

1.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda+1, \lambda-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(4,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$. (Μονάδες 7)

β) Αν το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ , να βρείτε την τιμή του λ . (Μονάδες 8)

γ) Για $\lambda=4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

2.

ΘΕΜΑ 4

α) Να εξετάσετε τότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

3.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ και $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

4.

5.

ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overline{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overline{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα \overline{AM} είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$

(Μονάδες 8)

6.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα $\overline{OA} = (4, -2)$ και $\overline{OB} = (1, 2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα \overline{OA} και \overline{OB} είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B , τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overline{AB} = (-3, 4)$ και $\overline{A\Gamma} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overline{O\Gamma}$ και \overline{AB} είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

(Μονάδες 10)

7.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7, 3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο.

(Μονάδες 10)

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

8.

ΘΕΜΑ 2

Έστω \vec{a}, \vec{b} δυο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν

$$3|\vec{a}| + |\vec{b}| = 9, \quad 2|\vec{a}| - |\vec{b}| = 1 \quad \text{και} \quad (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b} και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

(Μονάδες 13)

9.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -3)$ και $\vec{b} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την προβολή του \vec{a} πάνω στο \vec{b} .

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το \vec{a} σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το \vec{b} .

(Μονάδες 15)

10.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-5, 4)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(4, 1)$ και σημείο M της πλευράς AB για το οποίο ισχύει $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AB} .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M .

(Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο M έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, M .

(Μονάδες 10)

11.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, -1)$ και $\vec{b} = (3, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, \vec{a} \cdot \vec{b} + 2)$.

(Μονάδες 15)

12.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 3)$ και $\vec{b} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα \vec{u} και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 15)

13.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{b} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

(Μονάδες 10)

β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a}^2 \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \cdot \vec{a}$.

(Μονάδες 15)

14.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} με $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ και $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} , \vec{b} και κατόπιν την τιμή της παράστασης

$$\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot (2\vec{b})$$

(Μονάδες 10)

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a} - 2\vec{b}$ και $\vec{b} + 2\vec{a}$.

(Μονάδες 15)

15.

ΘΕΜΑ 2

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος \vec{u} .

(Μονάδες 9)

16.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha+1, 3), B(\alpha, 4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha+4), \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overline{AB}, \overline{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha=1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overline{A\Gamma} = \lambda \overline{AB}$

(Μονάδες 7)

17.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$5\overline{P\Lambda} = 2\overline{PK} + 3\overline{PM}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει

$$2\overline{A\Lambda} + 3\overline{B\Lambda} + 2\overline{MB} = \overline{AK} + \overline{AM} + \overline{BK}$$

όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

(Μονάδες 15)

18.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} με $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| = 4$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{b} + 2\vec{a} = \vec{0}$.

(Μονάδες 15)

19.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , \vec{b} με $|\vec{a}| = 1$, $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 7$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

α) Να υπολογίσετε τα \vec{a}^2 και $|\vec{b}|$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + 2\vec{b}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{a} + 2\vec{b}$ στο διάνυσμα \vec{b} .

(Μονάδες 10)

20.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (1, 7)$ και $\vec{b} = (2, 4)$.

α) Να βρεθεί η προβολή του \vec{a} πάνω στο \vec{b} .

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το \vec{a} σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο \vec{b} .

(Μονάδες 15)

21.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου \vec{i} και \vec{j} είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των \vec{AB} και \vec{BG} .

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και G μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

22.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\overline{AE} = \frac{2}{5}\overline{AD}$, $\overline{AZ} = \frac{2}{7}\overline{A\Gamma}$.

α) Να γράψετε τα διανύσματα \overline{EZ} και \overline{ZB} ως γραμμικό συνδυασμό των \overline{AB} και \overline{AD} .

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

23.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overline{AD} = 2\overline{AB} + 5\overline{A\Gamma}$ και $\overline{AE} = 5\overline{AB} + 2\overline{A\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα \overline{DE} ως γραμμικό συνδυασμό των \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα \overline{DE} και $\overline{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

24.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\overline{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$ και $\overline{A\Gamma} = (1, 6)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα \overline{AB} και $\overline{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overline{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

25.

ΘΕΜΑ 2

Έστω τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} για τα οποία: $2|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{a} + \vec{b}$ και $\vec{a} - \vec{b}$

(Μονάδες 15)

26.

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ABΓ είναι: $\overline{AB} = (-4, -6)$, $\overline{AG} = (2, -8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overline{AM} , όπου AM είναι η διάμεσος του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία \hat{A} είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ABΓ επιπλέον ισχύει $A(3,1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του B και Γ.

(Μονάδες 8)

27.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ με $\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{a} + \vec{\beta}$ και $k\vec{a} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του k.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{a} + \vec{\beta}$.

(Μονάδες 7)