

Β Λυκείου

Άλγεβρα

2016-2017

Μίλτος Παπαρηγοράκης
Χανιά

354
Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Άλγεβρα



Τάξη: Β Γενικού Λυκείου
Άλγεβρα
Έκδοση 17.08

Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση
αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός Μ.Εδ.
Χανιά 2016

Ιστοσελίδα: <http://users.sch.gr/mipapagr>
mail : papagrigorakism@gmail.com

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.01 Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ x + 2\lambda y = \lambda \end{cases},$

$\lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις τιμές του λ ώστε για τη λύση (x, y) του συστήματος να ισχύει $x - y = 0$

1.02 Λύστε το σύστημα: $\begin{cases} 7|x+2| + |3-y| = 31 \\ 3|x+2| - 4|3-y| = 0 \end{cases}$

1.03 Δίνεται το $(\Sigma): \begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , υπολογίστε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $2x_0 + y_0 > 5$

1.04 Έστω ότι το σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda-1)x + y = 2 \\ x + (\lambda-1)y = 2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ έχει μοναδική λύση}$$

(x_0, y_0) και ισχύει $x_0^4 + y_0^2 = 2$. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.05 Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{αν } x < 0 \\ 2x + \lambda^2 - 3 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

A) Να βρεθούν ο λ ώστε $f(0) = 1$.

Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ που βρήκατε

B) να βρεθούν τα $f(-2)$, $f(3,5)$,

Γ) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} f(-2)x + 4y = 12 \\ 6x + f(3,5)y = 10 \end{cases}$

1.06 Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y που έχει μοναδική λύση, ενώ ακόμα ισχύουν ότι:

$$\begin{cases} 2D_x + 3D_y = -D \\ -4D_x + 7D_y = -11D \end{cases}. \text{ Να βρεθεί η λύση του } (\Sigma)$$

1.07 Για ποιες τιμές των x και y η εξίσωση $x - 2y + 1 + \lambda(x - y) = 0$ αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

1.08 Δίνεται το $(\Sigma) \begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases} (\Sigma_1)$ και τα

τριώνυμα $f(x) = x^2 + 3x - \lambda$, $g(x) = -x^2 - \lambda x + 3$.

A. Εάν η το Σ έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) για την οποία ισχύει ότι $-x_0 + 3y_0 + 3 = 0$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq g(x)$.

Γ. Βρείτε τη λύση του συστήματος

$$|D - \lambda_1| + |D_x - \lambda_2| + |D_x - D_y| = 0 \text{ όπου } \lambda_1 \text{ και } \lambda_2$$

είναι οι τιμές για τις οποίες το (Σ_1) είναι αδύνατο και έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα

1.09 Για τις ορίζουσες ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 4D + 2D_x - 5$. Να βρεθούν τα x, y .

1.10 Δίνεται το γραμμικό 2×2 σύστημα με ορίζουσες D, D_x, D_y . Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = D(2D_x - 4D_y - 5D) \text{ τότε να βρείτε την λύση αυτή.}$$

1.11 Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, y ισχύει:

$$D_x^2 + D_y^2 = 2D_x D_y \text{ και } D \neq 0. \text{ Αν } x + y = 6, \text{ να βρεθούν τα } x, y.$$

1.12 Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για να είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ίσες με α και β

1.13 Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

2.01 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f(x) = x(4-x)$, $x \in (-\infty, 2]$
 $g(x) = 2 - \sqrt{3x-1}$ $t(x) = 2 - \sqrt{3-x}$

2.02 Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων

$$h(x) = \frac{1}{x^2} - 1 \text{ και } g(x) = \frac{1-x}{x}, x < 0$$

2.03 Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

2.04 Να μελετηθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = (\lambda^2 - 1)x + 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.05 Μια συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$ και διέρχεται από τα σημεία $(1,2)$ και $(3,1)$. Να αποδείξετε τη μονοτονία της.

2.06 Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι $2f^5(x) + f(x) = 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x - 1) < 1$

2.07 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης τέμνει σε ένα το πολύ σημείο τον άξονα $x'x$.

2.08 Οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$, είναι γνήσια μονότονες και έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

2.09 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η $g(x) = \frac{f^2(x) - 3}{3f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

2.10 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ακόμα ότι ισχύει η ισοδυναμία: « $x > 0$ » $\Leftrightarrow f(x) > 0$. Να αποδείξετε ότι:

A) η f είναι περιττή

B) η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(4x^2 + 2005) + f(4x^2 - 2005) < 2f(8x - 4)$$

2.11 Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$

2.12 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(\sqrt{x}) + f(x^2) = f(x) + f(x^3)$$

2.13 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$f(x) + f^3(x) = x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

2.14 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $2 - x - x^{13} > 0$

B) $x^{11} + 2x^7 + 3x^5 + 5x^3 + 7x < 18$

Γ) $x^3 + (x-1)^5 - \frac{2}{x} > 8$ στο $(0, +\infty)$

2.15 Αν $f(x) = x^7 + x - 1$, να λύσετε τις

$$\text{ανισώσεις } f(x^2 + x) < f(2) \text{ και } f(x^2 + 1) < f(2x - 2)$$



2.16 Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

A) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ορίζουμε

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

α) η f είναι γν. αύξουσα αν και μόνο αν $\lambda > 0$.

β) η f είναι γν. φθίνουσα αν και μόνο αν $\lambda < 0$

B) Αν $A = \mathbb{R}$ και για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$

ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| < 2|x_1 - x_2|$, να αποδείξετε

ότι η $g(x) = f(x) - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο

$\mathbb{R}$ και ότι η $h(x) = f(x) + 2x$ είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ) Αν η συνάρτηση $k(x) = (\lambda^2 - 4)x + 3$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.17 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$$

A) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

B) Να λυθεί η ανίσωση

$$8x^3 - 12x^2 + 6x > (1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 3(1-x)$$

2.18 Η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(-1, 1)$. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$f(3-x) < 1 \text{ και } f(x^2 - x) < 1$$

2.19 Οι συναρτήσεις f και g είναι γνήσια αυξουσες έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνήσια μονότονη.

B) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2)g(x) - f(x)g(x^2) > 0$$

2.20 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f που είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(-3) = 0$

2.21 Αν $f(x) = x^7 + x^5 + x$, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$

2.22 Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$

2.23 Έστω συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(1, 3)$ και $(2, 0)$

A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια φθίνουσα

B) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 3$

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

Δ) Να βρείτε τα σημεία όπου η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'

2.24 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη με $f(5) = 9$ και $f(2) = 3$. Να αποδείξετε τη μονοτονία της f και να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 8x - 4) < 9$

2.25 Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $[\alpha, \beta]$ με σύνολο τιμών το $[\alpha, \beta]$ ώστε $g(x) < f(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα, να αποδείξετε ότι $g(g(x)) < f(f(x))$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

2.26 * Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(\alpha) - f(\beta) = f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$. Αν επιπλέον ισχύει ότι « $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$ »

A) αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

2.27 Να μελετηθούν ως προς τα ακρότατα οι συναρτήσεις

A) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$

B) $f(x) = 1 - \sqrt{2x+3}$

Γ) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

Δ) $f(x) = -|x-5| + 3$

2.28 Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις

A) $f(x) = x^2 + 3$ στο $[-2, -1]$

B) $f(x) = 2\sqrt{3-x^2} + 3$ στο $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

Γ) $f(x) = \sqrt{7+\sqrt{6-x}}$ στο $[2, 5]$

2.29 Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x < 0$ έχει μέγιστο το -2

2.30 Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$ έχει ελάχιστο το -1

2.31 Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ έχει μέγιστο 1

2.32 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.33 Αν $f(x) = 3^x + 3^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

A) $f(0) = 2$,

B) $f(x) \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$

Γ) Η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.34 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 2

2.35 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 4

2.36 Έστω η $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, $x \geq 0$. Να

δείξετε ότι:

A) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $x \geq 0$

B) $f(x) \leq 1$, $x \geq 0$

Γ) η μέγιστη τιμή της f είναι το 1

2.37 Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$, $B(1, 3)$ και ισχύει $|2f(x) - 5| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

2.38 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $-1 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $2f(2) + 3f(5) = 4$ και $-f(2) + f(5) = 3$, να βρείτε τα ακρότατα της f

2.39 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+x+1}$

A) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το -3

B) Να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(x^3 - \frac{3}{2}\right) + f\left(x^4 - 3x + \frac{3}{2}\right) + 6 = 0$$

Γ) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(\alpha - \beta - 1) + f(2\alpha + \beta + 1) + 6 = 0$

2.40 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = 1$

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ έχει μέγιστη τιμή το 1 .

B) Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης

$$\Phi(x) = \frac{2 \cdot 3^x}{1 + 3^{2x}} + 9$$



ΑΡΤΙΕΣ ΠΕΡΙΤΤΕΣ

2.41 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές και ποιες άρτιες:

A) $f(x) = x|x|$

B) $f(x) = x^3\sqrt{(2-x)^2} + x^3\sqrt{(2+x)^2}$

2.42 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές και ποιες άρτιες:

A) $f: (-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + x$

B) $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

Γ) $f(x) = x^3 - x|x|$

2.43 Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές και ποιες άρτιες:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x \geq 0 \\ 1+x & x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -3x+4 & x < 0 \\ 3x+4 & x \geq 0 \end{cases}$$

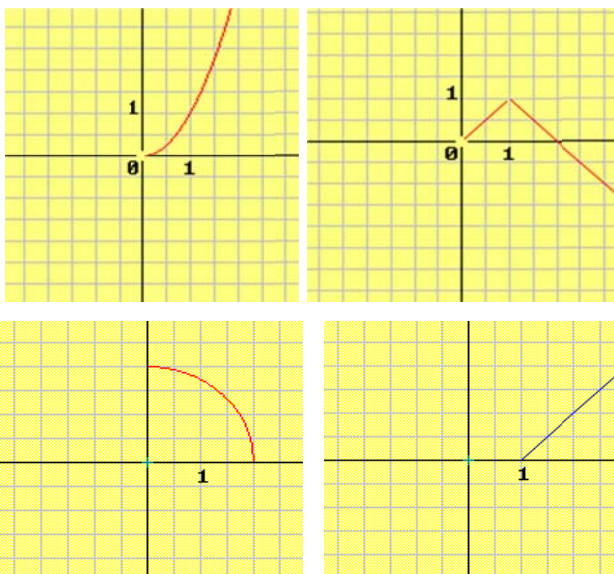
2.44 Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ είναι άρτια.

