

Α Λυκείου

Άλγεβρα

2017-2018

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

451
Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση
&
141
Επιλεγμένες ασκήσεις από την τράπεζα θεμάτων

Άλγεβρα



*Ταξη: Α Γενικού Λυκείου
Άλγεβρα
Έκδοση 17.07*

*Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση
αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της*

*Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός M.Ed.
Χανιά 2017*

*Ιστοσελίδα: <http://users.sch.gr/mipapagr>
mail : papagrigorakism@gmail.com*

0

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0

Μαθηματική Λογική

0.01 Διατυπώστε τις αρνήσεις των προτάσεων

- A) Υπάρχει τρίγωνο που είναι ορθογώνιο
 B) Μερικοί ακέραιοι είναι πρώτοι ,
 Γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός που το τετράγωνό του είναι αρνητικό ,
 Δ) Κάθε τετράπλευρο είναι τετράγωνο.

0.02 Διατυπώστε τις αντίστροφες προτάσεις :

- A) Αν $\alpha = 3$ τότε $\alpha^2 = 9$,
 B) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές ,
 Γ) Αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε είναι ισοσκελές.

0.03 Να διατυπώσετε τις αντιθετοαντίστροφες προτάσεις των προτάσεων : (Δίνεται ότι ο $\alpha \in \mathbb{Z}$)

- A) Αν ο α^2 είναι περιττός τότε και ο α είναι περιττός
 B) Αν ένα τετράπλευρο έχει άνισες διαγωνίους, τότε αυτό δεν είναι ορθογώνιο.
 Γ) Αν ένα τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές τότε δεν είναι ισόπλευρο

0.04 Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος κάθε μια από τις συνεπαγωγές: (για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$):

- A) $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha \leq 2$
 B) $\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$,
 Γ) $\alpha^2 < 4 \Rightarrow -2 < \alpha < 2$.
 Δ) $\alpha^2 + 1 = \alpha^2 + 2 \Rightarrow 1 = 2$
 E) $\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$
 Στ) $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 > 0$
 Ζ) $\alpha^2 + 1 = \alpha^2 + 2 \Rightarrow 1 = 2$

0.05 ** Να αποδείξετε ότι:

- A) $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$ B) $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
 Γ) $(p \wedge q) \Rightarrow q$ Δ) $p \Rightarrow (p \vee q)$.
 E) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

Σύνολα

0.06 A) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο: $B = \{(x, y) / x \text{ ακέραιος με } -2 \leq x \leq 1 \text{ και } y \in \mathbb{R} \text{ με } 2x + y = 1\}$.

B) Γράψτε το σύνολο $\Gamma = \{2, 4, 6, 8\}$ με περιγραφή

Δ) Για τα προηγούμενα σύνολα να χαρακτηρίσετε σωστές ή λάθος τις προτάσεις:

$$3 \in \Gamma, \quad (0, 2) \in B, \quad 8 \notin B, \quad -1 \notin \Gamma, \quad 0 \in \Gamma$$

0.07 Δίνονται τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 4)(x + 1)(x^3 - 64) = 0\} \text{ και}$$

$$B = \{y \in \mathbb{R} / (y - 2)(y^2 - 16)(y^2 - 9) = 0\}$$

Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$.

0.08 Να βρεθεί η ένωση και η τομή των συνόλων: α) $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$ και $B = \mathbb{R} - \{1, 3\}$,

$$\beta) A = \mathbb{R} - \{1, 2\} \text{ και } B = [1, +\infty),$$

$$\gamma) A = (3, +\infty) \text{ και } B = (-\infty, 5].$$

0.09 Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$ και

$$B = \{3, 4\} \text{ τότε να αποδείξετε ότι: } (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$\text{και } (A \cap B)' = A' \cup B' \text{ (τύποι DE MORGAN).}$$

0.10 Να συμπληρώσετε τις ισότητες

$$N \cup Z = \dots, \quad \mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \dots, \quad \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \dots, \quad \mathbb{R} \cap \mathbb{N} = \dots$$

0.11 Έστω ότι τα σύνολα A και B είναι

υποσύνολα ενός συνόλου αναφοράς Ω . Να

χαρακτηρίσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

$$A) \text{ Αν } A \subseteq B \text{ τότε } A \cup B = A .$$

$$B) \text{ Αν } B \subseteq A \text{ τότε } A \cap B = B .$$

$$\Gamma) \text{ Αν } A \cup B = \Omega \text{ και } A \cap B = \emptyset \text{ τότε } A' = B .$$

$$\Delta) \text{ Είναι } \emptyset \subseteq A, \text{ για κάθε } A .$$

1 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ισοπίθανα Ενδεχόμενα

1.01 Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές . Να βρείτε τα ενδεχόμενα :

A : “Το αποτέλεσμα της 1^{ης} ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2^{ης}”

B : “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 5”

Γ : “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5”

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα .

$$A \cap B, \quad A \cap \Gamma, \quad (A \cap B) \cap \Gamma$$

1.02 Έστω τα σύνολα $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 10 \leq \omega \leq 20\}$, $A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$ και $B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 4\}$.

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες

- α) Να ανήκει στο A
- β) Να μην ανήκει στο B

1.03 Έστω τα σύνολα $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ περιττός}\}$ $A = \{\omega \in \Omega / \omega < 4\}$. Αν εκλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις πιθανότητες να ανήκει:

- A) στο A ή στο B,
- B) στο A και στο B
- Γ) στο A και όχι στο B
- Δ) σε ένα το πολύ από τα A και B.

1.04 Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι διαδοχικά δύο φορές. Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

- A) Το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι μικρότερο από το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης.
- B) Οι ενδείξεις και στις δύο ρίψεις είναι ίδιες.
- Γ) Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μεγαλύτερο του 9 .

1.05 Σε ένα Λύκειο οι μαθητές της A τάξης είναι 54 . Αν εκλέξουμε τυχαία ένα μαθητή του Λυκείου η πιθανότητα να είναι μαθητής της A τάξης είναι 0,36 και η πιθανότητα να είναι της B τάξης είναι 0,34 . Να βρείτε:

- A) το πλήθος όλων των μαθητών του Λυκείου,
- B) το πλήθος των μαθητών της B τάξης,
- Γ) την πιθανότητα να είναι ένας μαθητής που εκλέξαμε τυχαία μαθητής της Γ τάξης.

1.06 Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια μαζί. Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε 6 στο ένα και 5 στο άλλο.

1.07 Ένα κουτί περιέχει 2 άσπρες και 3 κόκκινες σφαίρες. Βγάζουμε διαδοχικά δύο σφαίρες. Να βρεθεί η πιθανότητα:

- A) να είναι δύο κόκκινες,
- B) να είναι η πρώτη άσπρη και η δεύτερη κόκκινη
- Γ) να είναι και οι δύο άσπρες.

1.08 Ένα κουτί περιέχει 12 άσπρες, μερικές κόκκινες και μερικές μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να πάρουμε κόκκινη μπάλα είναι $\frac{1}{2}$ και η πιθανότητα να πάρουμε μαύρη μπάλα είναι $\frac{1}{3}$. Να βρείτε πόσες κόκκινες και πόσες μαύρες μπάλες υπάρχουν στο κουτί.

1.09 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ και

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων.

Γ: «Πραγματοποιείται ένα μόνο από τα A και B»

Δ: «Δεν πραγματοποιείται ούτε το A ούτε το B».

1.10 Από τους 50 μαθητές της Α τάξης ενός οι 20 ασχολούνται με το ποδόσφαιρο, οι 40 με το μπάσκετ και καθένας ασχολείται με το ποδόσφαιρο ή το μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρεθεί η πιθανότητα:

- A) Να μην ασχολείται με το ποδόσφαιρο,
 B) Να ασχολείται με το ποδόσφαιρο και με το μπάσκετ,
 Γ) Να ασχολείται με το ποδόσφαιρο αλλά όχι με το μπάσκετ.

1.11 Σε μια επιχείρηση το 60% δεν ξέρει αγγλικά, το 80% δεν ξέρει γαλλικά και το 50% δεν ξέρει ούτε αγγλικά ούτε γαλλικά. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή ποια είναι η πιθανότητα να ξέρει αγγλικά και γαλλικά.

1.12 Έστω A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι η πιθανότητα να πραγματοποιείται:

$$\text{Κανένα από τα } A \text{ και } B \text{ είναι } \frac{1}{4},$$

$$\text{Μόνο ένα από τα } A \text{ \& } B \text{ είναι } \frac{2}{3}.$$

Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται ένα το πολύ από τα A και B.

1.13 Έστω A,B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου για τα οποία ισχύει ότι η πιθανότητα:

- να πραγματοποιείται το A είναι 0,2 ,
- να μην πραγματοποιείται το B είναι 0,6 και
- να πραγματοποιούνται και τα δύο είναι 0,15

Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται:

- A) ένα τουλάχιστον από τα A και B,
 B) το πολύ ένα από τα A και B,
 Γ) κανένα από τα A και B,
 Δ) μόνο το A ,
 Ε) μόνο ένα από τα A και B,
 ΣΤ) το A ή να μην πραγματοποιείται το B

1.14 Έστω το σύνολο $\Omega = \{0,2,3,4\}$. Εκλέγουμε τυχαία ένα $\lambda \in \Omega$. Να βρείτε την πιθανότητα ο λ να είναι ρίζα της εξίσωσης $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

1.15 Σε μια έρευνα που έγινε μεταξύ των μαθητών μιας τάξης βρέθηκε ότι το 50% θα πάει το καλοκαίρι διακοπές σε «νησί», το 50% θα πάει το καλοκαίρι διακοπές σε «βουνό», το 10% θα πάει διακοπές το καλοκαίρι σε «νησί» και σε «βουνό» ενώ τρεις μαθητές δεν θα πάνε πουθενά. Πόσα άτομα έχει η τάξη;

1.16 Σε ένα σχολείο το 50% των μαθητών έχει κινητό τηλέφωνο ή δεν έχει H/Y και το 25% των μαθητών έχει κινητό και H/Y. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν η πιθανότητα να έχει κινητό και να μην έχει H/Y είναι $\frac{1}{5}$, βρείτε την πιθανότητα να μην έχει ούτε H/Y ούτε κινητό.

1.17 Ένα κουτί περιέχει 3 άσπρες και 2 κόκκινες σφαίρες. Βγάζουμε διαδοχικά δύο σφαίρες. Να βρεθεί η πιθανότητα:

- A) να είναι δύο κόκκινες,
 B) να είναι η πρώτη άσπρη και η δεύτερη κόκκινη
 Γ) να είναι και οι δύο άσπρες.

1.18 Μέσα σε ένα κουτί υπάρχουν 4 μπάλες από τις οποίες οι 2 είναι άσπρες και οι 2 κόκκινες. Επιλέγουμε την μία μπάλα μετά από την άλλη μέχρι να μείνουν στο κουτί ο μικρότερος αριθμός με μπάλες του ίδιου χρώματος. Να βρείτε :

A) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

A: «Οι μπάλες που επιλέξαμε ήταν του ίδιου χρώματος».

B: «Στο κουτί έμεινε μόνο μία μπάλα».

Γ: «Από τις μπάλες που επιλέξαμε οι κόκκινες ήταν περισσότερες από τις άσπρες».

B) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων :

$$A \cup B, B \cap \Gamma, \Gamma \cup A', (A \cap B)'$$

Λογισμός Πιθανοτήτων

1.19 Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B, Γ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει:
 $P(A \cap B) + P(A \cup B) = 0,5$ και $P(A') = 0,8$. Να βρείτε την $P(B)$.

1.20 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου και ισχύουν $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$,
 $P(B) = \frac{2}{3}$, τότε βρείτε τις $P(A \cap B')$, $P(A' \cap B)$.

1.21 Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B ενός πειράματος τύχης, με πιθανότητες τέτοιες ώστε:
 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B')$.

1.22 Αν για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$,
 $P(A') + P(B') = \frac{11}{10}$ να βρείτε την $P(A \cup B)$.

1.23 Αν για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A') = 0,5$,
 $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ να υπολογίσετε την $P(B \cap A')$.

1.24 Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν οι ισότητες $P(A) = \frac{1}{6}$,

$P(A) = \frac{1}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$, βρείτε τις:

A) $P(A')$,

B) $P(A \cap B')$, Γ) $P(A' \cap B)$.

1.25 Αν $\frac{3}{P(A')} - \frac{2}{P(A)} = \frac{25}{6}$ να βρείτε τις $P(A)$ και $P(A')$.

1.26 Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δ.χ. Ω ισχύει: $3P(A \cup B) = 1 + 3P(A - B)$
να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(B')$.

1.27 Αν για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι: $P(A') = 3P(A)$,
 $P(A) + 2P(B) = 1$ και $2P(A \cup B) = 1$, υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B - A)$, $P(A \cup B')$.

1.28 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου για τα οποία ισχύουν $A \cup B = \Omega$, $P(A) = \alpha$,
και $P(B) = \beta$. Να βρεθούν οι: $P(A' \cup B')$,
 $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B)$, $P(A' \cap B)$.

1.29 Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν $P((A' \cap B) \cup (A \cap B')) = \frac{1}{6}$
 $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ να βρείτε την πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

1.30 Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:
 $P(A - B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$ και $P(B' - A) = \frac{1}{2}$.
Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B .

1.31 Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει ότι:
 $P(A - B) = \frac{1}{4}$ και $P(B') = \frac{1}{2}$. Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B .

1.32 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με μη μηδενικές πιθανότητες, για τα οποία ισχύει $P(A)P(A') = P(A') + P^2(B)$. Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B αδύνατο.

Παραμετρικές

1.33 Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Αν ισχύουν οι ισότητες $P(\alpha) = 3\lambda^2$, $P(\beta) = 4\lambda - 1$ και $P(\gamma) = 7\lambda - 2$, να υπολογίσετε την τιμή του λ

1.34 Αν Ω δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα με $N(\Omega) = 30$

και $N(A) = \frac{x^2 + 4}{2}$, $P(B) = \frac{x}{6}$, με A, B

συμπληρωματικά ενδεχόμενα, να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$.

1.35 Αν A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \lambda^2$,

$P(B) = 7\lambda^2 - 6\lambda + 2$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.

1.36 Ένα μη αμερόληπτο ζάρι είναι έτσι φτιαγμένο ώστε η εμφάνιση κάθε αριθμού (κ) να είναι ανάλογη του (κ) με $\kappa = 1, 2, 3, \dots, 6$. Να βρείτε τη πιθανότητα εμφάνισης κάθε αριθμού.

1.37 Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_3\}$.

Αν ισχύουν: $P(A) = \frac{1}{\kappa}$, $P(B) = \frac{2\kappa - 1}{2\kappa}$ και $P(\omega_4) = \frac{1 - \kappa}{3\kappa}$, να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}^*$ και οι πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$.

1.38 Έστω το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ένας δειγματικός χώρος. Αν $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{3, 5\}$ με $P(A) = \frac{3\lambda - 1}{5}$ και $P(B) = \frac{2 - 3\lambda}{5}$. Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cup B)$

Ανισότητες

1.39 Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι:

- A) $0 \leq 4P(A)P(A') \leq 1$,
- B) $0,5 \leq [P(A)]^2 + [P(A')]^2 \leq 1$,
- Γ) $P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + P((A \cup B)')$,
- Δ) $2P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \leq 2P(A \cup B)$.

1.40 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$.

A) Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

B) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{6} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$.

1.41 Έστω A, B ενδεχόμενα με $P(A) = 0,32$, $P(B) = 0,78$. Να δείξετε ότι: $0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,32$.

1.42 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δ.χ με $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Δείξτε ότι $\frac{5}{12} \leq P(B) \leq \frac{3}{4}$

1.43 Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$. Να αποδείξετε ότι: $1 \leq 6P(A - B) \leq 3$.

1.44 Αν A, B συμπληρωματικά ενδεχόμενα και $25P^2(A) + 8 \leq 29P(A) - P(B)$, να βρεθούν οι $P(A)$ και $P(B)$.

1.45 Έστω A, B, Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια, ώστε $\Gamma \subseteq A \cap B$.

