

## **Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου**

**Κυριαζής Χρήστος**  
2ο ΓΕ.Λ. Αγίας Βαρβάρας  
[chriskyriazis@gmail.com](mailto:chriskyriazis@gmail.com)

**Πρωτοπαπάς Ελευθέριος**  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
[lprotopapas@math.ntua.gr](mailto:lprotopapas@math.ntua.gr)

### **Περίληψη**

Τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου θεωρούνται από τους περισσότερους μαθητές το δυσκολότερο μάθημα που καλούνται να δώσουν ώστε να επιτύχουν την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Το τρέχον σχολικό βιβλίο έχει γραφεί σχεδόν 20 χρόνια πριν και σε πολλές περιπτώσεις, με βάση τα θέματα των εξετάσεων, φαίνεται παρωχημένο σε επίπεδο ασκήσεων. Επιπλέον και σε επίπεδο θεωρίας, στο σχολικό βιβλίο, μπορούν να γίνουν χρήσιμες βελτιώσεις και συμπληρώσεις, οι οποίες αφορούν: ορισμούς, παραδείγματα, προτάσεις και αποδείξεις προτάσεων. Ειδικά για τις προτάσεις που δεν υπάρχουν ούτε ως αναφορά στο σχολικό βιβλίο, είναι συχνό το φαινόμενο οι μαθητές να τις χρησιμοποιούν είτε χωρίς απόδειξη (με άμεσο αποτέλεσμα βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις), είτε να τις αποδεικνύουν χάνοντας πολύτιμο χρόνο. Με αυτή τη σειρά των εργασιών προτείνουμε βελτιώσεις για τη θεωρία του σχολικού βιβλίου. Η εργασία αυτή παρουσιάστηκε στην 9η μαθηματική εβδομάδα στην Θεσσαλονίκη (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2017α) στο 34ο πανελλήνιο συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στη Λευκάδα (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2017β), στο 2ο πανελλήνιο συνέδριο των εκπαιδευτηρίων Πολύτροπη Αρμονία στους Δελφούς (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2018) και στην 10η μαθηματική εβδομάδα στην Θεσσαλονίκη (Κυριαζής και Πρωτοπαπάς, 2018α).

### **Εισαγωγή**

Η ενασχόληση των συναδέλφων μαθηματικών με τα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου και η χρήση του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016) ως κύριου οδηγού της διδασκαλίας αναδεικνύει τις ελλείψεις που έχει σε επίπεδο θεωρίας. Ασάφειες σε ορισμούς, απουσία παραδειγμάτων για την

αποσαφήνιση λεπτών και κρίσιμων σημείων, έλλειψη χρήσιμων προτάσεων αλλά και αποδείξεων σε προτάσεις του βιβλίου είναι μερικά από τα στοιχεία που συνθέτουν τις εν λόγω ελλείψεις. Πολλά από αυτά διδάσκονται από τον καθηγητή, ο οποίος υποδεικνύει στους μαθητές να τα γνωρίζουν ως θεωρία, ενώ στην περίπτωση χρήσης προτάσεων που δεν υπάρχουν στο σχολικό οι μαθητές επιβάλλεται να τις αποδείξουν, αν θέλουν να είναι σίγουροι ότι δεν θα έχουν βαθμολογικές απώλειες στις εξετάσεις.

Αυτές οι ελλείψεις έχουν ως αποτέλεσμα τη δημιουργία γνωστικών εμποδίων στους μαθητές. Αν συνυπολογίσουμε πως τα παιδιά βάζονται από μεθοδολογικές καθοδηγήσεις που τα κάνει να λειτουργούν μηχανικά, τότε μπορούμε να πούμε πως αλλοιώνεται η ουσιαστική σημασία του μαθήματος των μαθηματικών, αφού οι μαθητές δεν μαθαίνουν να σκέπτονται σωστά, ενώ και οι γνώσεις που αποκτούν συχνά δεν είναι επαρκείς για να τους συνοδεύσουν στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Θεωρούμε πως ένα σωστό θεωρητικό υπόβαθρο χωρίς κενά, που θα δομηθεί σταδιακά και ας μοιραστεί σε όλες τις τάξεις του Λυκείου, θα είναι αρωγός στην βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα. Και αυτό πρέπει να έχει ως αρχή και βασικό θεμέλιο του το σχολικό εγχειρίδιο. Χωρίς καμία διάθεση κριτικής αλλά με τη ματιά του παρατηρητή, θέλουμε μέσω αυτής της σειράς των εργασιών να επισημάνουμε κάποιες ελλείψεις που θεωρούμε σημαντικές για την κατανόηση του μαθήματος. Ίσως κάποιες από αυτές που θα επισημάνουμε φανούν υπερβολικές αλλά θεωρούμε ότι η πληρότητα ενός σχολικού βιβλίου επιβάλλει τέτοιες παρατηρήσεις.

## Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Σχόλιο 1: Στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2016) εξηγείται ο συμβολισμός

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1)$$

αλλά όχι επαρκώς, κατά τη γνώμη μας. Πουθενά δεν διευκρινίζεται ο ακριβής ρόλος του  $\mathbb{R}$ . Κάποιος μπορεί να εκτιμήσει ότι μας δείχνει ότι έχουμε πραγματική συνάρτηση και σε ποιο σύνολο παίρνει τιμές το  $y = f(x)$ . Επίσης, και ο ρόλος του συνόλου  $A$  δεν είναι απολύτως σαφής.

Για να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \sqrt{x}. \quad (2)$$

Αν δεν δοθεί κάτι επιπλέον θα γράφαμε

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3)$$

Όμως τι συμβαίνει αν μας δοθεί

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (4)$$

Είναι σαφές στον μαθητή ότι θέλουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης να είναι το  $[0,3]$ ;

Σχόλιο 2: Επιπλέον, δεν δίνεται καμία ερμηνεία για τον συμβολισμό

$$f : A \rightarrow B. \quad (5)$$

Θα ήταν χρήσιμο να υπάρχει μια διευκρίνιση ότι το  $A$  είναι το πεδίο ορισμού, ανεξαρτήτως αν η συνάρτηση μπορεί να ορισθεί σε ευρύτερο σύνολο και ότι γενικά το  $B$  είναι ένα υπερσύνολο του συνόλου τιμών. Εδώ να σημειώσουμε ότι το βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου (Ανδρεαδάκης κ.ά., 2015) έχει καλύτερη αναφορά και στα δύο παραπάνω σχόλια, στο σημείο όμως που βρίσκεται νομίζουμε ότι «χάνεται» και επιβάλλεται να υπάρξει αντίστοιχη αναφορά στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου.

Σχόλιο 3: Το σχολικό βιβλίο πρέπει να έχει μια παρατήρηση ότι είναι απαραίτητο πρώτα να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης και μετά να κάνουμε τυχόν απλοποίηση του τύπου συνάρτησης, διότι αυτό μπορεί να αλλοιώσει το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Κατσαργύρης κ.ά., 1992).

Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2} \quad (6)$$

έχει πεδίο ορισμού

$$A_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}, \quad (7)$$

ενώ αν κάποιος έκανε πρώτα την απλοποίηση

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} \quad (8)$$

υπήρχε περίπτωση να γράψει (λανθασμένα) ότι

$$A_f = \mathbb{R} - \{2\} !!! \quad (9)$$

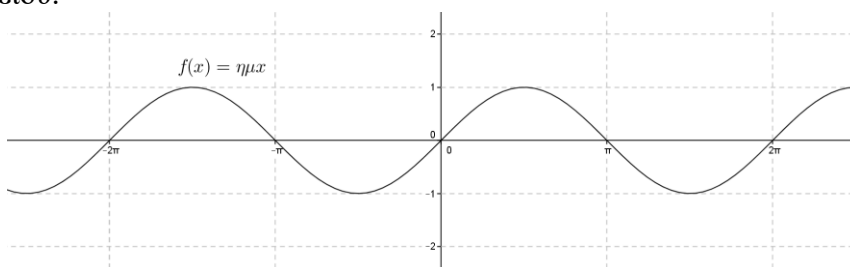
Σχόλιο 4: Επίσης, είναι αναγκαίο ο μαθητής να καταλάβει πλήρως ότι η έννοια της συνάρτησης δεν αφορά μόνο τον τύπο της, αφού μια συνάρτηση χαρακτηρίζεται πλήρως από τον τύπο και το πεδίο ορισμού της (Βλάμος, 1997). Η ύπαρξη ενός παραδείγματος στο βιβλίο θα βοηθούσε πολύ. Η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \eta \mu x, x \in \mathbb{R} \quad (10)$$

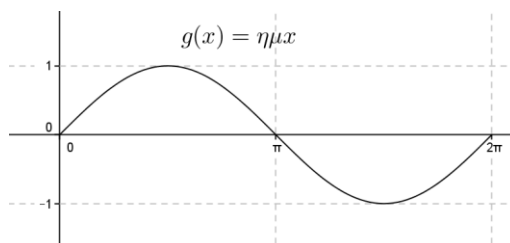
είναι διαφορετική από τη συνάρτηση  $g$  με

$$g(x) = \eta \mu x, x \in [0, 2\pi]. \quad (11)$$

Οι γραφικές παραστάσεις θα βοηθούσαν στην αποσαφήνιση της έννοιας, παρόλο που στο σχολικό εγχειρίδιο είναι στην επόμενη ενότητα, δεδομένου ότι οι συγκεκριμένες γραφικές παραστάσεις είναι γνωστές από την Β' Λυκείου.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της  $f$  με  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της  $g$  με  $g(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$

### Γραφική παράσταση συνάρτησης

Σχόλιο 5: Από τα γραφόμενα στο βιβλίο, ο μαθητής μάλλον θεωρεί δεδομένο ότι μπορεί να σχεδιάσει τη γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης (Μάστακας και Γαραζιώτης, 2008, Σπαθάρας, 2016). Κάτι τέτοιο δεν είναι αληθές, αφού για παράδειγμα η συνάρτηση  $f$  με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases} \quad (12)$$

αποτελείται από σημεία της μορφής  $(\alpha, 0)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ,  $(\beta, 1)$ ,  $\beta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , αλλά δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της  $f$ !!!

Σχόλιο 6: Στο σχολικό βιβλίο, για τη γραφική παράσταση της  $|f|$  αναφέρεται ότι αποτελείται από τα τμήματα της  $C_f$  που βρίσκονται πάνω από τον άξονα  $x'Ox$  και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'Ox$ , των τμημάτων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. Και τι γίνεται με τα σημεία που βρίσκονται πάνω στον άξονα  $x'Ox$ ;

## Ισότητα συναρτήσεων

Σχόλιο 7: Στις Πανελλήνιες εξετάσεις του 2016 ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν τον ορισμό της ισότητας δύο συναρτήσεων. Πολλοί μαθητές έγραψαν ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ίσες αν και μόνο αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο. Πού είναι το λάθος σε αυτό; Ο ορισμός της ισότητας των δύο συναρτήσεων  $f, g$  είναι:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} A_f = A_g \\ f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in A_f = A_g \end{cases} \quad (13)$$

Κάποιος μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι οι συναρτήσεις  $f, g$  με

$$f(x) = x^2, g(x) = x^4, \quad (14)$$

όταν ορίζονται στο

$$A = \{-1, 0, 1\} \quad (15)$$

είναι ίσες (Βλάμος, 1997), αφού ικανοποιούν τον ορισμό της ισότητας των συναρτήσεων, αλλά δεν ικανοποιούν τον «ορισμό» της ισότητας που συχνά δίνουν οι μαθητές. Βέβαια, το βιβλίο αναφέρει ρητά πως θα μιλάμε για συναρτήσεις των οποίων τα πεδία ορισμού είναι διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων. Όμως αυτή η απλούστευση κάνει καλό τελικά; Οι μαθητές πολύ συχνά συγχέουν την ισότητα των τιμών για κάθε  $x$  που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού με την ισότητα των τύπων, κάτι το οποίο είναι απόρροια της υπόθεσης ότι μιλάμε για συναρτήσεις των οποίων τα πεδία ορισμού είναι διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων.

Σχόλιο 8: Από τα πιο χαρακτηριστικά λάθη στην ισότητα των συναρτήσεων είναι η χρήση ισοτήτων χωρίς κάποιος να λαμβάνει υπόψη του τα πεδία ορισμού (τους περιορισμούς).

Για παράδειγμα είναι συχνό φαινόμενο ο μαθητής να χαρακτηρίζει ως ίσες (Σπαθάρης, 2016) τις συναρτήσεις  $f, g$  και  $h, \varphi$  με

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, g(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad (16)$$

και

$$h(x) = \ln x^2, \varphi(x) = 2 \ln x, \quad (17)$$

σκεπτόμενος τις αντίστοιχες ιδιότητες από προηγούμενες τάξεις χωρίς να θυμάται και τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν. Ένα σχόλιο ότι η εύρεση του πεδίου ορισμού είναι το πρώτο βήμα σε κάθε περίπτωση που εμπλέκεται συνάρτηση, είναι απαραίτητο.

Σχόλιο 9: Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  που είναι ορισμένες στο  $A$ . Δεν ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x)g(x) = 0, \forall x \in A \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in A \text{ ή } g(x) = 0, \forall x \in A. \quad (18)$$

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις  $f, g$  με

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}, \quad (19)$$

τότε το γινόμενο τους ισούται με μηδέν, χωρίς να είναι οι μηδενικές συναρτήσεις.