2.45 Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή με πεδίο ορισμού A , δείξτε ότι η $g(x) = |f(x)|$ είναι άρτια

2.46 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις:

α) άρτιας συνάρτησης και β) περιττής συνάρτησης



2.47 Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι περιττή

2.48 Δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχουν τις ιδιότητες: $f^2(x) = f(x)f(-x)$ και

$$g^2(x) = -g(x)g(-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

αποδείξτε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή.

2.49 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(2) = 4$. Να βρεθεί το $f(-2)$ αν

γνωρίζετε ότι: A) η f είναι άρτια

B) η f είναι περιττή

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.50 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

A) $g(x) = 2 - |x - 2|$ B) $k(x) = 2 - (x - 1)^2$

Γ) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ Δ) $m(x) = x^2 - 6x + 3$

2.51 Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x \leq -1 \\ 3x^2 & x > -1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} |x| & x < 1 \\ -x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

2.52 Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

A) $f(x) = x|x| - 2|x|$.

B) $f(x) = x\sqrt{x^2}$

Γ) $f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$

2.53 Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2|x+1| + 2|x-2|$.

A) Να γραφεί ο τύπος της συνάρτησης χωρίς απόλυτα.

B) να παρασταθεί γραφικά.

Γ) να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

Δ) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της

2.54 Η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.01 Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο Μ αν $\widehat{xOM} = \omega$ και $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega > 0$

3.02 Αν $5\pi < x < \frac{11\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi x - \eta\mu x > \sigma\upsilon\nu x - \sigma\phi x$.

Ανισότητες - Μέγιστα Ελάχιστα

3.04 Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων :
 $A = 2\eta\mu x - 5$ $B = -4\sigma\upsilon\nu x$ $\Gamma = \eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu y$

3.05 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ υπάρχει γωνία ω ώστε να ισχύει: $\epsilon\phi\omega = \frac{3\kappa}{\kappa - 2}$ και $\sigma\phi\omega = \frac{\kappa}{2 - \kappa}$

3.06 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ υπάρχει γωνία ω ώστε να ισχύει: $\epsilon\phi\omega = \frac{3\kappa}{\kappa - 2}$ και $\sigma\phi\omega = \frac{\kappa}{2 - \kappa}$

3.07 Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 x - \alpha\eta\mu x + \alpha + 3 > 0$, $\alpha, x \in \mathbb{R}$

Να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί

3.11 Αν είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, υπολογίστε την παράσταση $2\eta\mu\omega - \frac{5}{\epsilon\phi\omega} + \sigma\upsilon\nu\omega$

3.12 Αν $16\sigma\upsilon\nu^2\omega - 5 = 0$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, υπολογίστε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

3.03 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

A) $\eta\mu 90^\circ + \eta\mu 180^\circ + \eta\mu 270^\circ + \eta\mu 360^\circ$

B) $2\epsilon\phi^2 180^\circ - 5(1 - \sigma\upsilon\nu^2 90^\circ)$

Γ) $\frac{\epsilon\phi 60^\circ - \epsilon\phi 30^\circ}{\epsilon\phi 45^\circ + \epsilon\phi 30^\circ + \epsilon\phi 60^\circ}$

3.08 Δείξτε ότι α) $-\sqrt{2} \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$

β) $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \leq \frac{1}{2}$

γ) $|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \leq \sqrt{2}$

δ) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x \geq \frac{1}{2}$

3.09 Να εξηγήσετε γιατί δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε να ισχύει:

A) $\sigma\upsilon\nu^2 x < 3\sigma\upsilon\nu x - 2$

B) $\eta\mu x < \frac{1}{\sqrt{2} - 2}$

3.10 Να αποδείξετε ότι:

A) $\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \sigma\upsilon\nu^2 \beta + 2\eta\mu \alpha \cdot \eta\mu \beta \leq 2$

B) $\sigma\upsilon\nu^2 \alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha} \geq 2$

Γ) $\epsilon\phi^2 \alpha + \sigma\phi^2 \alpha \geq 2$

3.13 Αν $0 < \omega < 90^\circ$ και $\epsilon\phi\omega = \frac{3}{4}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{3\eta\mu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega}{4\eta\mu\omega - 9\sigma\upsilon\nu\omega}$$

3.14 Αν $17\sigma\upsilon\nu\omega + 8 = 0$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$ να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}{\epsilon\phi\omega}$



Βασικές Ταυτότητες

3.15 Να αποδείξετε ότι:

$$(2\chi\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \eta\mu\theta)^2 + \chi^2 (\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta)^2 = \chi^2$$

3.16 Να αποδείξετε ότι:

$$(\chi\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + (\chi\eta\mu\omega\eta\mu\varphi)^2 + (\chi\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \chi^2$$

3.17 Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^3\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu^5\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu^3\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^3\theta$$

3.18 Αποδείξτε ότι $\epsilon\varphi\omega = \frac{1}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$

3.19 Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^4\chi - \sigma\upsilon\nu^4\chi = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\chi = 2\eta\mu^2\chi - 1$$

3.20 Αποδείξτε ότι: $\frac{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\epsilon\varphi\omega + 1}{\epsilon\varphi\omega - 1}$

3.21 Αποδείξτε ότι: $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{1 - \epsilon\varphi^2\omega}{\epsilon\varphi\omega}$

3.22 Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2\epsilon\varphi\chi + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = 1 + \epsilon\varphi\chi$,

αν $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$

3.23 Αποδείξτε ότι $\frac{\epsilon\varphi^2\chi - 1}{\epsilon\varphi^2\chi + 1} = \eta\mu^4\chi - \sigma\upsilon\nu^4\chi$

3.24 Δείξτε ότι $\left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{\eta\mu\chi}\right) \left(1 + \frac{\eta\mu\chi + 1}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right) = 2$

3.25 Αποδείξτε ότι $\frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1 + \frac{1}{\eta\mu\alpha}} = \epsilon\varphi\alpha$

3.26 Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{1}{\eta\mu\alpha} - \eta\mu\alpha\right) \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \sigma\upsilon\nu\alpha\right) (\epsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha) = 1$$

3.27 Δείξτε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta \leq 2$

3.28 Δείξτε ότι $\frac{1 - \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}{1 - \eta\mu\chi} = \frac{1 + \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

3.29 Αποδείξτε ότι $\frac{\eta\mu^3\omega + \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \epsilon\varphi\omega$

3.30 Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\varphi^4\chi + \eta\mu^2\chi}{\sigma\varphi^4\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi} = \epsilon\varphi^6\chi$

3.31 Να αποδείξετε ότι $\frac{1 + \epsilon\varphi^7\chi}{1 + \sigma\varphi^7\chi} = \left(\frac{1 + \epsilon\varphi\chi}{1 + \sigma\varphi\chi}\right)^7$

3.32 Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \geq 2$

3.33 Αποδείξτε ότι $\sqrt{\frac{\frac{1}{\eta\mu\theta} - \sigma\varphi\theta}{\frac{1}{\eta\mu\theta} + \sigma\varphi\theta}} = \left|\frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta}\right|$

3.34 Δίνεται η εξίσωση

$$\chi^2 - 2\chi \cdot \eta\mu\alpha + 1 - \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \quad \text{με} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

A) Να αποδείξετε ότι έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

B) Αν χ_1, χ_2 οι ρίζες της, να βρείτε το $\eta\mu\alpha$ ώστε να ισχύει $\chi_1^2 + \chi_2^2 = 2$

3.35 Να δείξετε ότι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\eta\mu\alpha}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2}$

3.36 Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - 2\chi - \epsilon\varphi^2\theta = 0$.

A) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες τις χ_1, χ_2 , οι οποίες να βρεθούν.

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{1}{(\chi_1 - \chi_2)^2}$$

Γ) Αν $f(x) = \frac{\chi^2}{\chi - 1}$ να δείξετε ότι

$$f(\chi_1)f(\chi_2) = -\epsilon\varphi^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta.$$

Αναγωγή στο 1^ο Τεταρτημόριο

3.37 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 3510° , -11π , $\frac{11\pi}{2}$, $-\frac{35\pi}{6}$

$$\frac{2\kappa\pi}{3}, \frac{1000\pi}{3}, -\frac{100\pi}{6}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

3.38 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$$

3.39 Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να αποδείξετε ότι :

A) $\varepsilon\varphi(A+B) = -\varepsilon\varphi\Gamma$ B) $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$

Γ) $\sigma\upsilon\nu(A+B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma$

3.40 Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^4 \frac{\pi}{8} - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{3\pi}{8} = -\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8}$$

τριγωνομετρικές συναρτησεις

3.46 Να βρείτε τα ακρότατα και την περίοδο

της συνάρτησης $f(t) = 2\eta\mu\left(\frac{t\pi}{2}\right)$.

3.47 A) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}$

και $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{11}$

B) Αν $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{7\pi}{4}$ να συγκρίνετε τις

τιμές $[0, \pi]$ και $\eta\mu\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right)$

3.48 Αν $3 \cdot \eta\mu\theta + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0$, $t \in [0, 4\pi]$. Να βρείτε

A) Την περίοδο και το πλάτος της συνάρτησης

B) Το $t \in [0, 4\pi]$ ώστε $f(t) = 0$.