Να αποδειχθεί ότι:

- A) $2P(\Gamma) \leq P(A) + P(B)$,
- B) $3P(\Gamma) \leq 2P(A \cap B) + P(A \cup B) \leq 3P(A \cup B)$,
- Γ) $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B \cup \Gamma')$.

2 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ιδιότητες των πράξεων

2.01 Αν $\alpha = -0,5$, $\beta = 0,001$ να υπολογιστεί η παράσταση $3(2\alpha - 3\beta) - 4[-3\alpha + 2(\alpha + 2\beta - 1)]$.

2.02 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις
 Α) $3[2(1-4x) + 3(1-5x)] - 2[3(1-2x) - x]$
 Β) $-3[-2\beta + \alpha(1-2\beta)] - [3\alpha - (4\beta - 5)]$

2.03 Δείξτε ότι αν είναι αντίθετοι οι αριθμοί $A = x - 3y + 4z$ και $B = y - x - 2z$, τότε $y = z$.

2.04 Αν οι αριθμοί $\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$ και $\beta + \sqrt{\beta^2 + 1}$ είναι αντίστροφοι, να αποδείξετε ότι οι α και β είναι αντίθετοι.

2.05 Δίνονται οι θετικοί αριθμοί α, β με $\alpha \neq \beta$

για τους οποίους ισχύει $\frac{\beta^2}{\beta^4 + 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha^4 + 1}$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\alpha^{18} \cdot (\beta^{-3})^{-5}}{\alpha^3 \cdot (\alpha\beta)^{-5}}$$

2.06 Αν $\alpha - 3\beta = 1$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\alpha(\alpha - 1) - 4\beta(2 + \alpha) + \beta(\alpha + 8)$.

2.07 Αν $xy(2y - x) \neq 0$ δείξτε ότι είναι ανεξάρτητη των x, y η παράσταση $\frac{1}{1 - \frac{x}{2y}} + \frac{1}{1 - \frac{2y}{x}}$

2.08 Αν $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, να βρεθούν οι τιμές των

παραστάσεων: $\frac{x}{2}, \frac{x+y}{y}, \frac{x+2}{y+3}, \frac{y}{x}, \frac{y+x}{x}$

2.09 Αν $\frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}$, $y \neq 0$ να βρεθεί ο λόγος $\frac{x}{y}$

και η τιμή της παράστασης $A = \frac{x^2 - y^2}{2xy + x^2}$.

2.10 Αν $\frac{4x-9y}{8x} = \frac{x-y}{2(x+y)}$ με $xy(x+y) \neq 0$,

βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{x^2 - y^2}{5xy + 5y^2}$

2.11 Αν $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ και $x - y = 1$ να βρεθούν οι x, y

2.12 Αν ο α είναι περιττός ακέραιος δείξτε ότι ο αριθμός $(\alpha + 1)^2 + 2\alpha + 2$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

2.13 Αν n φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $3^{n+2} - 3^{n+1} - 3^n$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

2.14 Αποδείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών αριθμών είναι άρτιος.

2.15 Αν $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega}$ να αποδειχτεί ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{2v} = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{x^2 + y^2 + \omega^2}\right)^v = \left(\frac{\alpha^v + \beta^v + \gamma^v}{x^v + y^v + \omega^v}\right)^2$$

2.16 Αν $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega}$ να αποδείξετε ότι:

$$A) \left(\frac{\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6}{x^6 + y^6 + \omega^6}\right) = \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{x^2 + y^2 + \omega^2}\right)^3$$

$$B) \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{x^2 + y^2 + \omega^2}\right)^v = \left(\frac{\alpha^v + \beta^v + \gamma^v}{x^v + y^v + \omega^v}\right)^2$$

2.17 Να δείξετε ότι :

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι άρρητος

ii) Αν α ρητός με $\alpha \neq 0$ και β άρρητος, τότε ο $\alpha \cdot \beta$ είναι άρρητος

Δυνάμεις

2.18 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A) \frac{(\alpha^2\beta^{-3})^2(\alpha^{-2}\beta)}{(\alpha^3\beta^2)^{-1}(\alpha^2\beta^{-4})}, \quad B) \frac{3x^2y^{-1}-4x^{-3}y}{x^{-2}y}.$$

2.19 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A) x^5(xy^2)^3 : (xy^{-1})^2 \text{ αν } x=0,4, y=-2,5$$

$$B) \frac{(x^3y^{-1})^2}{[x^{-1}y(x^3y^{-3})^{-1}]^{-2}} \text{ αν } x=\frac{1}{10^3}, y=\frac{-1}{10^2}$$

2.20 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-3} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{-2} \text{ και } \frac{(\alpha^2\beta)^{-3}(\alpha\beta^2)^{-3}}{\alpha^{-7} \cdot \beta^{-2} \cdot \alpha^{-2} \cdot \beta^{-7}}$$

2.21 Βρείτε τις τιμές των κ, λ όταν:

$$A) (-15x^{3\kappa-1}y^\lambda) : (-3x^\kappa y^2) = 5x^3y$$

$$B) (4\alpha^{2\kappa-1}\beta^{3\lambda}) : (12\alpha^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1}) = \frac{2}{3}\alpha\beta^3$$

2.22 Αν ν είναι φυσικός με $\nu > 1$, δείξτε ότι:

$$(-1)^\nu + (-1)^{\nu+1} + (-1)^{\nu+2} + (-1)^{\nu+3} = 0.$$

2.23 Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορούμε να φτιάξουμε με: α) τρία δυνάρια, β) τρία τριάρια, γ) τρία τεσσάρια;

2.24 Για ποια τιμή του κ η παράσταση $\alpha^{\kappa+1} \cdot \beta^{2\kappa}$ γράφεται ως δύναμη με βάση (αβ);

2.25 Να βρεθεί ο $\nu \in \mathbb{Z}$ αν $(2^{3\nu-6})^{\nu^2+6} = 1$

2.26 Δείξτε ότι $\left(\frac{x^\alpha}{x^\beta}\right)^{\alpha+\beta} \cdot \left(\frac{x^\beta}{x^\gamma}\right)^{\beta+\gamma} \cdot \left(\frac{x^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\gamma+\alpha} = 1$

2.27 Να γράψετε την παράσταση:

$$\{2^{101} : [(5^{171} : 5^{170} - 3)^{98} + 2^{105} : (2^3 \cdot 2^4) + (2^{11})^9]\} \cdot 2^{38}$$

ως δύναμη με βάση το 8

Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση

2.28 Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι τέλεια τετράγωνα οι παραστάσεις:

$$A) 16 + 8x + \dots$$

$$B) 9\alpha^2 + \dots - 12\alpha\beta$$

$$\Gamma) x^4y^2 - 6x^2y + \dots$$

$$\Delta) 4x^2 + 1 + \dots$$

$$E) 9 + 4\sqrt{2} = (\dots + \dots)^2$$

2.29 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$A) x^2 - \dots + 1 = (\dots - \dots)^2$$

$$B) 4\alpha^2 + \dots + 9 = (\dots + \dots)^2$$

$$\Gamma) 25\psi^2 - \dots + 16x^2 = (\dots - \dots)^2$$

$$\Delta) (2x-1)(4x^2+2x+1) = \dots - \dots$$

$$E) (2x+3)(4x^2-6x+9) = \dots + \dots$$

$$\Sigma\tau) 8x^3 - \dots + \dots - 27 = (\dots - \dots)^3$$

$$Z) 1 + \dots + \dots + x^3y^3 = (\dots + \dots)^3$$

2.30 A) (Lagrange) Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

B) Να γραφεί το γινόμενο $25 \cdot 26$ ως άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων.

2.31 Να αποδειχτεί ότι

$$A) \left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2 = 1$$

$$B) \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = xy$$

2.32 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$A) (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$B) 4\alpha(\alpha-1) - (2\alpha-1)^2 = -1$$

$$\Gamma) (\alpha^2-3)^2 - (\alpha-1) \cdot (\alpha^3-6\alpha) = \alpha(\alpha^2-6)+9$$

$$\Delta) (\alpha^2+1) \cdot (x^2+4) - (2\alpha-x)^2 = (\alpha x+2)^2$$

2.33 Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

A) $(\alpha + \beta)^3 - (\alpha - \beta)^3 - 6\alpha^2\beta = 2\beta^3$

B) $2\alpha(2\alpha - 1)^2 - (2\alpha - 1)^3 - 4\alpha^2 = 1 - 4\alpha$

2.34 Αν $\alpha - \beta = 2$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha - 2\alpha\beta + 4\beta + 3 = -1.$$

2.35 Αν $\alpha\beta = 1$ δείξτε ότι $\frac{\alpha^3}{1+\alpha^2} - \frac{\beta^3}{1+\beta^2} = \alpha - \beta$

2.36 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2$ τότε $\alpha = \beta$.

B) Αν $(\alpha + \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4$, $\alpha\beta \neq 0$ τότε $\alpha = \beta$

2.37 Να δείξετε ότι $\left(\frac{\alpha^2}{\alpha - \beta} - \beta\right) : \left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}\right) = 1$

2.38 Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι: αν

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \text{ τότε } \alpha = \beta = \gamma.$$

2.39 Για κάθε $x, y, \omega \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: αν

$$(x + y + \omega)^2 = 3(x^2 + y^2 + \omega^2) \text{ τότε } x = y = \omega.$$

2.40 Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου

και ισχύει ότι $\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{\beta + \gamma} = \frac{2\alpha - \beta - \gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι

το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.41 Αν $\beta = \alpha - 1$ να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)(\alpha^8 + \beta^8) = (\alpha^{16} - \beta^{16}).$$

2.42 Αν $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$ τότε

να αποδείξετε ότι $x = \alpha$ και $y = \beta$.

2.43 Αν $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 5$ βρείτε τα $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}$.

2.44 Αν $x + y = 2$ και $xy = 1$ υπολογίστε τα

$$x^2 + y^2, x^3 + y^3, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, x^2y + xy^2, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

2.45 Αν $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -2$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

$$(2\alpha + 1)(2\beta + 1), \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \alpha^2 + \beta^2, \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}, \alpha^3 + \beta^3,$$

2.46 Αν $x = 4\alpha^3 - 3\alpha$, $y = 4\beta^3 - 3\beta$ και

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ να αποδείξετε ότι } x^2 + y^2 = 1.$$

2.47 Αν $\alpha + \beta \neq 0$, $\beta + \gamma \neq 0$, $\gamma + \alpha \neq 0$ και

$\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\gamma}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha + \gamma} = 0.$$

2.48 *Αν για τους θετικούς ακέραιους x, y, ω

ισχύει ότι $3^{x^3+y^3} = \left(\frac{27^{xy}}{3^{\omega^2}}\right)^\omega$ δείξτε ότι $x = y = \omega$.

2.49 ** Αν $\alpha\beta\gamma = 1$ και $\beta\gamma + \beta + 1 \neq 0$ αποδείξτε

$$\text{ότι } \frac{\alpha}{\alpha\beta + \alpha + 1} + \frac{\beta}{\beta\gamma + \beta + 1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha + \gamma + 1} = 1$$

2.50 ** Να αποδείξετε ότι

$$\text{αν } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \text{ τότε } \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = 3. \text{ (Euler)}$$

2.51 ** Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ να αποδειχτεί ότι η

παράσταση $\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta(\gamma + 2)}{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$ είναι

ανεξάρτητη των α, β, γ

2.52 Αν για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ισχύει ότι

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} - \frac{B}{x + 1}, \text{ να βρείτε τους πραγματικούς}$$

αριθμούς A και B

Παραγοντοποίηση2.53 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

- A) $2\alpha\beta + 3\alpha^2$ B) $4\alpha^3 - 8\alpha$
 Γ) $10\kappa^2 - 1000\lambda^2$ Δ) $5\mu^2 + 10\mu\lambda$
 Ε) $x(x-3) + 2(3-x)$
 Στ) $\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha$
 Ζ) $2x^4 - 18x^2$

2.54 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- A) $x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8$
 B) $x^3 - 3x + 2$
 Γ) $2x\sqrt{x} - 6x + 3\sqrt{x} - 9$
 Δ) $x^3 + 2\sqrt{x} - 3$

2.55 Παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις:

- A) $\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 - 1$
 B) $x^2 - y^2 + \omega^2 + 2x\omega$
 Γ) $x^2 - y^2 - 2x + 1$
 Δ) $m^2 - n^2 + 2np - p^2$

2.56 Απλοποιήστε τις παραστάσεις, αφού βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται:

- A) $\frac{x^2+x+1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^3-1}$ B) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \frac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$,
 Γ) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2+x-2}$ Δ) $\frac{(x^2-x)+2x-2}{x^2-1}$

2.57 Αν $x = -0,5$, $y = -2$, βρείτε την τιμή της

$$\text{παραστάσεως} \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) : \frac{x+y}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right] \frac{xy}{(x+y)^2}.$$

2.58 Αν m, n είναι ακέραιοι και x, y πραγματικοί αριθμοί με $xy \neq 0$, $xy \neq 1$, $xy \neq -1$

$$\text{αποδείξτε ότι } \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^m \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{n-m} \cdot y^{m+n}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{m-n} \cdot x^{m+n}} = 1$$

2.59 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- A) $\frac{\alpha^3 - \beta^3}{(\alpha\beta - \beta^2)^2} : \frac{\alpha\beta + \alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$
 B) $\frac{\alpha - \beta}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} \cdot \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 x - x\beta^2}$
 Γ) $\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) : \left(\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} - 3\alpha\beta\right)$

2.60 Να κάνετε τις πράξεις:

- A) $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{1}{x^3} - 1\right)$
 B) $\left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} - \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1}\right) : \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)$

2.61 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- A) $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$
 B) $\frac{\alpha + \beta}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{\beta + \gamma}{(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)} + \frac{\gamma + \alpha}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)}$

2.62 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

- A) $\left(\frac{3}{9 - \mu^2} + \frac{2\mu - 1}{\mu - 3} - \frac{\mu^2 - 4}{\mu^2 + 6\mu + 9} \cdot \frac{\mu + 3}{\mu - 2}\right) : \frac{\mu}{\mu - 3}$
 B) $\left(\frac{3x + 2}{2x + 3} - \frac{4x - 1}{2x + 3} - \frac{2x^2 + 3x}{4x^2 + 12x + 9}\right) : \frac{3 - 2x}{2x + 3}$
 Γ) $\left[\left(\frac{x^2 + y^2}{y} + x\right) : \frac{x^2 - y^2}{x^3 - y^3}\right] : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$

2.63 Για κάθε φυσικό n , δείξτε ότι

- A) Ο αριθμός $987^2 - 985^2$ είναι άρτιος.
 B) Ο αριθμός 24 διαιρεί τον $5^{2n} - 1$.

2.64 Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

- A) $\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{4\alpha}\right)$ για $\alpha = -3\frac{3}{4}$
 B) $\left(\frac{2}{2\alpha - 1} + \frac{6}{1 - 4\alpha^2} - \frac{4}{2\alpha + 1}\right) : \left(1 - \frac{4\alpha^2 + 1}{4\alpha^2 - 1}\right)$ αν
 $\alpha = -0,1$

Διάταξη – Ανισότητες

2.65 Αν $\alpha > 1$ να διατάξετε από την μεγαλύτερη προς την μικρότερη τις τιμές $\frac{1}{\alpha}$, α^2 , 1 , α^3 , α .

2.66 Αν $-2 < x < 4$ και $3 < y < 7$ να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παραστάσεις $x - y$, $\frac{1}{y}$, $2x + \frac{3}{y}$, x^2 , y^2 , $x^2 + y^2$.

2.67 Αν είναι $2 < x < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις

$$\frac{1}{x} + 2, 1 - \frac{1}{1-x}, \frac{2x-3}{x}, x^2, x^3 - y^2$$

2.68 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $3\alpha < \beta$ τότε $12\alpha < 3(\alpha + \beta) < 4\beta$.

B) Αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha^3 > \alpha^2 - \alpha + 1$.

Γ) Αν $x > y$ τότε $x + 7 > y + 5$.

