

Γ Λυκείου

Μαθηματικά
Προσανατολισμού

2016 - 2017

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

α' μέρος

333

Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Ανάλυση

Συναρτήσεις

Όρια

Συνέχεια



Ταξη: Γ Γενικού Λυκείου
Μαθηματικά προσανατολισμού - Θετικών Σπουδών & Οικονομίας και πληροφορικής
Μέρος Α: Συναρτήσεις - Όρια – Συνέχεια
Έκδοση 16.08

Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της
Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός M.ed.
Χανιά 2016

Ιστοσελίδα: <http://users.sch.gr/mipapagr>
email: papagrigorakism@gmail.com

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1

ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.01 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

A) Βρείτε το πεδίο ορισμού της

B) Λύστε την εξίσωση $f(x) + 1 = 0$

Γ) Λύστε την ανίσωση $f(x) < 0$

Δ) Δείξτε ότι $f\left(\sqrt{\frac{1}{2\sin^2 x - 1}}\right) + f(\sqrt{2}) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

1.02 Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Να αποδείξετε ότι $f(x)f(-x) = 1$

1.03 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$.

Δείξτε ότι $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$

1.04 Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού

το $\mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Υπολογίστε το $f(x) + f(1-x)$

και το $f\left(\frac{1}{2004}\right) + f\left(\frac{2}{2004}\right) + \dots + f\left(\frac{2002}{2004}\right) + f\left(\frac{2003}{2004}\right)$

1.05 Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ευθεία

$y = \frac{\lambda - 2}{\lambda}x + \frac{3(2 - \lambda)}{\lambda}$ να είναι:

A) παράλληλη στην ευθεία $2y = -x + 5$

B) να είναι κάθετη στην ευθεία $y = -4x + 1$

Γ) να διέρχεται από το σημείο $(3, -1)$

Δ) να είναι κατακόρυφη

E) να είναι οριζόντια

Στ) να σχηματίζει γωνία 135° με τον $x'x$

1.01 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συναρτήσεις f και g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f(x)g(y) = x + y$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

1.02 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι

συνάρτηση η $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 5, & x \leq \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ x^2 + 4, & 2 - \lambda \leq x \end{cases}$

1.03 Ένα όχημα όταν ταξιδεύει με ταχύτητα v km/h, καταναλώνει την ώρα $6 + 0,0001v^3$ λίτρα καύσιμα. Να βρείτε τη συνολική ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται για να διανύσει απόσταση 1000 km με σταθερή ταχύτητα v

1.04 Ένα κυλινδρικό δοχείο έχει χωρητικότητα 1 lt. Να εκφράσετε το κόστος κατασκευής του δοχείου συναρτήσει της ακτίνας της βάσης του, αν το κόστος του ενός cm^3 μετάλλου είναι 0,02 euro

1.05 Ένα σύρμα μήκους 10 κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχα. Να εκφράσετε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει του μήκους x του ενός από τα δύο τμήματα

1.06 Στο διπλανό

σχήμα να βρείτε

συναρτήσει του x ,

τη συνάρτηση που

περιγράφει το

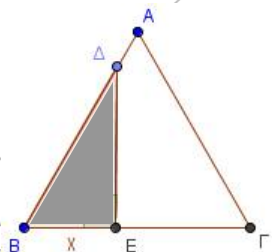
εμβαδόν της

γραμμοσκιασμένης περιοχής που δημιουργείται

από τη ΔΕ και τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ

για τις διάφορες θέσεις του Ε πάνω στη ΒΓ. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς

1 η $BE = x$ και $DE \perp BE$



Γραφική Παράσταση

1.07 Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |\ln|x||$ και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 10^{-6}$

1.08 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων

$$f(x) = \sqrt{|x|} \quad g(x) = -\sqrt{|x|} + 1 \quad h(x) = \sqrt{1-x}$$

$$k(x) = \frac{1}{|x|} \quad m(x) = \frac{1}{x-1} \quad n(x) = \frac{1}{|x+1|}$$

1.09 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \ln(-x), \quad x < 0 \quad g(x) = -\ln(-x), \quad x < 0$$

$$k(x) = \ln|x| \quad m(x) = -|\ln x| \quad t(x) = -\ln|x|$$

1.10 Να παραστήσετε γραφικά τις

συναρτήσεις A) $f(x) = \eta\mu x + |\eta\mu x|, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

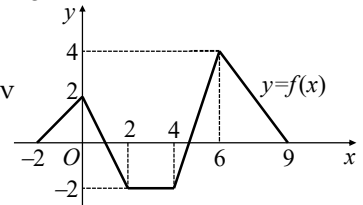
B) $t(x) = 2 - \eta\mu(2x - \pi)$ Γ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$

1.11 Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

A) $f(x) = x\sqrt{x^2}$ B) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1 \\ \sqrt{3+x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Γ) $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \\ (x-1)^2, & x > e \end{cases}$ Δ) $h(x) = \begin{cases} 2x^2 & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x} & |x| > 1 \end{cases}$

1.12 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης του σχήματος



1.13 Να παραστήσετε γραφικά κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$g(x) = e^{\ln x} \quad h(x) = \sqrt{x^2} \quad f(x) = \ln e^x$$

1.14 Παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x) = -\sigma\upsilon\nu(x + \pi) \quad g(x) = \pi + \sigma\upsilon\nu(x - \pi)$$

$$\rho(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \quad t(x) = 2 - \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Κοινά Σημεία-Σχετική Θέση

1.15 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^2(x) - 2f(x) - 2 = x(x-1), \quad x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$

1.16 Να βρεθούν τα διαστήματα όπου η C_f είναι πάνω από τη C_g όταν:

A) $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ και $g(x) = 2^{x+2} - 8$

B) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ -1-2x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = x+2$

1.17 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) + 9 = g(x) + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η σχετική θέση των C_f, C_g

1.18 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x^2 + 2) + f(3x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο τουλάχιστον σημεία

1.19 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - \kappa$ κάθε $x \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο κ ώστε οι γραφικές παραστάσεις τους, να τέμνονται στην ευθεία $x = 1$ καθώς και τα διαστήματα όπου η C_f είναι πάνω από την C_g

1.20 Για τη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $h^3(x) - h^2(x) + 2h(x) = x^2 - x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$



Πεδίο ορισμού1.21 Βρείτε τα πεδία ορισμού των

$$\text{συναρτήσεων } f(x) = x \cdot \ln(x^2) \quad \varphi(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}-3x+2\sqrt{x}} \quad t(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}$$

$$h(x) = \frac{x-2}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \quad k(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$$

1.22 Βρείτε τα πεδία ορισμού των :

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{2\eta\mu x + 1} \quad g(x) = \frac{2\varepsilon\varphi x}{\eta\mu x - \eta\mu 2x}$$

$$t(x) = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x + 3} \quad \varphi(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{2x} - e^{-2x}}$$

$$r(x) = \frac{\sqrt{e-x}}{(2x-1)\ln x}, \quad m(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$$

$$p(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x} \quad q(x) = \sqrt{\ln(1-x^2)}$$

1.23 Βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \ln(\alpha x^2 + 4x + 1) \text{ είναι το } \mathbb{R}$$

1.24 Βρείτε τα πεδία ορισμού των

συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27} \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{4-x^2}}$$

$$k(x) = \sqrt{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x + 1} \quad m(x) = \sqrt{(e^x - 1)\ln(x-1)}$$

$$t(x) = \frac{1}{x-1} \ln|x| \quad r(x) = \frac{1}{x+1} \ln(-x)$$

$$p(x) = \sqrt{x^3 - x^2} \quad q(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$$

1.25 Βρείτε τα πεδία ορισμού των

συναρτήσεων

$$k(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{2x} - e^{-2x}}, \quad t(x) = \frac{x}{x-1} + \ln x$$

$$r(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{x - x^2}}, \quad k(x) = \frac{\sqrt{3-|x-2|}}{2x-4-|x-1|}$$

$$m(x) = \sqrt{\ln(x-1)} \quad f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$$

$$r(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad t(x) = \frac{1}{\varepsilon\varphi x - 1}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Σύνολο Τιμών1.26 Βρείτε τα σύνολα τιμών των

$$\text{συναρτήσεων: A) } f(x) = e^{1-x} + 3 \quad x \in [-1, 2]$$

$$\text{B) } f(x) = -3\ln(1-2x) - 1, \quad x \in [-2, -1/2]$$

$$\text{Γ) } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

1.27 Βρείτε τα σύνολα τιμών των

$$\text{συναρτήσεων: A) } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad x \in [2, 5]$$

$$\text{B) } f(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2 - 4} + 2} \quad x \in (-\infty, -2]$$

1.28 Βρείτε τα σύνολα τιμών των

συναρτήσεων:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{αν } 3 \leq x < 5 \end{cases}, \quad g(x) = 3 + 2|x-1|$$

1.29 Βρείτε τα σύνολα τιμών των

συναρτήσεων

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x} - 1\right), \quad g(x) = \frac{5+e^x}{5-e^{x+1}} \quad t(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$r(x) = x^2 - 4x + 3 \quad \text{αν } x \in [2, 5]$$

1.30Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων

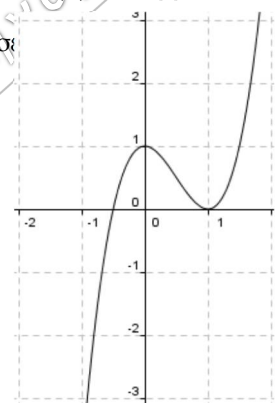
$$\text{A) } f(x) = -2$$

$$\text{B) } f(x) = 0$$

$$\text{Γ) } f(x) = 1$$

$$\text{Δ) } f(x) = 2$$

$$\text{E) } f(x) = \alpha, \quad \alpha \in [-3, 3]$$



Ισότητα Συναρτήσεων

1.31 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

A) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ίσες με τη συνάρτηση f .

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$f_3(x) = (\sqrt{x+1})^2 \quad f_4(x) = x\left(\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$f_5(x) = \ln e^{x+1} \quad f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$$

B) Βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

1.32 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι

συναρτήσεις $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\eta \mu x}$ και $g(x) = \frac{\eta \mu x}{1 - \sin x}$

1.33 Εξετάστε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = (1 + \sqrt{2})^x - (\sqrt{2} - 1)^{-x} \quad \text{και} \quad g(x) = 0$$

1.34 Εξετάστε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

1.35 Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις στις παρακάτω περιπτώσεις.

A) $f(x) = e^{\ln x}$ και $g(x) = e^{\ln x}$

B) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 2\right)$ και $g(x) = \ln(1 - 2x) - \ln x$

1.36 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες οι

συναρτήσεις $f(x) = \frac{-\lambda x^3 + 3x - 4}{x^2 - \lambda x + 4}$ και $g(x) = -\lambda x - 1$

1.37 Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2(\eta \mu x \cdot f(x) - \sigma \nu x \cdot g(x))$$

Πράξεις Συναρτήσεων

1.38 Βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$ και $\frac{g}{f}$ όταν

$$f(x) = \sqrt{4 - |x|} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$$

1.39 Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f + g$ και $\frac{g}{f}$

αν $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$

1.40 Για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{ότι } g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η C_g τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy

1.41 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

που ικανοποιούν την σχέση: $f^2(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

1.42 Να αποδείξετε ότι $f = g$, αν ισχύει ότι

$$(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

1.43 Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{αν ισχύει ότι } f^2(x) - 2f(x) = x^2 \quad \text{για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1.44 Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις τις

συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\text{ότι } (f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0$$

1.45 Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

που ικανοποιούν την σχέση: $|f(x)| = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1.46 Βρείτε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις

οποίες ισχύει ότι $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1.47 Να βρείτε τις συναρτήσεις f αν για κάθε

$$x, y \in \mathbb{R} \quad \text{ισχύει ότι } f(x)f(y) + 1 = f(x) + f(y) + xy$$



Άρτιες Περιττές

1.48 Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 2x-3 & x > 0 \end{cases}$$

1.49 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x[f(x) + f(-x) + 2] + 2f(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και να βρείτε τον τύπο της.

1.50 ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- A) $f(0) = 0$
 B) η f είναι άρτια
 Γ) $f(|x|) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1.51 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει ότι $f(x)(x^2 + 2) \leq 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της

1.52 Για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f^2(x) = f(x)f(-x)$ και $g^2(x) = -g(x)g(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια και η g περιττή

1.53 Αν ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι η f είναι περιττή

1.54 Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια και περιττή τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1.55 Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$ είναι άρτια

1.56 Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $A_f = A_g \subseteq \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: Αν οι f, g είναι περιττές τότε η $f+g$ είναι περιττή ενώ οι $f \cdot g, f/g, (g(x) \neq 0)$ είναι άρτιες

Σύνθεση Συναρτήσεων

1.57 Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων (μη ταυτοτικών) συναρτήσεων, αν:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1 + \eta \mu x) & f(x) &= \text{συν} \sqrt{1+x^2} \\ f(x) &= (\ln(x+1) - \ln x)^2 & f(x) &= \eta \mu^4(3x+5) \\ f(x) &= \ln(x^2+1) - \ln(x^2+3) & f(x) &= x^x \end{aligned}$$

1.58 Αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}, g(x) = 3\sqrt{x}-2$ να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$

1.59 Να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$ αν

A) $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$
 B) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν } x \in (0,2) \\ x+1 & \text{αν } x \in [2,4) \end{cases}, g(x) = |x-1|$

1.60 Αν $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ να αποδείξετε ότι $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1.61 Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h με $h(x) = f(x^2 - 4) + f(x+1)$ αν $D_f = [0, 5]$

1.62 Να βρεθεί ο τύπος μιας συνάρτησης f σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

- A) Αν $f(\ln(2x)) = x+3, \quad \forall x > e,$
 B) Αν $(f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$ και $g(x) = x+1$
 Γ) Αν $(g \circ f)(x) = \text{συν}^2 x$ και $g(x) = x^2$

1.63 Να προσδιορισθεί ο τύπος της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $(1-x)f(x-1) + f(1-x) + x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

1.64 Έστω συναρτήσεις $f: A_f \rightarrow \mathbb{R}, g: A_g \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A_f) \subseteq A_g$. Να αποδειχτεί ότι:
Α) Αν η f είναι άρτια, τότε η $g \circ f$ είναι άρτια.
Β) Αν η f είναι περιοδική, τότε και η $g \circ f$ είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

1.65 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + f(2-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

1.66 Βρείτε τη συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$ για κάθε $x > 0$.

1.67 Να βρείτε τη συνάρτηση f αν ισχύει ότι $f(x) + x \leq x^2 + 1 \leq f(x+1) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1.68 Αν $f(f(x)) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f παίρνει την τιμή 2014

1.69 Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $f(1)$

1.70 Να προσδιορισθεί ο τύπος της f :
Α) Αν $(1-x)f(x-1) + f(1-x) + x = 1, x \in \mathbb{R}$
Β) Αν ισχύει $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$

1.71 Αν $f(x) = \frac{ax+3}{2-x}$ να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}$, αν ισχύει: $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq 2$

1.72 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(f(x)) = 2x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

1.73 Να βρεθεί συνάρτηση $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ αν $f(2004) = 1$ και για κάθε $x, y \neq 0$ ισχύει $f(x)f(y) + f\left(\frac{2004}{x}\right)f\left(\frac{2004}{y}\right) = 2f(xy),$

1.74 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) \cdot e^{f(y)-1}, x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{f(x)-1}$ και $f(x) = e^{1-f(-x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την f

1.75 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $e^{x+y} \leq f(x)f(y) \leq f(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1, f(-x) = \frac{1}{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της f

1.76 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x^2 + 2) + f(3x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε δύο τουλάχιστον σημεία.

1.77 Για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) - f(y) \leq \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ και $f(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x, x > 0$

1.78 Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

1.79 ** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία υπάρχουν α, β πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha f(x) + \beta f(-x) = -x - 3$ για κάθε $x \in (-\infty, 1]$ και $\alpha f(x) + \beta f(-x) = x + 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Αν $f(3) = 4, f(-3) = -2$, να βρείτε την $f(x)$

(www.mathematica.gr)



ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1.80 Δείξτε τη μονοτονία των συναρτήσεων

$$f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{5 - x}} \quad g(x) = \ln(e^{-x} - x)$$

$$t(x) = (x-1)^3 - 2 \quad m(x) = e^{\sqrt{4-x}} - 3$$

$$r(x) = \frac{x+3}{x-2} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \ln x & \text{αν } 0 < x < 2 \\ 1-2x & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

1.81 Βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων

$$k(x) = \ln|x|, \quad g(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|} \quad m(x) = |\ln x|$$

1.82 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

$$\text{γνησίως αύξουσα. Δείξτε ότι η } g(x) = \frac{1}{f(x)} + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

1.83 Η συνάρτηση f είναι γνήσια μονότονη στο $\mathbb{R}$ και διέρχεται από τα σημεία $(\alpha, \alpha^2 + 1)$ και $(\alpha + 1, 2\alpha)$ με $\alpha > 1$. Αποδείξτε τη μονοτονία της

1.84 Αν $f(x) = x^3 + 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

A) Δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την ανίσωση

$$(x-1)^3 + 3(x-1) + 1 > (x^2-1)^3 + 3(x^2-1) + 1$$

1.85 Αν $f(x) = x^5 - \frac{3}{x} + \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$, τότε:

Δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και λύστε

$$\text{την ανίσωση } (x^3 + 2)^5 + \sqrt{x^3 + 2} < \frac{3}{(x^3 + 2)} - 1$$

1.86 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = 2^x + x \text{ είναι γνησίως αύξουσα και να}$$

λύσετε την ανίσωση $2^{3x-x^2} - 2^{6-2x} > x^2 - 5x + 6$

1.87 A) Αν $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ τότε

να αποδειχθεί ότι η f είναι γν. φθίνουσα.

B) Να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

1.88 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την

$$\text{ιδιότητα } f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ για κάθε } x, y > 0.$$

Επιπλέον ισχύει ότι « $\alpha > 1 \Leftrightarrow f(\alpha) > 0$ ». Να

δείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$

1.89 Έστω συναρτήσεις f, g με κοινό σύνολο

ορισμού το $[\alpha, \beta]$, σύνολο τιμών το $[\alpha, \beta]$ ώστε

$$g(x) > f(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ και η } f \text{ είναι γνήσια}$$

φθίνουσα. Δείξτε ότι $f(g(x)) < g(f(x)) \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$

1.90 Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ περιττή και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$

1.91 Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνήσια φθίνουσα με την ιδιότητα $2f^2(x^2) - 2xf(6x-8) \leq 4-3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1.92 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

$$\text{για την οποία ισχύει } \frac{1}{f(x)} - f(x) + 1 = x^3 + x \text{ για}$$

κάθε $x \in (0, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι γνήσια

φθίνουσα

1.93 * Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

$$\text{και για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι: } f\left(\frac{2x+3f(x)}{5}\right) = x,$$

να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1.94 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να λυθεί η ανίσωση

$$f(x^5 + x^2 - 1) - f(1 - x + x^2) < 2 - x - x^5$$

1.95 Να λύσετε τις ανισώσεις:

A) $\ln x > 1 - x$ B) $e^x > \frac{1-x}{1+x}$

1.96 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sqrt{5^x + 1}$

A) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

B) Να λυθεί η ανίσωση

$$(3x+18)^3 - (7x+12)^3 < \frac{5^{7x+12} - 5^{3x+18}}{\sqrt{5^{7x+12} + 1} + \sqrt{5^{3x+18} + 1}} \dots$$

1.97 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι γνήσια μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(-1, -1)$ και $(1, 2)$

A) Να αποδείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα

B) Λύστε την ανίσωση $f(2x-1) > -1$

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2) = 2$

Πόσες ρίζες μπορεί να έχει η εξίσωση $f(x) = 2014$

1.98 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + 3x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1.99 Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι:

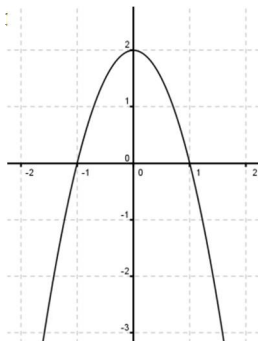
συνάρτηση του σχήματος,

να βρείτε την μονοτονία

της συνάρτησης

$g(x) = f(f(x))$ στο $[-1, 0]$

(mathematica.gr)



1.100 Δίνεται ότι η συνάρτηση f ορισμένη και είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{x}) + f(x^2) = f(x) + f(x^3)$

1.101 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(h(x))$ όπου

$h(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Να αποδείξετε ότι η h είναι γνήσια

φθίνουσα στο $(-1, 1)$ και να λύσετε την εξίσωση

$h(e^x) + h(e^{2x}) = h(e^{11x}) + h(e^{111x})$ στο $(-1, 1)$

1.102 *Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την

οποία ισχύει: $f(x) = \frac{3e^x}{2 + f^2(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln f(x) > 0$.

1.103 Αν $f(x) = \ln x + x - 1$ να λύσετε τις

ανισώσεις: A) $2x + e^x < \ln(1-x) + 1$

B) $\ln\left(\frac{2x^2 - x + 3}{3x + x^2}\right) < 4x - x^2 - 3$

1.104 A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$f(x) = \ln x + x + 1$ είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λυθεί η ανίσωση $2\sqrt{x} > 2x + \ln x$

1.105 Αν $f(x) = x + \ln x$, να λύσετε τις

ανισώσεις:

A) $f(x^2 + 1) < 2x + \ln(2x - 2) - 2$

B) $x^3 + 2\ln x < x$

Γ) $\ln\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right) + 1 > 2\sqrt{x} - x$

1.106 * Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για

την οποία ισχύει ότι $e^{f(x)} + f(x) = 1 - e^x$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ Να λυθεί η ανίσωση

$f(x^2 + 2x) < f(f(x+2))$



Ακρότατα

1.107 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

$$g(x) = 4 - |x - 2| \quad t(x) = 4 - (x^3 - 4x)^4$$

$$r(x) = x^2 - 4x + 5 \quad f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2x - 1$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x+1 & \text{αν } x \leq 2 \\ 3x-1 & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

1.108 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

A) $f(x) = 1 - 2\ln(x-1), \quad x \in [2, 3]$

B) $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2x - 1$

1.109 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

A) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

B) $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$

1.110 Να βρεθούν τα ακρότατα κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

A) $f(x) = (2e^x + x)^2 - 4(2e^x + x) + 5$

B) $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$

1.111 A) Να δείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$ αν $x > 0$

B. Έστω $f(x) = (9 + \sqrt{80})^x + (9 - \sqrt{80})^x$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο

1.112 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = 1$

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{2f(x)}{1+f^2(x)} \text{ έχει μέγιστη τιμή το } 1.$$

B) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της

$$\text{συνάρτησης } \Phi(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}} + 2013$$

1.113 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda + 1)x + 2$ να έχει ελάχιστο το -2

1.114 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $((f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot f(1-x) + g(x) \cdot g(1-x)$ έχει μέγιστο το οποίο και να βρεθεί (mathematica)

1.115 Αν $f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}$, τότε

A) Να βρείτε το πρόσημο του $f(x)$

B) Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\alpha) f(|2x-3|) > 0 \quad \beta) f(f(x)+x-2) < 0$$

1.116 Αν $f(x) = x^2 - 6x + 8, \quad x \in \mathbb{R}$, τότε

A) Να βρείτε το πρόσημο του $f(x)$

B) Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\alpha) f(|2x-3|) > 0 \quad \beta) f(f(x)+x-2) < 0$$

1.117 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 1}$

A) Αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστο το -3

B) Να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(x^3 - \frac{3}{2}\right) + f\left(x^4 - 3x + \frac{3}{2}\right) + 6 = 0$$

Γ) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$f(\alpha - \beta - 1) + f(2\alpha + \beta + 1) + 6 = 0$$

1.118 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5\sqrt[3]{x} + e^{2x}$.

A) Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

B) Δείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση

$$5\sqrt[3]{x^2 + 2x + 5} + e^{2x^2 + 4x + 10} < 5\sqrt[3]{x^2 + 4x + 4} + e^{2x^2 + 8x + 8}$$

Δ) Να λύσετε την εξίσωση

$$5\sqrt[3]{\alpha + \beta - 1} + e^{2\alpha + 2\beta - 2} + 5\sqrt[3]{\alpha - \beta + 1} + e^{2\alpha - 2\beta + 2} - 2 = 0$$

Συνάρτηση 1:1

1.119 Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις, είναι 1-1 και ποιες όχι:

A) $f(x) = 3e^{x-1} + 2$ B) $f(x) = e^x + x - 1$

Γ) $f(x) = x \ln x + 2$ Δ) $f(x) = x^5 + x^3 + x$

1.120 Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $(f \circ f)(x) + 3f(x) - x^{2015} = 0, x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι είναι 1-1

1.121 Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) = 2x^2 - 3x + 2$, για κάθε $x \in [1, +\infty)$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

1.122 Έστω ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1. Αποδείξτε ότι η $F(x) = f^3(x) + 2f(x) - 3$ είναι 1-1.

1.123 Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι 1-1 η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{αν } x < 0 \\ x + \lambda - 8 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

1.124 Να αποδειχτεί ότι δεν είναι 1-1 η συνάρτηση f αν ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1.125 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - x - \ln x$

- A) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f
 B) Να λύσετε την εξίσωση $1 - x - \ln x = 0$
 Γ) Να λύσετε την ανίσωση $x + \ln x > 1$

1.126 Να λύσετε τις εξισώσεις.

A) $e^{x-1} + \ln x = 2 - x$ B) $x^7 + 2x^5 + 3x^3 + x = 6$

Γ) $e^{-x^2+x} - e^{2x-1} = x^2 + x - 1$ Δ) $6^x + 8^x = 10^x$

1.127 Να λύσετε την εξίσωση

$$\log(\lambda^2 + 1) - \log|5\lambda - 5| = (5\lambda - 5)^4 - (\lambda^2 + 1)^4$$

1.128 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = x^2 - 5x + 9$ και $g(x) = x^2 - xf(x) + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 3$ και ότι η g δεν είναι 1-1

1.129 Δίνεται η $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x > 0$

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

B) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right] \text{ στο } [2, +\infty)$$

1.130 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι αν $B \subseteq f(A)$ και η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε η g είναι 1-1

1.131 Αν είναι $x + e^x = y + e^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ τότε

A) Να αποδείξετε ότι $x = y$.

B) Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = e^{3x} - e^{x^2+2}$

1.132 Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $e^a - e^b = \beta^3 - \alpha^3$ τότε $\alpha = \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1.133 Αν $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} - 2^x$ τότε:

Να λύσετε την εξίσωση $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x$

1.134 Αν $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$ τότε

A) Να δείξετε ότι είναι 1-1

B) Να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{x^2-x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x+3)^3 + 3$$

1.135 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$2f^5(x) + f(x) = 3x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A) Αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

B) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + x - 1) < 1$



1.136 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(x) + 2e^{f(x)} = x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- A) Αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα
 B) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = x + 2e^x$
 Γ) Να υπολογίσετε το $f(1)$
 Δ) Να βρείτε το πρόσημο της f

1.137 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, παίρνει θετικές τιμές και ισχύει

$$\frac{1}{f(x)} - 2f^3(x) + 1 = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα και να βρείτε το $f(0)$
 B) Λύστε την ανίσωση $f(x^5 + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 3) > 1$

1.138 Έστω συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ότι $f(x) + e^{f(x)} = x^3 + e^{x^3}$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και ότι $f(x) = x^3$

1.139 A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = x^5 + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνήσια αύξουσα.

B) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $h(x) = 3$ και να υπολογίσετε το $f(3)$

1.140 Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $f(1 + f(x)) = 2x - 6 + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- A. Δίξτε ότι η f είναι 1-1 και ότι $f(3) = 2$.
 B Να λύσετε την εξίσωση:
 $f(1 + 2f(x^2 + x + 1)) = f(1 + f(5)) - 4$ (Απολλώνιος 1)

1.141 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με την

$$\text{ιδιότητα: } f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ για κάθε } x, y > 0 \text{ Αν η}$$

εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε

- A) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
 B) Να λύσετε την εξίσωση
 $f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1)$

1.142 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(e^x + x) + 8f(x + 1) = 2008 - e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα να λύσετε: A Την εξίσωση: $f(x) = 223$

B Την ανίσωση $f(e^x - 2 + e^{-x}) \leq 223$.

1.143 Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

$$\text{γνωστό ότι } e^{f(x)} + f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- A) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
 B) Να βρείτε το $f(1)$.
 Γ) Λύστε την εξίσωση $e^{x-4} - e^{2x+1} = x + 5$

1.144 *** Δίνεται η 1-1 συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) + f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ώστε να ισχύει $4f(x_1) - 2f(x_2) < 1$.

1.145 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(e^{f(x)}) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

1.146 Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνήσια αύξουσα και ισχύει ότι $f(e^{f(x)}) = \ln x$. Να βρεθεί ο τύπος της f .

Αντίστροφη

1.147 Βρείτε τις αντίστροφες των συναρτήσεων

A) $f(x) = x^3 + 1$ B) $f(x) = 5 + \sqrt{x-2}$

Γ) $f(x) = \log \sqrt{3-10^x}$ Δ) $f(x) = \ln(2+e^x) - x$

E) $f(x) = 2 + (x-3)^2, x < 3$

1.148 Βρείτε τις αντίστροφες των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ B) $f(x) = \frac{3+e^{3x}}{3-e^{3x}}$

Γ) $f(x) = \log \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ Δ) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

E) $f(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x < 0 \\ 9x^2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

Στ) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ Ζ) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

1.149 Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$ C_f αν $f(x) = \sqrt{1-x}, x \in [-1, 0]$

1.150 Έστω συνάρτηση f ώστε να ισχύει $f(f(f(x))) = 2x - 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμη ότι $f(1) = 3, f(3) = 9$. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 9$.

1.151 Έστω η f με $f(x) = 2x^3 + x - 2$.

A) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

Γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(5x+6) < 1$.