3.41 Να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου:

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 1^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 2^\circ \cdots \sigma\upsilon\nu 2006^\circ$$

3.42 Δείξτε ότι $0 < \frac{\sigma\varphi(\pi+\theta) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sigma\varphi(\pi+\theta) - \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} < 2$

3.43 Αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi + \theta) > 2 \left[1 - \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) \right]$$

3.44 Δείξτε ότι $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 1$

3.45 Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 4$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$$

3.49 Δίνεται περιοδική συνάρτηση f με

περίοδο $T > 0$, και $A_f = \mathbb{R}$. Στο διάστημα

$[0, T]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή το

2004 για το μοναδικό $x = \frac{\pi}{4}$ και στο διάστημα

$[2T, 3T]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή

για $x = \frac{9\pi}{4}$.

A. Είναι σωστό ή λάθος ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το 2004;

B. Αν $f(x) = a\eta\mu(\omega x)$ να βρείτε το a και το ω και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης στο διάστημα $[0, 3T]$.



Εξισώσεις**3.50** Να λύσετε τις εξισώσεις :

- A) $\eta\mu(x - \pi) = -\sigma\upsilon\nu(x - 3\pi)$
 B) $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$
 Γ) $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \epsilon\varphi x$

3.51 Να λύσετε τις εξισώσεις :

- A) $\eta\mu(x + 20^\circ) - \sigma\upsilon\nu(x + 50^\circ) = 0$
 B) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu x = 0$
 Γ) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

3.52 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A) $5\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2$ στο $[-\pi, \pi]$
 B) $\epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x + 1 = \epsilon\varphi x + \eta\mu x$
 Γ) $\epsilon\varphi 2x \cdot \sigma\varphi 5x = 1$ στο $[0, \pi]$
 Δ) $\frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} = 4$

3.53 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A) $\eta\mu^2 x + \eta\mu x = 0$
 B) $1 + \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu^2 x$

3.54 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A) $2\eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x = 3$
 B) $\epsilon\varphi^4 x - 4\epsilon\varphi^2 x + 3 = 0$

3.55 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A) $\epsilon\varphi x = 3\sigma\varphi x$
 B) $\epsilon\varphi x + \sigma\varphi x = -2$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**3.62** Να λύσετε τις ανισώσεις:

- A) $2\eta\mu x < 1$ B) $-2\sigma\upsilon\nu x - 1 > 0$

3.56 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των

$$\text{συναρτήσεων } f(x) = \frac{2\eta\mu x - 1}{\sigma\upsilon\nu x + 1}, \quad g(x) = \frac{1}{\epsilon\varphi x + 1},$$

$$h(x) = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu x - 1}$$

3.57 Να λυθούν οι εξισώσεις στο $[0, \pi]$

- A) $(4\eta\mu^4 x - 1) \cdot (1 - |\eta\mu x|) = 0$
 B) $2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x$
 Γ) $3 \cdot \eta\mu\theta + \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0$

3.58 Να λύσετε τις εξισώσεις

- A) $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) = 0$
 B) $\eta\mu|x| = 1$
 Γ) $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 0$
 Δ) $\eta\mu(\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2x) = 1$

3.59 Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

- A) $\eta\mu 2x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$
 B) $\epsilon\varphi 3x = 1$ και $\epsilon\varphi 4x = \sqrt{3}$

3.60 Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

- A) $\eta\mu x = -\sqrt{3}$ B) $\sigma\upsilon\nu x = e$
 Γ) $\eta\mu x = \pi$ Δ) $\sigma\upsilon\nu x = 2\pi$
 E) $\eta\mu x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

3.61 Να λύσετε τις εξισώσεις

- A) $\epsilon\varphi x(\sigma\varphi x + \sqrt{3}) = 1$
 B) $\epsilon\varphi x - 1 + 2 \cdot \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\eta\mu x$

3.63 Να λύσετε τις ανισώσεις:

- A) $\sigma\varphi x - 1 \geq 0$ B) $\epsilon\varphi 2x \leq 1$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί $\alpha + \beta$

3.64 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει
 ότι $\sin \alpha + \sin(120^\circ + \alpha) + \sin(240^\circ + \alpha) = 0$

3.65 Να αποδείξετε ότι η παράσταση
 $\sin^2 x - 2 \sin \alpha \sin x \sin(\alpha + x) + \sin^2(\alpha + x)$
 είναι ανεξάρτητη του x .

3.66 Να αποδείξετε ότι:

A) $(\sin x - \eta \mu x) \varepsilon \varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin x + \eta \mu x$

B) $\varepsilon \varphi(45^\circ - \omega) = \frac{\sin \omega - \eta \mu \omega}{\sin \omega + \eta \mu \omega}$

Γ) $\frac{\eta \mu(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ + \alpha)}{\eta \mu(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ + \alpha)} = \varepsilon \varphi \alpha$

3.67 Να δείξετε ότι

A) $\varepsilon \varphi^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \eta \mu \theta}{1 - \eta \mu \theta}$

B) $\varepsilon \varphi(\alpha + \beta) \varepsilon \varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon \varphi^2 \alpha - \varepsilon \varphi^2 \beta}{1 - \varepsilon \varphi^2 \alpha \varepsilon \varphi^2 \beta}$

Γ) $\frac{\varepsilon \varphi^2 2\alpha - \varepsilon \varphi^2 \alpha}{1 - \varepsilon \varphi^2 2\alpha \varepsilon \varphi^2 \alpha} = \varepsilon \varphi \alpha \cdot \varepsilon \varphi 3\alpha$

3.68 Να αποδείξετε ότι:

A) $\frac{2\eta \mu(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \varepsilon \varphi \alpha + \varepsilon \varphi \beta$

B) $\frac{\eta \mu(\alpha + \beta)}{\eta \mu(\alpha - \beta)} = \frac{\varepsilon \varphi \alpha + \varepsilon \varphi \beta}{\varepsilon \varphi \alpha - \varepsilon \varphi \beta}$

3.69 Δείξτε ότι αν $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta$ τότε
 $\eta \mu^2(\alpha + \beta) = (\eta \mu \alpha + \eta \mu \beta)^2$

3.70 Να αποδείξετε ότι αν

$$\eta \mu(\beta - \alpha) = \sin(\beta - \alpha), \text{ τότε } \varepsilon \varphi\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon \varphi \alpha$$

3.71 Αν $\alpha + \beta = \gamma$ να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon \varphi \gamma - \varepsilon \varphi \alpha - \varepsilon \varphi \beta = \varepsilon \varphi \alpha \cdot \varepsilon \varphi \beta \cdot \varepsilon \varphi \gamma$$

3.72 Αν $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ να αποδειχθεί ότι:

A) $\varepsilon \varphi \alpha \cdot \varepsilon \varphi \beta + \varepsilon \varphi \beta \cdot \varepsilon \varphi \gamma + \varepsilon \varphi \gamma \cdot \varepsilon \varphi \alpha = 1$

B) $\sigma \varphi \alpha + \sigma \varphi \beta + \sigma \varphi \gamma = \sigma \varphi \alpha \cdot \sigma \varphi \beta \cdot \sigma \varphi \gamma$

3.73 Για τις γωνίες α, β ισχύει $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ Να
 αποδείξετε ότι $(1 + \varepsilon \varphi \alpha) \cdot (1 - \varepsilon \varphi \beta) = 2$

3.74 Αν $\eta \mu x + \sin y = \frac{1}{2}$ και $\sin x + \eta \mu y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 να βρείτε το $\eta \mu(x + y)$

3.75 Αν $0 < \omega, x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < 0, \varepsilon \varphi \omega = \frac{2}{5},$
 $\varepsilon \varphi x = \frac{3}{2}$ και $\varepsilon \varphi y = -\frac{15}{23}$, τότε $x + y + \omega = \frac{\pi}{4}$

3.76 Να βρεθεί γωνία x με $0 < x < 2\pi$ αν ισχύει
 $\eta \mu x \sin 122^\circ + \sin x \sin 328^\circ = \frac{\sqrt{3} \sin 2^\circ + \sin 92^\circ}{2}$

3.77 Αν ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,
 $\sigma \varphi \frac{\alpha}{2} + \sigma \varphi \frac{\beta}{2} = 2003 \sigma \varphi \frac{\gamma}{2}$ και $\gamma \neq (2k+1)\pi$ και να
 αποδείξετε ότι: $\sigma \varphi \frac{\alpha}{2} \sigma \varphi \frac{\beta}{2} = 2004$

3.78 Αν η εξίσωση $x^2 - 8x + 9 = 0$, έχει ρίζες
 τους αριθμούς $\varepsilon \varphi \alpha$ και $\varepsilon \varphi \beta$, δείξτε ότι
 $\varepsilon \varphi(\alpha + \beta) = -1$

3.79 Να αποδείξετε ότι αν σε τρίγωνο $\Delta B \Gamma$
 ισχύει ότι $\eta \mu A \cdot \sin B + \eta \mu B \cdot \sin A = 1$ τότε είναι
 ορθογώνιο.