Η σωστή ισοδυναμία είναι:

$$f(x)g(x) = 0, \forall x \in A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, x \in B \\ \text{και} & \text{με } B \cup \Gamma = A, \\ g(x) = 0, x \in \Gamma \end{cases} \quad (20)$$

αφού σε κάποια στοιχεία του  $A$  (στα στοιχεία του  $B \subseteq A$ ) μηδενίζεται η  $f$  και σε κάποια στοιχεία του  $A$  (στα στοιχεία του  $\Gamma \subseteq A$ ) μηδενίζεται η  $g$ .

Σχόλιο 10: Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  που είναι ορισμένες στο  $A$ . Λανθασμένη είναι η χρήση των ακόλουθων δύο ισοδυναμιών:

$$f^2(x) = g^2(x), \forall x \in A \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x), \forall x \in A \quad (21)$$

και

$$|f(x)| = |g(x)|, \forall x \in A \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x), \forall x \in A. \quad (22)$$

Πράγματι αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις  $f, g$  με

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -\sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}, \quad (23)$$

έχουμε ότι οι απόλυτες τιμές τους είναι ίσες ενώ οι συναρτήσεις δεν είναι ούτε ίσες ούτε αντίθετες.

Η σωστή ισοδυναμία είναι:

$$f^2(x) = g^2(x), \forall x \in A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), x \in B \\ \text{και} & \text{με } B \cup \Gamma = A, \\ f(x) = -g(x), x \in \Gamma \end{cases} \quad (24)$$

αφού σε κάποια στοιχεία του  $A$  (στα στοιχεία του  $B \subseteq A$ ) οι τιμές των  $f, g$  είναι ίσες και σε κάποια στοιχεία του  $A$  (στα στοιχεία του  $\Gamma \subseteq A$ ) είναι αντίθετες.

Κάτι αντίστοιχο ζητήθηκε στις Πανελλήνιες εξετάσεις του 2016 και οδήγησε πολλούς μαθητές σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

Σχόλιο 11: Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  που είναι ορισμένες στο  $A$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$f^2(x) + g^2(x) = 0, \forall x \in A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \forall x \in A \\ \text{και} \\ g(x) = 0, \forall x \in A \end{cases}, \quad (25)$$

αφού το άθροισμα δύο μη αρνητικών πραγματικών ποσοτήτων κάνει μηδέν μόνο όταν οι ποσότητες μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Είναι φανερό ότι τα λάθη στα σχόλια 9, 10, 11 προκύπτουν διότι αφενός μεν οι μαθητές επεκτείνουν τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών στις πραγματικές συναρτήσεις, αφετέρου δε η χρήση των συνδέσμων «ή», «και» είναι ουσιώδης. Παρατηρείστε ότι παρανοήσεις προκύπτουν εκεί που στους πραγματικούς αριθμούς οι ιδιότητες έχουν «ή» ...

### Πράξεις συναρτήσεων

Σχόλιο 12: Όταν θέλουμε να ορίσουμε μια νέα συνάρτηση ως πράξη δύο γνωστών συναρτήσεων  $f, g$ , είναι απαραίτητη η εύρεση των πεδίων ορισμού των  $f, g$ , για να έχουμε τη δυνατότητα να διερευνήσουμε αν μπορεί να ορισθεί η πράξη ανάμεσα στις  $f, g$ , βρίσκοντας την τομή των πεδίων ορισμού. Για παράδειγμα, για τις συναρτήσεις  $f, g$  με

$$f(x) = \ln x, g(x) = \sqrt{-x}, \quad (26)$$

έχουμε

$$A_f = (0, +\infty), A_g = (-\infty, 0], \quad (27)$$

άρα

$$A_f \cap A_g = \emptyset, \quad (28)$$

δηλαδή δεν ορίζονται πράξεις ανάμεσα στις  $f, g$ .

Είναι χρήσιμο να καταλάβουν οι μαθητές ότι υπάρχει λάθος αν γράψουν:

$$A_{f+g} = A_f \cap A_g = \emptyset, \quad (29)$$

άρα δεν ορίζονται πράξεις ανάμεσα στις  $f, g$ , διότι έχουν γράψει ότι το πεδίο ορισμού της πρόσθεσης είναι το κενό σύνολο!!!

### Σύνθεση συναρτήσεων

Σχόλιο 13: Ένα ανύποπτο πρόβλημα αφορά τον ορισμό της σύνθεσης δύο συναρτήσεων. Στο σχολικό βιβλίο, χρησιμοποιείται μπλε πλαίσιο και τίτλος

για τον ορισμό, μέσα στο οποίο δεν υπάρχει αναφορά στο πεδίο ορισμού της σύνθεσης. Παρόμοιο πρόβλημα υπάρχει και στον ορισμό των πράξεων δύο συναρτήσεων, κάτι το οποίο δεν είναι τόσο έντονο, αφού οι εν λόγω ορισμοί δεν έχουν τοποθετηθεί σε γκρι πλαίσιο.

Σχόλιο 14: Επιπλέον, όπως και στις πράξεις των συναρτήσεων, πρέπει να προσέξουμε πώς θα γράψουμε το πεδίο ορισμού. Πρώτα πρέπει να διερευνήσουμε αν μπορεί να ορισθεί η σύνθεση ανάμεσα στις  $f, g$ , βρίσκοντας το κατάλληλο σύνολο

$$\{x \in A_g : g(x) \in A_f\} \quad (30)$$

ή

$$\{x \in A_f : f(x) \in A_g\}. \quad (31)$$

Για παράδειγμα για τις συναρτήσεις  $f, g$  με

$$f(x) = \ln(-x), g(x) = \sqrt{x}, \quad (32)$$

έχουμε

$$A_f = (-\infty, 0), A_g = [0, +\infty), \quad (33)$$

άρα

$$\{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 : \sqrt{x} < 0\} = \emptyset, \quad (34)$$

δηλαδή δεν ορίζεται η σύνθεση της  $f$  με την  $g$ .

Προσέξτε ότι είναι λάθος να γράψουμε:

$$A_{g \circ f} = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 : \sqrt{x} < 0\} = \emptyset, \quad (35)$$

οπότε δεν ορίζεται η σύνθεση της  $f$  με την  $g$ , διότι έχουμε γράψει ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το κενό σύνολο.

## Μονοτονία

Σχόλιο 15: Μιλώντας για τη μονοτονία θα διατυπώσουμε καταρχήν το ερώτημα: γιατί ο ορισμός της γνησίως αύξουσας συνάρτησης (ή της γνησίως φθίνουσας) να δίνεται σε διάστημα (Κατσαργύρης κ.ά., 1992, Παντελίδης, 1998); Αφού ισχύει για οποιοδήποτε σύνολο ...

Γνωρίζουμε (από τον ορισμό του σχολικού βιβλίου) ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα  $\Delta$  αν για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \quad (36)$$



Προτείνουμε την προσθήκη των προτάσεων 1 ως 5 μαζί με τις αντίστοιχες αποδείξεις, για την καλύτερη κατανόηση της μονοτονίας.

Πρόταση 1: Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα  $\Delta$  με  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2. \quad (37)$$

Απόδειξη

Έστω ότι  $x_1 \geq x_2$ .

Τότε αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta$  προκύπτει ότι:

$f(x_1) \geq f(x_2)$ , που είναι άτοπο, άρα  $x_1 < x_2$ .

Από την πρόταση 1 και τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης ισχύει η πρόταση 2.

Πρόταση 2: Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα  $\Delta$  με  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2). \quad (38)$$

Με παρόμοια διαδικασία αποδεικνύονται οι προτάσεις 3, 4, 5.

Πρόταση 3: Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε διάστημα  $\Delta$  με  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2). \quad (39)$$

Πρόταση 4: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα  $\Delta$  και  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad (40)$$

Πρόταση 5: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε διάστημα  $\Delta$  και  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η ισοδυναμία:

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \quad (41)$$

Οι προτάσεις (2), (3), (4), (5) μας επιτρέπουν να λύνουμε ανισώσεις της μορφής

$$f(g(x)) > f(h(x)) \text{ ή } f(g(x)) \geq f(h(x)), \quad (42)$$

όταν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Το σχολικό έτος 2016-2017 που διανύουμε, μετά από πολλά χρόνια, οι εξεταζόμενοι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις

προτάσεις αυτές χωρίς απόδειξη, κατόπιν οδηγίας από το Υπουργείο Παιδείας (ΥΠΕΠΘ, 2017).

Σχόλιο 16: Με αφορμή το σχόλιο 15, έχουμε ακούσει αλλά είναι και γραμμένο σε επίσημα έντυπα ότι όταν σε ορισμό υπάρχει η λέξη «όταν» (συνεπαγωγή) αυτό έχει την έννοια του «αν και μόνο αν» (ισοδυναμία). Αυτό προφανώς και δεν ισχύει. Όταν κάπου γράφεται «όταν» σημαίνει όταν. Αν ισχύει το «αν και μόνο αν», αυτό προκύπτει μόνο με απόδειξη. Θεωρούμε χρήσιμο αφενός μεν να υπάρξει η προσθήκη των προτάσεων 1 ως 5, αφετέρου δε να γίνει καταγραφή μερικών παραδειγμάτων τα οποία να αναδεικνύουν τη διαφορά των ορισμών των γνησίως μονότονων συναρτήσεων με τις προτάσεις 1 ως 5.

Σχόλιο 17: Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\Delta$ . Δεν είναι απαραίτητο ότι υπάρχει διάστημα της μορφής  $(\alpha, \beta)$  στο οποίο η συνάρτηση  $f$  να είναι γνησίως μονότονη (Brand, 1984, Ντζιώρας, 1993). Κάτι τέτοιο δεν «φαίνεται φυσιολογικό». Όμως για τη συνάρτηση  $f$  με τύπο

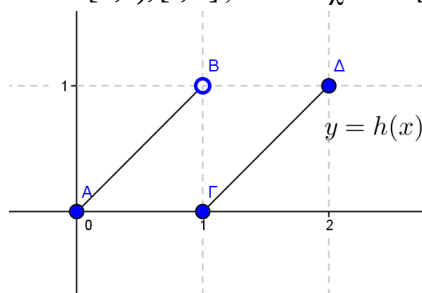
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος} \end{cases} \quad (43)$$

δεν υπάρχει αυτή η «ιδιότητα».

Σχόλιο 18: Επίσης, αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $A$  και  $B$  δεν είναι γνησίως αύξουσα και στο  $A \cup B$  (Μπουνάκης, 2009, Παντελίδης, 1998). Η συνάρτηση  $h$  με

$$h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (44)$$

είναι γνησίως αύξουσα στα  $[0,1)$ ,  $[1,2]$ , αλλά όχι στο  $[0,2]$ .



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της  $h$

Πρόταση 6: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως μονότονη στο  $A$ , τότε η εξίσωση  $f(x) = k$  έχει μία το πολύ ρίζα για οποιοδήποτε  $k \in \mathbb{R}$ .

Απόδειξη

Θεωρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ .

Έστω ότι η εξίσωση  $f(x) = k$  έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 < x_2$ , δηλαδή

$$f(x_1) = f(x_2) = k, \quad (45)$$

που είναι άτοπο, αφού λόγω του ορισμού της γνησίως αύξουσας συνάρτησης θα έπρεπε να ισχύει η (36), οπότε εξίσωση  $f(x) = k$  έχει μία το πολύ ρίζα για οποιοδήποτε  $k \in \mathbb{R}$ .

Ομοίως αποδεικνύεται αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Πρόταση 7: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως μονότονη στο  $A$  και η εξίσωση  $f(x) = k$ , με  $k \in \mathbb{R}$  έχει ρίζα το  $x_0 \in A$ , αυτή θα είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Πρόταση 8: Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $-f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

Απόδειξη

Αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) > -f(x_2), \quad (46)$$

δηλαδή η συνάρτηση  $-f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η πρόταση 9.

Πρόταση 9: Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $-f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Πρόταση 10: Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε και η συνάρτηση  $f + g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Απόδειξη

Αφού οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες στο  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2), \quad (47)$$

δηλαδή η συνάρτηση  $f + g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Πρόταση 11: Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε και η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Απόδειξη

Αφού οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι γνησίως αύξουσες στο  $\Delta$ , τότε για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2), \quad (48)$$

αφού  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

Συνεπώς η συνάρτηση  $f \cdot g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ .

Παρόμοιες προτάσεις με τις 10, 11 ισχύουν αν έχουμε γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις ή οποιονδήποτε επιτρεπτό συνδυασμό πράξεων.

Οι προτάσεις 8, 9, 10, 11 είναι πολύ χρήσιμες, διότι σε πολλές περιπτώσεις μπορεί εύκολα να αποφανθεί ο μαθητής για τη μονοτονία μιας συνάρτησης, χωρίς τη συνεχή χρήση ορισμού.

## Ακρότατα

Σχόλιο 18: Είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί η διαφορά μεταξύ φράγματος και ακρότατου.

Ορισμός: Η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει αριθμός  $m$  τέτοιος ώστε

$$f(x) \geq m, \text{ για κάθε } x \in A. \quad (49)$$

Το  $m$  γίνεται ελάχιστο αν υπάρχει  $x_1 \in A$  έτσι ώστε  $f(x_1) = m$ .

Ορισμός: Η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται πάνω φραγμένη αν υπάρχει αριθμός  $M$  τέτοιος ώστε

$$f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in A. \quad (50)$$

Το  $M$  γίνεται μέγιστο αν υπάρχει  $x_2 \in A$  έτσι ώστε  $f(x_2) = M$ .

