικείμενα, με βάση συγκεκριμένο κανόνα, ή αριθμούς $f(x)$.



Σχήμα 1: Μία συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε σχήμα στο αντίστοιχο χρώμα του.

Παράδειγμα 14.2. Ένα παράδειγμα μη αριθμητικής συνάρτησης.



Σχήμα 2: Μία συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε σχήμα στο αντίστοιχο χρώμα του.

Η βασική προϋπόθεση που πρέπει να πληρεί μία αντιστοιχία για να αποτελεί συνάρτηση είναι να κάνει σαφείς αντιστοιχίσεις. Δηλαδή, να μην αντιστοιχεί ένα στοιχείο του πεδίου ορισμού της σε περισσότερα από ένα στοιχεία, ώστε να μπορούμε με σαφήνεια να αποφασίσουμε ποιο είναι το στοιχείο στο οποίο αντιστοιχίζεται το αρχικό δοσμένο στοιχείο.

Παράδειγμα 14.3. Σ141 Θεωρούμε ως πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = [0, 5] \subset \mathbb{R}$ και τον κανόνα f με τον οποίο κάθε αριθμός $x \in D_f$ αντιστοιχίζεται στο διπλάσιό του, δηλαδή: $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$, δηλαδή στο $x = 2 \rightarrow_f y = 4$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι όλοι οι αριθμοί στους οποίους η συνάρτηση αντιστοιχεί τους αριθμούς του πεδίου ορισμού της, δηλαδή οι $[0, 10]$. Ο τύπος της συνάρτησης θα μπορούσε να γραφεί $y = f(x) = 2x$, $x \in [0, 5]$.

Παράδειγμα 14.4. Σ141 Ο κανόνας με τον οποίο κάθε $x \in A = [1, 2]$ αντιστοιχίζεται στον διπλάσιο ή στον αντίθετό του ΔΕΝ είναι συνάρτηση, διότι δεν αντιστοιχίζεται κάθε αριθμός του A σε έναν και μόνο αριθμό.

Άσκηση 169. Σ141 Να εξεταστεί ποιες από τις επόμενες σχέσεις ορίζουν συνάρτηση του y ως προς x .

i. $x^2 + y^2 = 1$

ii. $y = \pm\sqrt{1+x^2}$

iii. $y = \frac{1}{x}$

iv. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

Άσκηση 170. Σ141 Να προσδιοριστεί η συνάρτηση που περιγράφει τη σχέση μεταξύ των εξαρτώμενων μεγεθών στις επόμενες περιπτώσεις:

i. Ένας εργάτης για να βάψει έναν τοίχο ζήτησε 50€ για τα υλικά και επιπλέον 5€ ανά τετραγωνικό μέτρο τοίχου. Να εκφραστεί το κόστος του βαψίματος ως συνάρτηση των τετραγωνικών μέτρων του τοίχου.

ii. Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΚΛΜ με βάση ΛΜ = 10m και ύψος ΚΝ = 5m. Να εκφραστεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του.

Άσκηση 171. Να εξεταστεί αν ο αριθμός 24 είναι τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x + 7$.

Άσκηση 172. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x > 1 \\ x^2 + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = f(0) + f(1) - f(f(-2)) + (f(2))^2$.

Άσκηση 173. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $h \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f\left(\frac{3}{2} + h\right) = f\left(\frac{3}{2} - h\right)$

Άσκηση 174. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$ ισχύουν: $f(1) = 2, f(0) = -1, f(2) = 1$ να υπολογιστούν τα a, b, c .

14.3 Πεδίο ορισμού Σ142

Μία συνάρτηση περιγράφεται πλήρως όταν γνωρίζουμε όχι μόνο τη σχέση που συνδέει την εξαρτημένη και την ανεξάρτητη μεταβλητή, αλλά και σε ποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής εφαρμόζεται αυτή η σχέση, δηλαδή το πεδίο ορισμού της. Εξετάζουμε στη συνέχεια τα πεδία ορισμού βασικών συναρτήσεων. Το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης μπορεί να προκύπτει ως υποσύνολο των πραγματικών αριθμών για δύο κυρίως λόγους: α) Από τη φύση της ίδιας της συνάρτησης (εγγενής λόγος), β) Από τη φύση του προβλήματος που περιγράφει ()

i. **Γραμμικές** $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ με $D_f = \mathbb{R}$

ii. **Πολυώνυμα** $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ με $D_f = \mathbb{R}$

iii. **Ρητές** $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, με $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$

iv. **Άρρητες** $f(x) = \sqrt[k]{Q(x)}$ με $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \geq 0\}$

v. **Τριγωνομετρικές**

$$f(x) = \eta\mu(Q(x)) \text{ με } D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu(Q(x)) \text{ με } D_f = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = \epsilon\phi(Q(x)) \text{ με } D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$$

$$f(x) = \sigma\phi(Q(x)) \text{ με } D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi\}$$

vi. **Λογαριθμικές** $f(x) = \ln(Q(x))$ με $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) > 0\}$

vii. **Κλαδικές** $f(x) = \begin{cases} h(x), & x \in D_h \\ g(x), & x \in D_g \end{cases}$, τότε $D_f = D_h \cup D_g$.

Σε κάθε περίπτωση όπου εμφανίζονται περισσότερες της μίας περιπτώσεις από τις παραπάνω συναρτήσεις σε μία συνάρτηση ως αθροίσματα, διαφορές, κλπ., τότε το πεδίο ορισμού θα είναι η **τομή** των πεδίων ορισμού τους.

Παράδειγμα 14.5. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Πρέπει ό,τι βρίσκεται εντός του λογαρίθμου να είναι γνήσια θετικό, δηλαδή:
 $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Άσκηση 175. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f_1(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{-x^2+4x}{4}\right)}$

vi. $f_6(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\ln(-x+1)}$

ii. $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$

vii. $f_7(x) = \frac{ax+1}{x-a}, a \in \mathbb{R}$

iii. $f_3(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}$

viii. $f_8(x) = x^3 - x^2 + x + 2$

iv. $f_4(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$

ix. $f_9(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \dots? \\ \sqrt{1-x}, & x \dots? \end{cases}$

v. $f_5(x) = \frac{1}{\ln(x^2-4x+3)}$

x. $f_{10}(x) = \frac{x^2-25}{x^2+5|x|}$

Άσκηση 176. Δίνεται ο τύπος: $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < a \\ x-2, & x \geq 3-a \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές του a , ώστε ο παραπάνω τύπος να παριστάνει συνάρτηση και στη συνέχεια να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Άσκηση 177. Αν σε κάθε ρητό αριθμό $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ αντιστοιχίζεται ο αριθμός $a \cdot b$, να εξεταστεί αν ορίζεται συνάρτηση με αυτήν την αντιστοιχία.