3.80 Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο
 $\Delta B \Gamma$ ισχύει ότι $\frac{\eta \mu \Gamma}{\sin(B - \Gamma) + \sin A} = \sigma \varphi B$ τότε
 $B = 60^\circ$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί 2α**3.81** Να αποδείξετε ότι:

$$A) (\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$B) \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$$

$$Γ) \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \eta\mu 2\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi + \eta\mu 2\chi} = \sigma\varphi\chi$$

3.82 Να αποδείξετε ότι :

$$A) \frac{1 + \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$$

$$B) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$$

3.83 Να αποδείξετε ότι :

$$A) \frac{\eta\mu \frac{x}{2} + \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$$

$$B) \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha + \eta\mu \frac{\alpha}{2}} = \sigma\varphi \frac{\alpha}{2}$$

3.84 Να αποδείξετε ότι:

$$A) \eta\mu^4\theta + \sigma\upsilon\nu^4\theta = \frac{3 + \sigma\upsilon\nu 4\theta}{4}$$

$$B) \frac{\sigma\varphi\alpha + 1}{\sigma\varphi\alpha - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \eta\mu 2\alpha}$$

3.85 Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu \frac{\alpha}{2}}{1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$ **3.86** Να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi - \sigma\upsilon\nu 4\chi = \frac{\eta\mu 8\chi}{8\eta\mu\chi}$$

3.87 Αν σε μη αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓισχύει ότι $2\eta\mu\beta\eta\mu \frac{A}{2} = \eta\mu A$, δείξτε ότι είναι

ισοσκελές

3.88 Να αποδείξετε ότι:

$$A) \frac{4\sigma\varphi\alpha (\sigma\varphi^2\alpha - 1)}{(1 + \sigma\varphi^2\alpha)^2} = \eta\mu 4\alpha$$

$$B) \frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$$

$$Γ) \text{ Αν } 0 < \alpha < \frac{\pi}{6}, \text{ τότε}$$

$$2\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 1 = \sqrt{3 + 2\sigma\upsilon\nu 4\alpha - 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

3.89 Να αποδείξετε ότι

$$A) \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$$

$$B) 16(\sigma\upsilon\nu 20)(\sigma\upsilon\nu 40)(\sigma\upsilon\nu 60)(\sigma\upsilon\nu 80) = 1$$

$$Γ) \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 4\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu 8\alpha = \frac{\eta\mu 16\alpha}{16 \cdot \eta\mu\alpha}.$$

$$\Delta) \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \eta\mu\theta}{1 - \eta\mu\theta}$$

3.90 Για τη γωνία α είναι γνωστό ότι

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ και ότι } 9\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 6\sigma\upsilon\nu\alpha + 5 = 0. \text{ Να}$$

υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α .**3.91** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα:

$$\eta\mu A \eta\mu B + \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu (A + \Gamma) = 0, \text{ να αποδείξετε ότι}$$

είναι ορθογώνιο.

3.92 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = (2\sigma\upsilon\nu^2 1002 - 1)^2 + \eta\mu^2 2004$$

$$B = \eta\mu^2 1002 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 1002 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 2004}{4}$$

3.93 Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

3.94 Να λύσετε τις εξισώσεις :

- A) $2\eta\mu^2 x = 3(1 - \sigma\upsilon\nu x)$
 B) $\eta\mu 2x = 2\epsilon\phi x$
 Γ) $\eta\mu 2x - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x + 1$
 Δ) $\sqrt{3}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 2$

3.95 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A) $\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu \frac{x}{2} + 1$
 B) $\sigma\upsilon\nu 4x + 2\sigma\upsilon\nu 2x = 0$
 Γ) $2\eta\mu x = \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ στο $[2\pi, 5\pi]$

3.96 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A) $\eta\mu^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\eta\mu 2x = \frac{1}{2} - \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0, \pi]$
 B) $\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \eta\mu^2 x = -1$ στο $[0, 2\pi]$.
 Γ) $3\epsilon\phi^2 x - 2\sqrt{3}\epsilon\phi x + 1 = 0$ αν $x \in [-3\pi, 2\pi]$

3.97 Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu^{2004} \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) + \sigma\upsilon\nu^{2004} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \text{ στο } (0, 2\pi).$$

3.98 Να λύσετε τις εξισώσεις:

- A) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 8 = 17\eta\mu^2 x$
 B) $4\eta\mu^3 x + 8\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu x = 5$
 Γ) $|2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1| + |3 - 2(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)| = \eta\mu 2x + 3$

3.99 Αν $\epsilon\phi 64^\circ = 2$ να λυθεί η εξίσωση :

$$\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

3.100 Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2x - \eta\mu 3x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 3x + 2x$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

3.101 Να λύσετε την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) \cdot \eta\mu(\eta\mu x) + 1$$

3.102 Αν για τις γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύουν:

$$\epsilon\phi A = \frac{1}{2}, \epsilon\phi B = \frac{1}{3}, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

$$A) \quad \epsilon\phi(A+B) = 1 \quad B) \quad \hat{\Gamma} = 135^\circ$$

3.103 Αν $x - y = 60^\circ$ και $\epsilon\phi y = \frac{1}{3}$ να βρεθεί η $\epsilon\phi x$

3.104 Να λυθεί στο διάστημα $[0, \pi]$ η εξίσωση:

$$\left[\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right]^2 = \sigma\upsilon\nu 2x.$$

3.105 Να λυθεί η εξίσωση :

$$\epsilon\phi \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$$

3.106 Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\phi \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x \right) = 1$.

3.107 Να λυθεί η εξίσωση :

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 2) = \left[\left(\eta\mu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} \right].$$

3.108 A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$2\eta\mu x = \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \text{ έχει λύσεις τις } x = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

B) Ποιες από αυτές περιέχονται στο $[2\pi, 5\pi]$.

3.109 Να λυθεί η εξίσωση:

$$|2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1| + |3 - 2(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)| = \eta\mu 2x + 3$$

3.110 Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$\alpha) \quad \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\beta) \quad \sigma\upsilon\nu 2x = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ στο διάστημα } [0, \pi]$$



Γενικές

3.111 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \kappa + \lambda \sin 4x$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ που έχει μέγιστο το 7 και είναι $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$.

- A) Να υπολογιστούν τα κ, λ
 B) Να βρείτε το ελάχιστο και τη περίοδο της f .
 Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 10 \sin 2x - 3$

3.112 Αν $f(x) = 1 + \eta \mu x + \sigma \nu x$ με $x \in (0, 2\pi)$ τότε:

- A. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \sigma \nu \frac{x}{2} \left(\eta \mu \frac{x}{2} + \sigma \nu \frac{x}{2} \right)$ για κάθε $x \in (0, 2\pi)$
 B. Να βρείτε τις τιμές του $x \in (0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $f(x) \neq 0$
 Γ. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο β ερώτημα να αποδείξετε ότι: $\frac{f(\pi - x)}{f(x)} \sigma \varphi \frac{x}{2} = 1$

3.113 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sigma \nu^3 x \cdot \eta \mu x - \eta \mu^3 x \cdot \sigma \nu x \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

- A) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{4} \eta \mu 4x$
 B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \varepsilon \varphi \frac{\pi}{3} \cdot f\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{1}{4}$
 Γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης: $g(x) = 8 \cdot f(x) - 1$.

3.114 Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{-x + \eta \mu \alpha - \chi \sigma \nu \alpha}{1 - \chi \eta \mu \alpha - \sigma \nu \alpha} \text{ και } B = \frac{1 - \sigma \nu 2\alpha + \chi \varepsilon \varphi^2 \alpha}{1 + x + \sigma \nu 2\alpha}$$

- A) Να δείξετε ότι οι είναι ανεξάρτητες του x .
 B) Αν $\alpha = \frac{\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι $A + B = 3 + \sqrt{3}$

3.115 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{-\varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2} + 2 \varepsilon \varphi \frac{x}{2} + 1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}$$

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 B. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \eta \mu x + \sigma \nu x$
 Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1$
 Δ. Η εξίσωση $f(x) = -1$ και η εξίσωση $\eta \mu x + \sigma \nu x = -1$ είναι ισοδύναμες;

3.116 Δίνεται η $g(x) = \sqrt{2} \eta \mu \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - 3$

- A) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της
 B) Για ποιά x έχουμε την μέγιστη τιμή της
 Γ) Να λυθεί η εξίσωση: $g(x) - g\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

3.117 Αν $f(x) = (\kappa - \lambda) \sigma \nu [(\kappa + 3\lambda) x]$ και

$g(x) = (2\kappa - 3\lambda + 2) \sigma \nu [(2\kappa + \lambda + 5)x]$, όπου κ, λ θετικοί αριθμοί τότε να βρείτε τους κ, λ ώστε οι συναρτήσεις f και g να έχουν την ίδια μέγιστη τιμή, και η περίοδος της f να είναι διπλάσια της περιόδου της g

3.118 Δίνεται η $f(x) = \eta \mu \left(x + \frac{\pi}{8} \right) \cdot \eta \mu \left(x + \frac{5\pi}{8} \right)$

- A) Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{2} \eta \mu \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.
 B) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 Γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{2 \cdot f\left(x - \frac{\pi}{8}\right)}{1 + 2 \cdot f\left(x + \frac{\pi}{8}\right)} = \varepsilon \varphi x$

3.119 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \sin 2x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(\pi, 1)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$.