Ορισμός: Η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται φραγμένη αν υπάρχουν αριθμοί  $m, M$  τέτοιοι ώστε

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in A.$$

Ας δούμε για παράδειγμα τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = (x-1)^2, x \in \mathbb{R} \quad (51)$$

ισχύουν οι ανισώσεις

$$f(x) \geq 0 \text{ και } f(x) \geq -5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (52)$$

Αυτό σημαίνει ότι ελάχιστη τιμή είναι το 0, το -5 ή και τα δύο; Η απάντηση είναι απλή, αφού δεδομένου του γεγονότος ότι

$$f(1) = 0 \quad (53)$$

ισχύει

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1), \quad (54)$$

άρα η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ακρότατο (ολικό ελάχιστο) το 0 για  $x=1$  (το οποίο είναι και φράγμα).

Αντιθέτως επειδή δεν υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  ώστε  $f(x) = -5$ , το -5 είναι ένα φράγμα της συνάρτησης  $f$ , αλλά όχι ακρότατο της  $f$ .

### Συνάρτηση ένα προς ένα

Πρόταση 12: Αν η συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη στο  $A$  είναι ένα προς ένα και  $x_1, x_2 \in A$ , ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \quad (55)$$

#### Απόδειξη

Έστω ότι  $x_1 \neq x_2$ .

Αφού η  $f$  είναι ένα προς ένα προκύπτει ότι  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , που είναι άτοπο, άρα  $x_1 = x_2$ .

Η πρόταση 12 είναι ισοδύναμη του ορισμού, χρησιμοποιείται κατά κόρον στην επίλυση των ασκήσεων και είναι μια απλή εφαρμογή του νόμου της αντιθετοαντιστροφής. Θεωρούμε ότι ο νόμος της αντιθετοαντιστροφής αξίζει τον κόπο να αναφερθεί δεδομένου ότι ισχύει σε κάθε πρόταση (μαθηματική ή μη μαθηματική) και είναι χρήσιμη και στα επόμενα (π.χ. παραγωγισιμότητα συνεπάγεται συνέχεια).

#### Νόμος της αντιθετοαντιστροφής

Στη μαθηματική λογική κάθε πρόταση έχει δεδομένα ή υπόθεση ( $Y$ ) και κάποιο ζητούμενο ή συμπέρασμα ( $\Sigma$ ), άρα έχει τη μορφή

$$Y \Rightarrow \Sigma. \quad (56)$$

Ο νόμος της αντιθετοαντιστροφής μετασχηματίζει την πρόταση  $Y \Rightarrow \Sigma$  στην ισοδύναμή της

$$\text{όχι } \Sigma \Rightarrow \text{όχι } Y \quad (57)$$

και η ισχύς της αποδεικνύεται πάντα με απαγωγή σε άτοπο και η λογική της απόδειξης αναδεικνύεται στην πρόταση 12.

Σύμφωνα λοιπόν με τον νόμο της αντιθετοαντιστροφής για την ένα προς ένα συνάρτηση, η άρνηση της  $f(x_1) \neq f(x_2)$  οδηγεί στην άρνηση της  $x_1 \neq x_2$ , δηλαδή ισχύει η πρόταση 12.

Σχόλιο 19: Πως αποδεικνύεται ότι μια συνάρτηση δεν είναι 1-1; Ο ασφαλέστερος τρόπος είναι να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα, διαφορετικά μπορεί ο μαθητής να οδηγηθεί σε λάθος σκέψεις.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = x^2 + 2x. \quad (58)$$

Η συνάρτηση  $f$  μπορεί να είναι 1-1, αλλά μπορεί και να μην είναι. Τα πάντα εξαρτώνται από το πεδίο ορισμού της. Πράγματι η  $f$  δεν είναι 1-1 αν  $A_f = \mathbb{R}$  ή  $A_f = (-\infty, 0]$ , ενώ είναι 1-1 αν  $A_f = [0, +\infty)$  ή  $A_f = [-1, 9)$ .

Αν κινηθούμε καθαρά αλγεβρικά, θα θεωρήσουμε  $x_1, x_2 \in A_f$  με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 + 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ή } x_1 = -x_2 - 2. \quad (59)$$

Η σχέση αυτή αναλόγως του  $A_f$  οδηγεί ή δεν οδηγεί σε συνάρτηση 1-1.

Πρόταση 13: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως μονότονη, θα είναι και ένα προς ένα.

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ .

Θεωρούμε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$ , οπότε

$$x_1 < x_2 \text{ ή } x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ ή } f(x_1) > f(x_2), \quad (60)$$

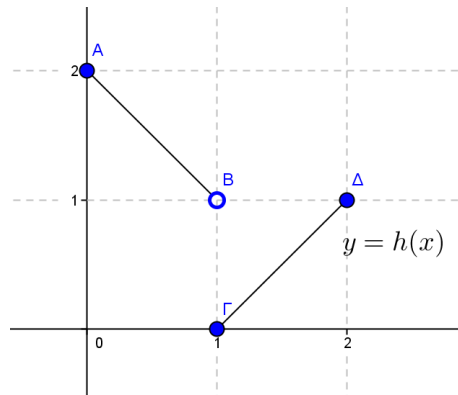
άρα

$$f(x_1) \neq f(x_2), \quad (61)$$

δηλαδή η  $f$  είναι ένα προς ένα.

Ομοίως αποδεικνύεται η πρόταση 13 αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A$ .

Σχόλιο 20: Συχνή απορία των μαθητών είναι αν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης 13. Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι 1-1 δεν είναι απαραίτητα γνησίως μονότονη (σχήμα 4). Οι μαθητές σε αυτό το στάδιο δεν είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της συνέχειας οπότε είναι μάλλον φυσιολογικό.



Σχήμα 4: Η συνάρτηση  $h$  είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως μονότονη

Πρόταση 14: Η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ένα προς ένα αν και μόνο για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

Απόδειξη

*Ευθύ*

Έστω ότι η  $f$  είναι ένα προς ένα και ότι υπάρχουν δύο λύσεις  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  της εξίσωσης  $f(x) = y$ , δηλαδή

$$f(x_1) = f(x_2) = y, \quad (62)$$

που είναι άτοπο, αφού η  $f$  είναι ένα προς ένα,

άρα η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει μία το πολύ λύση ως προς  $x$ .

Όμως  $y \in f(A)$ , οπότε η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ρίζα, η οποία θα είναι και μοναδική.

*Αντίστροφο*

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι ένα προς ένα, οπότε για κάποια  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  θα ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2) = y_1. \quad (63)$$

Τότε η εξίσωση

$$f(x) = y_1 \quad (64)$$

έχει δύο διαφορετικές λύσεις τις  $x_1, x_2 \in A$ , που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι ένα προς ένα.

Πρόταση 14: Η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την ίδια τεταγμένη.

Απόδειξη

Θεωρούμε  $x_1, x_2 \in A$  με  $x_1 \neq x_2$  και τα σημεία  $B(x_1, f(x_1)), \Gamma(x_2, f(x_2))$  της γραφικής της παράστασης της  $f$ .

*Ευθύ*

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι ένα προς ένα.

Έστω ότι τα σημεία  $B, \Gamma$  έχουν ίσες τεταγμένες, οπότε

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \quad (65)$$

που είναι άτοπο, άρα  $f(x_1) \neq f(x_2)$  για κάθε  $x_1, x_2 \in A$ ,

δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της  $C_f$  με ίσες τεταγμένες.

*Αντίστροφο*

Έστω ότι τα σημεία  $B, \Gamma$  δεν έχουν την ίδια τεταγμένη, δηλαδή  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , άρα η συνάρτηση  $f$  είναι ένα προς ένα (χρήση του ορισμού).

### Αντίστροφη συνάρτηση

Σχόλιο 21: Ο ορισμός της αντίστροφης μια συνάρτησης  $f$  είναι ασαφής στο σχολικό βιβλίο. Προτείνουμε να γραφεί ως εξής:

Έστω η 1-1 συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε αντίστροφη της συνάρτησης  $f$  ονομάζουμε την  $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$  για την οποία ισχύει  $f^{-1}(y) = x$ ,  $x \in A$ ,  $y \in f(A)$ , η οποία αντιστοιχίζει κάθε  $y \in f(A)$  στο μοναδικό  $x \in A$  για το οποίο ισχύει  $y = f(x)$ .

Σχόλιο 22: Για να βρούμε την αντίστροφη μια συνάρτησης  $f$ , πρώτα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης (σύνολο τιμών της  $f$ ) και μετά τον τύπο της. Στο βιβλίο δεν είναι ξεκάθαρο αυτό. Για παράδειγμα το επίσημο βιβλίο των λύσεων του σχολικού σε λυμένη άσκηση δεν το πράττει...

Σχόλιο 23: Για να αντιστρέφεται μια συνάρτηση  $f$  πρέπει να είναι 1-1. Προφανώς και η αντίστροφη συνάρτηση είναι 1-1.

Σχόλιο 24: Η ύπαρξη της αντίστροφης μιας συνάρτησης δεν εξαρτάται μόνο από τον τύπο της, αλλά και από το πεδίο ορισμού. Όπως έχουμε ήδη τονίσει η συνάρτηση ορίζεται πλήρως από τον τύπο και το πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f$  με

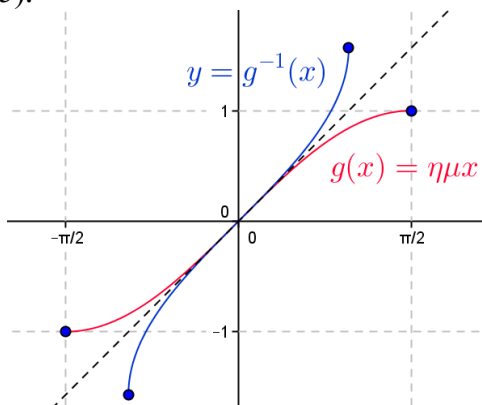
$$f(x) = \eta \mu x, x \in \mathbb{R} \quad (66)$$

δεν αντιστρέφεται, ενώ η συνάρτηση  $g$  με



$$g(x) = \eta\mu x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (67)$$

αντιστρέφεται (σχήμα 5).



Σχήμα 5: Οι γραφικές παραστάσεις της  $g$  και της αντίστροφής της

Σχόλιο 25: Η ύπαρξη της αντίστροφης μιας συνάρτησης δεν σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε και ένα κλειστό τύπο της συνάρτησης. Η συνάρτηση  $g$  της σχέσης (67) αντιστρέφεται, αλλά δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την αντίστροφή της. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο. Μπορεί να μην γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης, αλλά κάποια σχέση και να μπορούμε να βρούμε την αντίστροφή της. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  και

$$\varphi^3(x) + 2\varphi(x) = 3x, \quad (68)$$

δεν έχει κάποιο κλειστό τύπο που την εκφράζει, όμως η αντίστροφή της ορίζεται και ισχύει

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{x^3 + 2x}{3}, x \in \mathbb{R}. \quad (69)$$

Πρόταση 15: Αν η συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η συνάρτηση  $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$  είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη

Η  $f$  είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο  $A$ , άρα είναι και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θεωρούμε  $x_1, x_2 \in A$ , οπότε  $f(x_1), f(x_2) \in f(A)$  έτσι ώστε

$$f(x_1) < f(x_2). \quad (70)$$

Έστω επίσης ότι

$$x_1 \geq x_2. \quad (71)$$

Τότε αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$  έχουμε (από τον ορισμό) ότι

$$f(x_1) \geq f(x_2), \quad (72)$$

που είναι άτοπο.  
 συνεπώς ισχύει

$$x_1 < x_2 \quad (73)$$

και αφού

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)), x_2 = f^{-1}(f(x_2)), \quad (74)$$

ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)), \quad (75)$$

οπότε η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $f(A)$ .

Ομοίως αποδεικνύεται και η πρόταση:

Πρόταση 16: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως φθίνουσα, τότε και η συνάρτηση  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Πρόταση 17: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε τα κοινά σημεία των  $C_f, C_{f^{-1}}$  (αν υπάρχουν) ανήκουν στην ευθεία με εξίσωση  $y = x$ .

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει σημείο  $M(\alpha, \beta)$  που να ανήκει στις  $C_f, C_{f^{-1}}$ , οπότε  $\alpha, \beta \in A \cap f(A)$  και

$$f(\alpha) = \beta, \quad (76)$$

$$f^{-1}(\alpha) = \beta \Rightarrow f(f^{-1}(\alpha)) = f(\beta) \Rightarrow \alpha = f(\beta). \quad (77)$$

Έστω επίσης ότι το  $M$  δεν ανήκει στην ευθεία με εξίσωση  $y = x$ , δηλαδή  $\alpha \neq \beta$ .

- Αν  $\alpha > \beta$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει  $f(\alpha) > f(\beta)$ , η οποία λόγω των (76) και (77) γίνεται  $\beta > \alpha$ , απορρίπτεται.
- Αν  $\alpha < \beta$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει  $f(\alpha) < f(\beta)$ , η οποία λόγω των (76) και (77) γίνεται  $\beta < \alpha$ , απορρίπτεται.

Συνεπώς  $\alpha = \beta$  και το  $M$  ανήκει στις  $C_f, C_{f^{-1}}$ .

Πρόταση 18: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις  $f(x) = x$ ,  $f(x) = f^{-1}(x)$  είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

Καταρχήν γνωρίζουμε (πρόταση 15) ότι όταν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A$ , τότε και η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $f(A)$ .

❖ Αρχικά αποδεικνύουμε ότι αν υπάρχει  $x \in A \cap f(A)$  ώστε  $f(x) = x$ , τότε  $f(x) = f^{-1}(x)$ .