Δ) $x < 1 < y \Rightarrow xy - x - y + 1 < 0$

2.69 Να αποδείξετε ότι

A) $\alpha \cdot \beta > 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$ και $\alpha \cdot \beta < 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$

B) αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} \leq 1$.

2.70 Δείξτε ότι $\frac{1}{2} < \frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000} < 1$

2.71 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

A) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$,

B) $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1) \geq 8\alpha\beta\gamma$.

2.72 Αν α, β θετικοί, να αποδείξετε ότι

A) $\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{4}$ B) $\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$

2.73 Αν α, β θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $3\alpha + 4\beta = 120$, να αποδειχτεί ότι $30 < \alpha + \beta < 40$.

2.74 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αριθμοί να δείξετε ότι:

A) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$,

B) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$.

2.75 Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 \leq 2\gamma(\alpha + \beta - \gamma)$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.76 Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ισχύει ότι

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \gamma\right) + \beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \alpha\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2} - \beta\right) \leq 0$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

2.77 Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

2.78 Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι

A) $(\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$,

B) $(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^2 \leq 4(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6)$.

2.79 Αν είναι $x, y > 0$ και $x^3 + y^2 \leq 64$ να

αποδείξετε ότι $x^4 + y^3 < 512$.

2.80 Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί να δείξετε ότι

A) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

B) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$

2.81 Συγκρίνετε τους αριθμούς 2^{51} και 3^{34} .

2.82 Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει μήκος x cm και πλάτος y cm, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $3 \leq x \leq 5$ και $1 \leq y \leq 2$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων

περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y

διπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων

περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου

Απόλυτη Τιμή

2.83 Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

$$|-7| = \dots, \quad |\sqrt{2}-1| = \dots, \quad |3-\pi| = \dots, \quad |\sqrt{2}-2| = \dots$$

$$|-a^2| = \dots, \quad |-x^2-\pi| = \dots, \quad |\sqrt{2}-1| = \dots \quad |x^2+2|$$

$$|x^2-4x+4| = \dots, \quad |\eta\mu 38^\circ - 1| = \dots \quad |-a^2-1| = \dots$$

2.84 Αν $\alpha < \beta < \gamma$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = 3|\alpha - \beta| - 2|\gamma - \alpha| + 3|\beta - \gamma|.$$

2.85 Αν $-3 < x < 2$ γράψτε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $A = 2|x+3| - 6|x-2| + x - 1$

$$\Delta = |2-x| - |x-4|$$

2.86 Αν $-1 < x < 2$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = |x+1| + |x-2| + |x+2| + |x-3|$

$$B = 6 \cdot |2x+3| + 3 \cdot |4x-9|$$

2.87 Αν $-1 < \alpha < \beta < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $|\alpha - \beta| + |2\alpha+3| - |3\beta-7|$

2.88 Γράψτε χωρίς απόλυτα τις παραστάσεις $A = x + |8-2x|$, $B = |-2x-6|$, $\Gamma = x - |4-3x|$

2.89 Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις: $\Delta = -|-2x+4| + |2x-4|$,

$$E = 2|x+3| - |2-x| + 1, \quad \Sigma T = |2-x| + |x^2+4|.$$

2.90 Αν $1 < x < 2 < y$, να αποδείξετε ότι: $|1-x| + |2-y| + |x-y| - |2y-1| = -2$

2.91 Να αποδείξετε τις ισότητες:

A) $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$

B) $|\alpha^2 - 2\beta - 3| = |2\beta - \alpha^2 + 3|$

Γ) $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha}, (\alpha \neq 0)$

2.92 Αν $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ να δείχτεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2.$

2.93 Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

A) $|x+y|^2 - |x-y|^2 = 4xy$

B) $(x+|x|)(x-|x|) = 0$

Γ) $(|x|+|y|)(|x|-|y|) = x^2 - y^2$

Δ) $|xy| + xy + x|y| + y|x| \geq 0$

2.94 Αν $x = \frac{\kappa}{|y| + |\kappa|}$, $m = \frac{y}{|\kappa| + |y|}$ να αποδείξετε ότι $|x| + |m| = 1.$

2.95 Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$

2.96 Να αποδείξετε ότι

A) Αν $|x|=1$, $|y|=2$, $|z|=4$ τότε $|x+y-z| < 7$

B) Αν $x, y \in \mathbb{R}^*$ με $|x|+|y| < 1$, τότε $0 < |x| < 1$ και $0 < |y| < 1$

2.97 Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \leq \left|\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right|. \text{ Πότε ισχύει η ισότητα;}$$

2.98 Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \cdot \beta \cdot (3\alpha + 2\beta) \neq 0$

αποδείξτε ότι $\frac{|2\alpha+3\beta|}{|3\alpha+2\beta|} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \leq 1$

2.99 Να αποδείξετε ότι:

A) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq \frac{1}{2}$ τότε $|3x-2y+2| \leq 7$

B) Αν $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$ τότε $|2x-3y+1| \leq 9$

Γ) $|x| \leq 2 \Rightarrow |x^2 - 2x + 6| \leq 14$

2.100 Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $xyz \neq 0$,

να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|} \leq 3$

2.101 Να αποδείξετε ότι:

A) $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$, αν $x, y \neq 0$.

B) $\left| x + \frac{1}{x} \right| = \left| x \right| + \left| \frac{1}{x} \right|$ αν $x \neq 0$.

Γ) $\left| \frac{2x+5y}{5x+2y} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{y} \right| > 1$.

2.102 Αν $|a-1| < 5$ και $|\beta-2| < 3$ βρείτε μεταξύ ποιων τιμών μεταβάλλεται η παράσταση $a+\beta$.

2.103 Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $A = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}$

2.104 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $\frac{x^2}{|x|}$ B) $\frac{x^2-1}{|x|+1}$ Γ) $\frac{9-x^2}{15+5|x|}$

2.105 Να βρεθεί το x όταν: $d(x,3) \leq 7$,
 $d(2,x) = 2$, $d(x,2) > 3$ $d(x,-1) > 2$.

2.106 Δίνονται οι παραστάσεις $A = |x-2|$ και $B = |2x-6|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ δείξτε ότι $2A + \frac{1}{2}B = x-1$.

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$;

2.107 Δίνονται τα x, y τέτοια ώστε:

$$-9 \leq 2x-3 \leq 3 \text{ και } 3 \geq \frac{1-y}{2} \geq -2$$

A) Να αποδείξετε ότι: $|x| \leq 3$, $|y| \leq 5$

B) Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης $K = 2x - 3y - 21$

2.108 Η πλευρά ενός τετραγώνου μετρήθηκε και βρέθηκε 21,7cm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,03cm. Αν R είναι η πραγματική πλευρά του τετραγώνου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή R .

Πίξεις

2.109 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ:

A) Ισχύει ότι $\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[5]{x^5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$.

Γ) Για κάθε x είναι $\sqrt{(-x)^2} = |x|$.

Δ) Για κάθε $x, y \geq 0$ ισχύει $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y}$

E) Ισχύει πάντα ότι $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = |a+b|$.

2.110 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις

χωρίς ριζικά: i) $\sqrt{(2\sqrt{2}-4)^2}$

ii) $\sqrt{x^2-2x+1}$ iii) $\sqrt{x^2y^4}$ iv) $\sqrt{\frac{x^2}{4}}$

2.111 Για κάθε $x \neq 0$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: $\sqrt[6]{x^{18}}$, $\sqrt[3]{x^6}$, $\frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $\sqrt{(2x)^2}$.

2.112 Αν $-3 < x < 2$, να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2+6x+9}$

2.113 Να απλοποιηθεί η παράσταση $\frac{\sqrt{x^2+4 \cdot x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-4 \cdot x+4}}{x-2}$, αν $|x| < 2$.

2.114 Έστω $K = \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3} - \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β) Αν $-3 < x < 5$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή

2.115 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

A) $(\sqrt{12}-\sqrt{27}) \cdot (\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{108})$,

B) $(\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{20}) \cdot (\sqrt{50}-\sqrt{45}+\sqrt{125})$,

Γ) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

2.116 Να αποδείξετε ότι :

$$(\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{20}) \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{45} + \sqrt{125}) = 30$$

2.117 Να υπολογίσετε τα $(2 - \sqrt{2})^3$, $(2 + \sqrt{2})^3$

και να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt[3]{20 - 14 \cdot \sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 + 14 \cdot \sqrt{2}} .$$

2.118 Δείξτε ότι $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{34} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{34} + 3} = 5$

2.119 Αν $x, y > 0$ και $x \neq y$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = x + y + \sqrt{xy}$$

2.120 Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 1 .$$

2.121 Να υπολογίσετε τον αριθμό

$$\frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 1}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} .$$

2.122 Αν $\alpha > 0$ να δείξετε ότι:

$$A) \alpha > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \alpha \quad B) \alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} > \alpha .$$

2.123 α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{51} < 4$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{51}$ και $6 - \sqrt[3]{51}$

2.124 Να μετατραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

$$A) \frac{4}{5 - \sqrt{2}} \quad B) \frac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} \quad \Gamma) \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \quad \Delta) \frac{2}{\sqrt[3]{3} - 1}$$

$$E) \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} \quad \Sigma\tau) \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \quad Z) \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

2.125 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A) \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt[5]{25} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{5}} .$$

$$B) \sqrt{75 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{15 + \sqrt{1}}}}} .$$

$$\Gamma) \sqrt{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}}} .$$

2.126 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A) \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} , \quad B) \sqrt{9 - \sqrt{32}} , \quad \Gamma) \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} .$$

2.127 Να δείξετε ότι: $\sqrt{10 + 2\sqrt{15}} > \sqrt{5} + \sqrt{3} .$

2.128 Συγκρίνετε το $\sqrt{2}$ με το $\sqrt{10} - 2$

2.129 Λύστε την εξίσωση $\sqrt[4]{(x^2 - 6x + 9)^2} = 3 - x$

2.130 Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός

$$\frac{\sqrt{1001 + \sqrt{2001}} - \sqrt{1001 - \sqrt{2001}}}{\sqrt{2}} \text{ είναι φυσικός.}$$

2.131 Να αποδείξετε ότι:

$$A) \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{9}} - \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$B) \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{7} + 3)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{7} - 3)^2}} \in \mathbb{Q} ,$$

$$\Gamma) \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} .$$

2.132 Να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{1 + 1999\sqrt{1 + 2000\sqrt{4 + 2000\sqrt{1 + 2003 \cdot 2005}}}} .$$

2.133 Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\beta) (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8$$

2.134 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \left[(7 + 4\sqrt{3})^8 + \frac{1}{(7 - 4\sqrt{3})^8} \right] \cdot \frac{(14 - 8\sqrt{3})^8}{2^9} \quad \text{και}$$

$$B = \left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2005} + \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2005}} \right] \cdot \frac{(2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^{2005}}{2^{2006}}$$

Να αποδείξετε ότι $A = B$

3

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.01 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$A) \frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2-4} \quad B) \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0.$$

3.02 Να λυθούν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις:

$$A) (\lambda-1)x = \lambda^2-1 \quad B) \lambda^2x+1 = \lambda(x+1)$$

$$\Gamma) \lambda^2(x-3) = \lambda x-3 \quad \Delta) \lambda^2x+3 = 3x+\lambda.$$

3.03 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$A) (x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$B) \alpha[(x+\alpha)^2 - (x-\alpha)^2] = 4x+\alpha^2+\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

3.04 Από τις ισότητες $v = v_0 + at$ και

$$S = v_0t + \frac{1}{2}at^2, \text{ να δείξετε ότι } S = \frac{v+v_0}{2}t.$$

3.05 Ένα βαρέλι Α περιέχει 524 κιλά κρασί των 2 ευρώ το κιλό και ένα βαρέλι Β περιέχει 456 κιλά κρασί των 1,5 ευρώ το κιλό. Αφαιρούμε από κάθε βαρέλι την ίδια ποσότητα κρασιού και βάζουμε αυτή που αφαιρέσαμε από το Α στο Β και αυτή που αφαιρέσαμε από το Β στο Α. Αν μετά το ανακάτεμα των κρασιών, το περιεχόμενο των δύο βαρελιών έχει την ίδια αξία, να βρείτε πόσα κιλά μεταφέρθηκαν από το ένα βαρέλι στο άλλο.

3.06 Ένα ελαιουργείο έχει δύο συγκροτήματα το Α και το Β. Όταν δουλεύουν και τα δύο μαζί τελειώνουν όλες τις ελιές μίας περιοχής σε 12 μέρες. Φέτος ξεκίνησαν μαζί και μετά από 2 μέρες το Α σταμάτησε οριστικά λόγω βλάβης ενώ το Β συνέχισε να δουλεύει. Το Β έχει τα $\frac{2}{3}$ της απόδοσης του Α. Να βρείτε σε πόσες μέρες συνολικά θα τελειώσουν οι ελιές της περιοχής

Εξισώσεις με Απόλυτα

3.07 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$A) |x-3| = 2x, \quad B) |7x-3| = |9x+5|,$$

$$\Gamma) |2x-4| = -|x+5|, \quad \Delta) |2x-5| = 2x-5.$$

3.08 Να λύσετε τις εξισώσεις

$$A) \frac{|x-1|-3}{2} - \frac{|2-2x|}{6} = \frac{1}{2} - \frac{|x-1|}{6},$$

$$B) 1 - \frac{|2x-1|-1}{4} = |1-2x| - \frac{|6x-3|-2}{8}.$$

3.09 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$A) |x+1| + |x-5| = 20 \quad B) ||x-1|+2| = 1$$

$$\Gamma) |x^2-9| + |x^2-5x+6| = 0 \quad \Delta) |x-2| = 2|x+1|$$

3.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$A) |4-|x|| = ||x|+3| \quad B) |x|+x = 4$$

$$\Gamma) ||x|-2|-3| = 1 \quad \Delta) ||x|-2| = 3.$$

3.11 Να λύσετε τις εξισώσεις

$$A) x^4 = -x \quad B) x^4 + x = 0$$

$$\Gamma) 5x^6 + 3x^2 = 0 \quad \Delta) 2x^{10} + x^3 = 0$$

3.12 A) Δείξτε ότι: $\left(\frac{x}{|x|}-1\right)(x+|x|) = 0, x \neq 0.$

B) Λύστε την εξίσωση $\lambda \frac{x}{|x|} = \lambda^2x + \lambda + 1, \lambda \in \mathbb{R}.$

3.13 A) Να λυθεί η εξίσωση $x^3 + 8 = 0$ (1).

B) Αν η εξίσωση: $4\alpha^4x^2 - 1 = 0$ και η (1) έχουν κοινή λύση να βρείτε το α .

$\Gamma)$ Αν η εξίσωση $(\beta+1)^5x^{10} + 32 = 0$ και η (1) έχουν κοινή λύση να βρείτε το β .

Δευτεροβάθμια Εξίσωση

3.14 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

A) $x^2 - 4x = 0$ B) $3x^2 = 4x$

Γ) $2x^2 + x - 15 = 0$ Δ) $4x^2 - 1 = 0$

Ε) $x^2 - 6x + 7 = 0$ ΣΤ) $3x^2 - x = 0$

3.15 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις ως προς x για κάθε τιμή των παραμέτρων τους

A) $\alpha\beta x^2 - (\alpha\gamma + \beta)x + \gamma = 0$, $\alpha\beta \neq 0$.

B) $\alpha\beta x^2 - (\alpha - \beta)x - 1 = 0$, $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Γ) $\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta^2 x + \alpha^2\beta^2 - 1 = 0$, $\beta \neq 0$

3.16 Αν η εξίσωση $x^2 - 2x - 2(\alpha\beta - 1) = 0$ έχει ως ρίζα τον αριθμό $\alpha + \beta$, αποδείξτε ότι $\alpha = \beta = 1$

3.17 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές.