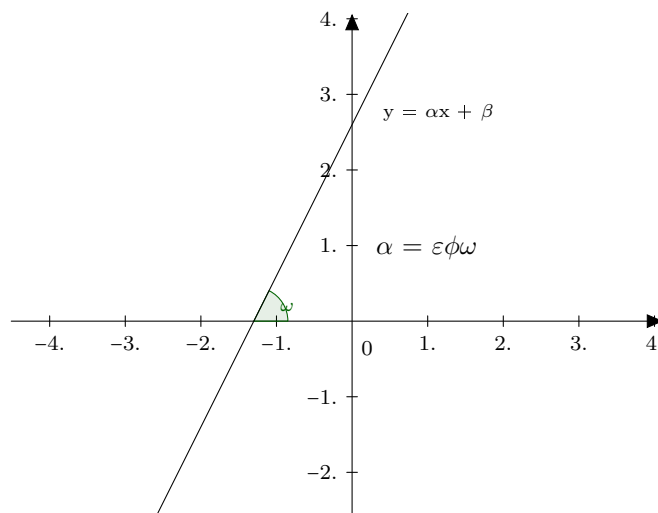
Άσκηση 178. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+x}{ax^2-2ax+2a+1}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 179. Να βρεθεί το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(3-k)x^2 - 2kx - k - 1}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

14.4 Βασικές Συναρτήσεις και ιδιότητες - Γραφική Παράσταση

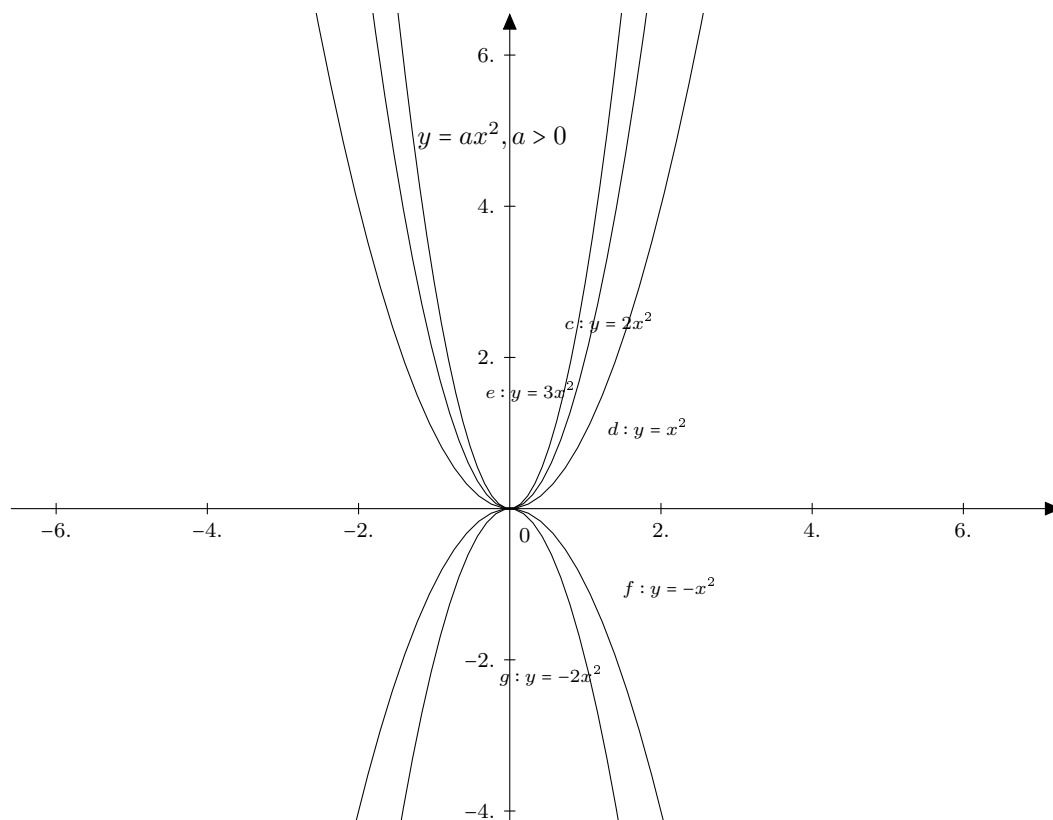
Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης είναι η αποτύπωση των ζευγών αριθμών (x, y) σε ένα σύστημα ορθοκανονικών αξόνων. Παρακάτω εμφανίζονται οι γραφικές παραστάσεις βασικών γνωστών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 14.6 (Η γραμμική συνάρτηση - Ευθεία).



ΠΡΟΣΟΧΗ: Η κατακόρυφη ευθεία $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ ΔΕΝ είναι συνάρτηση.

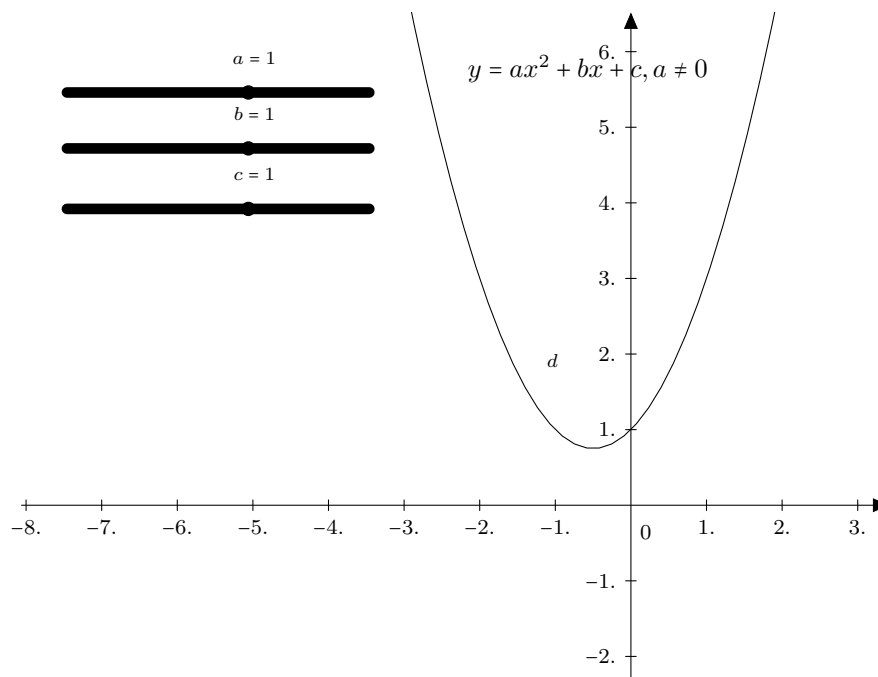
Παράδειγμα 14.7 (Η συνάρτηση παραβολή $y = ax^2$).



Η παραβολή $y = ax^2, a \neq 0$ «κλείνει» όσο μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή είναι το a .

Άσκηση 180. Να εξεταστεί αν η παραβολή $y^2 = 2px, p \neq 0$ και η παραβολή $x^2 = 2py, p \neq 0$ είναι συναρτήσεις.

Παράδειγμα 14.8 (Η μετατοπισμένη συνάρτηση-παραβολή $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$).