Πράγματι:

$$f(x) = x \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f^{-1}(x). \quad (78)$$

❖ Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αν υπάρχει  $x \in A \cap f(A)$  ώστε  $f(x) = f^{-1}(x)$ , τότε  $f(x) = x$ .

- Αν  $f(x) > x$  και αφού η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι:  
 $f(x) > x \Rightarrow f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(x) \Rightarrow x > f^{-1}(x) \Rightarrow x > f(x)$ , περίπτωση που απορρίπτεται.
- Αν  $f(x) < x$  και αφού η  $f^{-1}$  είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι:  
 $f(x) < x \Rightarrow f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x) \Rightarrow x < f^{-1}(x) \Rightarrow x < f(x)$ , περίπτωση που απορρίπτεται.

Επομένως  $f(x) = x$ .

Ομοίως αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 19: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις  $f^{-1}(x) = x$ ,  $f(x) = f^{-1}(x)$  είναι ισοδύναμες.

Σχόλιο 26: Προσέξτε ότι οι προτάσεις (17), (18), (19) ισχύουν μόνο για γνησίως αύξουσες συναρτήσεις. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^* \quad (79)$$

είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται, έχει  $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$  και

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*. \quad (80)$$

Όμως οι εξισώσεις  $f(x) = f^{-1}(x)$ ,  $f^{-1}(x) = x$ ,  $f^{-1}(x) = x$   $x \in \mathbb{R}^*$  δεν είναι ισοδύναμες (η πρώτη έχει άπειρες λύσεις και οι άλλες δύο από δύο λύσεις.)

Πρόταση 20: Έστω η ένα προς ένα συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Οι εξισώσεις  $f(x) = x$  και  $f^{-1}(x) = x$  είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

- ❖  $f^{-1}(x) = x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(x) \Rightarrow x = f(x)$ .
- ❖  $f(x) = x \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f^{-1}(x)$ .

Πρόταση 21: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow f(A)$  είναι γνησίως φθίνουσα και περιττή, τότε οι εξισώσεις  $f^{-1}(x) = -x$ ,  $f(x) = f^{-1}(x)$ ,  $x \in A \cap f(A)$  είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

- ❖ Αρχικά αποδεικνύουμε ότι αν υπάρχει  $x \in A \cap f(A)$  ώστε  $f^{-1}(x) = -x$ , τότε  $f(x) = f^{-1}(x)$ .

Έχουμε ότι

$$f(x) = -x \Rightarrow -f(x) = x, \quad (81)$$

όπου η  $f$  είναι περιττή, άρα

$$f(-x) = x \Rightarrow f(-x) = f(f^{-1}(x)) \quad (82)$$

και αφού η  $f$  είναι 1-1 προκύπτει

$$f^{-1}(x) = -x, \quad (83)$$

δηλαδή λόγω της (81) προκύπτει

$$f(x) = f^{-1}(x). \quad (84)$$

- ❖ Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αν υπάρχει  $x \in A \cap f(A)$  ώστε  $f(x) = f^{-1}(x)$ , τότε  $f^{-1}(x) = -x$ .

- Αν  $f(x) > -x \Rightarrow -f(x) < x$  και αφού η  $f$  είναι περιττή έχουμε ότι:

$$f(-x) < x \Rightarrow f(-x) < f(f^{-1}(x)).$$

Επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$-x > f^{-1}(x) \Rightarrow -x > f(x), \text{ περίπτωση που απορρίπτεται.}$$

- Αν  $f(x) < -x \Rightarrow -f(x) > x$  και αφού η  $f$  είναι περιττή έχουμε ότι:

$$f(-x) > x \Rightarrow f(-x) > f(f^{-1}(x)).$$

Επιπλέον η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$-x < f^{-1}(x) \Rightarrow -x < f(x), \text{ περίπτωση που απορρίπτεται.}$$

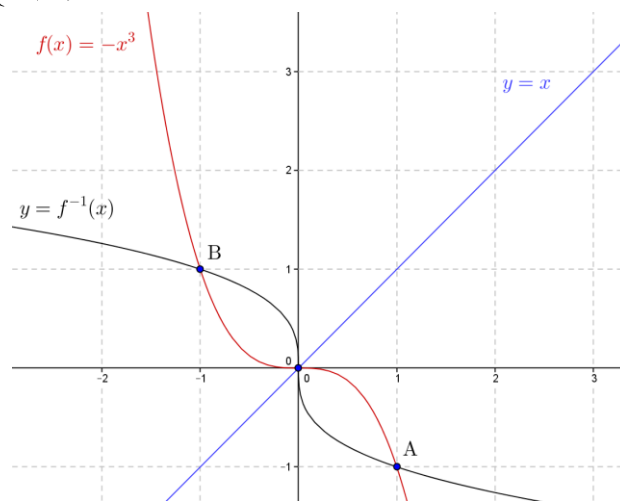
Επομένως  $f^{-1}(x) = -x$ .

Ως εφαρμογή της πρότασης 21 ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = -x^3, x \in \mathbb{R} \quad (85)$$

που είναι περιττή, γνησίως φθίνουσα,  $1-1$ , οπότε αντιστρέφεται με

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}. \quad (86)$$



Σχήμα 6: Η γραφική παράσταση των  $f, f^{-1}$  με  $f(x) = -x^3$

Από τις σχεδιασμένες γραφικές παραστάσεις είναι φανερό ότι οι  $C_f, C_{f^{-1}}$  δεν τέμνονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση  $y = x$ , αλλά πάνω στην ευθεία  $y = -x$  στα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(1,-1)$ ,  $B(-1,1)$ .

### Όριο συνάρτησης

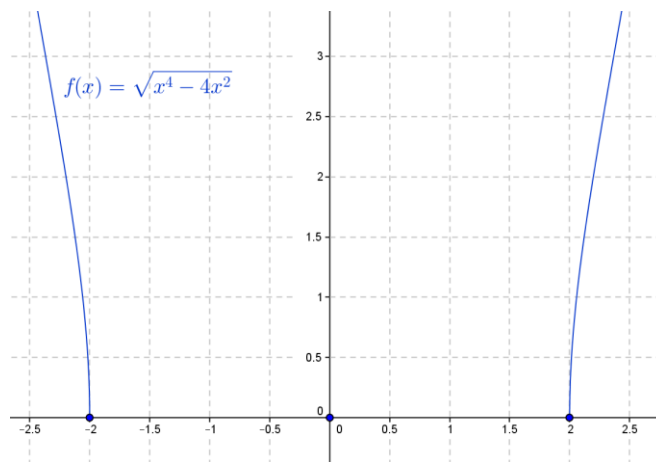
Σχόλιο 27: Όταν θέλουμε να βρούμε το όριο μιας συνάρτησης, το βιβλίο δεν κάνει σαφές ότι ο μαθητής είναι απαραίτητο πρώτα να βρει το πεδίο ορισμού της, για να δει αν έχει νόημα το όριο και μετά να προχωρήσει στον υπολογισμό του ορίου.

Αν για παράδειγμα δώσουμε τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2} \quad (92)$$

και ζητήσουμε το όριο στο 0, είναι βέβαιο ότι, αν όχι όλοι, οι περισσότεροι μαθητές θα πουν ότι το όριο είναι μηδέν κάνοντας μια απλή αντικατάσταση (Σχήμα 7). Στην πραγματικότητα το όριο αυτό δεν έχει νόημα, αφού το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι

$$A_f = (-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, +\infty) !!! \quad (93)$$



Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2}$

Φαινομενικά το πρόβλημα αυτό «λύνεται», γιατί στο σχολικό βιβλίο γίνεται η εξής σύμβαση:

«Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση έχει κοντά στο  $x_0$  μια ιδιότητα  $P$  θα εννοούμε ότι ισχύει μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

- α) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα  $P$ .
- β) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ .
- γ) Η  $f$  είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής  $(x_0, \beta)$ , έχει σ' αυτό την ιδιότητα  $P$ , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής  $(\alpha, x_0)$ .»

Η σύμβαση αυτή σε καμία περίπτωση δεν αναιρεί τη γνωστική έλλειψη που προκύπτει, η οποία έχει ως αιτία τη γενεσιουργό έννοια των ορίων, αυτή του σημείου συσσώρευσης.

Επιπλέον, σε κάποιες περιπτώσεις δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικά το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, αλλά μπορούμε να ελέγξουμε αν έχει νόημα η ύπαρξή ενός ορίου. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g$  με

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x^5 - 3x^3 + 5x + 1} \quad (94)$$

δεν μπορούμε να βρούμε αναλυτικά το πεδίο ορισμού της. Μπορούμε όμως να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του ορίου κοντά στο 1, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^5 - 3x^3 + 5x + 1) = 4 > 0, \quad (95)$$

οπότε

$$x^5 - 3x^3 + 5x + 1 > 0, \quad (96)$$

για  $x$  κοντά στο 1, άρα έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της συνάρτησης  $g$  στο 1.

Σχόλιο 28: Να σημειώσουμε ότι ο συμβολισμός  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  χρησιμοποιείται

μόνο αν υπάρχει το όριο. Στο σχολικό βιβλίο αυτό δεν είναι ευκρινές, αφού ακόμα και σε άσκηση ζητάει: «Να βρείτε όσα από τα όρια υπάρχουν ...»

και γράφει  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{x + 5} !!!$

Σχόλιο 29: Γνωρίζουμε ότι αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f, g$  στο  $x_0$ , τότε:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  για κάθε  $k \in \mathbb{R},$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$  εφόσον  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)},$  εφόσον  $f(x) \geq 0$  κοντά στο  $x_0.$

Πρέπει να είναι σαφές στους μαθητές ότι η «διάσπαση» των ορίων σε κάθε περίπτωση μπορεί να επιτευχθεί, μόνο αν υπάρχουν τα επιμέρους όρια!!!

Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις  $f, g$  με

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, g(x) = -\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*, \quad (97)$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad (98)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty, \quad (99)$$

δηλαδή δεν υπάρχουν τα όρια των  $f, g$  στο  $x_0 = 0$ , ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0. \quad (100)$$

Από το παράδειγμα αυτό είναι φανερό επίσης ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης, αφού υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad (101)$$

το οποίο δεν είναι ίσο με το άθροισμα των

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty. \quad (102)$$

Το πρόβλημα αυτό θα λυνόταν αν απλά η εκφώνηση του θεωρήματος ανέφερε: «... αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f, g$  στο  $x_0$  και είναι πραγματικοί, ...»

Χαρακτηριστικές είναι και οι ακόλουθες προτάσεις.

- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = k > 0$ , τότε δεν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{k}$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\sqrt{k}$ .
- Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = k > 0$ , τότε δεν ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -k$ .

Για την απόδειξη τους, θα χρησιμοποιήσουμε αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad (103)$$

της οποίας το όριο στο 0 δεν υπάρχει, ενώ

$$f^2(x) = |f(x)| = 1, x \in \mathbb{R} \quad (104)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1. \quad (105)$$

Είναι επίσης γνωστό ότι ισχύουν οι προτάσεις:

$$\bullet \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0, \text{ τότε ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0. \quad (106)$$

$$\bullet \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0, \text{ τότε ισχύει ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad (107)$$

### Απόδειξη

- Ισχύει ότι:

$$|f(x)| \leq |f(x)| \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

και αφού  $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)|) = \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$  από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

- Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0$ .

Επίσης:

$$|f(x)| \leq \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow -\sqrt{f^2(x)} \leq f(x) \leq \sqrt{f^2(x)}$$



και αφού  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( -\sqrt{f^2(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0$  από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

Ενδιαφέρον είναι ότι οι προτάσεις που διατυπώνονται στις (106), (107) υπάρχουν στις ερωτήσεις κατανόησης του πρώτου κεφαλαίου, ενώ θα ήταν πολύ χρήσιμο να ήταν μέρος της θεωρίας.

Σχόλιο 30: Η πρόταση που διατυπώσαμε στο σχόλιο 29 είναι αντιγραφή από το σχολικό βιβλίο και εμπεριέχει κακή διατύπωση. Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις  $f, g$  με:

$$f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - x - 2}, x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty), \quad (108)$$

και

$$g(x) = 2 - \sqrt{10 + 9x - x^2}, x \in A_g = [-1, 10]. \quad (109)$$

Τότε:

$$(f + g)(x) = 5 + \sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{10 + 9x - x^2}, x \in \{-1\} \cup [2, 10]. \quad (110)$$

Προφανώς ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2, \quad (111)$$

ενώ το όριο της συνάρτησης  $f + g$  στο  $-1$  δεν ορίζεται!!!

Το πρόβλημα όμως δεν σταματάει εδώ. Επικαλούμενοι τις συναρτήσεις που δίνονται στην (97) και λόγω των (98), (99) τα επιμέρους όρια στο  $0^+$ , αλλά το όριο της συνάρτησης  $f + g$  στο  $0^+$  δεν είναι ίσο με τη διαφορά των ορίων (είναι απροσδιόριστη μορφή  $\infty - \infty$ ). Γιατί υπάρχει το πρόβλημα; Προφανώς διότι τα όρια υπάρχουν, αλλά δεν είναι πραγματικοί αριθμοί... Με βάση όλα τα παραπάνω η εκφώνηση διορθώνεται συνολικά αν τα δεδομένα της εκφώνησης διατυπωθούν ως εξής: «Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων  $f, g$  στο  $x_0$ , τα οποία είναι πραγματικοί αριθμοί και οι συναρτήσεις ορίζονται στην ίδια περιοχή του  $x_0$ , υπάρχουν τα παρακάτω όρια και ισχύουν: ...»