3.18 Έστω η εξίσωση $\lambda x^2 + x + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Για ποιες τιμές του λ έχει μία μόνο ρίζα;

B) Για ποιες τιμές του λ έχει διπλή ρίζα;

Γ) Αν ρ είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης, να υπολογίσετε την παράσταση $\sqrt{(x - \rho)^2}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

3.19 Λύστε την εξίσωση $x^2 + \Delta + 11 = (\Delta + 6)x$ όπου Δ είναι η διακρίνουσά της

3.20 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$:

A) να έχει μία μόνο ρίζα,

B) να έχει διπλή ρίζα.

3.21 Αν $x^2 = xy + 12y^2$ με $x, y \in \mathbb{R}^*$ να βρείτε τις τιμές του $\frac{x}{y}$

3.22 Η εξίσωση $\lambda^2 x^2 + (5\lambda - 2)x + \lambda + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα το -1 . Να βρείτε το λ και μετά να δείξετε ότι το -1 είναι διπλή ρίζα.

3.23 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει μια διπλή ρίζα, αν και μόνον αν $\alpha = \beta = \gamma$.

3.24 Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $(2\alpha - \beta)x^2 - 4\alpha x + 4\beta = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχει διπλή ρίζα, τότε η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 2x + 3(\alpha - \beta) = 0$ έχει ρίζες άνισες.

3.25 Αν η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + 2\gamma = 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 3\beta x + 5\gamma = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

3.26 Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ και $x^2 - x + \alpha = 0$ έχουν κοινή ρίζα;

3.27 Αν η εξίσωση $x^2 + \mu x + \kappa = 0$ έχει διπλή ρίζα, δείξτε ότι το ίδιο θα συμβαίνει και για την εξίσωση: $\left(1 - \kappa + \frac{\mu^2}{2}\right)x^2 + \mu(1 + \kappa)x + \kappa(\kappa - 1) + \frac{\mu^2}{2} = 0$

3.28 Λύστε την εξίσωση $|x + 1| + (x^2 + x)^2 = 0$

3.29 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι μια τουλάχιστον από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ρίζες πραγματικές, $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$, $\gamma x^2 + 2\alpha x + \beta = 0$, $\beta x^2 + 2\gamma x + \alpha = 0$

3.30 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει: $\alpha + \beta^2 + 2\alpha\gamma = 29$ και $\beta + \gamma^2 + 2\alpha\beta = 18$ και $\gamma + \alpha^2 + 2\alpha\gamma = 25$, να υπολογιστεί η τιμή του $\alpha + \beta + \gamma$

Άθροισμα – Γινόμενο Ριζών

3.31 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - 1 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $x_1^2 + x_2^2$,

$$x_1^3 + x_2^3, \frac{x_1}{x_2 + 1} + \frac{x_2}{x_1 + 1} \text{ και } x_1(x_1 - 3).$$

3.32 Έστω η εξίσωση $\sqrt{\alpha}x^2 + (\sqrt{\alpha} + \beta)x + \beta = 0$ όπου είναι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για οποιεσδήποτε τιμές των α, β .

B) Αν x_1, x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -1$.

Γ) Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $-\sqrt{\alpha}$ με $\alpha \neq 1$, να αποδείξετε ότι $\beta = \alpha$

3.33 Ένας μαθητής αντί της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ (1), έλυσε την $x^2 + \beta x + \alpha = 0$ και βρήκε δύο ρίζες. Από αυτές η μία ήταν ίση με μία ρίζα της (1) και η δεύτερη ήταν μικρότερη κατά 3 της άλλης ρίζας της (1). Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β .

3.34 Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν οι ρίζες της $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ είναι ίσες με α και β .

3.35 Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\sqrt{2}x^2 - 4x - 1 = 0$. Βρείτε τις τιμές των

$$\rho_1^3 + \rho_2^3, \frac{\rho_1^2}{\rho_2} + \frac{\rho_2^2}{\rho_1}, |\rho_1 - \rho_2|, |\rho_1| + |\rho_2|$$

3.36 Έστω η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\gamma < 0$

A) Αν x_1, x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης να γράψετε συναρτήσεις των αριθμών β, γ τις παραστάσεις $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, $x_1^2 + x_2^2$.

B) Να αποδείξετε ότι: $d(x_1, x_2) = \sqrt{\Delta}$, όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης.

3.37 Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2 + \lambda - 1 = 0$ να βρεθεί ο πραγματικός λ , έτσι ώστε να ισχύει: $3x_1^3 + 8x_1x_2^2 + 8x_1^2x_2 + 3x_2^3 = 192$.

3.38 Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ και ρ_1, ρ_2 ρίζες της $x_1(x - x_2)^2 + x_2(x - x_1)^2 = 0$, να αποδειχθεί ότι, αν οι x_1, x_2 είναι ετερόσημες, τότε και οι ρ_1, ρ_2 είναι ετερόσημες.

3.39 Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$ να βρείτε εξίσωση με ρίζες τις παραστάσεις $x_1\rho_1 + x_2\rho_2$ και $x_1\rho_2 + x_2\rho_1$.

3.40 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 2x + (\lambda + 2) = 0$ έχει:

A) δύο ρίζες ετερόσημες,

B) δύο ρίζες θετικές και άνισες,

Γ) δύο ρίζες αντίστροφες.

3.41 Έστω η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda = 0$

A) Να λυθεί η ανίσωση $d(x, \lambda) < 5 - \lambda$ όταν η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

B) Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να έχει ρίζες αντίθετες

3.42 A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x^2 - 7x + 2 = 0 \text{ έχει δύο θετικές ρίζες } x_1, x_2$$

B) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $A =$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad B = \sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}.$$

3.43 Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της $x^2 - 5x - 7 = 0$, να βρεθεί εξίσωση που να έχει ρίζες τις:

$$A) \rho_1 = 2x_1 - 1, \rho_2 = 2x_2 - 1,$$

$$B) \rho_1 = x_1 + x_2 \text{ και } \rho_2 = x_1 x_2.$$

3.44 Έστω η εξίσωση

$$(|\lambda - 1| + 3)x^2 + 2\lambda x + (|\lambda - 1| - 3) = 0$$

A) Βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να υπολογίσετε.

B) Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

3.45 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 10x + 20 = 0$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 . Βρείτε το πρόσημο του $x_1 + x_2^{2005}$

3.46 Δίδεται η εξίσωση

$$x^2 - (2\lambda + 1)x + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \text{ η οποία έχει δύο}$$

πραγματικές ρίζες, έστω x_1, x_2 . Να αποδείξετε ότι:

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq 2 \text{ και } 0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2.$$

3.47 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ και

ισχύει η σχέση $3\beta^2 = 16\gamma$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ομόσημες, τις ρ_1 και ρ_2 .

B) Να αποδείξετε ότι $\rho_1 = 3\rho_2$

Γ) Αν για το άθροισμα S των ριζών ισχύει

$$S = 4, \text{ να λύσετε την ανίσωση } |\beta x - 1| - \gamma \geq 0.$$

3.48 Δίνονται οι διαφορετικοί ανά δυο πραγματικοί αριθμοί x_1, x_2, x_3 . Αν δίνεται ότι:

Η εξίσωση $x^2 - 3x + \alpha = 0$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) έχει ρίζες τους

$$x_1, x_2$$

Η εξίσωση $x^2 - 5x + \beta = 0$, ($\beta \in \mathbb{R}$) έχει ρίζες τους

$$x_2, x_3$$

Η εξίσωση $x^2 - 4x + \gamma = 0$, ($\gamma \in \mathbb{R}$) έχει ρίζες τους

$$x_1, x_3$$

Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Τριώνυμο – Παραγοντοποίηση- μορφές3.49 Να απλοποιηθούν τα κλάσματα :

$$\frac{x^2 - \alpha x - 6\alpha^2}{x^2 + 5\alpha x + 6\alpha^2} \text{ και } \frac{x^2 + (\alpha - \beta)x - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta}{x^2 + (4\alpha + \beta)x + 3\alpha^2 + 3\alpha\beta}.$$

3.50 Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο

$$\gamma^2 x^2 + (\gamma^2 - \alpha^2 + \beta^2)x + \beta^2 \text{ όπου τα } \alpha, \beta, \gamma \text{ είναι}$$

μήκη πλευρών ενός τριγώνου δεν έχει πραγματικές ρίζες.

3.51 Ένας επενδυτής πούλησε μια μετοχή αντί

21 euro και υπολόγισε ότι ζημιώθηκε τόσο επί τοις εκατό όσο την αγόρασε. Να βρείτε πόσα euro έχασε (2 λύσεις).

3.52 Ένα βαρέλι περιέχει 54 lt κρασί. Βγάζουμε

μια ποσότητα κρασί και προσθέτουμε την ίδια ποσότητα νερού. Μετά ξαναβγάζουμε την ίδια ποσότητα από το μείγμα. Στο βαρέλι παραμένει ένα μείγμα που περιέχει 24 lt καθαρό κρασί. Να βρείτε πόσα λίτρα κρασί βγάλαμε αρχικά.

3.53 Σε μια γεωργική περιοχή αναλογεί ως έκτακτη ενίσχυση, εξ' αιτίας φυσικής καταστροφής, το ποσό των 3000 euro. Σε κάθε παραγωγό αναλογεί το ίδιο ποσό. Επειδή είχε γραφτεί κατά λάθος ένας παραγωγός παραπάνω, τον έσβησαν και οι υπόλοιποι πήραν, ο καθένας 100 euro περισσότερα. Να βρείτε πόσοι ήταν τελικά οι δικαιούχοι. (Απ: 5)

4

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Ανισώσεις Πρώτου Βαθμού

4.01 Να λύσετε την ανίσωση:

A) $\frac{(1-2x)(x-3)}{2} + 2x > -(x+1)^2$

4.02 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} > \frac{5x-36}{4} - 1 \text{ και}$$

$$\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} \leq 2 + \frac{3x-1}{15}$$

4.03 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$\frac{x}{2} + 1 > \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \text{ και } \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{6} - 1$$

4.04 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των

ανισώσεων. $3(x-1) + 2x < x+1$, $2(x+3) - x \geq 2$ και

$$-6 \leq \frac{3x-6}{3} \leq 7$$

4.05 Να λύσετε το (Σ):
$$\begin{cases} 2x-4 < x+1 \\ \frac{x-7}{2} \geq \frac{x}{3} - 8 \end{cases}$$

4.06 Να λύσετε τα συστήματα

A) $-2 < \frac{2x-1}{3} < 4$ B) $-2 < \frac{-2x-1}{3} < -1$

4.07 Να λύσετε τα συστήματα:

A) $-2 < -x - \frac{x+1}{2} < 4$

B) $-5 < \frac{1-x}{2} + 1 < -1$

4.08 Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ να λύσετε τις ανισώσεις

A) $\lambda(x-1) > \lambda^2$ B) $\lambda x > x+2$

Ανισώσεις με απόλυτα

4.09 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $|x-1| < 5$ B) $|5-x| - 6 > 0$

Γ) $|2x-1| < -1$ Δ) $|1-2x| > -4$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $|2x+3| \geq 6$ B) $|x+4| \leq 0$

Γ) $1 < |3x-2| < 3$ Δ) $|x+6| \geq 0$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $-2 \leq |x| \leq 5$ B) $2|x| < x+5$

Γ) $|2x-1| \geq 2x-1$ Δ) $|x+5| \leq 1$

4.10 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $3 < |1-2x| \leq 5$ B) $3 \leq |x| \leq 8$

Γ) $1 \leq |2x+3| \leq 9$ Δ) $|2x-1| > 4$

4.11 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $\|5x+3\| + 2 \leq 6$ B) $\|x+3\| - 1 < 2$

4.12 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $|3 - |2x+1|| \leq 2$ B) $\|x+1\| - 4 < 3$

Γ) $|1 - |x-1| - |1-x|| < 2$ Δ) $|1 - |1-x|| \leq 1$

4.13 Αν $|x| < 1$, γράψτε χωρίς απόλυτα τηνπαράσταση $A = 2|x+3| - 6|x-2| + x-1$ και τηνπαράσταση: $B = |2 - |x+1|| + |2 + |x-1||$

4.14 Να λύσετε τις ανισώσεις

A) $1 \leq |x-1| \leq 6$ στο $\mathbb{R}^*$

B) $-1 \leq |2x-5| \leq 4$ στο $\mathbb{R}_-$

Γ) $0 \leq |x-2| - 1 \leq 3$, στο $\mathbb{R}_+$

Δ) $\left|x - \frac{1}{4}\right| < 4$ στο $\mathbb{Z}$

4.15 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των

ανισώσεων: $-|15x-23| < 7$ και $\left| \frac{4}{3x-2} \right| > \frac{1}{3}$

4.16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $\frac{|2006-x|+|x-2006|}{3} \geq 2$

B) $\frac{2|3-x|-1}{3} - |3-x| > \frac{|x-3|-8}{3} + 1$

Γ) $2|x|+3|x-1| > 5x-2$

4.17 Βρείτε τις τιμές του x ώστε να ισχύουν:

$(|x|-2)(2|x|-30) = 0$ και $|x+5| \geq 7$

4.18 Αν $|a| \leq 1$, όπου $a \in \mathbb{Z}$, να βρεθεί η τιμή

της παράστασης: $A = a^{2005} + 3$

4.19 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μια από τις παραστάσεις:

A) $\sqrt{|x|-1}$ B) $\sqrt{2|x|+6}$

Γ) $\sqrt{|x+3|-2}$ Δ) $\sqrt{4-|x|}$

E) $\sqrt{1-|x-2|}$ Στ) $\sqrt{2|x|-6}$

4.20 Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις:

A) $A = \sqrt{5-|1-x|} + \sqrt{|x+2|-1}$

B) $B = \sqrt{1-2|1-2x|}$

4.21 Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

A $f(x) = \sqrt{|x|-2} - \sqrt{(x^2+4)(|x|+3)}$

B $g(x) = \frac{\sqrt{x^3-x^2}+4}{\sqrt{6-x}}$

Γ $k(x) = \frac{1}{|6-x|} + \sqrt{x-1}$

Δ $m(x) = \sqrt{6-x} + \sqrt{4-x}$

Ανισώσεις Δευτέρου Βαθμού

4.22 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $4-x^2 \geq 0$ B) $3x^2-5x+2 \geq 0$

4.23 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $-x^2+x-1 > 0$ B) $-x^2+x-1 \leq 0$

4.24 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $(x^2-7x+12)(3x-x^2)(x^2+2x+6) \geq 0$,

B) $x(x^2-3x+2)(2x^2+5x)(1+x+x^2) < 0$.

4.25 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $(x+2)^2(2x^2-5x-3)(x^6+2) > 0$,

B) $(x-5)(x+1)^2(x+2)(x-3) < 0$.

4.26 Να λυθούν οι ανισώσεις:

A) $\frac{-x^2+5x+6}{x^2+x-6} > 0$, B) $\frac{x^2-4x+3}{x-2} \geq 0$,

Γ) $\frac{(x^2-8x+7)(x^2-3x+9)}{x^2-4} < 0$.

4.27 Να λυθούν οι ανισώσεις:

A) $\frac{x+1}{7-x} > 2$ B) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+2} \leq 2$,

B) $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} > 1$ Δ) $\frac{4x}{3x-x^2} \geq \frac{1}{2}$.

4.28 Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων:

A) $5 < x^2-14x+50 < 26$ B) $-2 < \frac{2x-1}{x^2-3x+2} < 1$

4.29 Να λύσετε τις ανισώσεις

A) $|x-1-x^2| < |x^2-3x+4|$

B) $|x^2-6x+8| \leq 4-x$

Γ) $|x^2-3x-3| > |x^2+7x-13|$

4.30 Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των

ριζών της εξίσωσης: $x^2-kx+2k-3=0$

4.31 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $|x^3 - 1| \leq x^2 + x + 1.$

B) $|-x^2 + x - 4| > 2(x + 1)$

4.32 Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις

$$\frac{3x+5}{3x-7} < 0 \quad \text{και} \quad \frac{x^2-10x+16}{x-2} < 0;$$

4.33 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων A)

B) $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 4x + 3} + 3\sqrt{-x^2 + 2x}$

4.34 Το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 5x - 6$ έχει ρίζες

τους αριθμούς -1 και 6 . Ποια από τις παρακάτω

ανισότητες είναι σωστή; A) $f(0, 1999) > 0$,

B) $f(0, 1999) \leq 0$, Γ) $f(1999) < 0$ Δ) $f(-1999) > 0$

4.35 Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε

η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0$

A) Να έχει μία μόνο ρίζα

B) Να είναι αδύνατη.