- A) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς α , β .
- B) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή καθώς και την περίοδο της f .
- Γ) Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot f\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 3$

3.120 Δίνεται το γραμμικό σύστημα (Σ) με αγνώστους x, y .

$$(\Sigma) \begin{cases} \eta\mu\theta \cdot x - \sigma\upsilon\nu\theta \cdot y = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\theta \cdot x + \eta\mu\theta \cdot y = 1 \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

- A) Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , την οποία και να βρείτε.
- B) Να λυθεί η ανίσωση: $3x - x^2 \leq x_0^2 + y_0^2$

3.121 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.
- Γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιοδική, με περίοδο $T = \pi$.
- Δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

3.122 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) \cdot (\epsilon\phi x + \sigma\phi x)^2.$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- B) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \epsilon\phi^2 x + \sigma\phi^2 x$.
- Γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

3.123 Τα ετήσια έξοδα μιας επιχείρησης σε χιλιάδες ευρώ δίνονται από τη συνάρτηση

$$E(t) = 300 + 25\eta\mu\frac{\pi t}{6} \quad \text{όπου } t \text{ ο χρόνος σε έτη. Η}$$

επιχείρηση λειτουργεί από την αρχή του 1991 έως και το τέλος του έτους 2002

- A) Ποια έτη τα έξοδα φτάνουν τα 312500 ευρώ
- B) Ποιο έτος έχουμε το μέγιστο ποσό εξόδων;

3.124 Οι πωλήσεις, σε εκατοντάδες χιλιάδες, ενός σχολικού προϊόντος από μια εταιρεία με σχολικά είδη δίνονται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \eta\mu\frac{\pi t}{6} + \epsilon\phi\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{6} + 2 \quad \text{εκατοντάδες χιλιάδες}$$

, όπου t ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη της σχολικής χρονιάς, (Σεπτέμβριος) και α σταθερός πραγματικός αριθμός με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. Να δείξετε ότι $f(t) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \eta\mu\left(\frac{\pi t}{6} + \alpha\right) + 2$
- B. Αν γνωρίζουμε ότι οι μέγιστες πωλήσεις της εταιρείας είναι 400000 μονάδες προϊόντος να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς α και κατόπιν να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:
- α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός των πωλήσεων του προϊόντος;
- β) Γιατί οι πωλήσεις του προϊόντος στον ίδιο μήνα κάθε χρόνο είναι οι ίδιες;
- γ) Σε ποιόν μήνα του χρόνου οι πωλήσεις του προϊόντος είναι μέγιστες και σε ποιον ελάχιστες;

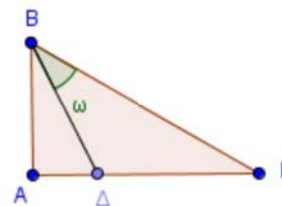
3.125 Το διπλανό τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο A και ισχύει ότι $AB = 2A\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

A) $\epsilon\phi\omega = \frac{2\epsilon\phi B - 1}{2 + \epsilon\phi B}$

B) Αν η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B

τότε $\epsilon\phi B = \frac{4}{3}$



4 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Εννοια του πολυωνόμου - πράξεις

4.01 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$P(x) = (κ - 2)x^2 + (2λ + 6)x + κ + λ - 3$ δεν μπορεί να είναι το μηδενικό για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς $κ$ και $λ$.

4.02 Να βρεθεί για ποιες τιμές των $κ, λ, μ ∈ ℝ$ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$$P(x) = λx^2 - (λ - κ)x + μ - 2λ \text{ και}$$

$$Q(x) = (μ - λ)x^2 + 4x + κ + λ.$$

4.03 Να προσδιοριστεί ο $α ∈ ℝ$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 9x^3 - 3x^2 + 8x - 27$ να παίρνει τη μορφή $α(x^3 + x) - 3x^2 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$.

4.04 Να βρεθεί πολυώνυμο του οποίου το τετράγωνο να ισούται με το

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

4.05 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^2 - 1$, $Π(x) = 3x - 1$, και $Φ(x) = 3αx^2 + 2βx + γ - α$, να βρείτε τα $α, β, γ$ ώστε $P(Π(x - 1)) = Φ(x + 1)$ για κάθε $x ∈ ℝ$

Διαίρεση Πολυωνόμων

4.11 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνόμου $P(x) = x^{2000} + αx^{1999} + ... + αx + α$ δια $x - 1$ είναι 2001, να υπολογίσετε το $α$.

4.12 Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = λ^2x^2 + (2λ^2 - 3λ + 1)x - 3(2λ + 1)$ με το $(x + 2)$ είναι ανεξάρτητο του $λ$.

4.06 Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x - 1)P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x - 7$, $x ∈ ℝ$

4.07 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $α$ αν ισχύει $P(α - 1) = 13$

4.08 Να προσδιορίσετε τα $A, B, α, β, γ ∈ ℝ$ ώστε

$$A) \quad \frac{2x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$B) \quad \frac{2x^2 + 10x - 3}{(x+1)(x^2 - 9)} = \frac{α}{x+1} + \frac{β}{x+3} + \frac{γ}{x-3}$$

4.09 Προσδιορίστε τα A, B ώστε:

$$\frac{1}{(2v-1)(2v+1)} = \frac{A}{2v+1} + \frac{B}{2v-1} \text{ για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού } v. \text{ Να υπολογίσετε το } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(2v-1)(2v+1)}$$

4.10 Να βρείτε για το βαθμό κάθενός από τα πολυώνυμα για κάθε $λ$ ή $α$ με $λ, α ∈ ℝ$

$$A) \quad P(x) = (1 - λ^2)x^3 + (λ + 1)x^2 + x - 3.$$

$$B) \quad P(x) = (α^3 - 3α^2 + 2α)x^3 + (α^2 - α)x + 1 - α$$

4.13 Για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει ότι $P(0) = P(1) = 4$. Δείξτε ότι $P(x) = x(x - 1)π(x) + 4$

4.14 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνόμου $P(x)$ δια του $x + 2$ είναι 5 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι 2, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $(x + 2)(x - 1)$

4.15 Δίνονται τα πολυώνυμα

$$\Phi(x) = x^3 - 2\lambda x + 1 \text{ και } P(x) = \lambda x^2 + 3(\lambda - 1)x + 3.$$

Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι διαιρέσεις $P(x):(2x-1)$ και $\Phi(x):x+1$ να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

4.16 Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta \text{ διαιρείται με } x^2 - x - 6$$

4.17 Αν το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x-2$ και εάν επιπλέον $f(1) = 8$, να προσδιοριστούν τα α, β .

4.18 Έστω $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$. Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το -2 είναι ρίζα του $P(x)$, και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια $(x-1)$ ισούται με -9 .

4.19 Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διαιρούμενο με το $g(x) = x^2 - 3x + 2$ δίνει υπόλοιπο $v(x) = 4x + 7$.

4.20 Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 1$, αν διαιρεθεί με το $x^2 + \kappa x + \lambda$ να αφήνει υπόλοιπο 0 .

4.21 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 + (\lambda - 1)x + 5$ να έχει παράγοντα το $(x-1)(x+2)$.

4.22 Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = 2x^2 - 3\lambda x + 5 \text{ και } \Phi(x) = 3x^3 + (\lambda - 1)x + 3,$$

$\lambda \in \mathbb{R}$. Αν v_1, v_2 είναι τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x):(x-2)$ και $\Phi(x):(x+1)$ αντίστοιχα να βρεθεί το λ ώστε: Α) $v_1 = v_2$ Β) $v_1 = 2v_2 - 1$ Γ) $v_1 + v_2 = 0$

4.23 Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων

$P(x):(x-1)$ και $P(x):(x+1)$ είναι αντίστοιχα 3 και 1 να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x):(x-1)(x+1)$

4.24 Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-5$ να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(2x-3)$ έχει παράγοντα το $x-4$

4.25 Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με σταθερό όρο 1 . Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-\alpha$ δίνει πηλίκο $x^2 - 3x + 4$ και διαιρούμενο με το $x-\beta$ δίνει πηλίκο $x^2 - 4x + 2$. Να βρείτε το $P(x)$ και τα α, β

4.26 Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - (3+\alpha)x + \beta + 10$ έχει για παράγοντα το $(x-2)^2$

4.27 Το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-2$ και $x+3$ δίνει υπόλοιπο 10 και 5 αντίστοιχα. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με $(x-2)(x+3)$

4.28 Αν το πολυώνυμο $P(x) = (v+1)x^v - vx^{v+1} + \alpha$ διαιρείται με το $x-1$, τότε αποδείξτε ότι διαιρείται και με το $(x-1)^2$.

4.29 Αν ρ είναι ρίζα του $P(2x-1)$, αποδείξτε ότι ο $\rho-1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(2x+1)$

4.30 Πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο δια του $(2x+1)(x-1)(x-3)$ δίνει υπόλοιπο $Y(x) = 4x^2 + 3x + 2$. Ποιο υπόλοιπο προκύπτει αν διαιρεθεί δια $2x+1$, δια $x-1$ και δια $x-3$ αντίστοιχα στην κάθε περίπτωση



4.31 Αν το πολυώνυμο

$P(x) = x^2 + (a-1)x + 2a$ έχει ρίζα το -1 να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για το $K(x) = x^3 + 4x^2 + (a^2 - 1)x$. Το αντίστροφο ισχύει;

4.32 Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x-3$ δίνει ηλίκο $\pi_1(x)$ και διαιρούμενο με $x-4$ δίνει ηλίκο $\pi_2(x)$. Να αποδείξετε ότι:
 $\pi_1(4) = \pi_2(3)$

4.33 Δίνεται η εξίσωση $x^5 + x^4 + kx + \lambda = 0$. Να προσδιοριστούν οι k, λ ώστε το πολυώνυμο να έχει ρίζα το -1 με πολλαπλότητα 2 (διπλή ρίζα). Μετά να βρεθούν και οι άλλες ρίζες της εξίσωσης.

4.34 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β έτσι ώστε η εξίσωση $x^5 - \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1$ να έχει το ανώτερο δυνατό πλήθος ακεραίων ριζών.

4.35 Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το $(x+1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου: $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + (\alpha + \beta)x - 1$

4.36 Να βρεθούν τα πολυώνυμα $f(x), g(x)$ αν
Α) $f(x+1) = x^2 - 2x + 3$ Β) $g(3x+1) = 9x^2 - 6x + 1$

4.37 Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη: $P(x^2 + 1) = [P(x)]^2 + 1$. Αν $P(0) = 1$, να βρείτε τα $P(1), P(2), P(5)$ και $P(26)$

4.38 Έστω πολυώνυμο $\Phi(x)$ για το οποίο ισχύει ότι $\Phi(x) = \Phi(4x+3)$. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = \Phi(x) - \Phi(1)$ διαιρείται με το $2x+1$

4.39 Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει την ιδιότητα: $P(x) = P(1-x)$ και $P(0) \neq 0$, να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-x^2)$ είναι σταθερός αριθμός.

4.40 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - 1$ και $Q(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)$ να διαιρείται ακριβώς με το $Q(x)$.