Σχόλιο 31: Επίσης γνωρίζουμε ότι (1ο θεώρημα διάταξης):

$$\bullet \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0. \quad (112)$$

$$\bullet \text{ Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0, \text{ τότε } f(x) < 0 \text{ κοντά στο } x_0. \quad (113)$$

Το αντίστροφο των (112), (113) δεν ισχύει. Συγκεκριμένα ισχύουν ότι:

$$\bullet \text{ Αν } f(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0 \text{ και υπάρχει το όριο της } f \quad (114)$$

στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ .

- Αν  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ .

(115)

#### Απόδειξη

Έστω ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , οπότε λόγω της (113) έχουμε ότι  $f(x) < 0$  κοντά

στο  $x_0$  που είναι άτοπο, άρα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ .

Ομοίως αποδεικνύεται και η άλλη πρόταση.

Σχόλιο 32: Για τη διάταξη των ορίων (2ο θεώρημα διάταξης) στο σχολικό βιβλίο γράφει ότι αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων των  $f, g$  στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Το

θεώρημα αυτό ισχύει και αν  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , αφού:

$$f(x) < g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (116)$$

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι το 2ο θεώρημα της διάταξης ισχύει για πεπερασμένα όρια, ενώ δεν ισχύει για μη πεπερασμένα, χωρίς το σχολικό βιβλίο να κάνει αυτή τη διάκριση, όταν αναφέρει ότι για τα μη πεπερασμένα ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πεπερασμένων!!! Για παράδειγμα ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^4}, x \in (0,1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty. \quad (117)$$

Είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να διατάξουμε τα άπειρα!!! Η παρανόηση αυτή είναι πιθανό να κοστίζει σε καλούς μαθητές σε ερωτήσεις σωστού λάθους, όπως για παράδειγμα στις Πανελλαδικές Εξετάσεις του 2016 στο Α4. στο β ερώτημα.

Σχόλιο 33: Στο σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου δεν γίνεται καμία ξεκάθαρη αναφορά στο γεγονός ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται για ακτίνια και όχι για μοίρες. Η αναφορά αυτή γίνεται στην Άλγεβρα της Β' Λυκείου, θεωρούμε όμως ότι είναι απαραίτητο να υπάρξει μια σημείωση και στο βιβλίο της Γ' Λυκείου. Για παράδειγμα αν το  $x$  μετριέται σε μοίρες ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x^\circ)}{x} = \frac{\pi}{180}. \quad (118)$$

Σχόλιο 34: Από τη θεωρία του σχολικού βιβλίου γνωρίζουμε ότι αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0, g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχει το  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ , τότε ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ . Είναι εύκολο να αναρωτηθεί κάποιος γιατί η συνθήκη  $g(x) \neq u_0$  κοντά στο  $x_0$  είναι απαραίτητη.

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους

$$f(x) = 0 \quad (119)$$

και

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}. \quad (120)$$

Τότε

$$g(f(x)) = g(0) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (121)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1, \quad (122)$$

ενώ

$$\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \sin u}{u} = 0. \quad (123)$$

Πρόταση 24: Να αποδείξετε ότι αν  $\alpha \neq 0$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = 1$ .

Απόδειξη

Για τον υπολογισμό του ορίου θέτουμε  $\alpha x = u$ , οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

Πρόταση 25: Αν για τις συναρτήσεις  $f, g, h$  ισχύει

- $h(x) < f(x) < g(x)$  για κάθε  $x$  κοντά στο  $x_0$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ ,

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

Απόδειξη

Αφού  $h(x) < f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0$ ,

θα ισχύει και ότι  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ ,

οπότε ισχύει και το κριτήριο παρεμβολής.

Πρόταση 26: (Όριο «μηδενικής» επί φραγμένη συνάρτηση.) Έστω η συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και η συνάρτηση  $g$  για την οποία υπάρχει  $M > 0$  τέτοιος ώστε  $|g(x)| \leq M$  κοντά στο  $x_0$ . Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$ .

Απόδειξη

Για κοντά στο  $x_0$ , έχουμε ότι:

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot M, \quad (124)$$

οπότε

$$-|f(x)| \cdot M \leq f(x) \cdot g(x) \leq |f(x)| \cdot M. \quad (125)$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|f(x)| \cdot M) = \lim_{x \rightarrow x_0} (|f(x)| \cdot M) = 0, \quad (126)$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = 0$ .

Σχόλιο 35: Είναι γνωστό ότι αν  $\alpha > 1$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = -\infty$  και αν  $0 < \alpha < 1$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = +\infty$ . Γιατί αυτά τα όρια να υπάρχουν στην παράγραφο 1.7 που αφορά τα όρια στο άπειρο και όχι στην 1.6, που αφορά τα μη πεπερασμένα όρια στο  $x_0$ ;

Σχόλιο 36: Είναι γνωστό ότι για να βρούμε το όριο στο άπειρο μιας ρητής συνάρτησης μπορούμε «νομίμως» να πάρουμε το όριο του πηλίκου που προκύπτει από τον μεγιστοβάθμιο όρο του αριθμητή και τον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή. Ακριβώς η ίδια λογική ισχύει και όταν το κλάσμα έχει όρους με ρίζες και υπόρριζες ποσότητες πολυώνυμα. Ο μαθητής όμως δεν μπορεί να επικαλεστεί το ίδιο επιχείρημα. Για παράδειγμα ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad (127)$$

θα ήταν πάρα πολύ εύκολος...

Πρόταση 27: Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \eta \mu x$ ,  $g(x) = \sigma \nu x$  δεν έχουν όριο στα  $\pm \infty$ .

Απόδειξη

Έστω ότι το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  υπάρχει.

Αφού  $-1 \leq \eta\mu x \leq 1, x \in \mathbb{R}$  το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  δεν θα είναι  $\pm\infty$ , αλλά ένας πραγματικός αριθμός  $\alpha \in \mathbb{R}$ , δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = \alpha. \quad (128)$$

Τότε

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\eta\mu(x + \pi)] = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(x + \pi) \quad (129)$$

και θέτοντας  $u = x + \pi$  βρίσκουμε

$$\alpha = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \eta\mu u = -\alpha, \quad (130)$$

οπότε

$$\alpha = 0, \quad (131)$$

δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = 0. \quad (132)$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \quad (133)$$

και θέτοντας  $u = x + \frac{\pi}{2}$  βρίσκουμε

$$0 = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu u, \quad (134)$$

δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x = 0. \quad (135)$$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu^2 x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu^2 x = 0, \quad (136)$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x) = 0 + 0 = 0, \quad (137)$$

που είναι άτοπο, αφού  $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ , οπότε δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ .

Ομοίως αποδεικνύονται και τα υπόλοιπα.

Πρόταση 28: Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  για τις οποίες ισχύει

- $f(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x$  κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

Απόδειξη

Αφού  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  ισχύει  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

Συνεπώς για κοντά στο  $x_0$ , έχουμε

$$0 < f(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)}. \quad (138)$$

Όμως:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0, \quad (139)$$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0. \quad (140)$$

Αφού  $g(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$ , προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty. \quad (141)$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η πρόταση:

Πρόταση 29: Έστω οι συναρτήσεις  $f, g$  για τις οποίες ισχύει

- $f(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x$  κοντά στο  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ,

τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

Οι προτάσεις (28), (29) από το σχολικό έτος 2016-2017 μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές χωρίς απόδειξη.

Σχόλιο 37: Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι υπάρχει η υποενότητα για τις ακολουθίες στην παράγραφο 1.7. Αυτή η ενότητα «ξεφυτρώνει» ξαφνικά στο σχολικό βιβλίο. Προφανώς και οι ακολουθίες έχουν άμεση σχέση με τις συναρτήσεις και με τα όρια στο  $+\infty$ . Η χρησιμότητα των ακολουθιών είναι δεδομένη στα μαθηματικά (π.χ. αποδεικνύεις πολύ εύκολα ότι δεν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης με τη χρήση υπακολουθιών), ο τρόπος όμως που παρουσιάζεται η ενότητα «αυτοαχρηστεύει» την έννοια της ακολουθίας. Επιπλέον δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές το πώς μπορούμε να βρούμε όριο μιας ακολουθίας στο  $+\infty$ , αφού δεν υπάρχει διάστημα της μορφής  $(\alpha, +\infty)$  που να ορίζεται η ακολουθία...

## Συνέχεια συνάρτησης

Σχόλιο 38: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και 1-1 στο σύνολο  $A$ , τότε η  $f^{-1}$  δεν είναι απαραίτητα συνεχής στο  $f(A)$ .

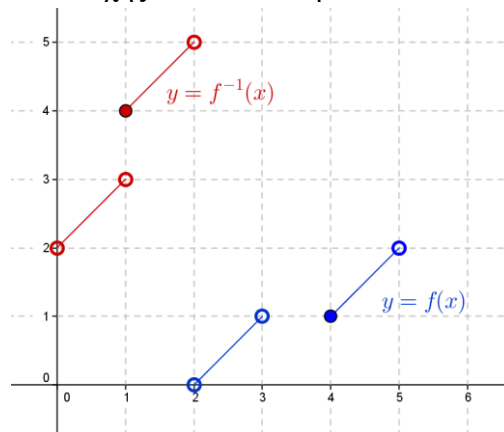
Έστω η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (2,3) \\ x-3, & x \in [4,5) \end{cases} \quad (142)$$

Η  $f$  είναι 1-1 στο  $A = (2,3) \cup [4,5)$  με  $f(A) = (0,2)$  και

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x+2, & x \in (0,1) \\ x+3, & x \in [1,2) \end{cases} \quad (143)$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $A$ , ενώ η  $f^{-1}$  δεν είναι συνεχής στο  $f(A)$ .



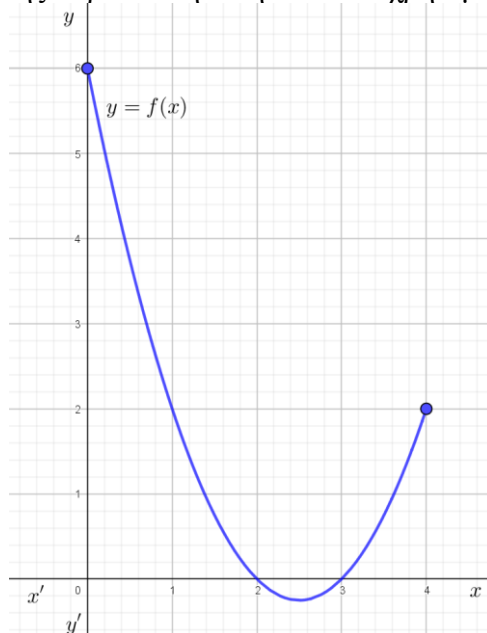
Σχήμα 8: Η γραφική παράσταση της  $f$  και της  $f^{-1}$

Σχόλιο 39: Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε και η  $f^{-1}$  είναι συνεχής στο  $f(\Delta)$ . Για την πρόταση αυτή δεν υπάρχει κάποια σχολική απόδειξη, θεωρούμε όμως ότι η ύπαρξή της στο σχολικό βιβλίο είναι αναγκαία. Μάλιστα στο παρελθόν στις πανελλαδικές εξετάσεις του 2003 στο τρίτο θέμα ήταν άγραφη προϋπόθεση η συνέχεια της αντίστροφης για τον υπολογισμό του εμβαδού.

Σχόλιο 40: Στο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται καμία αναφορά στο γεγονός ότι το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύει. Ειδικά στο θεώρημα Bolzano είναι εύκολο να αναδειχθεί και η αναγκαιότητα της απαίτησης για συνέχεια σε κλειστό διάστημα. Αναφορές στη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = x^2 - 5x + 6, x \in [0, 4], \quad (144)$$

αλλά και στη γραφική της παράσταση θα ήταν πολύ χρήσιμες.



Σχήμα 9: Η γραφική παράσταση της  $f$  με  $f(x) = x^2 - 5x + 6, x \in [0, 4]$ .

Πρόταση 30: Αν η συνάρτηση  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και τα όρια στα  $\alpha$  και  $\beta$  υπάρχουν και είναι ετερόσημα (ακόμα και άπειρο), τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τις περιπτώσεις:

Αν  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) < 0$  ή  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) > 0$  ή  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$ , τότε

υπάρχουν  $k, m \in (\alpha, \beta)$  με  $\alpha < k < m < \beta$  έτσι, ώστε  $f(k) < 0$ ,  $f(m) > 0$ .

Συνεπώς στο διάστημα  $[k, m]$  η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(k, m) \subseteq (\alpha, \beta)$ , δηλαδή υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .

Πρόταση 31: Αν η συνάρτηση  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής με  $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ , τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $[\alpha, \beta]$ .

Απόδειξη

Αφού  $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ , διακρίνουμε τις περιπτώσεις:



- Αν  $f(\alpha)f(\beta) < 0$  και αφού η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(\alpha, \beta)$ .
- Αν  $f(\alpha)f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$  ή  $f(\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha$  ή  $\beta$  ρίζες της  $f(x) = 0$ .

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $[\alpha, \beta]$ .

Πρόταση 32: Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο  $\Delta$ .

Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι ούτε μόνο θετική ούτε μόνο αρνητική στο  $\Delta$ , οπότε υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $f(x_1) < 0$  και  $f(x_2) > 0$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε  $x_1 < x_2$ .