4.36 Έστω $f(x) = (\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$, $\lambda \neq -2$

A) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η ανίσωση $f(x) < 0$ να αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B) Αν $\lambda = -4$ να λύσετε την εξίσωση

$|f(x)| = -8x + 18$

4.37 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η

ανίσωση: $(\lambda - 1)x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda + 1 > 0$ να είναι αδύνατη

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.38 Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ ,
βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 2)x + 3 = 0.$

4.39 Δίνεται η εξίσωση

$(\lambda^3 - \lambda)x^2 + \lambda x + \lambda(1 + \lambda)(1 - \lambda) = 0$

A) Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες

B) Υπάρχει τιμή του λ ώστε να έχει η εξίσωση άπειρες ρίζες;

4.40 Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο

$f(x) = \sqrt{\frac{(\lambda-1)x^2-4x+\lambda}{3x^2-4x+1}} + 2$ να έχει:

A) σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

B) αρνητικό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.41 Να βρεθούν αν υπάρχουν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$ να

αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x .

4.42 Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε η ανίσωση

$\lambda x^2 + (\lambda - 1)x + (\lambda - 1) < 0$ να είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.43 Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$-x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρεθεί ο λ

$\in \mathbb{R}$ ώστε $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \geq 0$.

4.44 Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης

$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο λ ώστε να

ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 1$.

4.45 Δίνεται το τριώνυμο

$f(x) = x^2 - (\lambda + 4)x + \lambda + 6$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

A) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές

B) Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι ρίζες του $f(x)$ βρείτε:

α) για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1^2 + x_2^2 < 20$

β) για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x_1 - x_2| = 2$

4.46 Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η σχέση $-3 < \frac{x^2 + \alpha x - 2}{x^2 - x + 1} < 2$ να ισχύει για κάθε πραγματικό x .

4.47 Α) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση

$$x^2 - (\lambda + 1)x + 2\lambda - 2\lambda^2 = 0 \quad (1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Β) Βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $d(x_1, x_2) < 2$ όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ οι ρίζες της (1)

4.48 Έστω η εξίσωση $x^2 + 3x + 1 = 0$ με ρίζες τις α, β . Αποδείξτε ότι $\left(\frac{\alpha}{\beta + 1}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha + 1}\right)^2 = 18$

4.49 Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι ρίζες του $f(x)$ και ισχύει $|f(x_1 + x_2) - 5| + |x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - 30| = 0$

Α Να δείξετε ότι $\alpha = -6, \beta = 5$

Β Να λυθεί η ανίσωση $f(|x - 3| - 4) < 0$

4.50 Αν για τους αριθμούς α, β, γ ισχύει $\gamma(\alpha + \beta + \gamma) < 0, \alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

Α) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν μπορεί να έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 1.

Β) Η $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

Γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι: $(x_1 x_2)(1 - x_1)(1 - x_2) < 0$.

Δ) Να αποδείξετε ότι μία μόνο ρίζα της εξίσωσης θα είναι στο διάστημα $(0, 1)$

4.51 Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x - 2001$ με $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $P(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $P(2004) < 0$.

Β) Αν είναι $\alpha + \beta > 2001$, τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x - 2001 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές.

4.52 Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 2$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Α Αν ισχύει η σχέση $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $f(100) < 0$

Β Αν ισχύει η σχέση $\alpha + \beta > 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (mathematica.gr)

4.53 Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(x - \alpha)(x - \beta) \geq 0$ να δείξετε ότι: $\alpha = \beta$

4.54 Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $3(\alpha + \beta + 1)^2 + 1 \geq 3\alpha \cdot \beta$ (mathematica.gr)

4.55 Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του πραγματικού α ώστε η εξίσωση $x^2 - 2x + \alpha = 0$ να έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

4.56 Αν $\gamma > 1$ και $|b| \geq 2\gamma$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ικανοποιούν τη σχέση: $\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} \geq 2$.

4.57 Για ποιες τιμές της παραμέτρου μ , μία ακριβώς ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2(\mu + 1)x + \mu^2 = 0$ ανήκει στο διάστημα $(0, 2)$; (mathematica.gr)

4.58 Να βρεθεί δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ που να έχει ως λύσεις τους αριθμούς $\beta + 1$ και $\gamma + 1$

4.59 Έστω η εξίσωση $x^2 + x - 3 = 0$ που έχει ρίζες τις x_1, x_2 . Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $A = x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ και $B = x_2^3 - 4x_1^2 + 19$

5 ΠΡΟΟΔΟΙ

Αριθμητική Πρόοδος

5.01 Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο όταν το άθροισμα των $S_{20} = 1030$ και $\alpha_{10} - \alpha_3 = 35$.

5.02 Να βρείτε την αριθμητική πρόοδο στην οποία είναι $S_{20} = 610$ και $S_{12} = 222$.

5.03 Για ποια τιμή του ακεραίου x οι αριθμοί $x-1$, $3x+5$, $2x+9$ είναι διαδοχικοί αριθμητικής προόδου;

5.04 Βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με άθροισμα 33 και γινόμενο 440.

5.05 Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι οι $\alpha^2 - \beta\gamma$, $\beta^2 - \gamma\alpha$, $\gamma^2 - \alpha\beta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος των διαφορών των δυο προόδων αυτών;

5.06 Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{n-1}} + \sqrt{\alpha_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\alpha_1}}$$

5.07 Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι -μη μηδενικοί- διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{1}{\alpha_3 \alpha_4} + \dots + \frac{1}{\alpha_{n-1} \alpha_n} = \frac{n-1}{\alpha_1 \alpha_n}.$$

5.08 Να παρεμβάλετε μεταξύ του 5 και του 50 όρους ώστε να αποτελούν όλοι μαζί διαδοχικούς αριθμητικής προόδου και ο τελευταίος από τους παρεμβλλόμενους όρους να είναι 3-πλάσιος από τον δεύτερό τους;

5.09 Σε αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_7 + \alpha_{17} = 30$ και $\alpha_9 + \alpha_{20} = 40$. Να βρείτε το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του α_8 και α_{25} .

5.10 Αποδείξτε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = 4n - 5$, $n \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος. Να βρείτε το άθροισμα των όρων της που είναι μεταξύ των αριθμών 17 και 99.

5.11 Για μια ακολουθία ισχύει $S_n = 3n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Αποδείξτε ότι είναι αριθμητική πρόοδος.

5.12 Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 1,2,3,4,5,... και παίρνουμε ομάδες όρων ως εξής: $\{1\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5,6,7\}$, $\{4,5,6,7,8,9,10\}$... Να υπολογιστεί το άθροισμα των όρων της n -οστής ομάδας.

5.13 Έχουμε n κιβώτια μέσα στα οποία τοποθετούμε αριθμημένες μπάλες ως εξής: Στο πρώτο κιβώτιο τη μπάλα με τον αριθμό $\{1\}$ στο 2ο τις μπάλες $\{2,3\}$ στο 3ο τις $\{4,5,6\}$ κ.ο.κ.

A. Πόσες μπάλες έχει το n -οστό κιβώτιο;

B. Να δειχτεί ότι στο n -στό κιβώτιο η μπάλα με τον μικρότερο αριθμό είναι η $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Γ. Σε ποιο κιβώτιο βρίσκεται η μπάλα με τον αριθμό 100;

Δ. Αν $n = 50$, πόσες μπάλες έχουμε συνολικά;

5.14 Να αποδείξετε ότι σε κάθε αριθμητική πρόοδο με $\lambda, \mu, n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{\lambda - \mu}{n}\right) S_n + \left(\frac{\mu - \lambda}{n}\right) S_\lambda + \left(\frac{n - \lambda}{\mu}\right) S_\mu = 0$$

Γεωμετρική Πρόοδος

5.15 Να βρείτε τη γεωμετρική πρόοδο σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

A) Αν $S_4 = 30$ και $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 480$.

B) Αν $S_3 = 26$ και $\alpha_4 - \alpha_1 = 52$.

5.16 Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε σε καθέναν από τους αριθμούς 2, 16, 58 για να γίνουν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου;

5.17 Να βρεθούν τρεις αριθμοί που αποτελούν αύξουσα γεωμετρική πρόοδο, αν το άθροισμά τους είναι 65 και η διαφορά των άκρων όρων τους είναι 40.

5.18 Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

5.19 Αν (α_n) , (β_n) είναι δυο γεωμετρικές πρόοδοι εξετάστε σε ποια περίπτωση σχηματίζεται γεωμετρική πρόοδος:

$$2\alpha_n + 3, \quad 2\alpha_n + 3\beta_n, \quad (\alpha_n)^2, \quad \alpha_n \cdot \beta_n$$

5.20 Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = 3 \cdot 2^n$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

5.21 Σε μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε $\alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3$. Να βρεθεί ο λόγος της.

5.22 Να βρείτε τέσσερις ακέραιους αριθμούς για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως τα εξής:

α) οι τρεις πρώτοι είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,

β) οι τρεις τελευταίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και

γ) το άθροισμα των άκρων όρων είναι 14 και των μεσαίων 12.

5.23 Βρείτε τρεις αριθμούς οι οποίοι: είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, έχουν άθροισμα 15 και αν σε αυτούς προσθέσουμε τους αριθμούς 1, 4, 19 αντίστοιχα θα γίνουν διαδοχικοί γεωμετρικής προόδου.

5.24 Αν $\alpha\beta$, β^2 , γ^2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί β , γ , $2\beta - \alpha$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

5.25 A) Να δειχθεί ότι η ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $S_n = 2(3^n - 1)$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

B) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

5.26 Να αποδείξετε ότι ο Αριθμητικός μέσος δύο θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου τους

5.27 Να βρεθούν τρεις αριθμοί x, y, ω αν αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, έχουν άθροισμα 28 και αν ο μεσαίος αυξηθεί κατά 2 τότε οι αριθμοί που προκύπτουν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5.28 Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι αριθμοί $\alpha, \beta - 3, \gamma - 5, \delta - 5$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρεθούν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (mathematica.gr)

5.29 Μια μπάλα πέφτει από ύψος 60 μέτρων και αναπηδά σε έδαφος φθάνοντας κάθε φορά στο $\frac{1}{3}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φθάσει στην 6^η αναπήδηση.

6

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η έννοια της Συνάρτησης

6.01 Απλοποιείτε τον τύπο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} & \text{αν } x \neq 2 \\ 3 & \text{αν } x = 2 \end{cases} \text{ και να βρείτε την}$$

τιμή της παράστασης: $f(-1)[f(0) + 2f(2)]$

6.02 Έστω οι συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -x + 1 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases} \text{ Βρείτε}$$

τα $f(-1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$, $f(3/4)$, $g(0)$.

6.03 Αν $f(x) = 2x - 6$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ώστε να ισχύει: $f(\alpha) = 8$ και $f(8) = \beta$.

6.04 Για την συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 2\beta x$

ισχύουν $f(1) = -2$ και $f(2) = 20$. Βρείτε το $f(3)$

6.05 Έστω ότι $f(x) = \begin{cases} ax - 4, & x \leq 1 \\ ax - 2\beta, & x \geq 1 \end{cases}$. Να

βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(-1) = f(2)$.

6.06 Αν $f(x) = \begin{cases} 2x & |x| \leq 3 \\ 5x + 1 & x > 5 \end{cases}$ βρείτε για ποια

τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $-2f(-1) + \lambda f(10) = 157$.

6.07 Αν $f(x) = 3x$, να δείξετε ότι:

A) $f(\alpha + 1) + f(\alpha + 2) + f(\alpha + 3) = 3f(\alpha) + 18$.

B) $f(\kappa\alpha + \lambda\beta + \mu\gamma) = \kappa f(\alpha) + \lambda f(\beta) + \mu f(\gamma)$.

6.08 Αν για την συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 2\beta x$ ισχύουν $f(1) = -2$ και $f(2) = 20$ να βρείτε το $f(3)$

6.09 Αν $f(x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$f(x+3), \quad f(1-x^2), \quad f(2x+f(0)), \quad f(x+f(x)).$$

6.10 Αν $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ τότε να δείξετε ότι

$$\text{ισχύει } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

6.11 Αν $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι για κάθε

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ισχύει } f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

6.12 Αν $f(x) = x^2 - x$ να λύσετε την εξίσωση

$$f(x+1) - 2f(x) + 3f(0) = f(1).$$

6.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f(-3) = 6$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 B) Να βρείτε τη τιμή του α
 Γ) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f ;

6.14 Αν $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2}$ δείξτε ότι $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

6.15 Αν για την συνάρτηση f ισχύει $xf(x) + f(-x) = x$ τότε να βρεθεί ο τύπος της

6.16 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$

A) Να βρείτε τη g με $g(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

B) να υπολογίσετε τα $g(0)$, $g(1)$.

6.17 Αν $f(x) = -2x + 5$, να αποδείξετε ότι το

$$\text{κλάσμα } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \text{ είναι ανεξάρτητο των } x_1, x_2$$

6.18 Αν $f(x) = x^2 - x$, $x \in R$ να λύσετε την εξίσωση $f(x+1) - 2f(x) + 3f(0) = f(1)$.

6.19 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x$, $x \in R$.

Αν $1 - 2\kappa = \frac{1}{\lambda}$, δείξτε ότι $f(\kappa - \lambda) - f(\kappa) - \lambda^2 > 0$.

6.20 Αν $f(x) = 2x - 1$, $x \in R$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- A) $f(x+3)$ B) $f(1-x^2)$
Γ) $f(2x+f(0))$ Δ) $f(x+f(x))$

6.21 Αν $f(x) = x^2$, $x \in R$ να αποδείξετε ότι για

κάθε $\alpha, \beta \in R$ ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

6.22 Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ να

αποδείξετε ότι $f(f(f(x))) = x$, $x \neq 0, 1$

6.23 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{αν } x < 1 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
B) Να βρεθούν οι τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(3)$
Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 0$

6.24 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} |a|\frac{x^2-2}{2} + \beta^2, & x < 1 \\ 2|a|x^2 - 2\beta^2x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
B) Αν ισχύει ότι $f(-2) = f(0)$ και $f(1) = -2$ να υπολογισθούν τα α, β .

6.25 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + \alpha$, όπου $\alpha \in R$ και $f(-3) = 6$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
B) Να βρείτε τη τιμή του α
Γ) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f ;

6.26 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{-x^2 + 42x}$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
B) Να λύσετε την εξίσωση:

$$[x - f(1)]^2 + [x + f(1)]^2 = 2004$$

6.27 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 3x + 18}}{x - 3}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
β. Να δείξετε ότι $f(0) = -\sqrt{2}$ και $f(5) = \sqrt{2}$.
γ. Να δείξετε ότι $\frac{1}{1+f(0)} + \frac{1}{1+f(5)} = -2$.

6.28 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)^5 x, & \text{αν } x \geq 1 \\ -29x - 3, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{όπου } a \in R.$$

- A) Να βρείτε την τιμή του α .
B) Λύστε την εξίσωση: $x^2(x^2 - 2) = f(0) + 2$

6.29 Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + x - 4$.

- A) Να βρείτε το πρόσημο του $f(x)$
B) Λύστε την ανίσωση: $|-x^2 + x - 4| > 2(x+1)$.

6.30 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x-1}, & \text{αν } x > \frac{3}{2} \\ \frac{4x-5}{x-7}, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f καθώς και το $f(2)$
B) Αν το $f(2)$ είναι μια λύση της εξίσωσης $x^2 + (\alpha^2 + 2\beta)x + \beta = 0$ να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in R$ και την άλλη λύση της εξίσωσης.