4.41 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4\lambda$, $Q(x) = \lambda \cdot x^4 - 2x^3 + x + 2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$ να είναι τριπλάσιο από το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x+1)$.

4.42 Αν ισχύει $P(1-2x) = 3 \cdot P(x) + 8$ και $P(1) = \kappa$ για ένα πολυώνυμο $P(x)$, να βρεθεί η τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε $P(-5) = 23$.

4.43 Αν η πολυωνυμική εξίσωση $x^3 + \alpha x + \beta = 0$ έχει παράγοντα το $(x-\lambda)^2$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^3}{27} + \frac{\beta^2}{4} = 0$

4.44 Α) Να βρεθεί πολυώνυμο 3 ου βαθμού ώστε να ισχύουν ότι $P(0) = 0$ και

$$P(x) - P(x-1) = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Β) Να υπολογίσετε το $S = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

Πολυωνομικές Εξισώσεις - Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνομικές

4.45 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $(x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$

B) $(x + 2)^8 - 3(x + 2)^4 - 4 = 0$

4.46 Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

A) $5x^{2v} + 9\kappa x - 1 = 0$

B) $8\lambda x^{2v} - 2(\kappa - 1)x + 1 = 0$

4.47 Να λύσετε τις εξισώσεις

A) $\sqrt{x-1} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ B) $\frac{4 - \sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{4x+20}}{4 + \sqrt{x}}$

Συνδυαστικές Πολυώνυμα με Τριγωνομετρία

4.52 Αν το πολυώνυμο

$P(x) = (2\eta\mu^2\alpha - 3\eta\mu\alpha + 1)x^3 + (2\eta\mu\alpha - 1)x^2 - 2x + 4$
είναι 2ου βαθμού, να βρεθεί το $\alpha \in (0, \pi)$.

4.53 Αν το πολυώνυμο

$P(x) = (\sigma\upsilon\nu\alpha)x^3 + (\eta\mu^2\alpha)x^2 - 3x + 2$ έχει
παράγοντα το $(x - \sigma\upsilon\nu\alpha)$, βρείτε το $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

4.54 Βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4\eta\mu 3\alpha + x^2\eta\mu 2\alpha + x\eta\mu\alpha$, διαιρείται ακριβώς με το $x - 1$.

4.55 Να βρείτε το $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ αν το $x + 1$ είναι

παράγοντας του

$P(x) = x^4 - (3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha)x^3 + 2x^2\eta\mu 2\alpha - x\eta\mu\alpha - 1$

4.56 Να βρεθεί το ω με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$ ώστε να ισχύει $3\eta\mu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega - 4\eta\mu\omega - 4 = 0$.

4.48 Να λύσετε τις ανισώσεις

A) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$ B) $x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9$

4.49 Να λύσετε τις ανισώσεις

A) $\sqrt{3x+7} < \sqrt{x+3}$ B) $x - 1 \geq \sqrt{x+5}$

4.50 Να λύσετε τις ανισώσεις

α) $\frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1$ β) $\frac{x^2}{x + 1} - \frac{4}{x - 1} \leq \frac{2}{x^2 - 1}$

4.51 Να λύσετε τις εξισώσεις

A) $\sqrt{x-8} = x - 10$

B) $\sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$

Γ) $x^2 + 2x - 7 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 5$

4.57 Να λυθεί η εξίσωση $3\sigma\upsilon\nu x - \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} = 2$ αν

$x \in \left(2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$

4.58 Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$

β) $2\eta\mu^3 x + 5\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x + 2 = 0$

γ) $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 5\sigma\upsilon\nu^3 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$

4.59 Έστω $f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x$ και το πολυώνυμο

$P(f(x)) = f^3(x) - (1 + f(x))^2$. Να βρεθούν για ποιες τιμές του x μηδενίζεται το πολυώνυμο.

4.60 Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x) = \kappa x^3 + \lambda x^2 + x - 1$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - 1$.

A) Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ

B) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

Γ) Να λυθεί η ως προς x η ανίσωση:

$\eta\mu\alpha \cdot P(x) \leq P(x)$, με $0 < \alpha < \pi$



Γενικές Ασκήσεις στα Πολυώνυμα

4.61 Έστω ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (κ + 2)x^2 + (κ - 1)x + 3κ - 1, \quad κ \in \mathbb{R} \quad \text{έχει}$$

παράγοντα το $(x + 1)$.

A. Να βρείτε την τιμή του $κ$.

B. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

4.62 Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + 11x + β$

διαιρούμενο δια $(x - 1)(x - 2)$ δίνει ηλίκο $\Pi(x)$

και αφήνει υπόλοιπο $υ(x) = 4$

A. Να υπολογιστούν τα $α, β \in \mathbb{R}$.

B. Να βρεθεί το $\Pi(x)$.

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 4$

4.63 Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = (κ - 3)x^3 + (κ + λ)x^2 + (31 - λ)x + 24,$$

$$Q(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24 \quad \text{όπου } κ, λ \in \mathbb{R}$$

A. Να βρείτε για ποιες τιμές των $κ, λ$ τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ είναι ίσα.

B. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $Q(x) = 0$ δεν έχει θετική ρίζα.

4.64 Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + κx + 1, \quad \text{όπου } κ \in \mathbb{R}.$$

A) Για $κ = -3$, να βρείτε το ηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x - 3)$.

B) Να βρείτε τις τιμές του $κ$ ώστε το $P(x)$ να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

Γ) Για $κ = 0$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

4.65 Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = (α - 1)x^4 + αx^3 + 3x^2 + (1 - α)x + β$$

A. Να διερευνηθεί ο βαθμός του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $α \in \mathbb{R}$

B. Στην περίπτωση που είναι τρίτου βαθμού, βρείτε την τιμή του $β \in \mathbb{R}$ ώστε το -1 να είναι ρίζα του $P(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

4.66 Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^2 - αx + α$,

όπου $α$ πραγματικός αριθμός.

A) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - α + 1)$ είναι $υ = (α - 1)^2 + 1$

B) Να βρείτε την τιμή του $α$ ώστε αυτό το υπόλοιπο να είναι το μικρότερο δυνατό.

4.67 Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^3 - (κ + 1)x^2 + (κ - 1)x + 2, \quad κ \in \mathbb{R}, \text{ για}$$

το οποίο ισχύει ότι $P(2) = 0$.

A) Να αποδείξετε ότι $κ = 2$.

B) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = x - 2$

4.68 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + βx + 2$

, όπου $α, β \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι $P(2004) + P(-2004) = 4$

B) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x) = x$

Γ) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - 1$ είναι $υ = α + β + 2$.

Δ) Αν $α = 1$ και το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1 , τότε να υπολογίσετε το $β$ και να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

5

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.01 Βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να ορίζονται στο $\mathbb{R}$

A) $f(x) = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha+2}\right)^x$ B) $f(x) = \left(\frac{2\alpha-1}{1+\alpha}\right)^x$.

5.02 Έστω η συνάρτηση $f(x) = (1-\kappa^2)^x$.

- A) Για ποιες τιμές του κ η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$;
 B) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του κ για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.
 Γ) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε η γραφική παράσταση της f να περνάει από το σημείο $(2,1)$

5.03 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha+1}{3-\alpha}\right)^x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση:

- A) είναι γνησίως αύξουσα B) είναι σταθερή.

5.04 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right)^x$

- A) Για ποιές τιμές του λ ορίζεται, $\forall x \in \mathbb{R}$
 B) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $f(1)+f(2)+f(3)=3f(0)$.
 Γ) Αν για κάθε $x < 0$ ισχύει $f(x) > 1$ να βρείτε τις τιμές του λ .

5.05 Αν $f(x) = e^x$ τότε να αποδείξετε ότι:
 Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- A) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
 B) $f(x) = f(y) \cdot f(x-y)$.
 Γ) $[f(x)]^v = f(vx)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*$
 Δ) $\frac{f(x)+f(y)}{2} > f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ με $x \neq y$

Εξισώσεις

5.06 Να λύσετε τις εξισώσεις

A) $5 \cdot 2^x = 2^{x+3} - 3\sqrt{2}$
 B) $4^{3x} = 2^4 \cdot 16^{\frac{x}{2}}$
 Γ) $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$

5.07 Να λύσετε τις εξισώσεις

A) $3^{\frac{2}{x}} - 4 \cdot 3^{\frac{1}{x}} + 3 = 0$
 B) $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$
 Γ) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
 Δ) $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$.

