Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού.

Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να έχει διαφορετικές οπτικές.
Καθεμία συμπληρώνει τις υπόλοιπες και όλες μαζί είναι αναγκαίες για την πλήρη κατανόηση της έννοιας.

α) Αλγεβρική οπτική

Ο αριθμός $-\alpha$ ΔΕΝ είναι απαραίτητα αρνητικός, όπως και ο α ΔΕΝ είναι αναγκαία θετικός (πχ $-(-2)=2>0$ ή $-(2)=-2<0$ ή $-0=0$)

Ορισμός.
$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

πχ $|2| \overset{2\geq 0}{=} 2$ ή $|-\sqrt{2}| \overset{-\sqrt{2}<0}{=\!=} -(-\sqrt{2})=\sqrt{2}$ ή
$|0|=0$

Δηλαδή, η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού υπολογίζεται με τη διάκριση τριών περιπτώσεων:

α) Για κάθε θετικό αριθμό η απόλυτη τιμή του είναι ίση μ' αυτόν.

β) Για κάθε αρνητικό αριθμό η απόλυτη τιμή είναι ίση με τον αντίθετό του

γ) Για το 0 είναι 0.

Στις πρώτες δύο περιπτώσεις προκύπτει θετικός αριθμός.
Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο

ο αριθμός που προκύπτει χωρίς το πρόσημό του ΟΜΩΣ αυτό ΔΕΝ λειτουργεί όταν έχουμε μεταβλητή ή άγνωστο, διότι για παράδειγμα ΔΕΝ μπορούμε να γράψουμε πάντα $|-x| = x$ διότι μπορεί $x<0$ οπότε $|-x| = (-x)$ διότι $-x>0$

Σε κάθε περίπτωση, πάντως η μετατροπή της απόλυτης τιμής μπορεί να γίνει διακρίνοντας περιπτώσεις για τον αριθμό.

ΘΥΜΟΜΑΣΤΕ ότι ΠΑΝΤΑ η απόλυτη τιμή οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 0. Με μηδέν να είναι μόνο όταν είναι ο αριθμός 0. Δηλαδή $|x|=0$ αν και μόνο αν $x=0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ και αλγεβρικές αποδείξεις

1) $|\alpha|=|-\alpha|\geq 0$

Αν $\alpha>0 \Rightarrow |\alpha| \overset{\alpha>0}{=\!=} \alpha$, $|-\alpha| \overset{-\alpha<0}{=\!=} -(-\alpha)=\alpha=|\alpha|$

Αν $\alpha<0 \Rightarrow |\alpha| \overset{\alpha<0}{=\!=} -\alpha$, $|-\alpha| \overset{-\alpha>0}{=\!=} -\alpha=|\alpha|$

2) $-\alpha \leq |\alpha|$ και $\alpha \leq |\alpha|$

Αν $\left.\begin{array}{l}\alpha\geq 0 \Rightarrow |\alpha|=\alpha \\ \Rightarrow -\alpha\leq 0\end{array}\right\}$ $-\alpha\leq 0\leq|\alpha|=\alpha \Rightarrow$ $-\alpha\leq|\alpha|$ και $|\alpha|\geq\alpha$

Αν $\left.\begin{array}{l}\alpha\leq 0 \Rightarrow |\alpha|=-\alpha\geq 0 \\ \Rightarrow \alpha\leq 0\leq|\alpha|=-\alpha\end{array}\right\}$ $|\alpha|\geq-\alpha$, $|\alpha|\geq\alpha$

3) $\boxed{-|a| \le a \le |a|}$

Αν $a \ge 0$ τότε $|a| = a \Rightarrow -|a| = -a \le 0$

$\Rightarrow -|a| = -a \le 0 \le a = |a|$

$\Rightarrow -|a| \le a \le |a|$

Αν $a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow -|a| = -(-a) = a < 0$