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$  (αφού είναι συνεχής στο  $\Delta$ ) και ισχύει  $f(x_1)f(x_2) < 0$ , οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της  $f$  στο  $(x_1, x_2)$  άρα και στο  $\Delta$ , κάτι που είναι άτοπο αφού η  $f$  δεν μηδενίζεται στο  $\Delta$ . Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι μόνο θετική ή μόνο αρνητική στο  $\Delta$ .

Πρόταση 33: Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Απόδειξη

Σύμφωνα με την πρόταση 32 αν το διάστημα  $\Delta$  είναι της μορφής  $(-\infty, x_1)$  ή  $(x_2, x_3)$  ή  $(x_4, +\infty)$  όπου  $x_1, x_2, x_3, x_4$  είναι ρίζες της συνάρτησης  $f$  και δεν περιέχεται άλλη ρίζα στο καθένα από αυτά, τότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά.

Πρόταση 34: Αν η συνάρτηση  $f : A \rightarrow f(A)$  είναι 1-1 και συνεχής, να αποδείξετε ότι είναι και γνησίως μονότονη.

Απόδειξη

Έστω ότι η  $f$  δεν είναι γνησίως μονότονη.

Τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υπάρχουν  $\alpha, \beta, \gamma \in A$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  ώστε  $f(\alpha) < f(\beta)$  και  $f(\beta) > f(\gamma)$ .

- Αν  $f(\gamma) < f(\alpha) < f(\beta)$ , τότε  $\eta = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \in (f(\alpha), f(\beta)) \subseteq (f(\gamma), f(\beta))$ .  
Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών στα  $[\alpha, \beta], [\beta, \gamma]$  υπάρχουν  $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$  και  $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$  ώστε  $f(\xi_1) = \eta$  και  $f(\xi_2) = \eta$ , απορρίπτεται, αφού η  $f$  είναι 1-1.
  - Αν  $f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$ , τότε  $\eta = \frac{f(\gamma) + f(\beta)}{2} \in (f(\gamma), f(\beta)) \subseteq (f(\alpha), f(\beta))$ .  
Εφαρμόζοντας το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών στα  $[\alpha, \beta], [\beta, \gamma]$  υπάρχουν  $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$  και  $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$  ώστε  $f(\xi_1) = \eta$  και  $f(\xi_2) = \eta$ , απορρίπτεται, αφού η  $f$  είναι 1-1.
  - Η περίπτωση  $f(\alpha) = f(\gamma)$ , απορρίπτεται, αφού η  $f$  είναι 1-1.
- Επομένως έχουμε άτοπο, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη.

Πρόταση 35: Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και **μη σταθερής** συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού  $[\alpha, \beta]$ , είναι το κλειστό διάστημα  $[m, M]$ , όπου  $M$  είναι η μέγιστη τιμή και  $m$  η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .

Απόδειξη

- Έστω ότι υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = y \notin [m, M]$ . Αυτό σημαίνει είτε ότι το  $m$  δεν είναι το ελάχιστο (αν  $y < m$ ), είτε ότι το  $M$  δεν είναι μέγιστο (αν  $y > M$ ), κάτι που είναι άτοπο, άρα όλες οι τιμές της συνάρτησης  $f$  βρίσκονται στο διάστημα  $[m, M]$ .
- Αφού το  $M$  είναι η μέγιστη τιμή και το  $m$  η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[\alpha, \beta]$ , υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$  έτσι ώστε  $f(x_1) = m, f(x_2) = M$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε  $x_1 < x_2$ .

Έστω τυχαίο  $\eta \in (m, M)$ .

Τότε αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2] \subseteq [\alpha, \beta]$ , με  $f(x_1) \neq f(x_2)$  και το  $\eta \in (f(x_1), f(x_2))$ , οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  έτσι ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

Συνεπώς αποδείξαμε ότι κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού  $[\alpha, \beta]$  αντιστοιχίζεται σε  $y$  του  $[m, M]$  και ότι κάθε  $y$  του  $[m, M]$  προέρχεται από κάποιο  $x$  του  $[\alpha, \beta]$ , οπότε και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Να σημειώσουμε ότι στο σχολικό βιβλίο υπάρχει σχόλιο στο οποίο δεν διακρίνεται η περίπτωση της μη σταθερής συνάρτησης!!!

Σχόλιο 41: Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται το σύνολο τιμών μια συνεχούς συνάρτησης  $f$  που είναι γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής  $(\alpha, \beta)$ ,  $[\alpha, \beta]$ ,  $(\alpha, \beta]$  και  $[\alpha, \beta)$ . Η πρόταση αυτή ισχύει και όταν τα άκρα  $\alpha$ ,  $\beta$  είναι  $-\infty$ ,  $+\infty$  αντίστοιχα. Είναι μια ουσιώδης επισήμανση που δεν γίνεται στο σχολικό βιβλίο.

Πρόταση 36: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$  και τα όρια στα  $\alpha$ ,  $\beta$  είναι  $-\infty$  ή  $+\infty$ , τότε το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ .

Απόδειξη

Έστω  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  έτσι ώστε  $f(x_0) = y_0$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x) - y_0$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε  $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$ .

Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} g(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} g(x) = +\infty,$$

οπότε υπάρχουν  $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$  έτσι ώστε  $f(\kappa) < 0$ ,  $f(\lambda) > 0$ .

Επιπλέον έχουμε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[\kappa, \lambda] \subseteq (\alpha, \beta)$  και  $f(\kappa)f(\lambda) < 0$ , οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα  $x_0 \in (\kappa, \lambda) \subseteq (\alpha, \beta)$  της εξίσωσης  $g(x) = 0$ , δηλαδή  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$ .

## Κεφάλαιο 2ο – Διαφορικός Λογισμός

Σχόλιο 42: Γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της παραγώγου μιας συνάρτησης  $f$  είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, δηλαδή ισχύει  $A_{f'} \subseteq A_f$ . Γιατί όμως συμβαίνει αυτό; Η θεωρία αναφέρει ότι μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $A_f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 \in A_f$  αν

υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Συνεπώς αφού το  $x_0$  στο οποίο ορίζεται η

παράγωγος ανήκει υποχρεωτικά στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ , τότε σίγουρα το πεδίο ορισμού της παραγώγου  $f'$  είναι υποσύνολο του  $A_f$ .

Αυτό δεν τονίζεται επαρκώς στο σχολικό βιβλίο και οι μαθητές συχνά παρανοούν, αλλά και αγνοούν, τη σημασία του σχολίου αυτού.

Χρήσιμη θα ήταν και η αναφορά σε ένα παράδειγμα που να γίνεται σαφές ότι μπορεί το πεδίο ορισμού της παραγώγου να είναι λίγο (ή περισσότερο) «μικρότερο». Μια βολική συνάρτηση είναι η  $f$  με  $f(x) = \sqrt{x}$  της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το  $[0, +\infty)$ , ενώ η παράγωγος της ορίζεται στο  $(0, +\infty)$ .

Σχόλιο 43: Η έννοια του γωνιακού σημείου απουσιάζει παντελώς από το σχολικό βιβλίο. Δεν υπάρχει πουθενά ο ορισμός του και χαρακτηριστικά θα αναφέρουμε πως στη διόρθωση γραπτών των πανελλήνιων του 2017 πάρα πολλοί μαθητές το είχαν χρησιμοποιήσει ως επιχείρημα για να απαντήσουν στο ερώτημα Α2: «είναι μια συνεχής συνάρτηση πάντοτε παραγωγίσιμη;» Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του γωνιακού σημείου (Κατσαργύρης κ.ά., 1992): «Αν για μια συνεχή συνάρτηση  $f$  στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού

της, υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  πεπερασμένα ή

άπειρα και είναι διαφορετικά, τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  ονομάζεται γωνιακό σημείο της γραφικής παράστασης της  $f$  ή γωνιακό σημείο της  $f$ .

Σχόλιο 44: Στο σχολικό βιβλίο σε κανένα σημείο δεν γίνεται η σύνδεση των εννοιών της παραγώγου μιας συνάρτησης και της συνέχειάς της. Έτσι συχνά οι μαθητές θεωρούν δεδομένο ότι η ύπαρξη της παραγώγου σημαίνει και συνέχεια της παραγώγου. Ένα παράδειγμα θα βοηθούσε και εδώ. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad (145)$$

εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \eta \mu \frac{1}{x} - \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad (146)$$

η οποία δεν είναι συνεχής στο 0. Στο σημείο αυτό θα θυμίσουμε ότι στις πανελλήνιες εξετάσεις του 2000 στο πρώτο θέμα, στην πρώτη από τις ερωτήσεις σωστού-λάθους ζητήθηκε ο χαρακτηρισμός της πρότασης: «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ ». Είναι σαφές ότι κάτι τέτοιο δεν υποστηρίζεται σε κανένα σημείο της θεωρίας του σχολικού βιβλίου.

Σχόλιο 45: Η παραγωγή μιας σύνθετης συνάρτησης είναι μια διαδικασία η οποία έχει συγκεκριμένα βήματα. Όμως αυτή καταλήγει να εφαρμόζεται μηχανικά, χωρίς να ελέγχονται οι προϋποθέσεις εφαρμογής. Βέβαια, όπως έχουμε θίξει στην τρίτη εργασία αυτής της σειράς, η απουσία του σημείου συσσώρευσης υπεραπλουστεύει πολλές φορές πολύ σημαντικές έννοιες. Ακόμη και η παράσταση με τα απειροστά γίνεται χωρίς τη χρήση κάποιου παραδείγματος που θα απλούστευε κατά πολύ τις παραπάνω έννοιες. Η συγκεκριμένη έννοια υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, αλλά είναι πολύ υποβαθμισμένη και ο μαθητής είναι πολύ δύσκολο να καταλάβει τι γίνεται. Για παράδειγμα για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης  $f$  με

$$f(x) = (x^2 + 3)^4, x \in \mathbb{R}, \quad (147)$$

θέτουμε:

$$g(y) = y^4, y \in \mathbb{R} \text{ και } h(x) = x^2 + 3, x \in \mathbb{R}, \quad (148)$$

οπότε:

$$f(x) = g(h(x)), x \in \mathbb{R} \quad (149)$$

και

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 4(x^2 + 3)^3 2x, x \in \mathbb{R}. \quad (150)$$

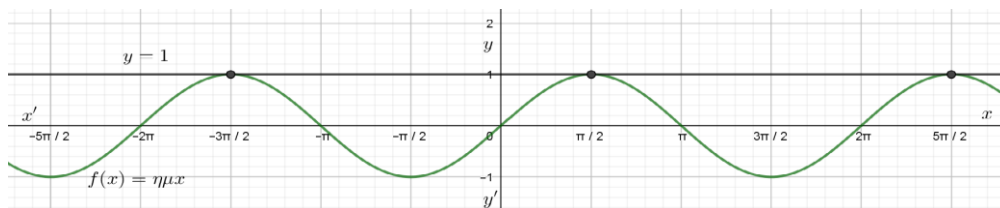
Με τη χρήση απειροστών θα είχαμε:

$$y = x^2 + 3, x \in \mathbb{R}, z = y^4, y \in \mathbb{R}, \quad (151)$$

άρα

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = 4y^3 2x = 8x(x^2 + 3)^3, x \in \mathbb{R}. \quad (152)$$

Σχόλιο 46: Οι μαθητές, προερχόμενοι από τη Β' Λυκείου έχοντας διδαχθεί τα βασικά χαρακτηριστικά των κωνικών τομών, έρχονται στη Γ' Λυκείου έχοντας την (εσφαλμένη) εντύπωση πως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με αυτήν, το σημείο επαφής. Στο σχολικό εγχειρίδιο αυτό δεν είναι εμφανές σε θεωρητικό επίπεδο. Μια εφαρμογή και μια γραφική παράσταση θα ήταν ότι πιο εποικοδομητικό. Προτείνουμε μια ήδη γνωστή συνάρτηση από τη Β' Λυκείου, την  $f$  με  $f(x) = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$  η οποία έχει εφαπτομένη την ευθεία  $y = 1$  στα σημεία  $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 1\right), k \in \mathbb{Z}$ , δηλαδή έχει με αυτήν άπειρα (αλλά αριθμήσιμου πλήθους) κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της  $f$  (Μπουνάκης, 2009).



Σχήμα 10: Η γραφική παράσταση της  $f$  με  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η εφαπτομένη με εξίσωση  $y = 1$ .

Πρόταση 37: (Θεώρημα Rolle). Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$ , παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα  $(a, b)$  με  $f(a) = f(b)$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 0$ .

Απόδειξη

- Αν η  $f$  δεν είναι σταθερή στο  $[a, b]$ , τότε επειδή είναι συνεχής στο  $[a, b]$  σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής υπάρχουν  $x_\epsilon, x_\mu \in [a, b]$ , τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in [a, b]$  να ισχύει:

$$f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq f(x_\mu), \quad (153)$$

όπου  $f(x_\epsilon) < f(x_\mu)$ .

Τα  $x_\epsilon, x_\mu$  δε μπορεί να είναι και τα δύο άκρα του  $[a, b]$ , διότι αν ήταν θα έπρεπε να ισχύει  $f(a) < f(b)$  (αν  $x_\epsilon = a, x_\mu = b$ ) ή  $f(a) > f(b)$  (αν  $x_\mu = a, x_\epsilon = b$ ), που είναι αδύνατο από την υπόθεση.

Επομένως τουλάχιστον ένα από τα  $x_\epsilon, x_\mu$  είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος  $(a, b)$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι  $x_\epsilon \in (a, b)$ . Τότε, επειδή η  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_\epsilon \in (a, b)$  και ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat θα ισχύει  $f'(x_\epsilon) = 0$  και το ζητούμενο αποδείχτηκε, για  $x_\epsilon = \xi$ .

- Αν η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή στο  $[a, b]$ , τότε έχουμε ότι  $f'(\xi) = 0$  για οποιοδήποτε  $\xi$  στο  $(a, b)$ .

*Η υιοθέτηση της πρότασής μας αυτής απαιτεί είτε αναδιάταξη της ύλης, είτε η απόδειξη του θεωρήματος Rolle να παρουσιάζεται μετά το θεώρημα Fermat.*

Πρόταση 38: (Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού). Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$ , παραγωγίσιμη στο

ανοιχτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ .

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g$  με

$$g(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (154)$$

η οποία είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (155)$$

και  $g(\alpha) = g(\beta) = f(\alpha)$ .

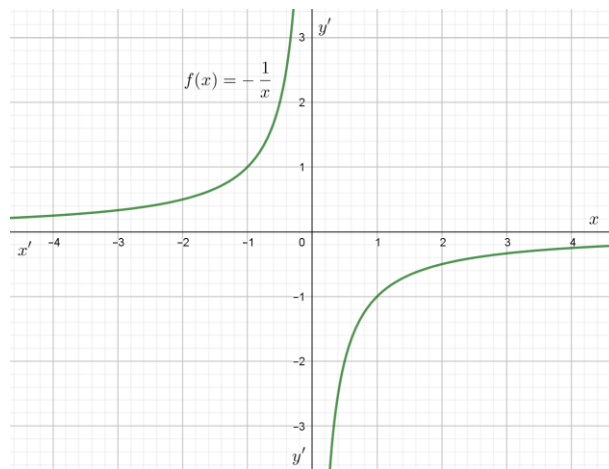
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε

$$g'(\xi) = 0, \text{ δηλαδή } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Σχόλιο 47: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, \beta)$  και  $(\beta, \gamma)$  με  $\alpha < \beta < \gamma$ , προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \gamma)$ ; Αυτό το ερώτημα δημιουργεί ενδιαφέροντες διαλόγους με τους μαθητές. Στο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται διαπραγμάτευση του θέματος αυτού. Η ύπαρξη ενός σχολίου συνοδευόμενου με κατάλληλο παράδειγμα θα είχε καταλυτικό ρόλο στην αποσαφήνιση του θέματος. Για παράδειγμα η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = -\frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*, \quad (156)$$

είναι γνησίως αύξουσα στα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ , αλλά δεν είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .



Σχήμα 11: Η γραφική παράσταση της  $f$  με  $f(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Μια συνάρτηση  $f$  που είναι ορισμένη στο διάστημα  $(\alpha, \gamma)$  και είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\beta, \gamma)$  με  $\alpha < \beta < \gamma$ , θα είναι γνησίως αύξουσα στο  $(\alpha, \gamma)$ , αν για παράδειγμα γνωρίζουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\beta$  ή ότι  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \leq f(\beta) \leq \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$  (εφόσον τα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί).

Σχόλιο 48: Με την ίδια διαπραγμάτευση αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη στο διάστημα  $(\alpha, \gamma)$  και είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\beta, \gamma)$  με  $\alpha < \beta < \gamma$ , δεν είναι απαραίτητο ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(\alpha, \gamma)$ . Για παράδειγμα, θα ήταν γνησίως φθίνουσα στο  $(\alpha, \gamma)$ , αν επιπλέον γνωρίζαμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $\beta$  ή ότι  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \geq f(\beta) \geq \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x)$  (εφόσον τα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί).

Πρόταση 39: Αν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$ , παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$  και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , ισχύει  $f'(x) \geq 0$ , για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Απόδειξη

Έστω  $\alpha, \beta \in \Delta$  με  $\alpha < \beta$  και τυχαίο  $\xi$  του  $(\alpha, \beta)$ .



Αν  $\alpha < x < \xi$  και αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[\alpha, \beta]$ , έχουμε:

$$f(x) < f(\xi) \Rightarrow f(x) - f(\xi) < 0, \quad (157)$$

οπότε

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0 \quad (158)$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0. \quad (159)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$ , άρα και στο  $\xi$  προκύπτει ότι:

$$f'(\xi) \geq 0. \quad (160)$$

Επίσης, αφού το  $\xi$  είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο στο  $\Delta$  θα ισχύει:

$$f'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \text{ στο εσωτερικό του } \Delta. \quad (161)$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 40: Αν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$ , παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$  και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , ισχύει  $f'(x) \leq 0$ , για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Σχόλιο 49: Το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat δεν ισχύει και το σχολικό βιβλίο δεν κάνει αυτή την απαραίτητη διευκρίνιση άμεσα, αλλά έμμεσα. Είναι απαραίτητο κατά τη γνώμη μας να υπάρξει σαφής διευκρίνιση για το θέμα, με τη χρήση ενός σχολίου, αλλά και ενός παραδείγματος όπως είναι η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$  της οποίας η παράγωγος μηδενίζεται στο 0, αλλά δεν παρουσιάζει ακρότατο στο  $O(0, f(0))$ .

Σχόλιο 50: Το σχολικό βιβλίο στην παράγραφο 1.3 δίνει τον ορισμό του (ολικού) μεγίστου και του (ολικού) ελαχίστου. Καταλήγει στην παράγραφο γράφοντας: «Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης  $f$  λέγονται ολικά ακρότατα της  $f$ ». Κατόπιν, παρουσιάζοντας τα τοπικά ακρότατα, αναφέρει τη διαφορά τοπικού και ολικού ακροτάτου, χωρίς όμως να τονίζεται ιδιαίτερα η σημασία των εννοιών και τελειώνοντας ξαναγράφει πως το μέγιστο και το ελάχιστο λέγονται ολικά ακρότατα της συνάρτησης. Στις ασκήσεις προς λύση ζητά να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα κάποιες συναρτήσεις και στις απαντήσεις αναφέρεται σε τοπικά ακρότατα!!! Θεωρούμε πως είναι απαραίτητο αφενός μεν να υπάρξουν καλύτερες διατυπώσεις επί των θεμελιωδών αυτών εννοιών, αφετέρου δε να

δοθεί πλήθος παραδειγμάτων που να αναδεικνύει τις διαφορές, οπότε οι μαθητές θα μπορούν να αποσαφηνίσουν πλήρως αυτές τις πολύ σημαντικές και λεπτές έννοιες. Παραθέτουμε χαρακτηριστικά και τα γραφόμενα του σχολικού βιβλίου της γενικής παιδείας στην παράγραφο 1.4, όπου αναφέρει ότι: «Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης». Είναι σαφές το ολικό μπέρδεμα των εννοιών ενός μαθητή της Γ' Λυκείου που διαβάζει και τα δύο βιβλία...

Πρόταση 41: Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ .

Απόδειξη

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου έχουμε ότι:

$$\ln x \leq x-1, x > 0. \quad (162)$$

Επίσης αφού  $x > 0$  ισχύει  $\frac{1}{x} > 0$ , οπότε θέτοντας όπου  $x$  το  $\frac{1}{x}$  βρίσκουμε:

$$\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x} \quad (163)$$

και η απόδειξη τελειώνει.

Πρόταση 42: Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $e^x \geq x+1$ .

Απόδειξη

Θέτουμε όπου  $x$  το  $e^x > 0$ , στη (162) και βρίσκουμε:

$$\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1, \quad (164)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

*Η πρόταση (42) από το σχολικό έτος 2017-2018 μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές χωρίς απόδειξη (Υ.Π.Ε.Θ., 2017).*

Σχόλιο 51: Όταν ένας μαθητής καλείται να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα (ρυθμού μεταβολής ή ακροτάτων) πρέπει να ορίσει την κατάλληλη συνάρτηση και το πεδίο ορισμού της. Το πεδίο ορισμού της δεν καθορίζεται μόνο από τη μορφή της συνάρτησης, αλλά και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος. Αν για παράδειγμα η μεταβλητή της συνάρτησης είναι ο χρόνος  $t$ , απαιτούμε  $t \geq 0$ , ενώ αν η μεταβλητή εκφράζει μήκος απαιτούμε κάθε μήκος που χρησιμοποιήθηκε στην άσκηση να είναι θετικό. Θα ήταν καλό να υπάρχει ένα σχόλιο, αλλά και επαρκές πλήθος εφαρμογών ή λυμένων παραδειγμάτων στο σχολικό βιβλίο για να μην υπάρχει παρανόηση στο θέμα.

Σχόλιο 52: Στο σχολικό βιβλίο, στον ορισμό του σημείου καμπής ως προϋπόθεση τίθεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης να δέχεται εφαπτομένη στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ . Η προϋπόθεση αυτή προφανώς μπήκε για να καλυφθεί και η περίπτωση της κατακόρυφης εφαπτομένης. Όμως εδώ και πάρα πολλά χρόνια η έννοια αυτή έχει τεθεί εκτός διδακτέας-εξεταστέας ύλης. Οι μαθητές σε αυτό το σημείο παρουσιάζουν κάποια δυσκολία στην κατανόηση γι' αυτό και επισημαίνεται. Προφανώς δεν θα ήταν άσχημο στην εξεταστέα-διδακτέα ύλη των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ' Λυκείου να ήταν η έννοια της κατακόρυφης εφαπτομένης.

Πρόταση 43: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$  και κυρτή στο  $\Delta$ , τότε ισχύει  $f''(x) \geq 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Απόδειξη

Αφού η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ , ισχύει ότι η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ . Έστω  $\alpha, \beta \in \Delta$  με  $\alpha < \beta$  και τυχαίο  $\xi$  του  $(\alpha, \beta)$ .

Αν  $\alpha < x < \xi$  και αφού η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , έχουμε:

$$f'(x) < f'(\xi) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) < 0, \quad (165)$$

οπότε

$$\frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} > 0 \quad (166)$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} \geq 0. \quad (167)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$ , άρα και στο  $\xi$  προκύπτει ότι:

$$f''(\xi) \geq 0. \quad (168)$$

Επίσης, αφού το  $\xi$  είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο στο  $(\alpha, \beta)$  θα ισχύει:

$$f''(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \text{ στο εσωτερικό του } \Delta. \quad (169)$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 44: Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\Delta$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$  και κοίλη στο  $\Delta$ , τότε ισχύει  $f''(x) \leq 0$  για κάθε  $x$  στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

Πρόταση 45: Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  εκτός ίσως από ένα σημείο  $\xi$ , στο οποίο όμως η  $f'$  είναι συνεχής. Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta)$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, \beta)$ , ενώ αν  $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta)$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη στο  $(\alpha, \beta)$ .

Απόδειξη

Έστω ότι  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta)$ .

Επειδή η  $f'$  είναι συνεχής στο  $\xi$  έπεται ότι θα είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(\alpha, \xi]$  και  $[\xi, \beta)$ , οπότε η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα και στο  $(\alpha, \beta)$ , δηλαδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, \beta)$ .

Ομοίως αποδεικνύεται η περίπτωση  $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \xi) \cup (\xi, \beta)$ .

Πρόταση 46: Αν η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της  $A_f$ , τότε οποιαδήποτε εφαπτομένη της  $C_f$  βρίσκεται κάτω από τη  $C_f$ , εκτός από το σημείο επαφής.

Απόδειξη

Έστω  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη στο  $A$  έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (170)$$

ή

$$y = f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0). \quad (171)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g$  με

$$g(x) = f(x) - f'(x_0)x + x_0 f'(x_0) - f(x_0), \quad x \in A_f. \quad (172)$$

Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $A_f$  ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο  $A_f$  ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0), \quad x \in A_f. \quad (173)$$

Αφού η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα (άρα και ένα προς ένα) στο  $A_f$ , ισχύει:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(x_0) \Leftrightarrow x = x_0, \quad (174)$$

Επιπλέον:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow x > x_0, \quad (175)$$

και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow x < x_0. \quad (176)$$

Συνεπώς η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα για  $x \geq x_0$ , γνησίως φθίνουσα για  $x \leq x_0$ , οπότε στη θέση  $x = x_0$  η  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο το  $g(x_0) = 0$ .

Επομένως:

$$g(x) \geq g(x_0) = 0, \text{ για κάθε } x \in A_f \quad (177)$$

ή

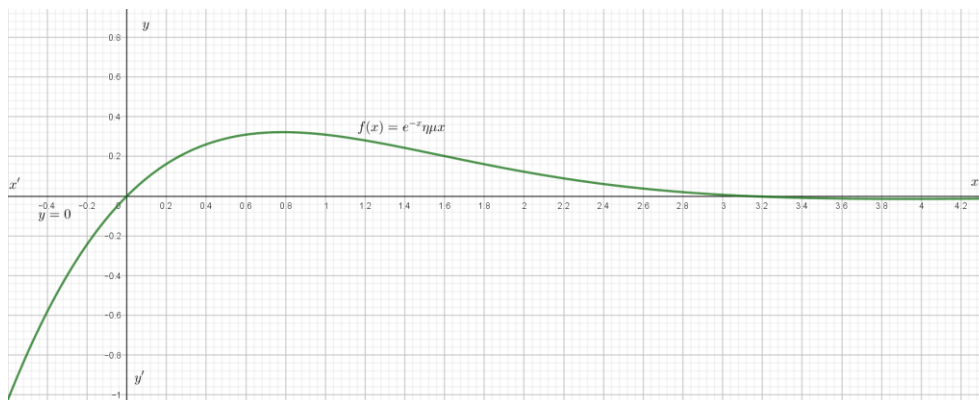
$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in A_f, \quad (178)$$

δηλαδή οποιαδήποτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  βρίσκεται κάτω από τη  $C_f$ , εκτός από το σημείο επαφής.