5.08 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$
 B) $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$
 Γ) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+4} + 4^{x+3}$

5.09 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+1} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$
 B) $\sqrt[3]{64^{2x-1}} = \sqrt{16^{2x-1}}$
 Γ) $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$

5.10 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $(3^x - 2)^2 + 3^x(3^x - 1) = 7$
 B) $3 \cdot 2^{2x} = 2(4^x + 1)(1 - 4^x)$.
 Γ) $5^{x^2+1} + 25^{x^2} = 6$

5.11 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $2^x + 6x - 40 = 0$
 B) $7(11 + 6\sqrt{2})^x = 3 - \sqrt{2}$



5.12 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $9^x + 1 = 2 \cdot 3^x \cdot \sin x$

B) $2^x + 2^{-x} = 2|\sin x|$

Γ) $x^2 \left(2^{|x-3|+4} - 2^{x+1} \right) = 2^{|x-3|+2} - 2^{x-1}$

Ανισώσεις

5.13 Να λύσετε τις ανισώσεις

A) $3^{x^2-7x+6} < 1$ B) $3^{2-|x|} > 1$

Γ) $(0,5)^{5x-x^2-1} < 0,125$ Δ) $9^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt{3^x}$

E) $(2-\sqrt{3})^{x^2} > (2+\sqrt{3})^{x-2}$ ΣΤ)

$\left(\frac{4}{5}\right)^{2x^2-x+1} \geq 1$

5.14 Να λύσετε τις ανισώσεις

A) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

B) $3^{\frac{x+1}{2}} + 3^{\frac{x-1}{2}} \geq 4^{\frac{x+1}{2}} - 2^{2x-1}$

Γ) $e^{2x} + e \geq e^x + e^{x+1}$ Δ)

Δ) $e^{2x} - (e-2)e^x - 2e < 0$

Προβλήματα

5.18 Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο

$$\Theta(t) = 36 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^t \text{ βαθμοί Κελσίου.}$$

A) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

B) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την τιμή $36,5^\circ \text{C}$

Γ) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδρασή του

5.15 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $4^{\eta \mu^2 x} + 4^{\sin 2x} \leq 5$

B) $27^x + 12^x - 2 \cdot 8^x > 0$

Γ) $9^{x+1} - 108 \cdot 3^x + 243 > 0$

5.16 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $e^x + 3 \geq 3e^x + e^{2x}$ B) $\frac{2e^x - 3}{e^x - 1} > 2$

Γ) $\frac{e^{2x} - e^x}{e^x - e} < -1$ Δ) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} > \frac{1}{2}$

Συστήματα

5.17 Να λύσετε τα συστήματα:

A) $\begin{cases} 4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$

Γ) $\begin{cases} 3^{x-y} - 4^{x-2y+1} = -13 \\ 2 \cdot 3^{x-y} + 3 \cdot 4^{x-2y} = 18 \end{cases}$ Δ) $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$

E) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$ ΣΤ) $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$

5.19 Μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρήθηκε ότι 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400 ενώ 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης ήταν 3200. Αν ο αριθμός των βακτηριδίων είναι $P(t) = P_0 \cdot 2^{ct}$, όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t , P_0 ο αρχικός αριθμός και c σταθερά τότε:

A) Να βρείτε τη σταθερά c και τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων.

Γ) Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων είχε διπλασιαστεί;

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ**5.20** Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες :

A) $2\ln 2 + 3\ln 3 - \ln 12 = 2\ln 3$

B) $2\ln \frac{5}{2} + \ln \frac{3}{11} - \ln \frac{40}{77} - \ln \frac{105}{32} = 0$

Γ) $\log \frac{11}{3} - 2\log \sqrt{\frac{7}{44}} + \log \frac{21}{121} = 2\log 2$

5.21 Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες

A) $\frac{\log 2 + \log 3}{\log 3,6 + 1} = \frac{1}{2}$ B) $\log\left(\eta\mu \frac{\pi}{6}\right) = -\log 2$

Γ) $\log\left(\eta\mu \frac{\pi}{6}\right) \cdot \log\left(\eta\mu \frac{\pi}{3}\right) \cdot \log\left(\eta\mu \frac{\pi}{2}\right) = 0$

5.22 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\ln \frac{1}{e} - \ln \sqrt{e} + \ln(\ln e) - \ln 2^{\log_2 e} + \log_2(\log_2 4)$$

5.23 Να αποδείξετε ότι

$$(\log 5)^3 + (\log 20)^3 + \log 8 \log 0,25 = 2$$

5.24 Αν α, β, γ διάφοροι μεταξύ τους θετικοί

αριθμοί, και ισχύει: $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta}$ να

αποδείξετε ότι $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1$.

5.25 Να αποδείξετε ότι

A) $\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 - \frac{1}{100}\right) = -2$

B) Αν $0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$ τότε $\alpha^{\log \frac{\beta}{\gamma}} \cdot \beta^{\log \frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \gamma^{\log \frac{\alpha}{\beta}} = 1$

5.26 Αν $x > 0, y > 0$ και $x^2 + y^2 = 7xy$, να

αποδείξετε ότι: $\log_\alpha \frac{x+y}{3} = \frac{1}{2}(\log_\alpha x + \log_\alpha y)$

5.27 Να αποδείξετε ότι

$$\ln 2 + \ln(2 + \sqrt{2}) + \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = 2\ln 2$$

Εξισώσεις**5.28** Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $\ln(4x - 1) = 2\ln 2 + \ln(x^2 - 1)$

B) $\frac{1}{2}\log(x+2) + \log \sqrt{x-3} = 1 + \log \sqrt{3}$

5.29 Να λύσετε τις εξισώσεις :

A) $x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6$

B) $\log_2(3^{2x-2} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

Γ) $x(\log 10 - \log 5) = \log(4^x - 12)$

5.30 Να λύσετε τις εξισώσεις

A) $\ln(3^x + 2 \cdot 5^x) - x \ln 5 = \ln 39 - \ln 15$

B) $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$

Γ) $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0$

5.31 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $\log(\log(2x^2 + x - 11)) = 0$

B) $\ln(3^x + 2) = 2x \ln 3$

5.32 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + \log 81 = x \log 3 + \log 243$

B) $2^{\log x} + 2^{5-\log x} = 12$

Γ) $27^{\frac{x+2}{3}} + 3^{2x+2} = 810$

5.33 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A)

$$(\log_2 x)^4 - 5(\log_2 x)^3 + 5(\log_2 x)^2 + 5\log_2 x = 6$$

B) $\ln(\sin x) = 0$

Γ) $\log_x 1000 = (\log_x 10)^2 + 2$

Δ) $2 \cdot (\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$



5.34 Να λυθούν οι εξισώσεις:

A) $\frac{1}{2} \log x - \log 4 = \log(x+1) - 1$

B) $\log(1-2x^2) + \log(1-x) = -\log 4$

5.35 A) Να υπολογίσετε τον αριθμό $5^{2\log_5 10-3}$

B) Αποδείξτε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$ και $x^{\log 5} = 5^{\log x}$

Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$ και

β) $5^{2\log x} = 5 + 4 \cdot x^{\log 5}$

5.36 Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{3}}$ και να λύσετε την εξίσωση

$$3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$$

5.37 Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-\ln x}}{\ln x}$$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της,

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sqrt{2}$.

5.38 Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \sqrt{1-x} + \ln x$

B) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln 2x$

Γ) $f(x) = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{e^x}$

Δ) $f(x) = \sqrt{1-\ln x}$

5.39 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $2 \cdot 4^{x^3} \cdot 16^{x^2-x} = 8$

B) $\log_{x+2}(17x^2 - 6x + 8) = 3$

5.40 Να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $\sqrt[3]{x^{1+\log_3 x^2}} = 9$

B) $2x \ln 3 = \ln(2+3^x)$

Ανισώσεις

5.41 Να βρεθεί το πρόσημο των αριθμών:

$$\log_4 3, \log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{4}{5}\right), \log_{\frac{2}{3}} 5, \log_3 \frac{1}{4}.$$

5.42 Να συγκριθούν οι αριθμοί:

A) $\log_{\frac{2}{5}} 6, \log_{\frac{2}{5}} 11$

B) $\log_6 4, \log_5 4.$

Γ) $\log(1-4x)$ και $2\log(x-2).$

5.43 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^x - 1 \leq 0$

B) $\log^2 x \geq \log x + 2$

Γ) $5 \cdot 25^x - 2 \cdot 5^{x+1} - 5^x + 2 > 0$

5.44 Να λυθούν οι ανισώσεις:

A) $\ln^2 x - \ln \frac{1}{x} - 2 > 0.$

B) $\ln(\ln(x+3)) > 0.$

5.45 Να αποδειχτεί ότι: $2 < 4\log_3 2 < 3.$

5.46 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $\ln^2 x - 5\ln x + 6 > 0$

B) $\ln^2 x > \ln x$

Γ) $(\log x^3)^2 - 2\log x^2 - 5 < 0$

Δ) $\ln(x^2 - 4) > \ln(3|x|).$

5.47 Να λυθούν οι ανισώσεις:

A) $[\log(2x-1)]^2 - \log(2x-1) - 2 \leq 0$

B) $\log[\log(\log x)] \geq 0.$

5.48 Έστω $\alpha, \beta > 0$, ώστε $(\log \beta)^2 = \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$.

Να αποδείξετε ότι: α) $\beta \geq \alpha.$ β) $\alpha \leq \sqrt{10}$

Συστήματα**5.49** Να λύσετε τα συστήματα :

$$\text{A)} \quad \begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases} \quad \text{B)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 9^{x-2y} \cdot 3^y = 81 \end{cases}$$

5.50 Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$ **5.51** Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.**5.52** A) Να δείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$ B) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log \sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$ Γ) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης: $\log[\log(x^2 + x \log \theta - 110)] = 0$ να βρείτε το $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ **5.53** Αν οι ρίζες της εξίσωσης $\log[\log(x^2 + x \log \theta + 110)] = 0$ αποτελούν λύσητου συστήματος: $\begin{cases} y^{\log z} + z^{\log y} = 20 \\ \log \sqrt{yz} = 1 \end{cases}$ νααποδείξετε ότι $\theta = 10^{-20}$ **5.54** *Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ το (Σ) : $\begin{cases} x + e^x = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 = 12 \end{cases}$ **5.55** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$ με $x, y > 0$ **5.56** Να λύσετε το σύστημα:

$$\text{A)} \quad \begin{cases} x^{\ln y} + y^{\ln x} = 2e \\ \ln \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \quad \text{B)} \quad \begin{cases} y^{\log x} = 100 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$$

A.B.**5.57** Να αποδειχθεί ότι για κάθε $0 < \alpha, \beta \neq 1$

$$\text{ισχύει: } [\log_{\alpha}(\alpha\beta)]^{-1} + [\log_{\beta}(\alpha\beta)]^{-1} = 1$$

5.58 Να αποδειχτεί ότι:

$$\log_{\alpha\beta} \theta = \left(\frac{1}{\log_{\alpha} \theta} + \frac{1}{\log_{\beta} \theta} \right)^{-1}, \text{ με } 0 < \alpha, \beta \neq 1, \theta > 0.$$

