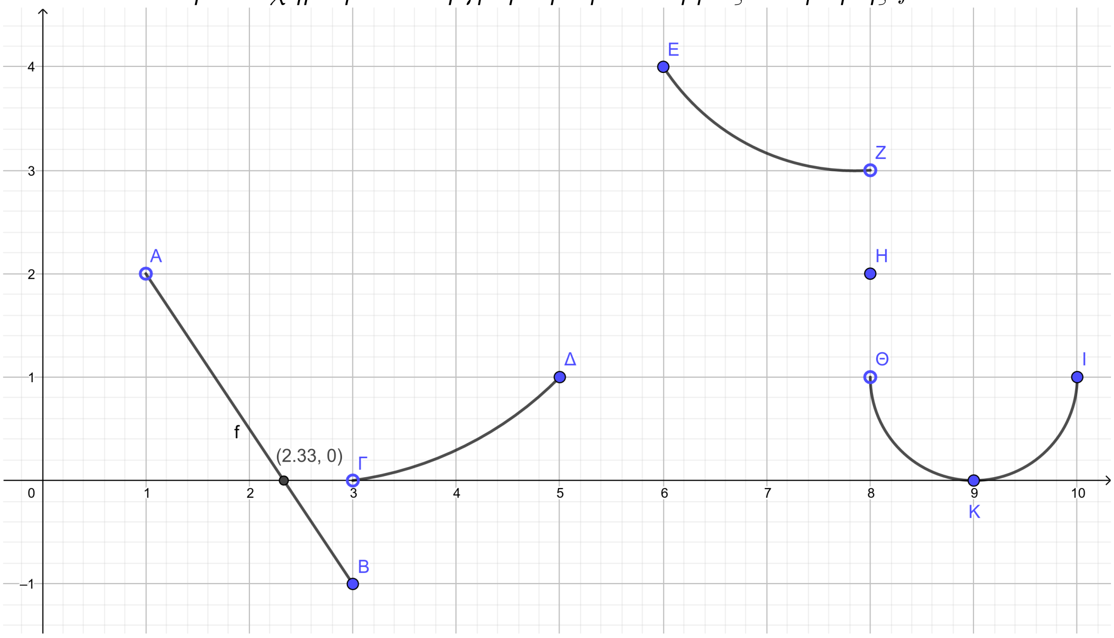
Ωριαίο Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ' Λυκείου Προσανατολισμού
Κυριακή 18/11/2018

Θεμα Α' *Θεωρούμε τους αριθμούς $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Να διαπιστώσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή όχι* ***αιτιολογώντας την επιλογή σας*** *όταν δώσετε καταφατική απάντηση ή* ***δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα ή μία απόδειξη*** *σε αντίθετη περίπτωση.*

1. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, b]$, τότε η f θα πάρει ακριβώς μία φορά όλες τις τιμές μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$.*
2. *Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.*
3. *Η εικόνα ενός διαστήματος (a, b) μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης είναι ένα διάστημα της μορφής (c, d).*
4. *Αν η εικόνα του $[a, b]$ μέσω μίας συνάρτησης είναι διάστημα, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a, b]$.*
5. *Αν f, g δύο συναρτήσεις τέτοιες, ώστε: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ και $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$, τότε και $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c$*
6. *Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και θετική στο $(0, +\infty)$, τότε ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$*
7. *Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, τότε όταν το x αυξάνεται απεριόριστα οι εικόνες της $f(x)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.*
8. *Δίνεται ότι $g(x) < f(x) < h(x), \forall x \in (a, b) \cup (b, c)$ και ισχύουν: $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \lim\limits_{x\to b} h(x) = m$, τότε θα ισχύει ότι και $\lim\limits_{x\to b} f(x) = m$.*
9. *Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu(x)}{x} = 1$.*
10. *Μία ακολουθία είναι μία πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς εκτός του 0.*

Θεμα Β' *Στο επόμενο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.*



B1. *Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.*
B2. *Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:*

α) $\lim_{x\to 1} f(x)$ ***β)*** $\lim_{x\to 3} f(x)$ ***γ)*** $\lim_{x\to 5} f(x)$ ***δ)*** $\lim_{x\to 9} f(x)$
Για όσα όρια δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Β3. *Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:*
α) $\lim_{x\to 2,33} \frac{1}{f(x)}$ ***β)*** $\lim_{x\to 9} \frac{1}{f(x)}$
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
Β4. *Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(1,3]$, στο διάστημα $(8,10)$ και στο διάστημα $(2,4)$.*

Θεμα Γ′ ***Γ1.*** *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $ημx - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.*

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Γ2. *α. Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση:*

$$f^2(x) - 2f(x) + συν^2 x = 0, \quad x \in [0,2\pi]$$

και έχουν μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

β. Αν f συνεχής συνάρτηση του προηγουμένου ερωτήματος να αποδειχθεί ότι η C_f (γραφική παράσταση της f) τέμνει την $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,\pi)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Θεμα Δ′ *Δίνεται η συνάρτηση $f : (-1,+\infty)$ με $f((-1,+\infty)) = \mathbb{R}$, η οποία είναι 1-1 και ικανοποιεί τις σχέσεις :*

$$f(x) \le x, \ \forall\ x > -1 \tag{1}$$

και

$$f^{-1}(x) \le e^x - 1, \ \forall\ x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Να αποδειχθεί ότι:
Δ1. *Η γραφική παράσταση της αντίστροφης συναρτησης f^{-1} βρίσκεται πάνω από τη διχοτόμο 1ου - 3ου τεταρτημορίου.*
Δ2. $f(x) \ge \ln(x+1), \ \forall\ x > -1.$
Δ3. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x) = 0.$
Δ4. *Αν επιπλέον οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι συνεχείς, τότε υπάρχει $\xi \in [1,2]$ ώστε:*

$$(\xi - 1)f^{-1}(\xi) + (2-\xi)f(\xi) = \xi^2 - 2\xi + 2$$

Καλή επιτυχία.