$-|a| = -(-a) = a < 0 \le |a|$

$\Rightarrow -|a| = a \le |a|$

$\Rightarrow -|a| \le a \le |a|$

4) $\boxed{|a|^2 = a^2}$

Αν $a \ge 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} |a| &= a \ge 0 \\ |a| &= a \end{aligned}\right\}$ πολλαπλασιασμός ισοτήτων κατά μέλη

$|a| \cdot |a| = a \cdot a \Rightarrow |a|^2 = a^2$

Αν $a < 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} |a| &= -a > 0 \\ |a| &= -a \end{aligned}\right\}$ ομοίως

$\Rightarrow |a| \cdot |a| = (-a)(-a) \Rightarrow |a|^2 = a \cdot a = a^2$

5) $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$

Αν $a \cdot \beta \ge 0$ τότε a, β ομόσημοι

δηλαδή είτε: $a \ge 0$ και $\beta \ge 0 \Rightarrow$

$|a\beta| = a\beta$, $|a| = a$, $|\beta| = \beta \Rightarrow$

$|a\beta| = a\beta = a \cdot \beta = |a| \cdot |\beta|$

είτε: $a \le 0$ και $\beta \le 0 \Rightarrow$

$|a\beta| = a\beta$, $|a| = -a$, $|\beta| = -\beta \Rightarrow$

$|a\beta| = a\beta = (-a)(-\beta) = |a| \cdot |\beta|$

Αν $a \cdot \beta \le 0$ τότε a, β ετερόσημοι και η απόδειξη ομοίως.

(συμπληρώστε την για εξάσκηση).

2

6) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$

<u>Απόδειξη 1</u>: Ομοίως με του γινομένου και περιπτώσεις

<u>Απόδειξη 2</u>: Με χρήση ιδιότητας 4, ορισμού

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>: Ισχύει $|\alpha| = \alpha \Rightarrow |\alpha|^2 = \alpha^2$

ΟΧΙ όμως ΠΑΝΤΑ

$|\alpha|^2 = \alpha^2 \Rightarrow |\alpha| = \alpha$

διότι μπορεί $\boxed{\alpha < 0}$

Γενικότερα $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ ok.

ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$

διότι μπορεί $\Rightarrow \alpha = -\beta$

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ αρκεί

διότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \geq 0$, $|\alpha|, |\beta| \geq 0$: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}$ αρκεί

από I4: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

το τελευταίο ισχύει από ιδιότητες δυνάμεων.

Ουσιαστικά, σ' αυτήν την απόδειξη κάναμε την εξής σειρά συλλογισμών:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \xRightarrow{I4} \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \text{ ή } \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = -\frac{|\alpha|}{|\beta|} \xRightarrow{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|, |\alpha|, |\beta| \geq 0} \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

Πρέπει, λοιπόν, να χρησιμοποιούμε με μεγάλη προσοχή όλες τις ιδιότητες.

<u>αποδειξη 3η</u> (Με χρήση της ΙΣ)

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \cdot \frac{|\beta|}{|\beta|} \overset{I}{=} \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \cdot |\beta| \cdot \frac{1}{|\beta|} \overset{IS}{=}$$

$$= \left|\frac{\alpha}{\cancel{\beta}} \cdot \cancel{\beta}\right| \cdot \frac{1}{|\beta|} = |\alpha| \cdot \frac{1}{|\beta|} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

7) Τριγωνική ανισότητα: $\big||\alpha|-|\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

<u>Αποδειξη 1η</u> με περιπτώσεις

Αν $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha+\beta \geq 0$

$|\alpha| = \alpha$, $|\beta| = \beta$ $|\alpha+\beta| = \alpha+\beta$

οπότε $|\alpha+\beta| = \alpha+\beta = |\alpha| + |\beta|$

Αν $\alpha, \beta < 0 \Rightarrow \alpha+\beta < 0 \Rightarrow -\alpha-\beta > 0, -(\alpha+\beta) > 0$