5.59 Αν $\log_{\beta} x = \alpha$ και $0 < \alpha, \beta, x \neq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{A)} \quad \log_{\frac{1}{\beta}} x = -\alpha \quad \text{B)} \quad \log_{\alpha\beta} x = \frac{\log_{\alpha} x}{1 + \log_{\alpha} \beta}.$$

5.60 Αν $0 < \alpha, \beta \neq 1$, να αποδειχτεί ότι:

$$\log_{\alpha} \left(\frac{1}{\beta^{10}} \right) \cdot \log_{\beta} \alpha^{10} + 100 = 0.$$

5.61 Αν $0 < x \neq 1$ και $0 < \alpha, \beta \neq 1$ και ισχύει:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{\alpha} x} + \frac{1}{\log_{\beta} x} = 0 \text{ να δείξετε ότι } \alpha \cdot \beta = \frac{1}{3}$$

5.62 Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $0 < \alpha, \beta, \gamma, \theta \neq 1$,

$$\text{να αποδειχτεί ότι: } \frac{2}{\log_{\beta} \theta} = \frac{1}{\log_{\alpha} \theta} + \frac{1}{\log_{\gamma} \theta}.$$

5.63 Αν $\log_{\alpha^2} \alpha = x, \log_{\alpha^3} \alpha^2 = \psi, \log_{\alpha^4} \alpha^3 = \omega$ με $0 < \alpha \neq 1$, να αποδειχτεί ότι:

$$x + \psi + \omega = x\psi\omega + \frac{20}{12}.$$

5.64 Αν $0 < \alpha \neq 1$ και

$$x = \log_{\sqrt{\alpha}} \alpha, \quad y = \log_{\alpha} \alpha^2, \quad z = \log_{\alpha^2} \alpha^4, \text{ να αποδειχτεί ότι: } x + y + z + 2 = xyz.$$



Συνδιαστικές με τριγωνομετρία

5.65 Αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να αποδείξετε ότι:

$$\ln(\eta\mu 2x) - \ln 2 = \ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)$$

5.66 Να λύσετε τις εξισώσεις

A) $2^{\sigma\upsilon\nu x} + 2 \cdot 2^{-\sigma\upsilon\nu x} = 3$ στο $[0, 2\pi]$

B) $e^{3\ln x} = 7 \cdot e^{\ln x} + 6$

5.67 Να λύσετε την εξίσωση

$$\log(\eta\mu^2 x) + \log(\sigma\upsilon\nu^2 x) = -4 \log 2, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

5.68 Να λύσετε την εξίσωση

$$4^{\eta\mu x+1} - 9 \cdot 2^{\eta\mu x} + 2 = 0$$

5.69 Να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{6} \cdot 10^{\log(\eta\mu x)} + \sqrt{2} \cdot e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} = 2 \quad \text{στο} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

5.70 Να λύσετε στο $[0, \pi]$ την εξίσωση:

$$\sigma\upsilon\nu x + e^{-x} = 2$$

5.71 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $(4x)^{\log 2 + \log \sqrt{x}} > 100$

B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(\log x)^2 - 3 \log x + 2} > 1$

5.72 Έστω ότι $f(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu \alpha}{1 + \eta\mu \alpha}\right)^x, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

A. Αποδείξτε ότι η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

B. Να αποδείξετε ότι $f(1) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Γ. Λύστε την εξίσωση $[f(x) + f(-x)] \sigma\upsilon\nu \alpha = 2$

5.73 Έστω η $f(x) = e^{x+1} + e^x - e - 1$ να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 0$ και $f(\eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$.

Συνδυαστικές με πολυώνυμα

5.74 Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 4^\alpha x^3 - 2^{\alpha+1} x^2 - 9x + 1 \quad \text{να έχει παράγοντα το } x-1$$

5.75 Δίνεται ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = (2 \ln \kappa - 1)x^4 + x^3 + (e - 1)x^2 - ex + 1 + 2\eta\mu\theta$$

με $\theta \in (0, 2\pi)$, $\kappa \in (0, +\infty)$ είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το $x-1$

A) Να βρείτε τα κ και θ

B) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

Γ) Να βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{3x} + (e-1)e^{2x} - e^{x+1}$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

5.76 Έστω ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = (\ln \alpha)x^3 + (2 - \ln \alpha)x^2 + \alpha^{\ln \beta}x + 1 \quad \text{έχει}$$

θετικούς ακέραιους συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα. Τότε

A) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B) Για $\alpha = e$, $\beta = 1$ να βρείτε τα διαστήματα που η γ.π. της συνάρτησης $f(x) = P(e^x)$ βρίσκεται κάτω από τη γ.π. της $g(x) = e^x + 3$

5.77 Δίνονται οι παραστάσεις

$$\alpha = \eta\mu^2 1005 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 1005 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 2010}{4} \quad \text{και}$$

$$\beta = (2\sigma\upsilon\nu^2 1005 - 1)^2 + \eta\mu^2 2010.$$

A. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση

$f(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$ και να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

B. Αν $\alpha = \frac{1}{4}$ και $\beta = 1$:

α. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^3 + 2) < f(3x)$

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(\sigma\upsilon\nu^2 \theta + 2\eta\mu \theta) = f(1)$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ & ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.78 Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

A) $f(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x + 3)$

B) $g(x) = \sqrt{\ln(\ln(x^2 - (2+e)x + 3e))}$.

Γ) $f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{7}\right)^x - 1}$

5.79 Να λύσετε τα συστήματα:

A) $\begin{cases} |\log x - 2| < 1 \\ \frac{\sqrt{\log x - 1}}{12 - x} > 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2\psi} = 243 \\ \log x - 2\log \psi = \log 3 \end{cases}$.

5.80 Να λυθούν οι ανισώσεις:

A) $(\log x^3)^2 - 2\log x^2 - 5 < 0$

B) $\log(x^2 - 4) > \log 3|x|$.

5.81 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $\frac{\ln(1 - \ln x)}{2^{\ln x} - 2^{\log x}} \geq 0$ B) $\frac{3 \cdot 6^x - 18^x}{\ln(x+1)} \geq 0$

Γ) $\frac{e^x - 2^x}{\ln x + 1} \geq 0$ Δ) $\frac{e^{2x+1} - e^{x-1}}{\ln(x+1) - 1} \leq 0$

E) $\frac{\ln(x+1) + \ln 2x}{2 - 4^{\log x}} \leq 0$ (mathematica.gr)

5.82 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln\left(e^x - 3 + \frac{2}{e^x}\right).$$

A Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

B Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την μορφή: $f(x) = \ln\left[(e^x - 1) \cdot (e^x - 2)\right] - x$

Γ Να βρείτε τα σημεία για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της $g(x) = x$

5.83 Δίνεται η $f(x) = \log|\log(x-3)|$. Να βρείτε:

A) Το πεδίο ορισμού της.

B) Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Γ) Τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 0$.

5.84 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

B) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Γ) Να συγκρίνετε τους $f(\ln 2)$ και $f(1)$

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = f(1)$

5.85 Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \log(\alpha \cdot 2^{x+1}) - \log(6), g(x) = \log(x \cdot 2^x), x > 0$$

Αν οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο M με τετμημένη $x_0 = 1$

A) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$

B) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(3)$ και $g(3)$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$g(x) + \ln 10 = f(x) + (\log e)^{-1}$$

Δ) Να παραστήσετε την f στο επίπεδο

5.86 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) =$

$$f(x) = \left(\frac{\ln \alpha - \ln 2}{\ln \beta - \ln \alpha}\right)^x, \text{ με } 2 < \alpha < \beta \text{ η οποία είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 < 2\beta$

B. Αν $\alpha = 4$ και $\beta = 32$ τότε:

α) να δείξετε ότι $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

β) να λύσετε την εξίσωση $f(x+2) = 9 \cdot \sqrt{3^{1-x}}$



5.87 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 3^{x-1})$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
 B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 2 \ln 2$
 Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x$

5.88 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2 \log x + 1}{2 \log x - 1}$

- A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
 B) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

5.89 Δίδεται η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = 5^{\ln x} - 3^{\ln x - 1} + 5^{\ln x - 1} - 3^{\ln x + 1}.$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

5.90 Δίνεται η $f(x) = 10 + \frac{\log(\log x)}{\log e}$. Να

βρείτε το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε το x ώστε να ισχύει $f(y^x) - f(y) = 2$.

5.91 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
 B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
 Γ) Αν $g(x) = 1$ με $x > 6$, να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

5.92 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$
 B) Να λυθεί η ανίσωση $f(\ln x) - f(1) < \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$

5.93 * Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (\sqrt{5} + 1)^x + (\sqrt{5} - 1)^x$$

- A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
 B) Αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα
 Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2$
 Δ) Λύστε τις εξισώσεις $f(x) = 12$ και $f(x) = 2$
 E) Να λύσετε την ανίσωση $f(\eta \mu^2 x) \leq 2$
 Στ) Λύστε την εξίσωση $f(\sqrt{x}) = f(x^2) + \ln x$

5.94 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2\alpha + 1}{\alpha - 1}\right)^x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- A) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση.
 B) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
 Γ) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, να βρεθεί η τιμή του πραγματικού α ώστε να ισχύει $f(1) - f(2) = 2f(3)$
 Δ) Αν $\alpha = -\frac{4}{3}$, να λυθεί η ανίσωση $f(e^{2x} + e^3) < f(e^{x+1} + e^{x+2})$

5.95 Έστω η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{1}{\ln(\alpha - 1) - 1}\right)^x$

με $x \in \mathbb{R}$

- A) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση.
 B) Να εξετάσετε τη μονοτονία της g για τις διάφορες τιμές του α
 Γ) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το $(-1, 2)$

5.96 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.

- A) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f
 B) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x \cdot (\ln x + 1)$.
 Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2f\left(\frac{1}{e}\right)$
 Δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > f(e)$