Πεδίο Ορισμού

6.31 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:

A) $f(x) = \frac{2x}{9-x^2}$ B) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{x-3}$

Γ) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4x+3}$ Δ) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

6.32 Βρείτε τα πεδία ορισμού:

A) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x+2}{x^2-5x+6}$

B) $f(x) = \frac{4x+1}{(4x-3)^2 - (5-3x)^2}$

6.33 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$ B) $f(x) = \frac{4x-6}{25-x^2}$

6.34 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:

$f(x) = \frac{3}{|x-2|-1}$ $g(x) = \frac{1}{|x|+x^2}$

$m(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ $k(x) = \sqrt{2-|x+3|}$

6.35 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των:

A) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$ B) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{|x|-2}$

Γ) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^3-x}$ Δ) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{|x|+4}}{|x|-2}$

6.36 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2}} - 3$

B) $f(x) = \frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

6.37 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $h(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-4x+3} + \frac{\sqrt{x-5}}{x^3-12x^2+36x}$

B) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{x-3}$

6.38 Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$f(x) = \frac{3x-1}{x^2+a}$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$;

6.39 Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$f(x) = \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x-4\sqrt{x}+3}$

A) Να βρεθούν οι τιμές του x , για τις οποίες έχει νόημα ο τύπος της f

B) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

6.40 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^3-x}$

B) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{|x|-2}$

6.41 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{\sqrt{3-\sqrt{x-2}}}{x+|x|}$

B) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

6.42 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-|x-6|}} + \frac{1}{2|x|-13}$

B) $f(x) = \frac{1}{x^2-x} + \sqrt{15-x} + \sqrt{-5x+6}$

6.43 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{|x|}-x}{x^2+1}$

B) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|-x}$

6.44 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\|x|-3|-2}$

B) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{\sqrt[3]{|x|+x}}{|x|+2}$

6.45 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|-1}}{|x+4|-2|x+1|}$

B) $f(x) = \frac{\sqrt{-2x+11}}{|x-3|+|x^2-9|}$

6.46 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+4}}{|x|-x}$

B) $f(x) = \frac{\sqrt{4-|x-1|}}{2x-|x-2|-3}$

6.47 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

B) $f(x) = 2x + \sqrt{x^2-1} + \sqrt{9-x^2}$

Γ) $f(x) = \sqrt{|x|-x} + \sqrt{25-x^2}$

6.48 Βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(\lambda-1)x^2+2x+1}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Γεωμετρικές–Απόσταση Σημείων

6.50 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,2)$, $B(0,1)$, $\Gamma(2,1)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

6.51 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x$. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(1,f(1))$ και $B(-1,f(-1))$.

6.52 Να βρεθεί σημείο Γ του άξονα xx' τέτοιο ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις $A\Gamma$, $B\Gamma$, όπου $A(1,1)$, $B(4,2)$.

6.53 Δίνονται τα σημεία $A(-1,-1)$, $B(2,4)$.

Να βρείτε σημείο M της ευθείας $y=x$ ώστε το τρίγωνο AMB να είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις MA και MB .

6.49 Έστω συνάρτηση $f(x) = \sqrt{(\lambda-1)x^2+1}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

A) Είναι δυνατόν να ισχύει $\lambda < 1$;

B) Αν το σημείο $(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f να υπολογίσετε το λ

Γ) Για την τιμή του λ που βρέθηκε να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Συμμετρικά Σημεία

6.54 Δίνονται τα σημεία $A(3,4\alpha+2)$, $B(3,-2)$, $\Gamma(4,2\beta-6)$, $\Delta(3\gamma+1,4)$, $E(1,1)$, και $Z(2\delta,-1)$.

Βείτε τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ αν: Τα A και B είναι συμμετρικά ως προς τον $x'x$, τα E και Z είναι συμμετρικά ως προς το $(0,0)$, το Γ βρίσκεται στον $x'x$ και το Δ βρίσκεται στον $y'y$.

6.55 Να βρεθεί η τιμή του λ στις περιπτώσεις:

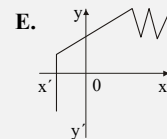
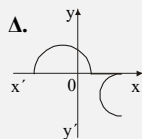
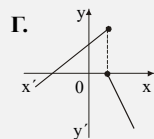
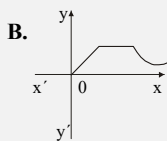
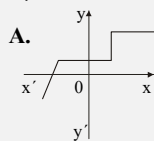
A) $A(|\lambda|, \lambda^2+2)$, $B(-3, 4-5\lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $O(0,0)$.

B) $A(\lambda^2, 4\lambda)$, $B(\lambda^2+3, \lambda)$ να είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y=x$.

Γ) $A(-4,3)$, $B(-4, |\lambda^2-1|)$ να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

Γραφική Παράσταση

6.56 * Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης; Στις περιπτώσεις που είναι να σημειώσετε το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών.



6.57 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x-3}$. Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να διέρχεται από το σημείο $M(4, 2)$.

6.58 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $y'y$, $x'x$ και την ευθεία $y = -1$.

6.59 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (3\mu - 1)x + 2$ με $\mu < 0$. Να βρεθεί το μ ώστε το C_f να τέμνει τους άξονες σε σημεία που απέχουν απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

6.60 Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

A) $f(x) = x - 1$ και $g(x) = -x + 1$.

B) $f(x) = x^3 - x$ και $g(x) = x^2 - 1$.

6.61 Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = x + 2$, $g(x) = -x + 3$, $h(x) = 2x + 1$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων και να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από αυτές.

6.62 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της

$$\text{συνάρτησης } f(x) = \begin{cases} x+4 & , x < -1 \\ 0 & , -1 \leq x \leq 2 \\ -x+3 & , x > 2 \end{cases}.$$

6.63 Εξηγήστε γιατί ο κύκλος δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

6.64 Να επιλυθούν γραφικά οι ανισώσεις:
 $2x - 4 > 0$, $-2x + 4 > 0$, $|x| < 2$ και $|x| > 2$.

6.65 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο M ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

A) $f(x) = x^2 + k$, $M(2, 6)$

B) $g(x) = kx^3$, $M(-2, 8)$

Γ) $h(x) = k\sqrt{x+1}$, $M(3, 8)$

6.66 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

A) $f(x) = -x + 4$

B) $g(x) = (x - 2)(x + 6)$

Γ) $h(x) = (x - 2)^2$

6.67 Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + 1$ όταν το πεδίο ορισμού της είναι: A) $[0, +\infty)$ B) $(-\infty, 0)$ Γ) $\{-2, 0, 1\}$
Δ) $[-2, 1)$ E) $(-\infty, -1] \cup (0, 2)$

6.68 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των

A) $f(x) = |x| + x - 2$

B) $f(x) = |x - 1| + 1$

Γ) $f(x) = \begin{cases} x+4 & x < -1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 2 \\ -x+3 & x > 2 \end{cases}$

6.69 Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = 2 - |x - 2|$.

A) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης g πιο απλά, χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

B) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

Ευθεία

6.70 Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y = \sqrt{3}x + 3$ με τον άξονα xx' .

6.71 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{\lambda - 2}{\lambda}x + \frac{3(2 - \lambda)}{\lambda}$.

Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ε να είναι:

- A) παράλληλη στην ευθεία $y = -2$,
- B) παράλληλη στην ευθεία $x + y = 5$,
- Γ) να διέρχεται από το σημείο $(3, -1)$

6.72 Για την ευθεία $\varepsilon: y = \frac{\lambda + 4}{\lambda - 1}x + 5$, να βρείτε:

- A) Τις τιμές του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη προς την ευθεία $\delta: y = 6x + 1$.
- B) Τις τιμές του λ ώστε το σημείο $A(2, -3)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της ευθείας ε .
- Γ) Τις τιμές του λ ώστε η ευθεία ε να είναι παράλληλη προς τον άξονα xx' .
- Δ) Τα σημεία τομής της με τους άξονες.

6.73 Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $\varepsilon: ax + y = 4$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(-1, 6)$.

- A) Να βρεθεί η τιμή του a .
- B) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της ευθείας ε με τους άξονες.
- Γ) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ε .
- Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας ε με

την παραβολή $y = x^2 - \frac{13}{4}x + \frac{17}{4}$.

6.74 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \lambda x + 2$, $\lambda < 0$

Να βρείτε:

- A) Τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.
- B) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση και τους άξονες.
- Γ) Την τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να είναι 2 τμ

6.75 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$.

- A) Να γραφτεί ο τύπος της χωρίς την απόλυτη τιμή.
- B) Να γίνει η γραφική της παράσταση.
- Γ) Να βρείτε –αν υπάρχουν- τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
- Δ) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης με την ευθεία $y = 3$.
- E) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης και την ευθεία $y = 3$
- Στ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

6.76 Έστω τα σημεία $A(\kappa, 2)$ και $B(1, 2\kappa)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.

- A) Να αποδείξετε ότι $(AB) = \sqrt{5}|\kappa - 1|$.
- B) Αν $(AB) \leq \sqrt{5}$ να βρείτε τις τιμές του κ .
- Γ) Αν $\kappa = 0$ να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 2$ διέρχεται από τα A και B .

6.77 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που

- A) περνάει από το σημείο $M(1, 2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2y - x + 5 = 0$.
- B) περνάει από το σημείο $A(-1, 3)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + y + 5 = 0$.
- Γ) διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $3y + x - 6 = 0$.

6.78 Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία: $A(2, 3)$, $B(0, -1)$.

6.79 Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y = \sqrt{3}x + 3$ με τον άξονα $x'x$

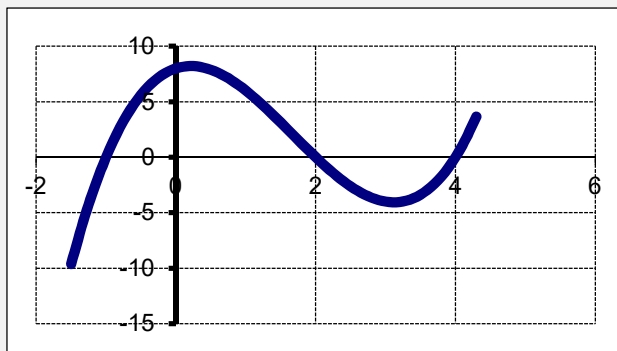
6.80 Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, 2)$, $\Gamma(-3, 4)$

6.81 Να υπολογιστεί η απόσταση του σημείου $A(2, 0)$ από την ευθεία: $y = 2x + 1$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.82 Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

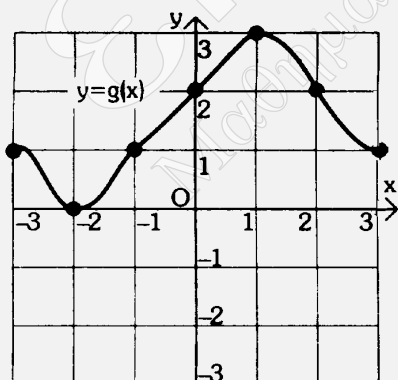
- A) Να βρείτε το $f(0)$ και $f(1)$.
 B) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$.
 Γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq 0$.
 Δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 0$.



6.83 Έστω μια συνάρτηση $y = g(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Παρατηρώντας την γραφική παράσταση να απαντήσετε στα ερωτήματα

- A) Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της g ;
 B) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:
 $g(2) - (g(-2) - g(-3))$.
 Γ) Είναι σωστό ότι $g(0) > g(3)$; (γιατί);
 Δ) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $g(x) = 1$;
 Ε) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $g(x) > 1$;



6.84 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$.

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
 B) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.
 Γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$.

6.85 Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \kappa\sqrt{x+1}, \quad x \geq -1, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

- A) Να βρεθεί η τιμή του κ ώστε το σημείο $A(3, 8)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
 Για την τιμή του κ που βρήκατε στο Α ερώτημα:
 B) Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(3, 8)$ και $B(8, f(8))$.

6.86 Αν $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x < 2 \\ -2x^2, & x \geq 2 \end{cases}$, να λυθεί η

$$\text{ανίσωση: } \left| x - \frac{f(2)}{4} \right| < 3 - f(1).$$

6.87 Δίνονται οι συναρτήσεις: $g(x) = x + 2$

$$\text{και } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -1 - 2x, & x < 0 \end{cases}.$$

Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_f, C_g καθώς και η απόστασή τους.

6.88 Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{αν } x < 0 \\ x+6\lambda-\lambda^2 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- A) Να βρείτε το λ ώστε $f(0) = f(-8)$.
 B) Αν $\lambda = 3$ τότε:
 α) Να βρείτε την απόσταση των σημείων $A(3, f(3))$ και $B(-5, f(-5))$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\sqrt{(\sqrt{f(1)} - 4)^2} + \sqrt{(\sqrt{f(-9)} + 4)^2}.$$

6.89 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|-2}}{x-4}$.

- A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 B. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία ;
 Γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\left[f(-1) - 3f(7) \right] \left[2f(12) - \frac{9}{8}f(-5) \right]$.

6.90 Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): y = (\lambda - 4)x + 11$ και $(\varepsilon_2): y = (11 - 2\lambda)x + 2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- A) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.
 B) Για $\lambda = 5$:
 α) Να γράψετε τη μορφή που παίρνουν οι (ε_1) και (ε_2) .
 β) Αν A και B είναι τα σημεία στα οποία η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ και η (ε_2) τον $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την απόσταση (AB) .

6.91 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{x^2 - 1}$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.
 B) Να αποδείξετε ότι η $f(-x) + f(x) = 0$
 Γ) Να λύσετε την ανίσωση $|f(x)| > 1$.

6.92 Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{αν } x < 0 \\ x+6\lambda-\lambda^2 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

- A) Να βρεθεί ο λ ώστε $f(0) = f(-8)$
 B) Αν $\lambda = 3$ τότε:
 α) Να υπολογίσετε την τιμή της $\sqrt{33f(18)}$.
 β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων $(-3, f(-3))$ και $(0, f(0))$.

6.93 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{x^3-x}$.

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 B) Να αποδείξετε ότι η $f(-x) + f(x) = 0$

6.94 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4-|x|}}$

- A) Να αποδείξετε ότι η $f(-x) + f(x) = 0$
 B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{(f(2)-1)^2} + \sqrt{(f(-2)-1)^2}$.

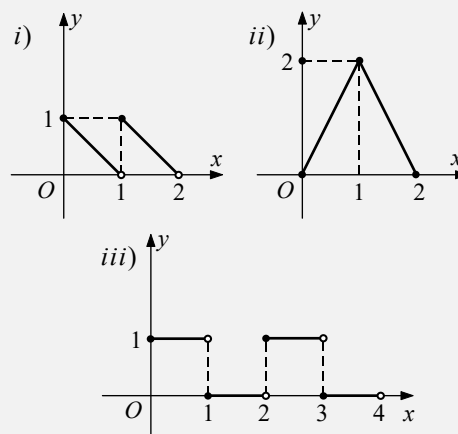
6.95 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{10x^2 - 2|x|}{2 - 10|x|}$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της f ,
 B) Να δείξετε ότι $f(x) = -|x|$, για κάθε $x \in A_f$
 Γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left| \frac{2x+9}{x+2} \right| = -f(x)$

6.96 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-3}}{x^2-9}$

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 B) Να αποδείξετε ότι η $f(-x) - f(x) = 0$
 Γ) Υπολογίστε την τιμή της παράστασης $f(2008) - f(-2008)$.

6.97 Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



7.01 Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + 2\lambda - 2 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να έχει 2 πραγματικές και ίσες ρίζες.

B) Αν $4\lambda = 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2$.

7.02 Δίδονται τα τριώνυμα $P(x) = -x^2 + 4x - 4$, $Q(x) = x^2 + 1$, $K(x) = x^2 - 5x + 6$.

A) Να βρεθεί το πρόσημο σε κάθε ένα από τα παραπάνω τριώνυμα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x) \cdot Q(x)}{K(x)} \leq 0$

7.03 Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{\alpha} x^2 + (\sqrt{\alpha} + \beta)x + \beta = 0$ με $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για όλες τις τιμές των α, β .

B) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -1$.

Γ) Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός $-\sqrt{\alpha}$, με $\alpha \neq 1$ να αποδείξετε ότι $\beta = \alpha$.