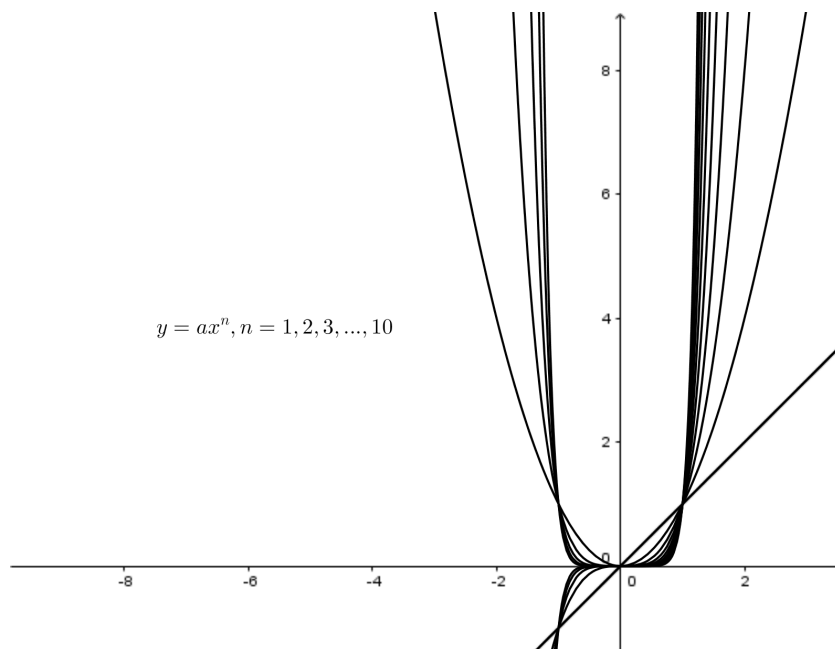


Η συνάρτηση παραβολή για $a > 0$ έχει τα κοίλα προς τα πάνω και λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $x = -\frac{b}{2a}$, ενώ για $a < 0$ έχει τα κοίλα προς τα κάτω και λαμβάνει μέγιστη τιμή για $x = -\frac{b}{2a}$. Για αντίθετες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 181. Να βρεθεί η εξίσωση του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της παραβολής $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

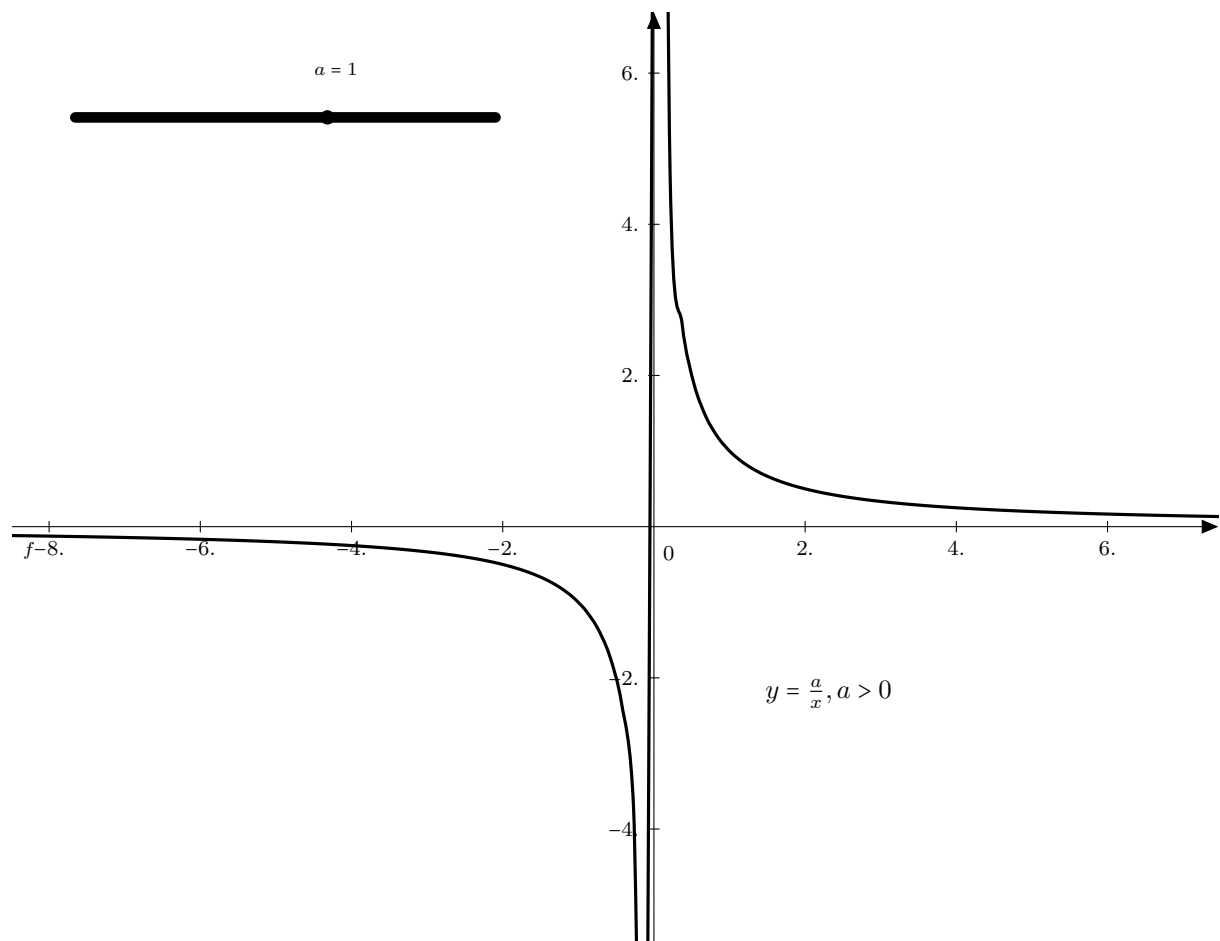
Άσκηση 182. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = -f(x)$ για $x \in A$ είναι συμμετρικές με άξονα συμμετρίας τον $x'x$.

Παράδειγμα 14.9 (Η πολυωνυμική συνάρτηση $y = ax^n, a > 0, n = 1, 2, \dots, 10$). Η συνάρτηση είναι μεγαλύτερη ίση του 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν n άρτιος, ενώ αλλάζει πρόσημο όταν n περιττός.



Σχήμα 3: Η πολυωνυμική συνάρτηση $y = x^n$.

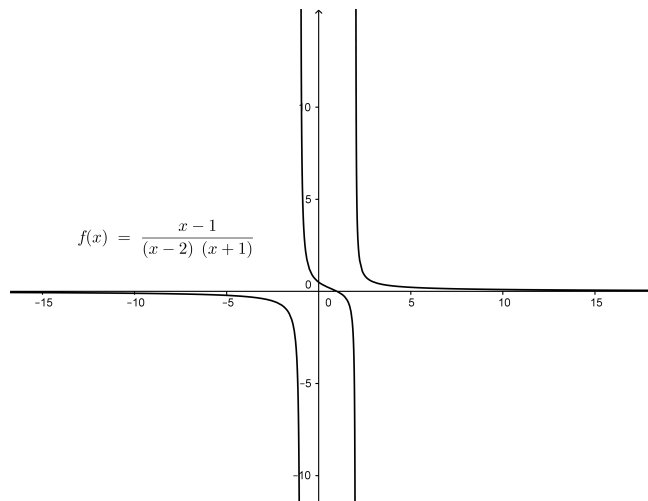
Παράδειγμα 14.10 (Η συνάρτηση υπερβολή $y = \frac{a}{x}, a \neq 0$).