1.152 Έστω $f(x) = x + \ln x$

A) Να βρείτε την τιμή $f^{-1}(e+1)$

B) Λύστε την εξίσωση $\ln \frac{2\lambda^2+1}{\lambda^2+5} = 4 - \lambda^2$

1.153 Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, υπάρχουν οι συναρτήσεις $(f \circ g)^{-1}$ και $(g \circ f)^{-1}$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν και οι g^{-1} και f^{-1}

1.154 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 2$

A) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται

B) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 12, f^{-1}(x) = -2$

Γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες και με την ευθεία $y = x$

Δ) Να λύσετε την την εξίσωση $(2 - \eta \mu^2 x)^3 = \eta \mu^3 x + \eta \mu^2 x + \eta \mu x - 2$ και τις ανισώσεις: $f^{-1}(x) < 3$, και $f^{-1}(x+1) \geq x+5$

1.155 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^3(x) + 3f(x) - x = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε η f αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} καθώς και τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

1.156 Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμες έχουν σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει $f \circ g = g \circ f$, να δείξετε ότι $f \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f$

1.157 Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την αντίστροφή της αυτό θα βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$

1.158 Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^5 + x - 1$. Να αποδείξετε ότι

A) $f(\sin \frac{\pi}{11}) < f(\sin \frac{\pi}{13})$

B) Να λυθεί η εξίσωση $x = f^{-1}(x)$

1.159 Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{5x+2}{2x-5}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$



ΓΕΝΙΚΕΣ

1.160 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\underbrace{f(f(\dots(x)\dots))}_{n \text{ όροι}} = 2x - 1$ να βρείτε το $f(1)$

1.161 Δίνεται η 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$, $x, y \in f(\mathbb{R})$

1.162 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} - 1$. Να βρείτε την f και την αντίστροφη της.

1.163 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Δίνεται επιπλέον ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η πρόταση: « $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ ».

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή και γνήσια αύξουσα

B) Να λύσετε την εξίσωση $f(4x^2 + 2005) + f(4x^2 - 2005) = 2f(8x - 4)$

1.164 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ και $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1} = g$

B) Να ορισθεί η συνάρτηση $g \circ f$

Γ) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

Δ) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} είναι περιττές συναρτήσεις

E) Να αποδείξετε ότι γενικά ισχύει: Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και 1-1 τότε και η συνάρτηση f^{-1} είναι περιττή.

Στ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x} + g(\sqrt{x}) = x^2 + g(x^2)$

1.165 A) Αν f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε $f(f(x_0)) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^3 - 1}{3}$ αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} καθώς και τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

1.166 Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, ώστε $f(\xi) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

A) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$ B) $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ και $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1.167 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνήσια μονότονη, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(5,9)$ και $B(2,3)$ τότε:

- A) Να αποδείξετε ότι η f είναι γν. αύξουσα
 B) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(3+f^{-1}(x^2+2x))=9$ και $f^{-1}\left(x-\ln\frac{2}{x}+1\right)=2$
 Γ) Να λύσετε τις ανισώσεις ανίσωση $f^2(x) \leq 12f(x)-27$ και $f(x+\ln x+4) > 9$

1.168 Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}$

1.169 Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με $f(1)=1$ και η συνάρτηση $g(x)=xf(x)-1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

- A) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 B) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - \ln(e \cdot x) = 0$
 Γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(x^7) = f(x^5) + f(x^9)$

1.170 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) + e^{f(x)} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- A) Να δείξετε ότι η f είναι γν.αύξουσα.
 B) Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη ρ , να δείξετε ότι $\rho = 1$
 Γ) Να δείξετε ότι: $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Δ) Να λυθεί η ανίσωση: $f(2x^2-1) + e^{f(x)} < x$.

1.171 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

- A) Αν $f(A) \subseteq B$ και η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε η f είναι 1-1
 B) Αν $B \subseteq f(A)$ και η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε η g είναι 1-1
 Γ) Αν $f(A) = B$ και η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε κάθε μια από τις f και g είναι 1-1

1.172 A) Δίνεται ότι οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) αν η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) αν η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

B) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x}$ και $g(x) = -\ln(x-1)$

α) Να βρείτε τη $g \circ f$ και να δείχτεί ότι $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να λύσετε την ανισότητα $(e^{x^2-1}+1)e^{-x-1} < (e^{-x-1}+1)e^{x^2-1}$



ΟΡΙΑ

ΟΡΙΑ ΣΤΟ X_0

1.173 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{3}{x^3 - 1} \right)$

B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{vx^{v+1} - (v+1)x + 1}{x - 1} \quad \text{με } v \in \mathbb{N}^*$

1.174 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{6-x} - \sqrt{x+6}}{x+2}$

B) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - x^2}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{2x\sqrt{x} - 6x + 3\sqrt{x} - 9}$

1.175 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x} - 4x^2 + 3}{x - 1}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - |x + 1|}{\sqrt{-x} - 1}, \Delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1| + x - 1}{|2 - x| - 1}$

1.176 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2| + |x+2|}{4x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

1.177 Να υπολογίσετε τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 3\eta\mu x}{x + 2\eta\mu x} \quad \text{B) } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin \theta} - \cot \theta \right)$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - 2\sin^2 x + 2}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

1.178 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \eta\mu \left(1 - \frac{1}{x} \right)$

B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \eta\mu \left(\pi \frac{x-1}{2} \right)$

1.179 Να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+1} - 2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \eta\mu x}{\sin x \sqrt{1 - \sin x}}$

1.180 Να υπολογίσετε τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\sqrt{x+3} - 2)}{\eta\mu(x-1)} \quad \text{B) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu^2 x)}{x^2}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(1 - \sin x)}{x^2}$

1.181 Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{x^2 + x}$

1.182 Να βρεθεί ο $v \in \mathbb{N}$ αν

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 2x + \dots + \eta\mu vx}{x} = 28$

1.183 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 5}{f(x) - 2} = 0$ να αποδείξετε ότι

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5$

1.184 Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ να βρείτε το

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(3x) - f(-x) \eta\mu 2x}{3x^2 - \eta\mu^2 x}$

1.185 Αν $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 7$, να βρείτε το

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) |2 - g(x)| - g(x) + x^2 + x}{x^2 - 4}$

1.186 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$ αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{g(x)}{\sqrt{x}-1} \right] = 3$$

1.187 Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

1.188 Η συνάρτηση f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) + 2x - 5) = 4$. Να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

1.189 Αν $\lim_{x \rightarrow 3} (12f(x) - 4f^2(x)) = 9$, να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

1.190 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+4}{x-2} = 1$ και ισχύει

$$f(x) = f(1-x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{βρείτε το} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

1.191 Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [g(x)]$,
αν $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)] = 5$ και $\lim_{x \rightarrow 1} [2f(x) + g(x)] = 4$

1.192 Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+x}{x-1} = 2, \quad \text{να βρείτε τα όρια}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{f^2(x)-x^2} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}$$

1.193 Αν $f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{να αποδείξετε ότι} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

1.194 Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή με

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \text{να βρεθεί το} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [f(x-1) - f(1-x)]$$

1.195 Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x)+x|}{x-3} = 2$, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

1.196 Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

A) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(vx)}{x} = 3v$, $v \neq 0$

B) Αν $f^2(vx) + \eta \mu^2 x \leq 2f(vx) \cdot \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $3v = 1$

1.197 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

B) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, να αποδείξετε

$$\text{ότι} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{για κάθε} \quad a \in \mathbb{R}$$

Γ) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu(x)) - \eta \mu(f(x))}{x} = 0$$

1.198 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + 2x^2 f(x) = 3\eta \mu^3 x$, για κάθε

$$x \in \mathbb{R}^*. \quad \text{Αν} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε να αποδείξετε}$$

ότι $\alpha = 1$ και να βρείτε τα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2}.$$

1.199 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με την

$$\text{ιδιότητα:} \quad f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x, y \neq 0$$

A) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 1 να δείξετε ότι η f είναι 1-1

B) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \sqrt{2}$ να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(\eta \mu x) - f(\sigma \nu x)}{\eta \mu x - \sigma \nu x}$$

1.200 Έστω συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(4x)}{f(x)} = 3$. Να

$$\text{υπολογιστεί το} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(64x)}{f(x)} = 3$$



ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΧΟ**1.201** Να βρεθούν(αν υπάρχουν)τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-x}{x-3\sqrt{x}+2}$ B) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{(x-1)^3}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5-2x}{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-4}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{5-x^2}{\eta\mu x}$

1.202 Να βρεθούν(αν υπάρχουν)τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-2|x|+1}$ B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{x+16}-4}{x|x|} \right)$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2-2}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

E) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+5}{|x+1|} - \frac{x+3}{(x+1)^2} \right)$ Ζ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3-2x^2}{1-\sigma\upsilon\nu^3 x}$

1.203 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{|x-2|} = -\infty$ βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

1.204 Αν $\lim_{x \rightarrow -1} [(x^2-4)f(x)-3x+2] = +\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

1.205 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+3}-5}{f(x)} = +\infty$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

1.206 Αν $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -3$ να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x)+2x|+g(x)-6+4x}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1}$$

Όρια Παραμετρικών Συναρτήσεων στο X_0

1.207 Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta x - 2}{x^2 - 1} & , x < -1 \\ \frac{\alpha x^2 - \gamma x + 5}{x + 1} & , x > -1 \end{cases}$ να

βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ στο σύνολο των πραγματικών

1.208 Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{x} & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}-x}{x^2+2\sqrt{x}} & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ να

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

1.209 Αν $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{αν } x < \lambda \\ x^2-x+\lambda & \text{αν } x \geq \lambda \end{cases}$ να

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

1.210 Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-5\lambda}{(x-\lambda^2)^2} = -\infty$

1.211 Να βρείτε τους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - (\lambda - \mu)x^2 - (2\lambda - \mu + 1)x + 3 - \mu}{x^3 - 3x + 2} = \ell \in \mathbb{R}$$

1.212 Βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x - \mu\sqrt{x} + 2}{\sqrt{\sqrt{x}+3}-2} = 8$

1.213 Να αποδειχτεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η

συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \lambda x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ δεν έχει

πραγματικό όριο στο 1 .

1.214 Να βρεθούν για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ τα όρια:

A) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-\alpha x}$, B) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-\alpha}{\sqrt[3]{x+7}-2}$

1.215 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-\alpha}{(x-4)(\sqrt{x}-2)}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

1.216 Βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha x^3 + \beta x - 6}{x - 2} = 4$$

Όριο συνάρτησης στο άπειρο**1.217** Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^2+3} - x^2)$

Γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2} + 2x)$

1.218 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - x}{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}$

B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3^{x+1}}{e^{x+2} + 3^{x+3}}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 2x - 3| - 4}{|x^2 + 2x + 5|}$

Δ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 2 \log x}{1 + 2 \log x}$

1.219 Να υπολογίσετε τα όρια

A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \eta \mu x}{x^2 + \sqrt{x^2 + 3}}$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi \sigma \nu x - \eta \mu x^2}{x^3}$

1.220 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ **1.221** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta \mu(\sqrt{x^2+1} - x)$ **1.222** Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t + \sqrt{t^2+1})}{\ln t}$ **1.223** Για την συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln x}$ **1.224** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2 \cdot \eta \mu(\frac{\pi}{x})}{x+1}}$ **Παραμετρικά όρια στο άπειρο****1.225** $A_v f(x) = \frac{(\lambda-1)x^3 - (\lambda-\mu)x^2 + \mu x - 3}{x+1}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ **1.226** $A_v f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} - \alpha x - \beta$ να βρεθούνοι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3\beta + 11$ **1.227** $A_v f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - \lambda x$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ **1.228** $A_v f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \chi \eta \mu \varphi - \sigma \nu \nu \omega$ με $0 < \varphi, \omega < \pi$, βρείτε τα φ, ω ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **1.229** Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \alpha x + \beta] = 12$$

1.230 Για κάθε $\alpha > 0$, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha^x + 2^x - 1}{\alpha^x - 2^x + 1},$$

1.231 Για κάθε $\alpha > 0$, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}$$

1.232 Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ A_v $\alpha + \beta + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και

$$f(x) = \alpha \sqrt{x^2 + 1} + \beta \sqrt{x^2 + 2} + \gamma \sqrt{x^2 + 3}$$

1.233 Έστω η $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x}\right)$ $\kappa > 0$ Ναβρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x)).$$



1.234 Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $2\sqrt{2x} \leq f(x) \leq x+2$, για κάθε $x \geq 0$. Να

βρείτε τα Α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x-2}$ Β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{\sqrt{x+2}-2}$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x)-16}{x-2}$ Δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)-1|-3}{x^2-4}$

1.235 Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ αν

$$f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \leq \sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.236 Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + g^2(x)) = 0$,

τότε να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

1.237 Αν $f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$

1.238 Η συνάρτηση f έχει πραγματικό όριο στο $x_0 = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(x-2)f(x) \leq x^2 - 7x + 10. \quad \text{Βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

1.239 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta \mu \frac{1}{x}}{x^2 + x}$

1.240 **Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $2f(x) + \eta \mu f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

1.241 Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x - \sin^2 x}{x + \eta \mu x}} = 1$

1.242 Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + \eta \mu x + 1} - x)$

1.243 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \eta \mu x}{x - \eta \mu x}$

1.244 Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\ln(x+1) - \ln x) \eta \mu x]$

1.245 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{3 + \eta \mu x + \sin x}$

1.246 Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2 \eta \mu x}{x^2 + \sqrt{x^2 + 3}}$

1.247 Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta \mu \left(\frac{\sin x + 1}{x} \right)}{\sin x + 1}$

1.248 Αν $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$ και $f(x) \neq 4$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f^2(x) - 7f(x) - 4}{f^2(x) - 16} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{3f(x) - 12}$$

1.249 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 5x - 7] = 3. \quad \text{Βρείτε τα όρια:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3x + 5}{5x^2 - 2x + 1}$$

1.250 Για την συνάρτηση f ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{f(x) + x} = +\infty \quad \text{να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

1.251 Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] \quad \text{όταν } f(x) = \sqrt{9x^2 - 1} - 3x$$

1.252 Έστω $f: (-\infty, 0) \rightarrow (0, +\infty)$ συνάρτηση για

$$\text{την οποία ισχύουν ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu \left(\frac{\pi}{x} \right)}{\left(\sqrt{1+x^2} + x \right) f(x)} = \pi$$

και $f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1.253 Για την συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in (0, +\infty)$. Να βρεθεί το

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{\ln x}$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1.254 Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης f αν ισχύει ότι $xf(x) + 5x^2 + 2 = \eta\mu x + (x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$

1.255 Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2x}{x-2} = 1$ και η f είναι συνεχής, βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x)-2x^2+3f(2)-6x}{x-2}$

1.256 Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\eta\mu^2 x + 2xf(x) \leq f^2(x) \leq \eta\mu^2 x + x(x+2f(x))$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

1.257 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f^5(x) + f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

1.258 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει $xf(x) \geq e^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Βρείτε το $f(0)$

1.259 Αν $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ και η f^{-1} είναι συνεχής, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x) - x^2}{x + f^{-1}(x)} = 1$

1.260 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f^3(x) + 3f(x) = e^{2x} - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

A) Να δείξετε ότι $|f(x)| \leq |e^{2x} - 1|, x \in \mathbb{R}$

B) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο μηδέν

Γ) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} xf\left(\frac{1}{x}\right)$

1.261 Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x < \alpha \\ x^3 + x, & \text{αν } x \geq \alpha \end{cases}$

A) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \neq 0$ τότε η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = \alpha$.

B) Να εξετάσετε τη συνέχεια της f για $\alpha = 0$

1.262 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f(x))^2 - 2f(x) + \sin^2 x = 0, x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι $|f(x) - 1| \leq |x|$

B) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} xf\left(\frac{1}{x}\right)$

1.263 Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} + 2, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2^x} + 1, & x = 0 \end{cases}$

A) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

B) Υπάρχει τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής;

1.264 Αποδείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

1.265 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 και ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

1.266 Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε:

$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1, x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.