7.04 Οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης 2ου βαθμού με $S = \rho_1 + \rho_2$, $P = \rho_1 \rho_2$ τέτοια ώστε

$$P + 2S = 2 \quad \text{και} \quad P - 2S = -10.$$

A) Να δείξετε ότι $S = 3$ και $P = -4$.

B) Να βρείτε την εξίσωση $x^2 + kx + \lambda = 0$ που έχει ρίζες τους $\rho_1 + 2$ και $\rho_2 + 2$.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + kx + \lambda \leq 0$

7.05 Έστω η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda = 0$ με $\lambda \neq 2$.

A) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1;

B) Για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες;

Γ) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι δύο οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε για αυτές να ισχύει η ανίσωση: $(\rho_1 + \rho_2) > 2\rho_1 \rho_2$.

7.06 Έστω $f(x) = (\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$, όπου $\lambda \neq -2$.

A) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $f(x) < 0$ αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x

B) Αν $\lambda = -4$ να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = -8x + 18$.

7.07 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 2\lambda x^2 + (5\lambda + 2)x + 4\lambda$, $\lambda \neq 0$,

βρίσκεται εξολοκλήρου πάνω από την ευθεία $y = -1$.

7.08 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda$.

- A) Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε η f να έχει δύο ρίζες άνισες.
- B) Αν x_1, x_2 ρίζες της συνάρτησης f να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.
- Γ) Να λυθεί η ανίσωση $d(x, \lambda) < 5 - \lambda$ όταν η f έχει μία διπλή ρίζα.

7.09 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 1)x^2 - \lambda^2 x + 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}_+$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια παραβολή που περνά από το σημείο $A(1, 0)$.

- A) Να βρείτε το λ .
- B) Για την τιμή $\lambda = 2$ να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- Γ) Να σχηματίσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις $\rho_1 = \frac{1}{x_1}, \rho_2 = \frac{1}{x_2}$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της $f(x) = 0$.

7.10 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{\frac{x-6}{x^2+x-6}}$.

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
- B) Να βρεθούν τα σημεία τομής A, B της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- Γ) Να υπολογίσετε την απόσταση AB .

7.11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = kx^2 - x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

- A) Αν $k \neq 0$, για ποιες τιμές του k , η συνάρτηση f γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο;
- B) Για $k = 0$ να λυθεί η ανίσωση $f(x) > -\frac{100}{x}$.
- Γ) α. Βρείτε την τιμή $k \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $M(1, 3)$.
β. Για την τιμή του k που βρήκατε στο ερώτημα (α) να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

7.12 Δίνονται οι $A(x) = x^2 - 4$, $B(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

- A) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(x)$ και $B(x)$.
- B) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε την παράσταση $f(x) = \frac{(x-2)B(x)}{A(x)}$.
- Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

7.13 Έστω η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$ με $\lambda \neq 2$.

- A) Να αποδείξετε ότι έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1, x_2 .
- B) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$.
- Γ) Να βρείτε το λ ώστε: $(x_1 + x_2)^2 = 5 + 2 \cdot x_1 x_2$.

7.14 Δίνεται η εξίσωση $x^2 + x + \lambda - 1 = 0$ (1) με ρίζες x_1, x_2 .

A) Να βρείτε για ποια τιμή του λ είναι: $x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot (x_1 + x_2) + 5 = 0$.

B) Για την τιμή αυτή του λ να λυθεί η (1).

Γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε να σχηματίσετε άλλη εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\rho_1 = x_1^2, \rho_2 = x_2^2$.

7.15 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } |x| < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$

A) Να βρείτε τα $f(3), f(-1), f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $f(-2)$.

B) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων $(-1, f(-1))$ και $(-2, f(-2))$.

Γ) Να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $f(-1)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

7.16 Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\alpha + 1)x - \alpha^2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ (1).

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε τιμή του α .

B) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

α) να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|x_1 + x_2| \leq 2005$

β) για $\alpha = 2$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $x_1 + 2$ και $x_2 + 2$.

7.17 Έστω οι συναρτήσεις: $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - 4\lambda x + 3$ και $g(x) = x^2 + 4\mu x + \mu$ με $\mu \neq 0$.

A) Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να είναι ευθεία.

B) Να βρεθεί η τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της g να εφάπτεται στον xx' .

Γ) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

Δ) Να βρεθούν τα σημεία που τέμνει η C_f τους άξονες x, x' και y, y' και να βρεθεί το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζεται.

7.18 Έστω η εξίσωση $x^2 - 3x - \mu^2 = 0, \mu \in \mathbb{R}$ (1).

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

B) Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του μ :

α) η παράσταση $A = \rho_1\mu + \rho_2(\mu - \rho_1)$ παίρνει το πολύ την τιμή -2 .

β) οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \rho_1^2 x + 2006$ και $\varepsilon_2: y = (27 - \rho_2^2)x - 2007$ είναι παράλληλες.

7.19 Δίνεται ο πραγματικός αριθμός λ και η εξίσωση $x^2 + (1 - \lambda)x + 1 = 0$, η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις x_1 και x_2 .

A) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία παίρνει τιμές ο λ .

B) Να λύσετε την ανίσωση: $(x_1^2 + x_2^2 + 1)(x_1 + x_2 - 2x_1 \cdot x_2) < 0$, ως προς λ .

7.20 Δίνονται τα τριώνυμα: $P(x) = x^2 - 5x + 4$, $Q(x) = 9 - x^2$ και $K(x) = x^2 + x + 1$.

A) Να λύσετε κάθε μια από τις ανισώσεις: $P(x) \geq 0$, $Q(x) \geq 0$ και $K(x) \leq 0$.

B) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{P(x)} + \frac{K(-1)}{\sqrt{Q(x)}}$.

7.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της.

B) Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| = 2$.

Γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $0 \leq f(x) \leq 2$.

7.22 Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, δίνονται οι ευθείες

$(\varepsilon_1): y = (\lambda^2 + 6)x + 5$ και $(\varepsilon_2): y = 5\lambda x + 8$.

A) Να βρείτε -αν υπάρχει- τιμή του λ ώστε η (ε_1) να διέρχεται από το σημείο $(2, 4)$.

B) Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

Γ) Αν $\lambda = 3$ να βρείτε τα σημεία στα οποία η (ε_2) τέμνει τους άξονες.

7.23 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|-x^2 + x - 2| - 4}{x^2 - 6x + 8}$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A_f της f .

B) Να αποδείξετε ότι: $-x^2 + x - 2 < 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Γ) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f απλοποιείται στη μορφή $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$, $x \in A$.

Δ) Να λύσετε την ανίσωση $x \cdot f(x) > \frac{f(5)}{2}$.

7.24 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (\lambda - 1)x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda - 1$, όπου το $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 1$.

Δ1) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του παραπάνω τριωνύμου 2^{ου} βαθμού ως συνάρτηση του λ .

Δ2) Να λύσετε (ως προς λ) την εξίσωση $\Delta = 0$

Δ3) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται εξ ολοκλήρου πάνω από τον άξονα $x'x$.

7.25 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

Γ1) Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$, β) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

Γ2) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

Γ3) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

7.26 Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ με $0 < x < 3$ και $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ είναι ανεξάρτητη του x

B2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1}$.

B3. Αν $A = 2$ και $B = 3$ να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|\omega - 3| - 4}{A} + \frac{5}{B} = \frac{|3 - \omega|}{3A - B}$.

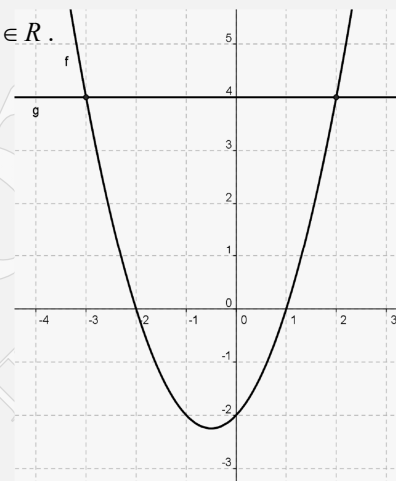
7.27 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \kappa \cdot x - 2$ και $g(x) = (\lambda^5 - 32) \cdot x + 4$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει το άξονα $x'x$

σε δύο διαφορετικά σημεία για κάθε τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.

2. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της g να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f και g , για $\kappa = 1$ και $\lambda = 2$, να βρείτε:



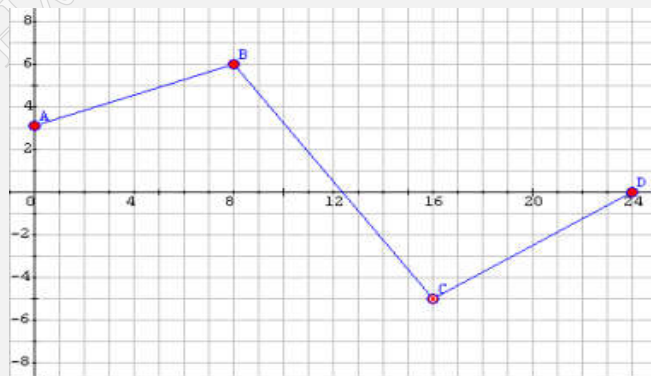
α) Την τιμή της παράστασης: $A(x) = \frac{1}{\sqrt{f(3)} - g(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(3)} + g(x)}$.

β) Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g

7.28 Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

Να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού της f
- το σύνολο τιμών της f
- τους αριθμούς $f(0), f(8), f(24)$
- το μήκος του τμήματος AB
- την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο $K(16, \lambda - 1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .



Β ΜΕΡΟΣ

ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – Α ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

T.Θ. 1. 4_1936

Η εξέταση σε έναν διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάστηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα.

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

- i)** Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.
- ii)** Να βαθμολογηθεί με άριστα.
- iii)** Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.
- iv)** Να πέρασε την εξέταση.

T.Θ. 2. 4_2064

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

α. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

- i)** να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι.
- ii)** να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι.
- β.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι.

T.Θ. 3. 4_6144

Μια ημέρα, στο τμήμα A_1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το

$\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή

για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Γ : ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος.

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

- i)** να έχει διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα
- ii)** να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα δυο μαθήματα.
- γ.** Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής:
 - i)** να έχει διαβάσει Γεωμετρία
 - ii)** να έχει διαβάσει Άλγεβρα.



2.1_Πραγματικοί Αριθμοί

T.Θ. 4. 2_3874

Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$

T.Θ. 5. 2_1070

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$.

Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$

2.2_Διάταξη πραγματικών αριθμών

T.Θ. 6. 2_486

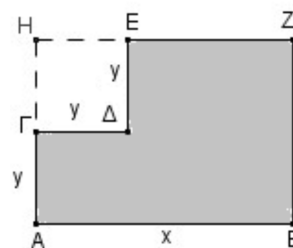
Αν $0 < \alpha < 1$, τότε να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}$

T.Θ. 7. 2_487

A) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

B) Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α. Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.



T.Θ. 8. 2_1541

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά,

αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

α. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

T.Θ. 9. 2_3852

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων

περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις: α) $\alpha - 2\beta$ β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

T.Θ. 10. 2_3870

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

T.Θ. 11. 2_7519

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ β. $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

T.Θ. 12. 2_996

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι: $A = x - y + 2$ και ότι $0 < A < 4$.

T.Θ. 13. 2_1091

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

α. Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

β. Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

T.Θ. 14. 2_2702

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α. Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

β. Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

T.Θ. 15. 2_3884

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

T.Θ. 16. 2_1273

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x - 3| \leq 2$ και $|y - 6| \leq 4$.

α. Να δείξετε ότι $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$

β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογώνιου με διαστάσεις $2x$ και y .

T.Θ. 17. 4_2301

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων. $|x + 2|$, $|x - 7|$ και $|x + 2| + |x - 7|$

β. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: .

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά και αλγεβρικά.

2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

T.Θ. 18. 2_936

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 1})(\sqrt{x - 4} - \sqrt{x + 1})$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

T.Θ. 19. 2_938

α. Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.

T.Θ. 20. 2_950

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1 - x} - \sqrt[4]{x^4}$



- α.** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;
β. Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$

T.Θ. 21. 2_955

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

- α.** Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.
β. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$.

T.Θ. 22. 2_1276

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$.

- α.** Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
β. Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

T.Θ. 23. 2_1300

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις: $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$

- α.** Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$
β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$.
α. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{5}$ και $\sqrt{3}$

3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

T.Θ. 24. 2_485

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R} .$$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.
γ. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών;

T.Θ. 25. 2_3382

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$. Να δείξετε ότι $A = 4$ και να λύσετε την εξίσωση $|x + A| = 1$.

T.Θ. 26. 2_4302

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε την λύση αυτή.

T.Θ. 27. 4_2302

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

- α.** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$
β. Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$,
i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε;
ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

T.Θ. 28. 2_496Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0$.

T.Θ. 29. 2_1093Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$ **T.Θ. 30.** 2_1275Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$

- α.** Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2
- β.** Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

T.Θ. 31. 2_3863Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha^3 \beta + 2\alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^3 = -12$

- α.** Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.
- β.** Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

T.Θ. 32. 2_4309Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20$ cm και εμβαδό $E = 24$ cm².

- α.** Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.
- β.** Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

T.Θ. 33. 2_4317Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

- α.** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1 x_2 = -3$.

T.Θ. 34. 4_4551Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α.** Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- β.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.
- γ.** Αν $\lambda < 0$, τότε:
- i)** το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- ii)** να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 \cdot x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

T.Θ. 35. 4_4558Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με $\lambda > 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.



- β.** Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου, τότε:
- i)** να βρείτε το εμβαδόν του ορθογώνιου.
- ii)** να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογώνιου ως συνάρτηση του λ και να δείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.
- iii)** για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο;

T.Θ. 36. 4_4654

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

T.Θ. 37. 4-4659 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

- α)** Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες, που είναι αντίστροφοι πραγματικοί αριθμοί.
- β)** Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

T.Θ. 38. 4-4667 §3.2-§3.3

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

- i)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).
- ii)** Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

T.Θ. 39. 4-4957 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- α)** Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- β)** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.
- γ)** Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ)** Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$.

T.Θ. 40. 4-4962 §3.2-§3.3

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- α)** Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- β)** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

- γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1.

T.Θ. 41. 4-4970 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .
- ι) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$
- ii) Να δείξετε ότι: $\rho \neq 0$ και ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$.

T.Θ. 42. 44-4975 §3.2-§3.3

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε:

- i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$.
- ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

T.Θ. 43. 4-6223 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:
- i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$.
- ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$

T.Θ. 44. 4-6224 §3.2-§3.3

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda \in (0, 4)$$

- α) Να βρείτε: i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .
ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.
- β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.
- γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

T.Θ. 45. 4-7515 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

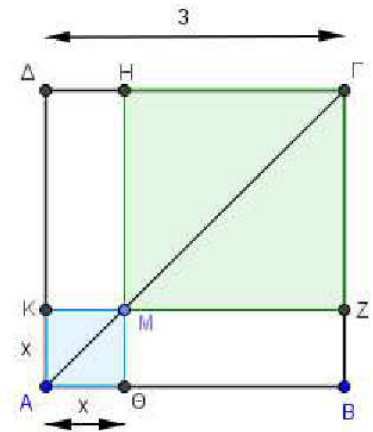
- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.
- β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.
- γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον: $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$ και να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ .



T.Θ. 46. 4-6231 §6.3

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου AG . Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

- α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0,3)$.
- β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0,3)$.
- γ) Για ποια θέση του M πάνω στην AG το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;



T.Θ. 47. 4-7510 §3.2-§3.3

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A ,

s_B , s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις: $s_A < s_B$, $s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4}$ και $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A , B παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



- α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ , που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας.
- β) Αν επιπλέον, για τις τιμές των αποστάσεων s_A , s_B σε km ισχύει ότι $s_A + s_B = 1,4$ και $s_A \cdot s_B = 0,45$ τότε:
- i) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A , s_B .
- ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A , s_B , s_Γ και s_Δ .

T.Θ. 48. 4-7516 §3.2-§3.3

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.
- β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$.
- γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$.