Για $a > 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ για $a < 0$ βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

Παρατήρηση: Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει **ασύμπτωτες** τους άξονες x', y' . Μία ευθεία είναι ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης αν οι γραφικές τους παραστάσεις πλησιάζουν διαρκώς καθώς το x μεγαλώνει κατ' απόλυτη τιμή ή πλησιάζει πολύ κοντά σε μία τιμή.

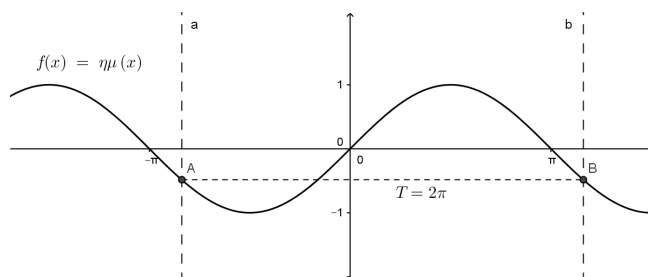
Παράδειγμα 14.11 (Ρητές συναρτήσεις). Μία συνάρτηση λέγεται **ρητή** αν είναι πηλίκο δύο πολυωνύμων.



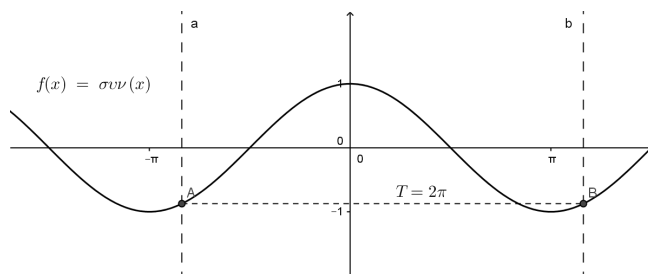
Σχήμα 4: Μία ρητή συνάρτηση με δύο ρίζες στον παρονομαστή.

Παράδειγμα 14.12 (Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις). Οι τριγωνομετρικές συ-

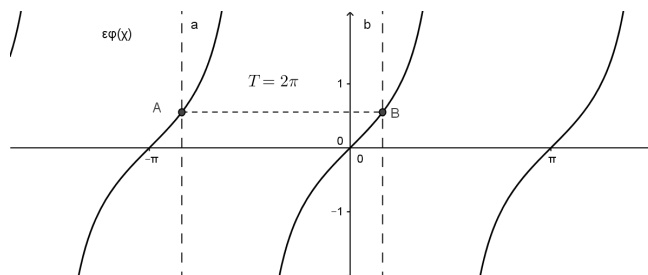
ναρτήσεις είναι **περιοδικές**, δηλαδή αν $T \in \mathbb{R}$ η περίοδος τους τότε ισχύει: $f(x \pm T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$



Σχήμα 5: Η συνάρτηση $\eta\mu x$ με περίοδο 2π . Οι τετμημένες των σημείων A και B διαφέρουν κατά 2π και η συνάρτηση δίνει τις ίδιες τιμές.



Σχήμα 6: Η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ με περίοδο 2π . Οι τετμημένες των σημείων A και B διαφέρουν κατά 2π και η συνάρτηση δίνει τις ίδιες τιμές.



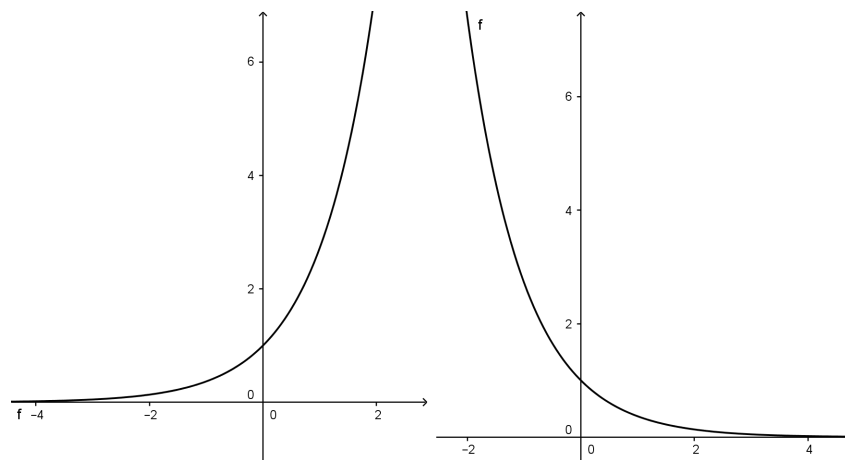
Σχήμα 7: Η συνάρτηση $\epsilon\phi x$ με περίοδο π . Οι τετμημένες των σημείων A και B διαφέρουν κατά π και η συνάρτηση δίνει τις ίδιες τιμές.

Παράδειγμα 14.13 (Εκθετική Συνάρτηση $f(x) = a^x$). Η Εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ για $a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ για $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της e^x και της 10^x .

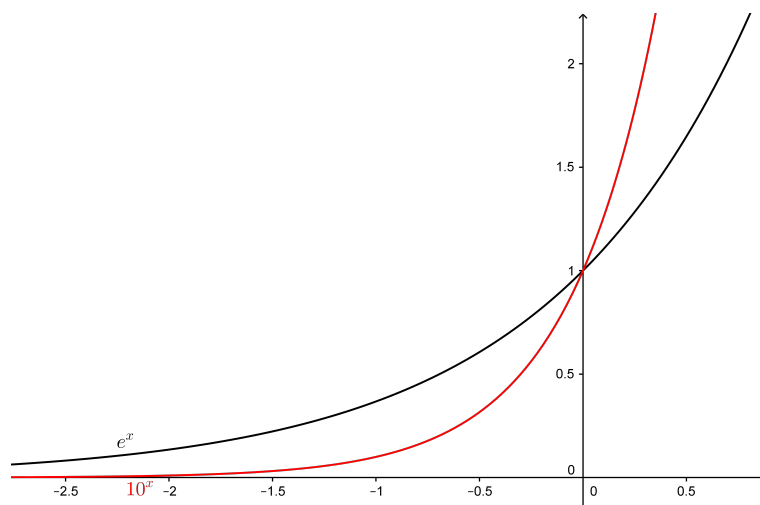
Στον παρακάτω πίνακα θυμόμαστε κάποιες βασικές ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x, a \neq 1$.

$0 < a < 1$	$a > 1$
$D_f = \mathbb{R}$	$D_f = \mathbb{R}$
$a^x > 0$	$a^x > 0$
Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$	$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
Αλλάζει τη φορά των ανισώσεων	Διατηρεί τη φορά των ανισώσεων

Παράδειγμα 14.14 (Λογαριθμική Συνάρτηση $f(x) = \log_a(x)$, $0 < a \neq 1$). Μερικές βασικές ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης είναι οι παρακάτω με την προϋπόθεση ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται ορίζονται καλά:



$$\begin{aligned}
 a^k &= x \Leftrightarrow \log_a x = k & \log_a a^x &= x \\
 \log_a a &= 1 & \log_a 1 &= 0 \\
 \log_a(x \cdot y) &= \log_a x + \log_a y \\
 a^{\log_a x} &= x & \log_a x^k &= k \log_a x \\
 \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a x - \log_a y
 \end{aligned}$$



Σχήμα 8: Η συνάρτηση 10^x μεταβάλλεται γρηγορότερα της e^x για $x > 0$. Είναι και οι δύο εκθετικές με βάση μεγαλύτερη της μονάδας, οπότε γνησίως αύξουσες.