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 47: Αν η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της  $A_f$ , τότε οποιαδήποτε εφαπτομένη της  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τη  $C_f$ , εκτός από το σημείο επαφής.

Σχόλιο 53: Η ονομασία της ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης παραπέμπει στο ότι η γραφική παράσταση δε συμπίπτει ποτέ με αυτήν, επομένως (εσφαλμένα) δεν έχει κοινά σημεία με αυτήν. Και όμως υπάρχουν ασύμπτωτες γραφικών παραστάσεων οι οποίες έχουν κοινά σημεία με αυτήν. Για το ξεκαθάρισμα της περίπτωσης αυτής προτείνεται η ύπαρξη μιας εφαρμογής όπου αυτό θα διασαφηνίζεται. Για παράδειγμα (Παντελίδης, 1998) η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = e^{-x} \eta \mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  έχει για (οριζόντια) ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία με εξίσωση  $y = 0$ . Αποδεικνύεται (εύκολα) πως η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει άπειρα (αλλά αριθμήσιμου πλήθους) κοινά σημεία με την ασύμπτωτη, τα  $(κπ, 0)$ ,  $κ \in \mathbb{Z}$ .



Σχήμα 12: Η γραφική παράσταση της  $f$  με  $f(x) = e^{-x} \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η οριζόντια ασύμπτωτη με εξίσωση  $y = 0$ .

Σχόλιο 54: Τα θεωρήματα του de l' Hospital (που αναφέρονται και ως κανόνες de l' Hospital) διέπονται από διάφορες προϋποθέσεις, οι οποίες δεν αναφέρονται και τόσο αναλυτικά όταν αυτά εφαρμόζονται. Είναι επιτακτική η ανάγκη παραδειγμάτων όπου θα αναδεικνύεται η αναγκαιότητα εξασφάλισης όλων των προϋποθέσεων των θεωρημάτων. Το σχολικό βιβλίο έχει ένα παράδειγμα μα νομίζουμε πως δεν είναι αρκετό. Σημειώνουμε επίσης και την απουσία ενός παραδείγματος όπου η «άψογη» εφαρμογή του κανόνα δε μας παράγει τελικό αποτέλεσμα, αλλά οδηγεί σε μια ατέρμονη διαδικασία χωρίς τελειωμό, διότι απλά δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του θεωρήματος. Για παράδειγμα (Υ.Π.Ε.Θ., 2017) μπορεί να

δοθεί ο υπολογισμός του ορίου  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$  με χρήση του κανόνα de l'

Hospital, οπότε θα καταστεί σαφέστερο στους μαθητές πως αυτός ο κανόνας δεν αποτελεί την πανάκεια για τον υπολογισμό ορίων της μορφής

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}.$$

Πρόταση 48: (Ανισότητα Jensen). Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα  $\Delta$ , τότε για κάθε  $\alpha, \beta \in \Delta$  ισχύει

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (\text{Βλάμος, 1998}).$$

Απόδειξη

- Αν  $\alpha = \beta$ , η προς απόδειξη σχέση ισχύει τετριμμένα ως ισότητα.
- Έστω  $\alpha \neq \beta$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε  $\alpha < \beta$ .

Η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα

$$\left[ \alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right], \left[ \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right] \subseteq [\alpha, \beta],$$

άρα υπάρχουν  $\xi_1 \in \left( \alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$ ,  $\xi_2 \in \left( \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$  τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = 2 \cdot \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (179)$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = 2 \cdot \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}. \quad (180)$$

Όμως η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ , επομένως η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , οπότε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \quad (181)$$

και αντικαθιστώντας τις (179), (180) βρίσκουμε:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right). \quad (182)$$

Συνεπώς:

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}. \quad (183)$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 49: (Ανισότητα Jensen). Αν η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη και κοίλη στο διάστημα  $\Delta$ , τότε για κάθε  $\alpha, \beta \in \Delta$  ισχύει

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (\text{Βλάμος, 1998}).$$

### Κεφάλαιο 3ο – Ολοκληρωτικός Λογισμός

Πρόταση 50: Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $a > 0$ . Αν η  $f$

είναι άρτια, τότε  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx$  (Βλάμος, 1999).

### Απόδειξη

Ισχύει ότι:

$$\int_{-\alpha}^0 f(x)dx \stackrel{f \text{ άρτια}}{=} \int_{-\alpha}^0 f(-x)dx \stackrel{u=-x}{=} \int_{\alpha}^0 f(u)(-du) = \int_0^{\alpha} f(u)du, \quad (184)$$

δηλαδή θέτοντας  $u = x$  έχουμε:

$$\int_{-\alpha}^0 f(x)dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx, \quad (185)$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^0 f(x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \stackrel{(185)}{=} 2 \int_0^{\alpha} f(x)dx, \quad (186)$$

Από τις (185) και (186) προκύπτει ότι:.

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x)dx = 2 \int_{-\alpha}^0 f(x)dx. \quad (187)$$

Πρόταση 51: Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $\alpha > 0$ . Αν η  $f$

είναι περιττή, τότε  $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$  (Βλάμος, 1999).

### Απόδειξη

Ισχύει ότι:

$$\int_{-\alpha}^0 f(x)dx \stackrel{f \text{ περιττή}}{=} - \int_{-\alpha}^0 f(-x)dx \stackrel{u=-x}{=} - \int_{\alpha}^0 f(u)(-du) = - \int_0^{\alpha} f(u)du, \quad (188)$$

δηλαδή θέτοντας  $u = x$  έχουμε:

$$\int_{-\alpha}^0 f(x)dx = - \int_0^{\alpha} f(x)dx. \quad (189)$$

Επομένως:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^0 f(x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \stackrel{(189)}{=} 0. \quad (190)$$

Πρόταση 52: Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα  $[a, b]$  με  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, b]$ , ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

### Απόδειξη



Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$  με

$$h(x) = f(x) - g(x), x \in [\alpha, \beta]. \quad (191)$$

Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι

$$h(x) \geq 0, x \in [\alpha, \beta]. \quad (192)$$

Συνεπώς:

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx \geq 0, \quad (193)$$

άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx. \quad (194)$$

Πρόταση 53: Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  με  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$

με  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ .

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$  με

$$h(x) = f(x) - g(x), x \in [\alpha, \beta]. \quad (195)$$

Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι

$$h(x) \geq 0, x \in [\alpha, \beta], \quad (196)$$

χωρίς να είναι παντού μηδέν.

Συνεπώς:

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) - g(x)] dx > 0, \quad (197)$$

άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx. \quad (198)$$

Οι προτάσεις (52), (53) από το σχολικό έτος 2016-2017 μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους μαθητές χωρίς απόδειξη (Υ.Π.Ε.Θ., 2017).

Σχόλιο 55: Στο σχολικό βιβλίο στην παράγραφο 3.4 γίνεται εκτενής αναφορά στη σύνδεση του εμβαδού ενός επίπεδου χωρίου με το ορισμένο ολοκλήρωμα, δίνοντας παράλληλα τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Η όλη διαδικασία επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας πολύ

δύσκολες έννοιες για το μαθητή. Κατά τη γνώμη μας η συγκεκριμένη παράγραφος είναι εκτός του συνολικού πνεύματος του σχολικού βιβλίου και θα ήταν χρήσιμο είτε το μεγαλύτερο μέρος της να βγει εκτός διδακτέας-εξεταστέας ύλης είτε μέσω των οδηγιών του υπουργείου να υπάρξει μια διαφορετική προσέγγιση του θέματος δεδομένου ότι όσα διαπραγματεύονται στην παράγραφο 3.4 είναι και πιθανά θέματα εξετάσεων!

Σχόλιο 56: Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση έχει παράγουσα, αλλά πουθενά δεν γίνεται σαφές ότι υπάρχει περίπτωση αυτή να μην μπορεί να βρεθεί αναλυτικά. Ως παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί (Spivak, 1999), η συνάρτηση  $f$  με

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}, \quad (199)$$

της οποίας η παράγουσα είναι η συνάρτηση σφάλματος  $\text{erf}(x)$ , για την οποία ισχύει

$$\text{erf}(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx, x \in \mathbb{R}. \quad (200)$$

### Συμπεράσματα

Τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που θεμελιώνεται σταδιακά. Οι μαθητές είναι απαραίτητο να αποκομίζουν αυτή τη γνώση από το σχολείο. Είναι αναγκαία η δόμηση της προσφερόμενης μαθηματικής ύλης, ίσως και από μικρότερες τάξεις, κατά τέτοιον τρόπο ώστε να παρουσιάζει συνοχή. Η μη αναφορά βασικών γνώσεων και προτάσεων μόνο κακό κάνει στα μαθηματικά. Ο «χαρακτηρισμός» βασικών προτάσεων ως «απαγορευμένες» (οπότε η χρήση τους είναι στη «μαύρη αγορά») δημιουργεί πολλούς κινδύνους στη βαθμολόγηση γραπτών και βλάπτει τον επιθυμητό από τους περισσότερους, ενιαίο και αμερόληπτο χαρακτήρα της. Γι' αυτό πρέπει να είμαστε εξαιρετικά προσεκτικοί στη δόμηση της μαθηματικής γνώσης στα σχολικά εγχειρίδια τα οποία πρέπει να δίνουν τα απαραίτητα εφόδια στον οποιοδήποτε να πετύχει το σκοπό του. Σε αυτά στηρίζεται το τέταρτο και τελευταίο μέρος της πρότασής μας για το σχολικό βιβλίο της Γ' Λυκείου.

### Ενδεικτική βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Μέτης Σ., Μπρουχούτας Κ., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. (2016). *Μαθηματικά Γ' τάξης Γενικού*

- Λυκείου, Ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».*
- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Λ., Δαμιανού Χ. (2015). *Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων Α' Λυκείου*, ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
- Βλάμος Π. (1997). *Όριο και συνέχεια συνάρτησης*, Εκδόσεις "V".
- Βλάμος Μ. Π. (1998). *Παράγωγος συνάρτησης*, Εκδόσεις "V".
- Βλάμος Μ. Π. (1999). *Ολοκλήρωμα συνάρτησης*, Εκδόσεις "V".
- Brand L. (1984). *Μαθηματική ανάλυση*. Εκδόσεις ΕΜΕ. Αθήνα.
- Δαμβακάκης Γ., Κτιστάκης Ν., Λάμπρου Μ., Σπανουδάκης Κ. Ν., (2008). *Επαναληπτικά θέματα στα Μαθηματικά Γ' Λυκείου*, Εκδόσεις Καγκουρό Ελλάς.
- Κατσαργύρης Β., Μεντής Κ., Παντελίδης Γ., Σουρλάς Κ. (1992). *Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Ανάλυση*, ΟΕΔΒ.
- Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2017). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ' Λυκείου – Μέρος Ι*, Πρακτικά 9<sup>ης</sup> διεθνούς μαθηματικής εβδομάδας, σελ. 463-474.
- Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2017). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ' Λυκείου – Μέρος ΙΙ*, Πρακτικά 34<sup>ου</sup> συνεδρίου της ΕΜΕ, σελ. 492-504.
- Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2018). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ' Λυκείου – Μέρος ΙΙΙ*, Πρακτικά 2<sup>ου</sup> πανελλήνιου συνεδρίου των εκπαιδευτηρίων ΠΟΛΥΤΡΟΠΗ ΑΡΜΟΝΙΑ, υπό έκδοση.
- Κυριαζής Χ., Πρωτοπαπάς Ελ., (2018). *Χρήσιμες και διδακτικές επισημάνσεις στην Ανάλυση της Γ' Λυκείου – Μέρος ΙV*, Πρακτικά 10<sup>ης</sup> διεθνούς μαθηματικής εβδομάδας, σελ. 535-552.
- Μάστακας Π., Γαρατζιώτης Ι. (2008). *Μαθηματικά για τη θετική-τεχνολογική κατεύθυνση Γ' Λυκείου, Α' τόμος*, εκδόσεις Κέδρος.
- Μπουνάκης Δ. (2009). *Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, συναρτήσεις-όρια-συνέχεια*, Ηράκλειο.
- Μπουνάκης Δ. (2009). *Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, Διαφορικός Λογισμός Α' μέρος*, Ηράκλειο.
- Μπουνάκης Δ. (2009). *Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, Διαφορικός Λογισμός Β' μέρος*, Ηράκλειο.
- Μπουνάκης Δ. (2009). *Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' Λυκείου, Διδακτικό υλικό για καθηγητές μαθηματικών, Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Ηράκλειο.

- Ντζιώρας Β. Ηλ. (1993). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ' Λυκείου, Α' τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.
- Ντζιώρας Β. Ηλ. (1996). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ' Λυκείου, Β' τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.
- Ντζιώρας Β. Ηλ. (1995). *Μαθηματικά, Ανάλυση Γ' Λυκείου, Γ' τεύχος*, Εκδόσεις Πατάκη.
- Υ.Π.Ε.Θ., (2017), Διαχείριση της Διδακτέας - Εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ' τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου και της Δ' τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολ. έτος 2017–2018, 163573/Δ2/2-10-17.
- Παντελίδης Ν. Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα Ανάλυση της Γ' Λυκείου*, εκδόσεις Ζήτη.
- Spivak Μ. (1999), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Σπαθάρas Δ. (2016). *Μαθηματικά Γ' τάξης ΓΕΛ, Κατανοώντας βαθύτερα το σχολικό βιβλίο και γνωρίζοντας λίγο περισσότερα από αυτά που πρόκειται να διδάξουμε*, τεύχος 1ο.