άρα θα ισχύει πάλι ισότητα, αφού $|\alpha+\beta| = |-(\alpha+\beta)|$

Αν $\alpha \geq 0 \geq \beta \Rightarrow |\alpha| = \alpha$, $|\beta| = -\beta$

και $|\alpha+\beta| = \alpha+\beta$ ή $|\alpha+\beta| = -(\alpha+\beta)$

αν $\alpha \geq -\beta \Rightarrow \alpha+\beta \geq 0$

$|\alpha+\beta| = \alpha+\beta = |\alpha| + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$

αν $|\alpha| \leq -\beta \Rightarrow \alpha \leq -\beta \Rightarrow \alpha+\beta \leq 0$

$|\alpha+\beta| = -\alpha-\beta = -|\alpha| + |\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Αν $\beta \geq 0 \geq \alpha$ ομοίως

<u>Απόδειξη 2η</u>: Έστω $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ $(|\alpha+\beta| \geq 0)$

(ιδιοτ ανισοτητων) $(|\alpha|^2 = \alpha^2)$

αρκεί $|\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$

αρκεί $(\alpha+\beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta|$

αρκεί $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha||\beta|$

αρκεί $\alpha\beta \leq |\alpha\beta|$ ισχύει

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha + \beta|$$

αρκεί $||\alpha| - |\beta||^2 \leq |\alpha+\beta|^2$

αρκεί $(|\alpha| - |\beta|)^2 \leq (\alpha+\beta)^2$

αρκεί $|\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

αρκεί $\alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

αρκεί $-|\alpha\beta| \leq \alpha\beta$

το οποίο ισχύει από Ι2

<u>Υπενθύμιση</u>: Για να είμαστε βέβαιοι ότι η μέθοδος "αρκεί" έδωσε σωστά όλα τα βήματα, ελέγχουμε ότι όλες οι συνεπαγωγές $\Longleftarrow$ είναι σωστές.

<u>Πράγματι</u>: Από Ι2 ισχύει

$$-|x| \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{για } x=\alpha\beta}$$

$$-|\alpha\beta| \leq \alpha\beta \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$-2|\alpha\beta| \leq 2\alpha\beta \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2|\alpha\beta| \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \xRightarrow{I4}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Longrightarrow$$

$$(|\alpha| - |\beta|)^2 \leq (\alpha+\beta)^2 \xRightarrow{I4}$$

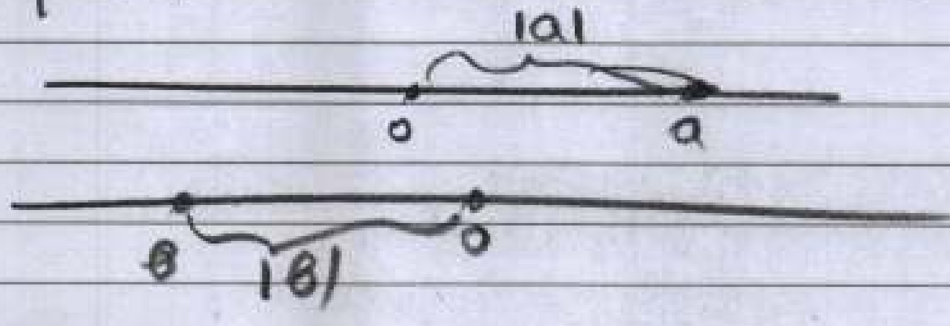
$$||\alpha| - |\beta||^2 \leq |\alpha+\beta|^2$$

$$|x-y| = \sqrt{(x-y)^2+(0-0)^2} = \sqrt{(x-y)^2}$$

β) Γεωμετρική οπτική

Η απόλυτη τιμή του αριθμού α είναι η απόσταση του στην ευθεία των πραγματικών αριθμών από το 0.

Προφανώς $|0|=0$ και $|\alpha|>0$ αν $\alpha \neq 0$.



$|\alpha| = |-\alpha|$ διότι δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόσταση από 0