2

Άσκηση 183. [Μπάρλας] Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = k \ln(x+1) + m$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $e^2 - 1$ και τον άξονα $y'y$ στο 2, τότε να βρεθούν οι παράμετροι k, m και το σημείο της γραφικής παράστασης με τεταγμένη 3.

Άσκηση 184. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις όλων των συναρτήσεων $f_a(x) = (a-1)x^2 - 2ax + 1 - 3a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να προσδιοριστούν.

14.4.1 Σχετικές Θέσεις Γραφικών παραστάσεων

Άσκηση 185. Να εξεταστεί αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^2 + \sqrt{x^2 + a^2}$ έχει κοινά σημεία με τους άξονες για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Άσκηση 186. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = ax^2 - x + 1$, $g(x) = 2ax - 1$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

² Στην πραγματικότητα μεταβάλλεται ταχύτερα ήδη από κάποιο $-1 < x_0 < -1/2$

14.5 Σύνολο Τιμών

Θεωρούμε την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f . Το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της γραφικής της παράστασης, δηλαδή:

$$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D_f\}$$

Ο προσδιορισμός του συνόλου τιμών μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους και στη συνέχεια θα παρουσιαστούν ευκολότεροι τρόποι προσδιορισμού του. Σε αυτό το σημείο θα δούμε πώς προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών για κάποιες συγκεκριμένες συναρτήσεις.

Παράδειγμα 14.15. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της ρητής συνάρτησης: $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Για το πεδίο ορισμού πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ Από τα παραπάνω επιτρέπεται x θα ελέγξουμε ποια y μπορούν να προκύψουν:

Για $x \neq 1$

$$y = f(x) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$y(x-1) = x+2 \Leftrightarrow$$

$$yx - y - x = 2 \Leftrightarrow$$

$$x(y-1) = y+2 \Leftrightarrow$$

$$\text{Για } y = 1 : 0 \cdot x = 3 \text{ αδύνατο. } \Leftrightarrow$$

$$\text{Για } y \neq 1 : x = \frac{y+2}{y-1}$$

Όμως $x \neq 1$ πρέπει $\frac{y+2}{y-1} \neq 1$ δηλαδή

$$y+2 \neq y-1 \Leftrightarrow y-y \neq -2-1 \Leftrightarrow 0y \neq -3.$$

που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς, $y \neq 1$. Οπότε $f(D_f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Παράδειγμα 14.16. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}, x \in (-2, 2) - \{1\}$$

$$y = \frac{x+2}{x-1}, x \in (-2, 2) - \{1\} \Leftrightarrow$$

$$y(x-1) = x+2, x \in (-2, 2) - \{1\} \Leftrightarrow$$

$$yx - x = y+2, x \in (-2, 2) - \{1\} \Leftrightarrow$$

$$x(y-1) = y+2, x \in (-2, 2) - \{1\} \Leftrightarrow$$

Για $y = 1$ έχουμε: $0x = 3$, αδύνατο, $\forall x \in (-2, 2) - \{1\}$.

Για $y \neq 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{y+2}{y-1}, x \in (-2, 2) - \{1\} \Leftrightarrow \\
 -2 &< \frac{y+2}{y-1} < 2 \text{ και } \frac{y+2}{y-1} \neq 1 \Leftrightarrow \\
 -2 &< \frac{y+2}{y-1} \text{ και } \frac{y+2}{y-1} < 2 \text{ και } \frac{y+2}{y-1} \neq 1 \Leftrightarrow \\
 0 &< 2 + \frac{y+2}{y-1} \text{ και } \frac{y+2}{y-1} - 2 < 0 \text{ και } y+2 \neq y-1 \Leftrightarrow \\
 0 &< \frac{2y-2}{y-1} + \frac{y+2}{y-1} \text{ και } \frac{y+2}{y-1} - \frac{2y-2}{y-1} < 0 \text{ και } 0y \neq -3 \Leftrightarrow \\
 0 &< \frac{2y-2+y+2}{y-1} \text{ και } \frac{y+2-2y+2}{y-1} < 0 \text{ και } 0y \neq -3 \Leftrightarrow \\
 0 &< \frac{3y}{y-1} \text{ και } \frac{-y+4}{y-1} < 0 \Leftrightarrow \\
 y &\in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \text{ και } y \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) \Leftrightarrow \\
 y &\in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty).
 \end{aligned}$$

Συνεπώς: $f(D_f) = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

Παράδειγμα 14.17. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x-4}{(x-3)(x-1)}$

Για το πεδίο ορισμού πρέπει:

$$(x-3)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ και } x \neq 1$$

Οπότε: $D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$.

Για το σύνολο τιμών έχουμε για $x \in D_f$:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x-4}{(x-3)(x-1)} \Leftrightarrow \\
 (x-1)(x-3)y &= x-4 \Leftrightarrow \\
 (x^2-4x+3)y &= x-4 \Leftrightarrow \\
 yx^2-4yx-x+3y+4 &= 0 \Leftrightarrow \\
 yx^2-(4y+1)x+3y+4 &= 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Για $y=0$: $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4 \in D_f$, άρα $0 \in f(D_f)$.

Για $y \neq 0$ έχουμε: $\Delta = (4y+1)^2 - 4y(3y+4) = 16y^2 + 8y + 1 - 12y^2 - 16y = 4y^2 - 8y + 1$ Για να έχει λύση ως προς x πρέπει:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 8y + 1 \geq 0$$

Λύνουμε την ανίσωση ως προς y :

$$\Delta' = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 64 - 16 = 48 > 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Συνεπώς: $y \in \left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$

Άσκηση 187. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

ii. $g(x) = \sqrt{x-1}$

iii. $h(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

iv. $k(x) = 2\ln(x)$

v. $m(x) = 2e^x$

14.5.1 Σύνολο τιμών και Γραφικές Παραστάσεις



14.6 Ισότητα Συναρτήσεων

Ορισμός 3. Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται **ίσες**, αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού $D_f = D_g$ και την ίδια τιμή για κάθε $x \in D = D_f = D_g$, δηλαδή: $f(x) = g(x), \forall x \in D$.

Περιορίζοντας το πεδίο ορισμού σε ένα κοινό υποσύνολο των πεδίων ορισμού δύο συναρτήσεων μπορούμε, εφόσον οι τιμές που δίνουν οι συναρτήσεις σε αυτό το υποσύνολο είναι ίδιες, μπορούν να είναι σε αυτό ίσες.

Άσκηση 188. Να εξεταστεί σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις οι συναρτήσεις $f = g$ είναι ίσες. Για τις περιπτώσεις όπου $f \neq g$ να βρεθεί, αν υπάρχει, το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i. $f(x) = \log(x^2)$	$g(x) = 2\log(x)$
ii. $f(x) = x^2$	$g(x) = \frac{x^3}{x}$
iii. $f(x) = \ln(1 - x^2)$	$g(x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$
iv. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	$g(x) = \ln(1 - x) - \ln(1 + x)$
v. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$	$g(x) = x + 2$
vi. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x }$	$g(x) = 1 - \frac{1}{ x }$
vii. $f(x) = x^2 - x$	$g(x) = e^{\ln(x)}(x - 1)$
viii. $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x+2}}$	$g(x) = \sqrt{x} - 2$
ix. $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-3}$	$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
x. $f(x) = x^3$	$g(x) = x^2$

Άσκηση 189. Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = \frac{2a^2x^3 + x^2 - ax + 4 - a}{x^2 - ax + 1}$ να είναι ίσες.

14.7 Πράξεις με συναρτήσεις

Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων ορίζονται κατά σημείο, δηλαδή για κάθε x όπου ορίζονται και οι δύο συναρτήσεις.

Ορισμός 4 (Πράξεις Συναρτήσεων). Ορίζουμε τέσσερις πράξεις μεταξύ πραγματικών συναρτήσεων.

Πρόσθεση - Αφαίρεση $f \pm g : (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \forall x \in D_f \cap D_g$

Πολλαπλασιασμός $f \cdot g : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in D_f \cap D_g$

Διαίρεση $\frac{f}{g} : \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D_f \cap D_g - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\}$

Άσκηση 190. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x}{x-1}, g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις: $f + g, f \cdot g, \frac{1}{g}, \frac{f}{g}$.

Άσκηση 191. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x, g(x) = x^2$. Να γίνει η γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνει η γραφική παράσταση της $f + g$. Να βρεθεί η συνάρτηση $f + g$ και να συγκριθεί με τη γραφική παράσταση που δημιουργήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα.

Άσκηση 192. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ x+1, & x \leq 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $f + g$.

Άσκηση 193. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ισχύει $2(f + g)(x)[(f + g)(x) - 2x] \leq [(f + g)(x)]^2 - [(f - g)(x)]^2 - 4x^2$ τότε $f = g$.

14.8 Σύνθεση Συναρτήσεων

(Σ149)

Οι γνωστές μας συναρτήσεις «περιορίζονται» σε έναν κατάλογο όπως αυτόν που είδαμε στη 14.4. Είναι όμως δυνατόν να ορίσουμε και άλλες συναρτήσεις με τη βοήθεια των ήδη γνωστών. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\sqrt{x}$ μπορεί να υψωθεί στην τρίτη δύναμη και να προκύψει μία νέα συνάρτηση όπως η $\sqrt{x}^3$.

Ποια ερωτήματα θα μπορούσαν να μας απασχολήσουν για τη νέα συνάρτηση;

Το βασικότερο ερώτημα είναι προφανώς για ποιες τιμές του x ορίζεται καλά η νέα συνάρτηση που προκύπτει. Διότι, όπως είδαμε στις πράξεις των συναρτήσεων η νέα συνάρτηση που προκύπτει πρέπει να πληρεί τους κανόνες όλων των συναρτήσεων από τις οποίες προκύπτει με πράξεις, ενώ σε αρκετές περιπτώσεις πρέπει να πληρεί ακόμα περισσότερους κανόνες· για παράδειγμα στη διαίρεση εκτός από τα πεδία ορισμού των επιμέρους συναρτήσεων που αποτελούν τη συνάρτηση, θα πρέπει επιπροσθέτως να μην μηδενίζεται ο παρονομαστής της συνάρτησης πηλίκο για τις επιτρεπτές τιμές του x .

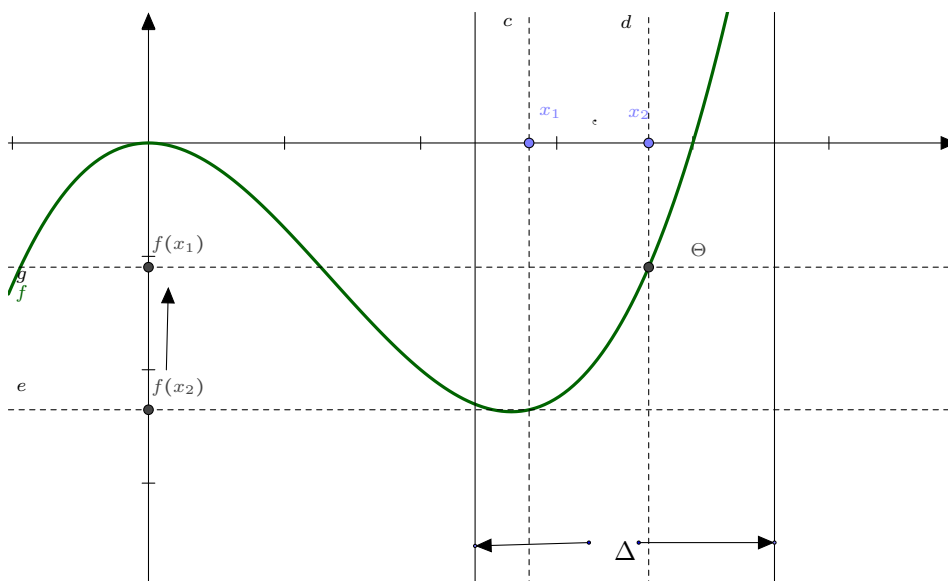
Άσκηση 194 (2015 Λύκειο Γιαννιτσών). Δίνονται $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε: $g(x) = (f \circ f)(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

i. Αν υπάρχει μοναδικό $a \in \mathbb{R} : g(a) = a$, τότε να αποδειχθεί ότι: $f(a) = a$.

ii. Αν $f(g(x)) = x^2 - 3x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε $f(2) = 2$.

iii. Αν $g(x) = x^{2015}$ τότε $f(x^{2015}) = f^{2015}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, τότε: $g(x) = x$ σε κατάλληλο πεδίο ορισμού.



Σχήμα 9: Καθώς μετακινούμαστε στη γραφική παράσταση στο διάστημα Δ από το x_1 προς το x_2 οι τιμές της συνάρτησης f μεγαλώνουν. Σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

14.9 Μονοτονία Συναρτήσεων

Ορισμός 5. Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 9 παραπάνω καθώς μετακινούμαστε πάνω στη γραφική παράσταση προς τα δεξιά (τα x μεγαλώνουν) η συνάρτηση είναι «ανεφορική» (και τα y μεγαλώνουν).

Ορισμός 6. Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σ'ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Παρατήρηση 1. Στους δύο ορισμούς δεν απαιτείται ισοδυναμία στη σχέση των x_1, x_2 και των $f(x_1), f(x_2)$. Αυτό διότι μπορεί να αποδειχθεί η επόμενη:

Άσκηση 195 (2015195). Αν για μία συνάρτηση f και ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ισχύει ότι: για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ώστε:

$$\text{αν } f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Παράδειγμα 14.18. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση: $f(x) = 3\ln(x-1) - 2$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $D_f = (1, +\infty)$.

Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Leftrightarrow \\ x_1 - 1 < x_2 - 1 &\Leftrightarrow \ln(x) \text{ γνησίως αύξουσα} \\ \ln(x_1 - 1) < \ln(x_2 - 1) &\Leftrightarrow \\ 3\ln(x_1 - 1) - 2 < 3\ln(x_2 - 1) - 2 &\Leftrightarrow \\ f(x_1) < f(x_2) &\end{aligned}$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. □

Άσκηση 196. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και $-f$ έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας.

Παρατήρηση 2. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι μονότονη σε κάποια διαστήματα του πεδίου ορισμού της, αλλά να μην είναι μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

Ορισμός 7. Μία συνάρτηση f λέγεται **αύξουσα** (αντ. φθίνουσα) σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq (\text{αντ. } \geq) f(x_2)$$

Παρατήρηση 3. Οι σταθερές συναρτήσεις είναι οι μόνες οι οποίες είναι ταυτόχρονα αύξουσες και φθίνουσες. Υπάρχει συνάρτηση η οποία να είναι ταυτόχρονα γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα;

Παρατήρηση 4. Οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις είναι εκείνες, οι οποίες όταν εφαρμόζονται σε μία ανισότητα διατηρούν τη φορά της, ενώ οι γνησίως φθίνουσες αλλάζουν τη φορά των ανισοτήτων.

Παρατήρηση 5. Υπάρχει συνάρτηση, η οποία δεν είναι γνησίως μονότονη σε κανένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της;

Άσκηση 197. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = a^x + (a-1)x - 2a + 1$, $0 < a \neq 1$ ως προς τη μονοτονία και να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Άσκηση 198. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

i. $f(x) = x|x|$

ii. $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

iii. $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

iv. $f(x) = 2 - \ln(2x - 1)$

v. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -3x + 1, & x > 0 \end{cases}$

Άσκηση 199. Να αποδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο διάστημα Δ , τότε και η συνάρτηση $\lambda f + \mu g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , για κάθε $\lambda, \mu > 0$.

Άσκηση 200. Να αποδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο A και θετικές, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Άσκηση 201. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες στο A και αρνητικές να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $f \cdot g$.

Άσκηση 202. Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονες, να εξεταστεί η συνάρτηση $f \circ g$ ως προς τη μονοτονία. Στη συνέχεια να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln(e^x - 1)$, $g(x) = e^{2-e^x}$.

Άσκηση 203. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε: $(f \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 204. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι: $f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδειχθεί ότι $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 205. Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα A, B του πεδίου ορισμού της. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία στην ένωσή τους $A \cup B$.

Άσκηση 206. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα A του πεδίου ορισμού της, να αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα στο A .

Άσκηση 207. Να εξεταστεί αν μία άρτια συνάρτηση μπορεί να είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της. Μία περιττή;

Άσκηση 208. Ο Λόγος μεταβολής μίας συνάρτησης f είναι:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}, \quad \forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2$$

Να αποδειχθεί ότι:

- Αν $\lambda > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .
- Αν $\lambda < 0$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

14.9.1 Μονοτονία και ανισώσεις

Άσκηση 209. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^e$, $x \geq 0$. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. Να λυθεί η ανίσωση: $e^{3x} - 3^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{x^e} - (3x)^e$.

Άσκηση 210. Έστω $f(x) = 2^{2-x} + 3^{1-x} - 2$.

- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii. Να λυθεί η ανίσωση: $2^{2-x} + 3^{1-x} < 7$.
- iii. Να λυθεί η ανίσωση: $f(f(x)) > 1$.

Άσκηση 211. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln(x) + x < 1$.

Άσκηση 212. Έστω f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$, $f(2) = 3$ και $f(x) + 3f(y) \geq 12$, $\forall x, y \in [1, 2]$. Να βρεθούν οι x, y .

Άσκηση 213. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης: $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.

Άσκηση 214. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}$.

Άσκηση 215. Αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda + 1)x + 2$ έχει ελάχιστη τιμή 1, να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 216. Έστω $f(x) = x^{2016} + \frac{a}{x^{2016}}$, $a > 0$.

- i. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της f .
- ii. Να βρεθεί ο a , αν η ελάχιστη τιμή της f είναι 999.

14.9.2 Μονοτονία και ακρότατα

Άσκηση 217 (Ιδιότητα). Αν $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ και ισχύουν: f γνησίως αύξουσα στο $[a, x_0]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, b]$ τότε το $f(x_0)$ είναι μέγιστη τιμή.

Παρατήρηση 6. ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν η μονοτονία της συνάρτησης δεν ισχύει σε διάστημα με κλειστό το άκρο x_0 , τότε η τιμή $f(x_0)$ μπορεί να μην είναι ακρότατο.

Παράδειγμα 14.19. Η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in (-1, 0] \\ -x^2 + 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$ ΔΕΝ έχει μέγιστη τιμή το $f(0) = 0$

Για περισσότερα αντιπαράδείγματα μπορεί κανείς να μελετήσει το εξαιρετικό βιβλίο [Πούλος 2009].

Παρατήρηση 7. Αν ισχύει ότι: $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in \Delta$ ΔΕΝ ισχύει απαραίτητα ότι το a είναι ελάχιστη τιμή της f και το b είναι μέγιστη τιμή της f . Για να ισχύει αυτό θα έπρεπε επιπλέον να γνωρίζουμε ότι η f λαμβάνει αυτές τις τιμές, δηλαδή ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ ώστε: $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$.

14.10 Συναρτήσεις ένα προς ένα (1 – 1)

Ορισμός 8. Μία συνάρτηση λέγεται ένα προς ένα και γράφουμε **1-1** στο πεδίο ορισμού της A , αν

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ ισχύει } \{ \text{αν } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \}$$

Παρατήρηση 8. Η αντίστροφη συνεπαγωγή

$$\{ \text{αν } f(x_1) \neq f(x_2) \} \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

ισχύει από τον ορισμό της συνάρτησης. Διότι, αν ήταν $x_1 = x_2$ θα έπρεπε (εξ' ορισμού της έννοιας της συνάρτησης) να είναι $f(x_1) = f(x_2)$ (μία συνάρτηση σε ίσες τιμές x πρέπει να αποδίδει την ίδια τιμή $f(x)$).

ΠΡΟΤΑΣΗ 19. Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση **1-1**, αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει ότι:

$$\text{αν } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Παρατήρηση 9. Η προηγούμενη 19 **ΔΕΝ** αποτελεί ορισμό της έννοιας και δεν πρέπει να συγχέεται με τον ορισμό 8 ! Οι υπογραμμισμένες λέξεις λέγεται και είναι υποδηλώνουν αντίστοιχα ορισμό ιδιότητας και ιδιότητα που προκύπτει.

Στην επίλυση ασκήσεων χρησιμοποιείται τότε ο ορισμός 8 και τότε η ιδιότητα 19.

Παρατήρηση 10 (Γραφική παράσταση 1-1 συνάρτησης). Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης έχει την ιδιότητα καμία κάθετη ευθεία στον $x'x$ άξονα να μην την τέμνει σε περισσότερα από ένα σημεία. Αν επιπλέον η συνάρτηση είναι και 1-1 τότε η γραφική της παράσταση δεν τέμνεται σε περισσότερα από ένα σημεία από καμία παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Παρατήρηση 11. Αν η συνάρτηση f είναι 1-1 και a στο σύνολο τιμών της, τότε η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική λύση ως προς x . Τι μπορεί να συμβαίνει αν ο a δεν είναι γνωστό αν ανήκει στο σύνολο τιμών της f ;

Παράδειγμα 14.20 (Χρήση του ορισμού για απόδειξη του 1-1). Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = ax + b, a \neq 0$ είναι 1-1.

Απόδειξη. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$$

$$a \cdot x_1 \neq a \cdot x_2, \forall a \neq 0 \Rightarrow$$

$$a \cdot x_1 + b \neq a \cdot x_2 + b.$$

□

Παράδειγμα 14.21. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x$ είναι 1-1.

Απόδειξη. **Προσοχή:** Η χρήση του ορισμού για πρόσθεση κατά μέλη άνισων ποσοτήτων μπορεί να οδηγήσει σε σφάλμα όπως παρακάτω:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow$$

$$x_1^3 \neq x_2^3, \Rightarrow$$

$$x_1^3 + x_1 \neq x_2^3 + x_2,$$

εφόσον x^3 είναι 1-1

ΕΙΝΑΙ ΛΑΘΟΣ προφανώς!

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 19, ως εξής: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$$

$$x_1^3 + x_1 = x_2^3 + x_2 \Rightarrow$$

$$x_1^3 - x_2^3 + x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 \text{ ή } \Delta = x_2^2 - 4x_2^2 - 4 < 0 \text{ αδύνατο}$$

Συνεπώς, από πρόταση 19 η f είναι 1-1.

□



Παράδειγμα 14.22. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $D_f = (1, +\infty)$ είναι 1-1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 20 (Παρατήρηση του βιβλίου χωρίς απόδειξη σελ.153). Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε θα είναι και 1-1.

Απόδειξη. Έστω f γνησίως αύξουσα και $x_1, x_2 \in D_f$. Έστω $x_1 \neq x_2$

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\Rightarrow \\ x_1 < x_2 \text{ ή } x_1 > x_2 &\Rightarrow \\ f(x_1) < f(x_2) \text{ ή } f(x_1) > f(x_2) &\Rightarrow \\ f(x_1) \neq f(x_2) &\end{aligned}$$

Άρα f 1-1. □

Παράδειγμα 14.23. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$ είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ ώστε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow \\ e^{x_1} < e^{x_2} &\Rightarrow e^x \text{ γνησίως αύξουσα} \\ q_1 + e^{x_1} < x_2 + e^{x_2} &\Rightarrow \text{πρόσθεση κατά μέλη ανισοτήτων} \\ f(x_1) < f(x_2) &\end{aligned}$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και 1-1. □

Σε μερικές περιπτώσεις είναι δυνατόν να αντιληφθούμε και αλγεβρικά γιατί μία συνάρτηση δεν είναι 1-1 ή σε ποιο πεδίο ορισμού θα μπορούσε να γίνει 1-1.

Παράδειγμα 14.24. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - 3$ είναι 1-1 στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ και $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2x_1 - 3 &= x_2^2 - 2x_2 - 3 \Rightarrow \\ x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 &= 0 \Rightarrow \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2) &= 0 \Rightarrow \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) &= 0 \Rightarrow \\ x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 &= 2 - x_2 \end{aligned}$$

Δηλαδή μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν η συνάρτηση είχε πεδίο ορισμού τους πραγματικούς τότε δεν θα ήταν 1-1 αφού για κάθε x_1 υπάρχουν 2 x_2 που οδηγούν στην ίδια τιμή της f .

Όμως, ισχύει: $x_1 > 1, x_2 > 1 \Rightarrow x_1 + x_2 > 2$, οπότε δεν μπορεί να ισχύει η δεύτερη ισότητα παραπάνω, δηλαδή ισχύει:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 > 1$$

Συνεπώς η f είναι 1-1 στο $(1, +\infty)$.

Παρατήρηση 12. Σε συναρτήσεις πολύκλαδες (πολλαπλού τύπου) για να εξασφαλίσουμε ότι είναι 1-1, πρέπει να είναι 1-1 σε κάθε κλάδο και τα σύνολα τιμών κάθε κλάδου να είναι ξένα μεταξύ τους.

Παράδειγμα 14.25. Να εξεταστεί αν είναι 1-1 η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in (-1, 0] \\ -x^2 + 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$. Οπότε σε καθένα από τα διαστήματα είναι 1-1. Ακόμα ισχύουν:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in (-1, 0] : -1 < x_1 < x_2 \leq 0 &\Rightarrow \\ 1 > x_1^2 > x_2^2 \geq 0 &\Rightarrow \\ -1 < -x_1^2 < -x_2^2 \leq 0 &\Rightarrow \\ -1 < f(x_1) < f(x_2) \leq 0 &\end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$f((-1, 0]) \subseteq (-1, 0]$$

Ομοίως αποδεικνύεται:

$$f((0, 1)) \subseteq (0, 1)$$

Δηλαδή $f(x_1) = f(x_2)$ μπορεί να ισχύει μόνο αν x_1, x_2 ανήκουν και τα δύο σε ένα υποδιάστημα από τα $(-1, 0], (0, 1)$. Στα οποία όμως η f είναι 1-1. Συνεπώς f 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

Άσκηση 218. Έστω $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in (0, +\infty)$$

Αν η f έχει μοναδική ρίζα, να αποδειχθεί ότι είναι 1-1.

Άσκηση 219. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f^2(x) \leq f(x) \cdot f(5-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι 1-1.

Άσκηση 220. Στην πρόταση 20 αποδείχθηκε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1. Να εξεταστεί αν ισχύει και το αντίστροφο.

Άσκηση 221. Να εξεταστεί αν είναι αληθείς ή ψευδείς οι παρακάτω προτάσεις:

- i. Μία άρτια συνάρτηση είναι και 1-1.
- ii. Μία 1-1 συνάρτηση είναι πάντα περιττή.
- iii. Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε η εξίσωση $f(x^2) = f(x)$ έχει μοναδική λύση.
- iv. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και ορίζεται η σύνθεσή τους $f \circ g$, τότε είναι και αυτή συνάρτηση 1-1.
- v. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 τότε ορίζεται η $f + g$ και είναι συνάρτηση 1-1.

Άσκηση 222. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε και η συνάρτηση: $g(x) = (f(x))^3 + 2f(x) - 3$ είναι 1-1.

Άσκηση 223. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$$

Να αποδειχθεί ότι:

- i. $f(1) = 1$
- ii. Η συνάρτηση $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ ΔΕΝ είναι 1-1.

Άσκηση 224. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(f(x)) = -x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να αποδειχθεί ότι:

- i. f είναι 1-1
- ii. η f ΔΕΝ είναι γνησίως μονότονη
- iii. Η f είναι περιττή

Άσκηση 225. Έστω η συνάρτηση: $f(x) = e^x + x - 1$.

i. Να αποδειχθεί ότι f 1-1.

iii. Να αποδειχθεί ότι: $e^e + e < e^\pi + \pi$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση:

iv. Να λυθεί η ανίσωση:

$$e^{\eta\mu(x)} + \eta\mu(x) = \sqrt{e} + \frac{1}{2}.$$

$$(f \circ f)(x) < 0.$$

Άσκηση 226. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$(f \circ f)(x) = 4x - 3$$

Να αποδειχθεί ότι:

i. $H f$ είναι 1-1.

ii. Ισχύει ότι: $f(4x - 3) = 4f(x) - 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

iii. $f(1) = 1$.

Άσκηση 227 ([Μαυρογιάννης]). Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x^2 + 4) = f(4x)$.

Άσκηση 228 (1998, Α' Δέσμη). Αν η συνάρτηση: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(f(x)) + f^3(x) = 3x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1.

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $f(2x^3 + x) = f(4 - x), x \in \mathbb{R}$.