Βασικά Θεωρήματα**1.267** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{x-1}{x-2x^2} = \varepsilon \varphi x \quad \text{έχει στο διάστημα } \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

τουλάχιστον μια ρίζα

1.268 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0 \quad \text{με } \kappa, \lambda, \mu \neq 0 \text{ έχει ακριβώς}$$

δύο ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ και ισχύει ότι

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$$

1.269 Έστω η εξίσωση $x^3 + ax^2 + b = 0$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta + 1 < 0$. Να αποδειχτεί ότι έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$

1.270 Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(\alpha) \geq \alpha^2$ και $f(\beta) \leq \beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

1.271 Έστω $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(0) = f(\pi)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, \pi]$, ώστε $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)$.

1.272 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) + f(x+2) = 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Η f είναι περιοδικήΒ) Υπάρχουν άπειροι $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha) = f(\alpha+2)$

1.273 Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = 20 \cdot \alpha \cdot x \cdot e^x$, $g(x) = 21 \cdot \beta \cdot (\eta \mu x + \sigma \nu x)$. Αν το (α, β) είναι σημείο της ευθείας $21y = 20x$, με $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Δείξτε ότι οι C_f , C_g έχουν τ. ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$

1.274 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν $f(4) + f(-4) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Δείξτε ότι $f(x)f(-x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και βρείτε το $f(0)$

1.275 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ με $f(-1) \neq f(2)$, δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 2)$ ώστε $3f(-1) + 4f(2) = 7f(x_0)$

1.276 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, και $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $7f(x_0) = f(\alpha) + 2f(\gamma) + 4f(\beta)$

1.277 Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha \eta \mu x + \beta = x$ έχει (μία τουλάχιστον) ρίζα της οποίας η απόλυτη τιμή δεν υπερβαίνει τον $\alpha + \beta$.

1.278 Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(x) + f(2-x) = 0$ για κάθε x , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

1.279 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ με $f(2) \neq 6$, και ακόμη $f(1) + f(2) = 8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f(x_0) = x_0 + x_0^2$.

1.280 Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ είναι συνεχής και υπάρχουν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ ώστε $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) f\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) f\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = x_0^{2016}$

1.281 Έστω $f:[0,1] \rightarrow [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$ (S. Banach)

1.282 Να βρείτε τη συνάρτηση f , συνεχή στο $\mathbb{R}$ αν ισχύει $e^{f(x)} - 4x - 4e^{-f(x)} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \ln 2$

1.283 Αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{1994} \in [0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,1]$ ώστε $|x_0 - \alpha_1| + |x_0 - \alpha_2| + \dots + |x_0 - \alpha_{1994}| = 997$.

1.284 Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

1.285 *Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f^2(x) \neq 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) > 3$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1.286 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}$ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$

1.287 Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $4x^2 + 9[f(x)]^2 = 36$ για κάθε $x \in (-3,3)$. Να βρείτε τον τύπο της αν $f(0) = -2$

1.288 Να βρείτε τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων

A) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}, 0 < x \leq 1$

B) $f(x) = x^3 - \sin x, x \in [0, \pi/2]$

1.289 Μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$. Θα μπορούσε η f να είναι αντιστρέψιμη;

1.290 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε

$$\eta\mu^2(\kappa + \alpha) + \eta\mu^2(\kappa + \beta) + \eta\mu^2(\kappa + \gamma) = \frac{3}{2}$$

1.291 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \sin 2x$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

1.292 Οι συναρτήσεις $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ είναι συνεχείς και ισχύει $f \circ g = g \circ f$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έστω ακόμα ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει (τε) $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) = x_0$ και $g(x_0) = x_0$

1.293 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f αν $f(x) = (4x^2 - 5\pi x + \pi^2)\eta\mu x, 0 \leq x \leq 2\pi$

1.294 Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ και $f(1) = 2$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

1.295 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ ώστε $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln(x_0) = 1$.

1.296 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha) = \alpha$

1.297 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(10) = 9$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$. Να βρείτε το $f(5)$



Γενικές Ασκήσεις

1.298 Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + 2(x-1) = 0$ έχει μοναδική ρίζα

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2(a-1)x^2 - 1 & \text{αν } x < 1 \\ x^2 - x \ln a - 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ με $a \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο

$\mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$

1.299 Έστω $g(x) = x^2 + x \ln x$ και $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 \sin x}{g(x)}, & \text{αν } g(x) \neq 0 \\ a & \text{αν } g(x) = 0 \end{cases}$ Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ αν η f είναι

συνεχής

1.300 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, ώστε $f^2(x) + \eta \mu^2 x = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Β) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(a)f(b) < 0$ να δείξετε ότι $ab < 0$.

1.301 Έστω συνεχής συνάρτηση f στο $[1, 4]$ για την οποία ισχύουν: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$, $f(1) > 0$
 $f(1)f(2) = f(3)f(4)$ Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 4]$,

Β) Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.

Γ) Η f δεν είναι αντιστρέψιμη.

1.302 Έστω η συνάρτηση $g(x) = x + \frac{\beta - \alpha}{5}$ ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $f\left(g\left(\frac{4\alpha + \beta}{5}\right)\right) = f(\alpha)$ όπου f είναι μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(x_0) = f(g(x_0))$

1.303 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(0) = 1$ και $x[f(x) - g(x)] = \sqrt{x}[3f(x) + g(x)]$

Α) Να βρείτε το $f(0)$

Β) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$ να δείξετε ότι: α) Η εξίσωση $(x-2)f(x) + xf(x+2) = x(x-2)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

β) $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$.

1.304 Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 3$ και $2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$

Α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $h(x) = f(x) - \ln x - 3$

Β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$

1.305 Α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 σε διάστημα Δ . Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδείξετε ότι θα είναι είτε $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ είτε $f(\gamma) < f(\beta) < f(\alpha)$

Β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 στο Δ , να αποδείξετε ότι είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

1.306 Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση $f^3(x) + 4f^2(x) + 6f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$

1.307 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, και ισχύει $f(f(x)) + x = 4 - 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- Α. η f είναι 1-1
- Β. Αν η f είναι γνήσια μονότονη τότε είναι γνήσια φθίνουσα
- Γ. υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = x_0$
- Δ. $f(1) = 1$

1.308 Η ανάβαση - όπως και η κατάβαση - στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου διαρκεί 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει την ανάβαση στις 6 το πρωί και χωρίς να σταματήσει βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση, σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, επιστρέφει στη βάση. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής όπου βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες

1.309 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$. Για κάθε $x_1, x_2, x_3, \dots, x_v \in [\alpha, \beta]$

να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $f(\xi_1) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_v)}{v}$

$$f(\xi_2) = \sqrt[v]{f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdot \dots \cdot f(x_v)}$$

1.310 Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f^2(x) + f(f(x)) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 1$

- Α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 3) \eta \mu \frac{1}{x-1}$
- Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[1, 2]$

1.311 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \ln x - \ln(x-1)$

- Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1}
- Β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(x) - e^x$
- Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)e^{-x} - 1 = 0$ έχει μοναδική λύση μεγαλύτερη του ένα



1.312 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + xf(x) + x^3 = 0, x \in (0, +\infty)$

A) Να αποδείξετε ότι $-x^3 < f(x) < 0$

B) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{f(x)}{x} - 1 & , x > 0 \\ -1 & , x = 0 \\ \frac{f(-x)}{x^2} & , x < 0 \end{cases}$

1.313 Για τη συνεχή συνάρτηση f , ισχύει ότι: $2(\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{2x+8}) \leq xf(x) \leq \eta \mu \frac{x}{6} + x^6, \forall x \geq -4$. Να

υπολογίσετε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον $\kappa \in (0, 1]$ ώστε $f(\kappa) = \eta \mu \frac{\kappa}{6} + \kappa^6$.

1.314 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + 3f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

A) ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφής της.

B) ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. Γ) $|f(x)| = \frac{|x|}{f^2(x) + 3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο μηδέν

E) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$

1.315 ** Αν f είναι μια συνάρτηση, τότε λέγοντας χορδή της f εννοούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα ανήκουν στη γραφική παράσταση της f . Έστω ότι f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και με $f(0) = f(1) = 0$.

A) Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{2}$.

B) Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{v}$, όπου $v = 1, 2, 3, \dots$

1.316 Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν ότι:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$, $f(2009) = 2009$ και

$$\frac{f(f(x))}{f(f(x)+2)} = \frac{f(f(x)+1)}{f(f(x)-1)}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ν' αποδειχθεί ότι :

A) $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B) Υπάρχει $\omega \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\omega) = 2$

Γ) $f(1)f(2) = f(3)f(4)$

Δ) υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της g στο $[1, 2]$

E) οι f και g δεν είναι αντιστρέψιμες.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ

1.317 Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = -7x^2 + 5x + 2$, ισχύει: $2(f(x))^3 + 3f(x) = x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

B1. Να αποδείξετε, ότι η g δεν είναι αντιστρέψιμη, ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

B2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$

B3. Να λύσετε τις ανισώσεις $f(3x) < x$ (Mov_3) και $f^{-1}(x) > g(x)$

B4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $h(x) = xf^{-1}(x) + g(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο

και ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει ότι $\frac{\alpha^2}{\beta^4} + \frac{\beta^2}{\gamma^4} + \frac{\gamma^2}{\alpha^4} \geq \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$

1.318 Γ1 Να λυθεί η εξίσωση: $\left(\frac{1}{2}\right)^x - x = 1$.

Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} - f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Γ4. Να λυθούν οι ανισώσεις: $2^{f(x)}(f(x) + 6) > 1$ και $f(2^{f(x)}(16f(x) - 3)) > f(16)$

Γ5. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + f(x^2)$

1.319 Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση $f(f(x)) = 2g(x) - x$

Δ1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $h(x) = f(x) - g(x)$

Έστω ακόμη ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = x_0$

Δ3. Να δείξετε ότι η C_f και η C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x + x_0 - 2)) + x + x_0 = 2f(x + x_0 - 2) + 2$

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(\ln x + x_0 + 1)) + \ln x + 1 < x_0$

1.320 Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(3, -1)$, τότε

B1. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

B2. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2 + f^{-1}(x^2 + x + 3)) = 3$

B3. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(-2 + f^{-1}(5^x + 4 - 2^{x+1})) > 3$

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x) \leq 5 + 4f(x)$



1.321 Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(e^{f(x)}) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Δίνονται ακόμα οι συναρτήσεις $\varphi(x) = \ln x + f(x)$ και $t(x) = \ln x + x$ ορισμένες στο $(0, +\infty)$

Γ1) Να αποδειχτεί ότι οι συναρτήσεις φ και t είναι συναρτήσεις $1-1$

Γ2) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$

Γ3) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{x + 2}\right) < 1 - x^2$

Γ4) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(\frac{x^2 + e^2}{2}\right) + f(e^{x-e} + 1) = f(xe) + f\left(2e^{\frac{x-e}{2}}\right)$

1.322 Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Δ1 Να βρείτε το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι ισχύει $f(-x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ2 Να αποδείξετε ότι $f(x-y) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τότε

Δ3 Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

Δ4 Να αποδειχτεί ότι $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in f(\mathbb{R})$

Δ5 Να λύσετε την εξίσωση $f(10 - x^2) + f(x) = f(x+1)$

1.323 Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$ και η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$ και $|f(x)| < 2004$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = f(\beta)\eta\mu x + f(\alpha)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, \alpha + \beta)$.

Γ2 Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = \alpha + \beta$.

β) Να αποδείξετε ότι η C_f της f τέμνει την $y = 2x$ σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη

$x_0 \in (\alpha, \beta)$

Γ3 Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)\eta\mu 4x}{x^2 + 1}$

Γ4 Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - h(x) = 2004x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ακόμη ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ετερόσημες ρ_1, ρ_2 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο (ρ_1, ρ_2)

1.324 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^{xe+1} + e^{xe}}{e^{xe+1} + e}$

B1 Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f

B2 Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της f

B3 Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(\frac{x}{e}\right) = \frac{\kappa}{(\kappa+1)e}$, για κάθε $\kappa > 0$

B4 Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^4)$ στο $[0, +\infty)$

B5 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{e^{\frac{2\kappa+1}{\kappa+1}} + e^{\frac{\kappa}{\kappa+1}}}{e^{\frac{2\kappa+1}{\kappa+1}} + e}\right)$

1.325 Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f^2(0) + f^2(1) + 13 = 6f(0) + 4f(1)$.

Δ1 Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ2 Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά x_1 και x_2 στο διάστημα $(0, 1)$ τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της f τέμνει την $y = 3x$ σε σημείο με τετμημένη x_1 και να ισχύει ότι

$$12f(x_2) = 3f\left(\frac{1}{e}\right) + 4f\left(\frac{1}{\pi}\right) + 5f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Δ3 Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(\ln x + 4) - 1) > 3$

1.326 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(1 - \ln x) = 1 - x - \ln x$, $x > 0$

B1 Να δείξετε ότι: $f(x) = x - e^{1-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B2 Να βρείτε το πρόσημο της f

B3 Να λύσετε την εξίσωση $xe^x = e$ στο $(0, +\infty)$

B4 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

B5 Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x) + f(x^3)$ στο $(0, +\infty)$

1.327 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) + 2x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$

Γ) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει ότι $f(\alpha^2 + \beta^2) + f(2\alpha - 2\beta + 5) = 0$

Δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x) + 3x > 0$

E) Να λυθεί η εξίσωση $2x \cdot f^3(x) + f^2(x) + 1 = 0$



1.328 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f^3(x) + xf^2(x) \leq 2\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha + \beta \neq 0.$$

Δ1 Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β

Δ2 Αν $g(x) = f(1-x) + 1, x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ και να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|xg(x) - 2| - |3 - x - g(x)|}{x - 1}$$

Δ3 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 2007}{f(-x) + x - 2007}$

1.329 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = 6x - \frac{9}{x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Δ1) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - \frac{4}{x}$.

Δ2) Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

Δ3) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)| - 3}{2x^2 - x - 1}$.

Δ4) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left[f(x) \eta\mu \frac{5}{x-2} \right]$.

Δ5) Να εξετάσετε αν η C_f είναι συμμετρική ως προς το $(0,0)$

1.330 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(ax^2 + x + 1) - \ln((1+\alpha)x + \alpha), x > 0$ και $\alpha \geq 0$.

B1 Για κάθε $\alpha \geq 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Αν επιπλέον δίνεται ότι $\alpha = 0$ τότε:

B2 Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

B3 Να ορίσετε την αντίστροφη της f

B4 Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f

B5 Να λύσετε την ανίσωση $\ln 2 + f(x^2) < f(x) + f(x^7)$ στο $(0, +\infty)$

1.331 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f^2(x) - 1 = 2 \ln x \cdot f(x)$ για

$$\text{κάθε } x \geq 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + x - 1}{x^2 + x - 1} = +\infty.$$

Γ1 Να αποδείξετε ότι $f(1) > 0$

Γ2 Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x + \sqrt{1 + \ln^2 x}, x \in [1, +\infty)$

Γ3 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x + \sqrt{1 + \ln^2 x})$

Γ4 Να βρείτε την εικόνα του διαστήματος $[1, +\infty)$ μέσω της συνάρτησης f

Γ5 Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in [1, +\infty)$ αν ισχύει ότι $f(\alpha - \beta) + f(3\alpha - 4\beta) \leq 2$

1.332 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 0$

Δ1 Να αποδείξετε ότι $f(0) = 2$

Δ2 Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{\eta \mu^2 x}$

Αν επιπλέον για την f ισχύει: $f^2(x) - e^{-x}f(x) = e^{2x} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Δ3 Να δείξετε ότι: $f(x) = e^{-x} + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

Δ4 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 2}{2 - \sigma \upsilon \nu x}$.

Δ5 Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$