T.Θ. 49. 4-7940 §3.2-§3.3

- α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2).
- β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$. Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

- i) $\rho \neq 0$ και
- ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

4.1 Ανισώσεις 1^{ου} Βαθμού

T.Θ. 50. 2_991

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x + 1| < 2$, να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{|x + 3| + |x - 1|}{4} \text{ είναι αριθμός ανεξάρτητος του } x.$$

T.Θ. 51. 2_1039

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

T.Θ. 52. 2_1062

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$.

β. Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

T.Θ. 53. 2_1305

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$.

β. Αν $a \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||a + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

T.Θ. 54. 2_7521

ι) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών: $|1 - 2x| < 5$ και $|1 - 2x| \geq 1$

α. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

T.Θ. 55. 4_1890

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις άνισες ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \quad (2).$$

T.Θ. 56. 4_2081

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii) Αν x_1 και x_2 είναι οι δύο ρίζες της (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

T.Θ. 57. 4_2287

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$. Να δείξετε ότι: $|x + 4| + |x - 14| = 18$.

T.Θ. 58. 4_4835

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

β. Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.



γ. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

T.Θ. 59. 4_4946

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$.

β. Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$.

γ. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$.

δ. Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 3| \leq 5$.

T.Θ. 60. 4_4952

α. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$.

T.Θ. 61. 4_7263

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β. Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

δ. Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες;

T.Θ. 62. 4_7791

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$

α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β .

β. Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά

T.Θ. 63. 4_8443

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $|x - 4| < 2$.

β. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη του 4.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλασίου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

4.2 Ανισώσεις 2^{ου} Βαθμού**T.Θ. 64.** 2_490**α.** Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ **β.** Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$ **T.Θ. 65.** 2_1278Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $d(x, -2) < 1$. Να δείξετε ότι:**α.** $-3 < x < -1$ **β.** $x^2 + 4x + 3 < 0$ **T.Θ. 66.** 2_1297**α.** Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$ **β.** Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι

επίσης λύση της ανίσωσης.

T.Θ. 67. 2_1544Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση: $B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$.**T.Θ. 68.** 2_3380Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$ **α.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.**β.** Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.**T.Θ. 69.** 4_1874Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.**α.** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.**β.** Αν η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$.**T.Θ. 70.** 4_2244Δίνονται οι ανισώσεις: $|x - 2| < 3$ (1) και $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ (2)**α.** Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4]$.**β.** Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.**T.Θ. 71.** 4_2273Δίνονται οι ανισώσεις $|x + 1| \leq 2$ (1) και $x^2 - x - 2 > 0$ (2).**α.** Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.**β.** Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

T.Θ. 72. 4_2336

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β. Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο λ .

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

T.Θ. 73. 4_4542

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$.

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

iii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1 + \alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

T.Θ. 74. 4_4548

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες ίσες;

γ. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S - P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης

(1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

T.Θ. 75. 4_4680

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$

T.Θ. 76. 4_4681

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}.$$

T.Θ. 77. 4_4682

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

- β.** Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
- γ.** Να βρείτε το λ , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

T.Θ. 78. 4_4819

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

- α.** Να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β.** Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;
- γ.** Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:
- i)** Να δείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$.
- ii)** Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_2)$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, $f(x_2 + 1)$.

T.Θ. 79. 4_4836

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β.** Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.
- γ.** Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί και ότι $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

T.Θ. 80. 4_4859

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$ με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β.** Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες;
- γ.** Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου και α, β δύο πραγματικοί ώστε να ισχύει: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

T.Θ. 81. 4_5322

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

- α.** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .
- β.** Αν $k = -\frac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $k^2 - 2k - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός;
- γ.** Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$;

T.Θ. 82. 4_4853

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

- α.** Αποδείξετε ότι: $\gamma = 2\alpha$ και $\beta = -3\alpha$.
- β.** Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε:
- i)** Να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$.
- ii)** Να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$.



T.Θ. 83. 4_5884

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
- β.** Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:
 - i)** Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.
 - ii)** Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa f(\kappa) \mu f(\mu)$.

T.Θ. 84. 4_5885

- i)** Να λύσετε τις εξισώσεις $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ και $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$.

T.Θ. 85. 4_6226

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0, 2)$$

- α.** Να βρείτε:
 - i)** την περίμετρο Π του ορθογωνίου.
 - ii)** το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .
- β.** Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.
- γ.** Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1;

T.Θ. 86. 4_6227

- α.** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.
- β.** Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
- γ.** Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$.

T.Θ. 87. 4_7684

Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης $|x - 1| \leq 3$ και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$.

T.Θ. 88. 4_7958

- α.** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \cdot (1)$
- β.** Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.
 - i)** Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ, λ .
 - ii)** Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.

T.Θ. 89. 4_8445

- α.** Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
- β.** Αν για πραγματικούς αριθμούς α, β διαφορετικούς του μηδενός με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$, να αποδείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

§5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

T.Θ. 90. 2-1101 §5.1-§5.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

T.Θ. 91. 2-1513 §5.1-§5.2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$. Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο n , ώστε να ισχύει $\alpha_n > 30$.

T.Θ. 92. 2-4303 §5.1-§5.2

Σε αριθμητική πρόοδος (α_n) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$. Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$.

T.Θ. 93. 2-4304 §5.1-§5.2

Σε αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν;

T.Θ. 94. 4-4925 §5.1-§5.2

Σε μια αριθμητική πρόοδος είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.
- β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

T.Θ. 95. 4-7503 §5.1-§5.2

Οι αριθμοί: $x^2 + 5$, $x^2 + x$, $2x + 4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

- α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .
- β) Αν $x = 3$ και ο αριθμός $x^2 + 5$ είναι ο 4^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε το άθροισμα $S = \alpha_{15} + \alpha_{16} + \dots + \alpha_{24}$.

T.Θ. 96. 4-7504 §5.1-§5.2

Σε μια αριθμητική πρόοδος (α_n) , ο 3^{ος} όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8^{ος} όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο 1^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της $\omega = 3$.
- β) Να υπολογίσετε τον 31^ο όρο της.
- γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + \dots + (\alpha_{31} + 31)$

T.Θ. 97. 4-7514 §5.1-§5.2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$. Εξετάστε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της

παραπάνω προόδου (α_n) , ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

T.Θ. 98. 4-13156 §5.1-§5.2

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_n) , όπου $n \in \mathbb{N}^*$.

Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι: $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4$, $\alpha_3 = x^2 - 2$, όπου $x \in \mathbb{Z}$, τότε,

- α) Να βρεθεί ο (α_n) όρος και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.
- β) να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$.



§5.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

T.Θ. 99. 2-1088 §5.3

Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

T.Θ. 100. 2-1100 §5.3

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

T.Θ. 101. 2-3828 §5.3

Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, $k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n) .

- α) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.
- β) i) Να εκφράσετε το 2^ο όρο, τον 5^ο και τον 4^ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1
- ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$

T.Θ. 102. 4-6678 §5.3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών a, β και εμβαδόν E , τέτοια ώστε οι αριθμοί a, E, β , με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

- α) Να αποδείξετε ότι $E=1$. (Μονάδες 10)
- β) Αν $a + \beta = 10$ τότε να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη a, β και να βρείτε τα a, β

T.Θ. 103. 4-8170 §5.3

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: $\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 15$ και $\lambda > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .
- β) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των δέκα πρώτων όρων των ακολουθιών (α_n) και (β_n) αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

T.Θ. 104. 4-13092 §5.3

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

- α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;
- β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).
- i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.
- ii) Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .
- iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

6.1 Η έννοια της συνάρτησης

T.Θ. 105. ΑΣΚΗΣΗ 2-510 §6.1

Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

- α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.
 β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

T.Θ. 106. 2-1096 §6.1

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:
 $y = 35 + 0,8x$

- α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;
 β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

T.Θ. 107. 4-6228 §6.1

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x + y = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), \quad x \in (0, 10).$$

- β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$.
 γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

T.Θ. 108. 4-8455 §6.1

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

- $|1 - 3\alpha| < 2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1.

- α) Να αποδειχθεί ότι $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

- β) Να αποδειχθεί ότι $|\beta - 3\alpha - 1| < 3$.

- γ) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4(\beta - 2)x + \beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

T.Θ. 109. 4-13084 §6.1

Δίνεται συνάρτηση $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .
 β) Για $\kappa = 1$ & $\lambda = -2$, απλοποιήστε τον τύπο της g και να δείξετε ότι $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$, όταν $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, 2)$

T.Θ. 110. 4-4682 §6.1

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης αποδείξτε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;
 γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



§6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

T.Θ. 111. 2-477 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f καθώς και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

T.Θ. 112. 2-1542 §6.2

Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

T.Θ. 113. 4-1963 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2$ και $g(x) = \lambda x + (1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda \neq 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή του λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.
- β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;
- γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$.

T.Θ. 114. 4-2338 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ax - a + 2$ και $g(x) = x^2 - a + 3$ με $a \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του a .
- β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:
- i) Να βρείτε την τιμή του a .
- ii) Για την τιμή του a που βρήκατε, υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ;
- γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του a οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

T.Θ. 115. 4-4545 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f και να δείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = |x| - 2$.
- β) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση: $(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$

T.Θ. 116. 4-4575 §6.2

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4x + a$ και $g(x) = ax - 5$, με $a \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $f(2) = g(2)$ τότε:

- A) να αποδείξετε ότι $a = 1$ και να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = g(x)$
- B) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq g(x)$ και την εξίσωση: $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$

T.Θ. 117. 4-4679 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \frac{a}{4}}$

- α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το $\mathbb{R}$.
- β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$, τότε:
- i) Να αποδείξετε ότι $a = 1$ και να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot f(x) = 1$.

T.Θ. 118. 4-4912 §6.2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.
 γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

T.Θ. 119. 4-5882 §6.2

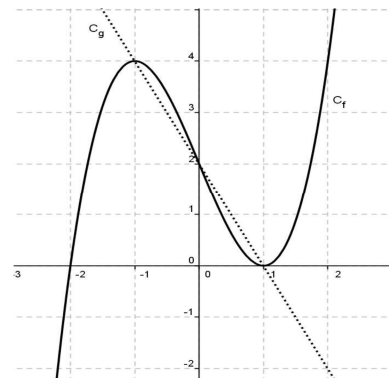
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
 β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
 γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

T.Θ. 120. 4-6146 §6.2

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

- α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = -2x + 2$
 β) Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.
 γ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .
 δ) Τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

**T.Θ. 121. 4-8448 §6.2**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 2 \\ -x+3, & x < 2 \end{cases}$
 β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

T.Θ. 122. 4-8451 §6.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 2(\alpha+3)x + 3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .
 γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.
 δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.



§6.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = ax + \beta$

T.Θ. 123. 2-1024 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

- α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$ να βρείτε τις τιμές των a, β .
- β) Αν $a = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

T.Θ. 124. 2-1529 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0) = 5$ και $f(1) = 3$.

- α) Να δείξετε ότι $a = -2$ και $\beta = 5$.
- β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
- γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

T.Θ. 125. 2-1553 §6.3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.
- β) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A, B είναι συμμετρικά ως προς το O .

T.Θ. 126. 2-2212 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$

- α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.
- γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

T.Θ. 127. 4-1880 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

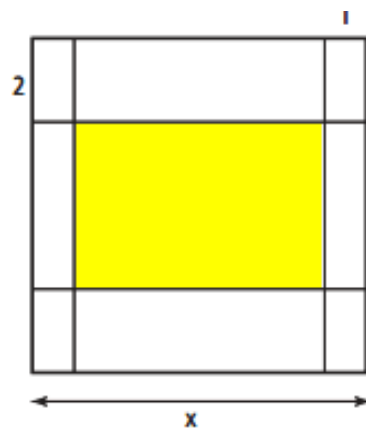
T.Θ. 128. 4-2084 §6.3

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου A με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου B με πλευρά $(d+1)$ cm.

- α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου A και κάθε πλακάκι τύπου B .
- β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 τύπου B , να βρείτε:
- i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.
- ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

T.Θ. 129. 4-2226 §6.3

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση: $E(x) = (x-2)(x-4)$
- β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .
- γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

T.Θ. 130. 4-4647 §6.3

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.
- β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.
- δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

T.Θ. 131. 4-4657 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{αν } x < 0 \\ x+2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

- α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.
- β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.
- ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.
- γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία;
- ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii).

T.Θ. 132. 4-4660 §6.3

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 3x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .
- β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g .
- γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, Δ , βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .

T.Θ. 133. 4-4656 §6.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.
- γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.



T.Θ. 134. 4-4861 & 4-2220 §6.3

Μία μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$.

- Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$ και $h(2)$ και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.
- Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα πέσει στο έδαφος.
- Να αποδείξετε ότι $h(t) = 5[1,21 - (t-1)^2]$.
- Υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05 m.;

T.Θ. 135. 4-4862 §6.3

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται

(σε ευρώ) από τη συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0,7x + 6 & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$
.

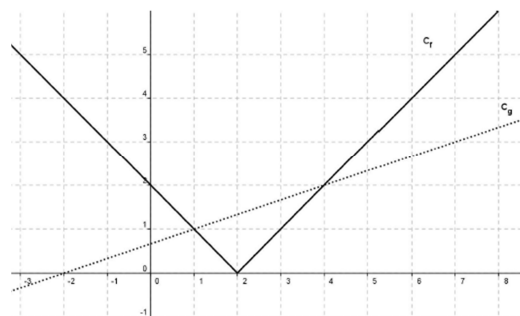
- Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος: α) δεν είχε καταναλώσει νερό. β) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. γ) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.
- Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x) = 12 + 0,6x$, για $x \geq 0$. Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο λογαριασμό από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δυο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

T.Θ. 136. 4-4886 §6.3

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g

των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x) = |x-2|$ και

$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

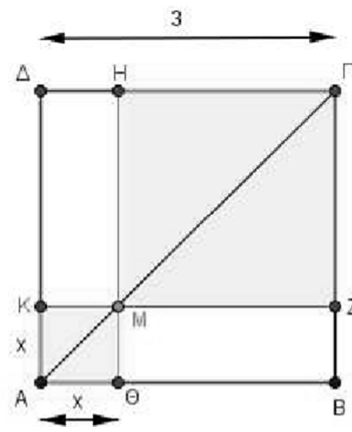


- Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g .
- Επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή στο ερώτημα α).
- Με την βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .
- Με την βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}$.

T.Θ. 137. 4-6231 §6.3

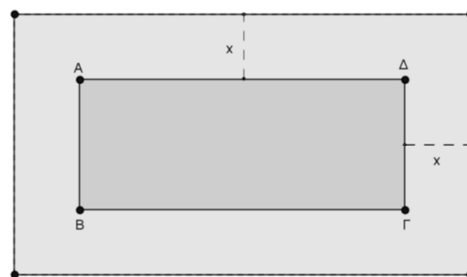
Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

- Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0,3)$.
- Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0,3)$.
- Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;



T.Θ. 138. 4-7511 §6.3

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15 m και 25 m. Ο δήμος, για λόγους ασφαλείας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 4x^2 + 80x$, $x > 0$

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500 \text{ m}^2$.

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

T.Θ. 139. 4-7512 §6.3

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40$ cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογώνιου δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 20x - x^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

δ) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm.

T.Θ. 140. 4-10774 §6.3

Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο.

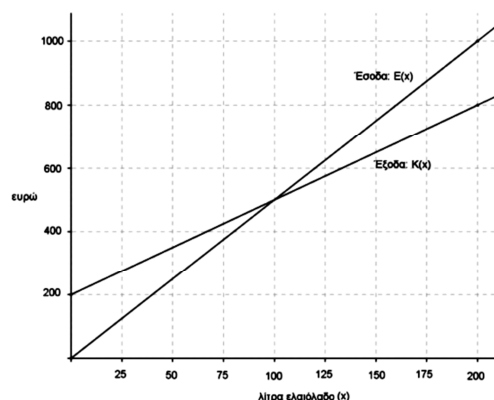
Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε την απάντηση του ερωτήματος (γ).

**T.Θ. 141. 4-13155 §6.3**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x + 2$ και $g(x) = x^2 - 9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα x' .

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το $A(0,3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox .

