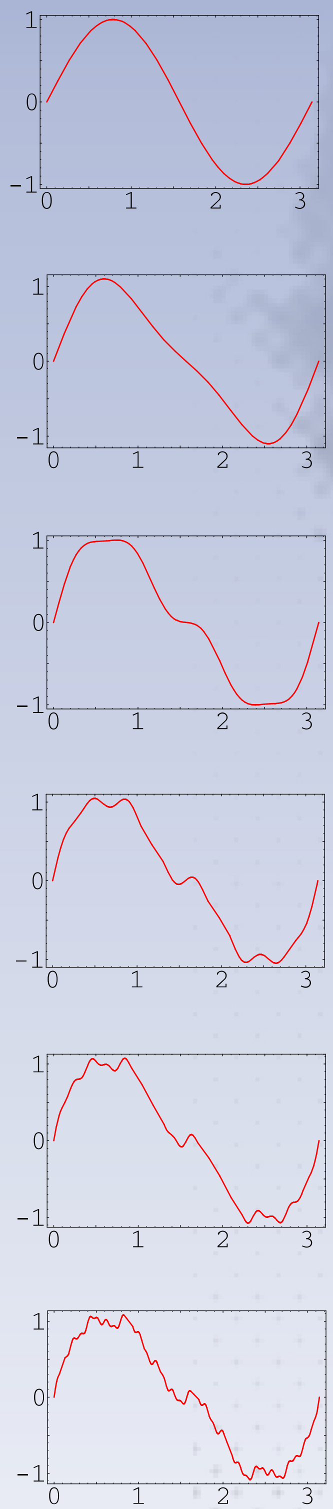
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τσάτσας Κωνσταντίνος

Πουθενά παραγωγίσιμες συνεχείς συναρτήσεις



Ηράκλειο - 2007

Τριμελής Επιτροπή:
Κωστάκης Γεώργιος (Επιβλέπων)
Μήτσης Θεμιστοκλής
Παπαδημητράκης Μιχαήλ

Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με ένα κλασικό πρόβλημα της ανάλυσης που αφορά στις συνεχείς και πουθενά παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις αυτού του θέματος. Συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 2, υιοθετούμε μια τοπολογική μέθοδο και αποδεικνύουμε την ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων κάνοντας χρήση του θεωρήματος κατηγορίας του Baire. Σε κατάλληλο μετρικό χώρο συναρτήσεων αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των συνεχών και πουθενά παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι τοπολογικά "μεγάλο". Εν συνεχεία στο Κεφάλαιο 3 κατασκευάζουμε τέτοιες ιδιόμορφες συναρτήσεις. Αυτές οι κατασκευές αφορούν κάποια κλασικά παραδείγματα τέτοιων παθολογικών συναρτήσεων και οφείλονται στους Bolzano και Weierstrass. Τέλος, στο Κεφάλαιο 4, παραθέτουμε μια μετρο-θεωρητική προσέγγιση του παραπάνω προβλήματος που οφείλεται στον B. Hunt. Ειδικότερα, κατασκευάζουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις g, h ώστε η συνάρτηση $\alpha g + \beta h$ είναι συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη "σχεδόν για κάθε" επιλογή των πραγματικών αριθμών α, β.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

Ξεκινώντας θα υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές προτάσεις και έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια και αποτελούν τα βασικά εργαλεία για τις οποιεσδήποτε αποδείξεις παραθέσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Η ισχύ κάθε πρότασης που θα διατυπωθεί στην παρούσα εργασία αφορά κάποιον συγκεκριμένο τοπολογικό χώρο. Ο τοπολογικός αυτός χώρος καθορίζεται πλήρως από τα ανοιχτά του υποσύνολα και αυτά με την σειρά τους από την μετρική την οποία έχουμε επιλέξει. Φυσιολογικό είναι τότε να ξεκινήσουμε με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.0.1 *Έστω X ένα σύνολο. Μια συνάρτηση $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ ονομάζεται* ***μετρική*** *στο X αν έχει τις εξής ιδιότητες :*

1. $d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \qquad \forall\, x, y \in X$
2. $d(x,y) = d(y,x) \qquad \forall\, x, y \in X$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall\, x, y, z \in X.$

Για κάθε σημείο x του χώρου και για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζεται η ανοιχτή μπάλα

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon)$$

η οποία έχει ρόλο όμοιο με εκείνον του ανοιχτού διαστήματος στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ανοιχτής μπάλας, ένα υποσύνολο U ενός μετρικού χώρου (X, d) θα θεωρείται ανοιχτό αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει μπάλα ακτίνας $\varepsilon > 0$ και κέντρου x η οποία περιέχεται ολόκληρη στο U. Κάθε σημείο του συνόλου που ικανοποιεί την προηγούμενη ιδιότητα λέγεται εσωτερικό σημείο του συνόλου. Τα ανοιχτά υποσύνολα του X αποτελούν μια τοπολογία $\mathcal{J}$ στον X. Ένα υποσύνολο του X λέγεται κλειστό αν το συμπληρωμά του είναι ανοιχτό. Εύκολα προκύπτει ότι ένα σύνολο V θα είναι κλειστό αν κάθε x το οποίο είναι όριο ακολουθίας $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ από το V περιέχεται στο V.

Ορισμός 1.0.2 *Έστω* (X,d) *ένας μετρικός χώρος. Η* ***τοπολογία*** $\mathcal{J}_d$ *όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του* X *που παράγει η μετρική* d *είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του* X *με τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{J}_d$.
2. $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{J}_d$ *για οποιαδήποτε οικογένεια* $\{U_i\}_{i\in I}$ *στοιχείων από το* $\mathcal{J}_d$.
3. $\bigcap_{i=1}^{N} U_i \in \mathcal{J}_d$ *για οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία* $\{U_i\}_{i=1}^{N}$ *στοιχείων από το* $\mathcal{J}_d$.

Το εσωτερικό E° *και η κλειστότητα* $\overline{E}$ *ενός συνόλου* $E \subset X$ *ορίζονται να είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό που περιέχεται στο* E *και το μικρότερο κλειστό που περιέχει το* E *αντίστοιχα. Ισοδύναμα, το* E° *είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα εσωτερικά σημεία του* E *ενώ το* $\overline{E}$ *περιέχει τα όρια όλων των ακολουθιών που σχηματίζονται από στοιχεία του* E*. Η σύγκλιση ακολουθιών σε έναν τυχαίο μετρικό χώρο* (X,d) *ορίζεται ως εξής:*

$$x_n \longrightarrow x \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

Κεφάλαιο 2

Το Σύνολο $\mathcal{N}_d$ των Πουθενά Παραγωγίσιμων Συνεχών Συναρτήσεων

2.1 Πυκνότητα και Θεωρία Κατηγορίας

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε το θεώρημα κατηγορίας του Baire το οποίο αποτελεί βασικό εργαλείο για τα επόμενα. Κλασικά βιβλία τα οποία χρησιμοποιήσαμε είναι τα [4][5][7][8].

Η πρώτη και βασικότερη έννοια που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, οπότε και θα χρειαστεί να αναλύσουμε, είναι αυτή της πυκνότητας. Ένα υποσύνολο D ενός μετρικού χώρου (X,d) ονομάζεται πυκνό στον X όταν αυτό αποτελεί "μια καλή προσέγγιση του X". Αυτό σημαίνει ότι για οποιοδήποτε $x \in X$ υπάρχουν στοιχεία του D που βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στο x ως προς την δοσμένη μετρική d. Ένας πρωταρχικός ορισμός για την πυκνότητα είναι ο παρακάτω

$$D \text{ πυκνό στον } X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X \quad \wedge \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \in D \;:\; d(x,y) < \varepsilon.$$

Δίνοντας έναν ισοδύναμο ορισμό μέσω ακολουθιών, προκύπτει ότι το D διατηρεί την ιδιότητα της πυκνότητας αν και μόνον αν η κλειστότητά του είναι όλος ο χώρος X, συνοπτικότερα έχουμε

$$\overline{D} = X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in X \quad \exists\, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D \quad : \quad x_n \longrightarrow x.$$

Τέλος ο συσχετισμός της πυκνότητας με τα ανοιχτά υποσύνολα του X διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση η απόδειξη της οποίας παραλείπεται.

Πρόταση 2.1.1 *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο D του X είναι πυκνό στον X αν και μόνον αν τέμνει κάθε ανοιχτό υποσύνολο του X. Ισοδύναμα*

$$\overline{D} = X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, G \in \mathcal{J}_d \quad D \cap G \neq \emptyset$$

όπου η $\mathcal{J}_d$ είναι η τοπολογία στον X που ορίζει η μετρική d.

Συνεπώς το D δεν θα είναι πυκνό στον X αν υπάρχει κάποιο ανοιχτό το οποίο δεν τέμνεται από το D. Γενικεύοντας τον ορισμό της πυκνότητας πάνω από όλα τα ανοιχτά στο X ορίζεται η έννοια του ***πουθενά πυκνού*** *υποσυνόλου. Έτσι το $P \subset X$ είναι πουθενά πυκνό στον X όταν δεν είναι πυκνό σε κανένα ανοιχτό υποσύνολο του.*

$$P \text{ **πουθενά πυκνό** στον } X \Leftrightarrow$$

$$\forall\, G \in \mathcal{J}_d \quad \exists\, H \in \mathcal{J}_d \quad : \quad H \subset G \quad \wedge \quad H \subset X \backslash P$$

Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύουμε ότι το συμπλήρωμα ενός πουθενά πυκνού συνόλου P οφείλει να είναι υπερσύνολο κάποιου πυκνού και ανοιχτού συνόλου και το αντίστροφο.

Πρόταση 2.1.2 *Το P είναι πουθενά πυκνό στον X αν και μόνον αν το συμπλήρωμα του περιέχει κάποιο ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του X .*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω ότι το P είναι πουθενά πυκνό. Ορίζουμε το σύνολο D ως εξής:

$$D = \bigcup \Big\{ H \in \mathcal{J}_d \;:\; \exists\, G \in \mathcal{J}_d \quad H \subset G \;\wedge\; H \subset X \backslash P \Big\}$$

Εφόσον το D είναι ανοιχτό και υποσύνολο του X, μένει να δείξουμε ότι είναι πυκνό. Αν G είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του X, αυτό αναγκαστικά περιέχει ανοιχτό H που περιέχεται στο $X \backslash D$ και άρα $H \subset D$. Τότε προφανώς $D \cap H \neq \emptyset$ και συνεπώς $D \cap G \supset D \cap H \neq \emptyset$. Αφού το G είναι τυχαίο, προκύπτει οτι το D είναι πυκνό.
($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω ότι το $X \backslash P$ περιέχει ένα πυκνό και ανοιχτό σύνολο D. Θα δείξουμε ότι το P είναι πουθενά πυκνό. Αν G είναι ένα ανοιχτό, τότε θέτουμε $H = D \cap G \neq \emptyset$ από όπου παίρνουμε ότι $H \subset G$ και $H \subset D \subset X \backslash P$. Έχουμε δηλαδή $H \subset X \backslash P$ όπου $H \subset G$, και αυτό για οποιαδήποτε επιλογή ανοιχτού G. Οπότε το P είναι πουθενά πυκνό στον X. $\square$

Αφού το συμπλήρωμα ενός πουθενά πυκνού συνόλου P περιέχει ένα ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο D αυτό μας εξασφαλίζει ότι το P δεν περιέχει κανένα ανοιχτό υποσύνολο. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την παρατήρηση για να δώσουμε ένα κομψότερο ορισμό για τα πουθενά πυκνά σύνολα, στον οποίο δεν θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο το P αλλά την κλειστότητα του. Από αυτό το σημείο *και έπειτα ως ορισμός για τα πουθενά πυκνά σύνολα θα θεωρείται η παρακάτω πρόταση μιας και αποτελεί την συνοπτικότερη περιγραφή που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα.*

Πρόταση 2.1.3 *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $P \subset X$ είναι **πουθενά πυκνό** στο X αν και μόνον αν η κλειστότητα του έχει κενό εσωτερικό, δηλαδή αν και μόνον αν $\overline{P}^{\circ} = \emptyset$.*

Απόδειξη:($\Rightarrow$) *Έστω ότι το P είναι πουθενά πυκνό. Θα δείξουμε ότι $\overline{P}^{\circ} = \emptyset$. Υπάρχει κάποιο πυκνό και ανοιχτό σύνολο D το οποίο περιέχεται στο $X \backslash P$. Το σύνολο $(X \backslash P)^{\circ}$ είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του $X \backslash P$ οπότε θα πρέπει να περιέχει και το D. Τότε*

$$D \subset (X \backslash P)^{\circ} \;\Rightarrow\; \overline{D} \subset \overline{(X \backslash P)^{\circ}} \;\Rightarrow\; X \subset \overline{(X \backslash P)^{\circ}} \;\Rightarrow$$

$$X = \overline{X \backslash \overline{P}} \;\Rightarrow\; X = X \backslash \overline{P}^{\circ} \;\Rightarrow\; \overline{P}^{\circ} = \emptyset$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

($\Leftarrow$) *Έστω ότι $\overline{P}^{\circ} = \emptyset$. Για να δείξω ότι το P είναι πουθενά πυκνό αρκεί το συμπλήρωμα του να περιέχει ένα ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο. Παίρνουμε το ανοιχτό $X \backslash \overline{P} \subset X \backslash P$ και αρκεί να δείξουμε ότι είναι πυκνό. Παρατηρούμε ότι*

$$\overline{X \backslash \overline{P}} = X \backslash \overline{P}^{\circ} = X \backslash \emptyset = X$$

από όπου παίρνουμε ότι το $X \backslash \overline{P}$ είναι όντως πυκνό.$\square$

*Τα δύο πιο γνωστά παραδείγματα πυκνών συνόλων είναι οι ρητοί, $\mathbb{Q}$, και οι άρρητοι, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Αυτά τα δύο σύνολα έχουν μία ουσιαστική διαφορά η οποία μας οδηγεί να χωρίσουμε τα πυκνά σύνολα σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Η διαφορά τους φαίνεται και από το ότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο ενώ το $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ υπεραριθμήσιμο. Πρώτα θα ορίσουμε μια ασθενή, ως προς την έννοια της πυκνότητας, κατηγορία συνόλων η οποία θα ακολουθείται από τον όρο **σύνολα** $\mathbf{1}^{ης}$ **κατηγορίας**. Αυτά τα σύνολα προκύπτουν από αριθμήσιμες ενώσεις πουθενά πυκνών συνόλων. Η δεύτερη κατηγορία θα περιέχει σύνολα - που προκύπτουν ώς συμπληρώματα συνόλων της πρώτης - τα οποία ονομάζονται **Residual** ή σύνολα $\mathbf{2}^{ης}$ **κατηγορίας** και αποτελούν ισχυρότερες μορφές πυκνών συνόλων. Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κατηγορίας του Baire.*

Ορισμός 2.1.1 *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Μια ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ σημείων του X λέγεται **ακολουθία Cauchy** αν*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N.$$

Ένας χώρος (X,d) στον οποίο κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει ονομάζεται ***πλήρης****.*

Ορισμός 2.1.2 *Αν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος και $E \subset X$ τότε η* ***διάμετρός*** *του E ορίζεται ως*

$$diam(E) = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$$

Θεώρημα 2.1.3 *(Cantor) Έστω (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία, μη κενών, κλειστών συνόλων τέτοια ώστε $diam(K_n) \to 0$. Τότε υπάρχει $\alpha \in X$ ώστε*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{\alpha\}$$

Απόδειξη: Αφού $K_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει κάποιο $x_n \in K_n$ Θα δείξω ότι η ακολουθία που σχηματίζουν τα x_n είναι Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Η υπόθεση $diam(K_n) \to 0$ εξασφαλίζει ότι υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $diam(K_n) < \varepsilon$ για κάθε $n > N$. Έστω τώρα $n, m > N$, με $m > n$. Αφού η $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, έχουμε $K_n \supset K_m$, $x_n, x_m \in K_n$ και η απόσταση αυτών των δύο σημείων είναι προφανώς μικρότερη από την διάμετρο του K_n

$$d(x_n, x_m) \leq diam(K_n) < \varepsilon.$$

Δηλαδή η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο $\alpha \in X$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι το α περιέχεται σε κάθε K_n. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $m > n$ θα είναι $K_n \supset K_m$ και $x_m \in K_n$ από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\{K_m\}_{m=n}^{\infty}$ περιέχεται στο K_n. Αφού η $\{x_m\}_{m=n}^{\infty}$ αναγκαστικά συγκλίνει στο α και το K_n είναι κλειστό θα πρέπει $\alpha \in K_n$. Αφού το n ήταν τυχαίο προκύπτει ότι

$$\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει κάποιο $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ με $y \neq \alpha$. Τότε έχουμε

$$0 < d(y, \alpha) \leq diam(K_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και αφού $diam(K_n) \to 0$ παίρνουμε $y = \alpha$ το οποίο είναι αδύνατο. Άρα $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{\alpha\}$. $\square$

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στην διατύπωση και απόδειξη του θεωρήματος κατηγορίας του Baire το οποίο αναφέρει ότι αν έχουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια ανοιχτών και πυκνών συνόλων η τομή αυτής της οικογένειας παραμένει πυκνό σύνολο. Αναφέρουμε ότι κάθε σύνολο το οποίο προκύπτει ως αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών συνόλων ονομάζεται G_δ.

Θεώρημα 2.1.4 *(Θεώρημα Κατηγορίας του Baire)*

Έστω (X, d) *ένας πλήρης μετρικός χώρος και* $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία από* ***ανοιχτά*** *και* ***πυκνά*** *υποσύνολα του* X. *Τότε το σύνολο* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ *είναι πυκνό στον* X.

Απόδειξη: Έστω U *ένα οποιοδήποτε ανοιχτό στον* X. *Αν δείξουμε ότι* $U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \emptyset$ *τελειώσαμε. Αφού* $\overline{G_1} = X$ *και το* G_1 *είναι ανοιχτό, η τομή* $G_1 \cap U$ *θα είναι μη κενή και ανοιχτή. Τότε*

$$\exists\, x_1 \in G_1 \cap U \quad \textit{και} \quad 0 < \varepsilon_1 < 1 \quad : \quad \overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subset G_1 \cap U$$

δηλαδή η τομή του πυκνού G_1 *με το* U *πρέπει να περιέχει μια κλειστή μπάλα με ακτίνα μικρότερη του 1. Αφού τώρα* $\overline{G_2} = X$ *η τομή* $G_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1)$ *θα είναι επίσης μη κενή και ανοιχτή. Ομοίως*

$$\exists\, x_2 \in G_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1) \quad \textit{και} \quad 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2} \quad : \quad \overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subset G_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1).$$

Αντίστοιχα, η τομή $G_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1)$ *θα πρέπει να περιέχει μια μπάλα ακτίνας μικρότερη από* $\frac{1}{2}$ *για την οποία η κλειστότητα της περιέχεται στην πρώτη μπάλα.*

Επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθία μπαλών $\{B(x_n, \varepsilon_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *τέτοια ώστε:*

1. $x_n \in G_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$ *και* $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$
2. $\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset G_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})$

και για την οποία ο $n-$*οστός όρος περιέχεται εξολοκλήρου στην τομή του προηγούμενου με το* G_n *και η ακτίνα του* $n-$*στου όρου είναι μικρότερη από* $\frac{1}{n}$. *Θέτουμε* $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, \varepsilon_n)}$. *Τότε έχουμε*

$$diam(\overline{B(x_n, \varepsilon_n)}) = 2\varepsilon_n < \frac{2}{n} \to 0$$

και επιπλέον αφού

$$\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subset G_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \subset \overline{B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1})}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\overline{B(x_n,\varepsilon_n)} \supset \overline{B(x_{n+1},\varepsilon_{n+1})} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος του Cantor και άρα $K = \{x\} \neq \emptyset$. Αφού οι μπάλες είναι υποσύνολα του U, ισχύει ότι $x \in U$ και τέλος $U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \{x\}$. □

Ακολουθεί μία πρόταση-πόρισμα του θεωρήματος του Baire την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε κάποια σημαντική ιδιότητα των G_δ και πυκνών συνόλων.

Πρόταση 2.1.4 *Έστω (X,d) ένας πλήρης μετρικός χώρος και $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από G_δ και πυκνά υποσύνολα του X. Τότε το $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ είναι G_δ και πυκνό στον X.*

Απόδειξη: Το G_n είναι G_δ οπότε για κάθε n υπάρχει ακολουθία ανοιχτών $\{U_m^{(n)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

$$G_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m^{(n)} \;\Rightarrow\; G_n \subset U_m^{(n)} \;\Rightarrow\; \overline{G_n} \subset \overline{U_m^{(n)}} \;\Rightarrow\; X = \overline{U_m^{(n)}} \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}$$

από όπου παίρνουμε ότι τα $U_m^{(n)}$ είναι και πυκνά. Έτσι

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m^{(n)} = \bigcap_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} U_m^{(n)}$$

και τέλος το $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ αποδείχθηκε $2^{ης}$ κατηγορίας. □

Ορισμός 2.1.5 *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Το $F \subset X$ ονομάζεται* ***σύνολο $\mathbf{1}^{ης}$ κατηγορίας*** *αν μπορεί να αναπαρασταθεί ως αριθμήσιμη ένωση από πουθενά πυκνά υποσύνολα του X.*

Αν υποθέσουμε ότι F είναι ένα σύνολο $\mathbf{1}^{ης}$ κατηγορίας τότε αυτό γράφεται $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ όπου τα F_n είναι πουθενά πυκνά υποσύνολα του X. Όπως έχουμε ήδη αποδείξει, το συμπλήρωμα κάθε τέτοιου συνόλου F_n, πρέπει να περιέχει ένα πυκνό και ανοιχτό υποσύνολο ,G_n, του X. Τότε για το συμπλήρωμα του F ισχύει το εξής:

$$X\backslash F = X\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X\backslash F_n) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

αφού $G_n \subset X\backslash F_n$. Το συμπλήρωμα δηλαδή περιέχει ένα G_δ το οποίο από το θεώρημα του Baire είναι πυκνό. Ο επόμενος ορισμός απορρέει από αυτήν ακριβώς την παρατήρηση.

Ορισμός 2.1.6 *Έστω* (X,d) *ένας μετρικός χώρος. Το* $E \subset X$ *ονομάζεται* ***Residual*** *ή σύνολο* $\mathbf{2}^{\eta\varsigma}$ ***κατηγορίας*** *αν το* E *περιέχει ένα* G_δ *και πυκνό υποσύνολο. Το συμπλήρωμα κάθε Residual συνόλου είναι πάντα σύνολο* $1^{\eta\varsigma}$ *κατηγορίας.*

Για παράδειγμα, έστω μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ *των ρητών αριθμών. Αν γράψουμε το* $\mathbb{Q}$ *στη μορφή* $\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\}$ *συμπεραίνουμε ότι είναι σύνολο* $1^{\eta\varsigma}$ *κατηγορίας. Από την άλλη το σύνολο των αρρήτων γράφεται ως*

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}\backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{q_n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\backslash\{q_n\}$$

και αφού τα σύνολα $\mathbb{R}\backslash\{q_n\}$ *είναι ανοιχτά και προφανώς πυκνά, το* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *είναι ένα σύνολο* $2^{\eta\varsigma}$ *κατηγορίας.*

Μια από τις βασικότερες ιδιότητες ενός συνόλου E $2^{\eta\varsigma}$ *κατηγορίας είναι ότι κάθε στοιχείο του χώρου* X *μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα δύο στοιχείων από το* E *με την προυπόθεση ότι ο* X *έχει επιπλέον δομή διανυσματικού χώρου, δηλαδή*

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, e_1, e_2 \in E \quad : \quad x = e_1 + e_2.$$

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης στηρίζεται στο πόρισμα του θεωρήματος του Baire. Υπενθυμίζουμε ότι ένας ομοιομορφισμός $T : X \to Y$ *είναι μία απεικόνιση μεταξύ δύο τοπολογικών χώρων η οποία είναι ένα προς ένα και επί και οι απεικονίσεις* T, T^{-1} *είναι και οι δύο συνεχής.*

Πρόταση 2.1.5 *Έστω* $(X,d), (Y,\rho)$ *δύο πλήρεις μετρικοί χώροι και* $T : X \to Y$ *ένας ομοιομορφισμός. Αν* G *είναι* G_δ *και πυκνό στον* X *τότε το* $T(G)$ *είναι* G_δ *και πυκνό στον* Y.

Απόδειξη: Αφου το G *είναι* G_δ *γράφεται ως* $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ *για κάποια* G_n *ανοιχτά στο* X. *Έτσι*

$$T(G) = T(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(G_n)$$

και αφού τα $T(G_n)$ *είναι ανοιχτά το* $T(G)$ *είναι* G_δ. *Μένει να δείξουμε ότι είναι και πυκνό. Έστω* $y \in Y$ *και* $\varepsilon > 0$. *Υπάρχει* $x \in X$ *τέτοιο ώστε* $T(x) = y$ *και αφού* $x \in T^{-1}(B(y,\varepsilon))$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *ώστε*

$$B(x,\delta) \subset T^{-1}(B(y,\varepsilon)).$$

Για το $x \in X$ *υπάρχει* $g \in G$ *με* $d(x,g) < \delta$ *Αυτό σημαίνει ότι* $g \in B(x,\delta)$ *και άρα* $g \in T^{-1}(B(y,\varepsilon))$. *Έτσι παίρνουμε*

$$T(g) \in B(y,\varepsilon)$$

και οπότε $\rho(T(g), y) < \varepsilon$ *που ολοκληρώνει την απόδειξη.*$\square$

Πρόταση 2.1.6 *Έστω* (X, d) *ένας πλήρης διανυσματικός χώρος. Αν* G *είναι* G_δ *και πυκνό στον* X *τότε* $X = G + G$.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε κάποιο $x \in X$ *και ορίζουμε την απεικόνιση* $T_x : X \to X$ *με τύπο* $T_x(y) = x - y$. *Η* T_x *είναι ομοιομορφισμός αφού είναι ένα προς ένα και επί και οι* T, T^{-1} *είναι και οι δύο συνεχείς. Από την πρόταση που μόλις αποδείξαμε το* $T_x(G)$ *είναι* G_δ *και πυκνό οπότε έχουμε* $T_x(G) \cap G \neq \emptyset$. *Άρα υπάρχουν* $g_1 \in T_x(G) \cap G$ *και* $g_2 \in G$ *ώστε*

$$T_x(g_2) = g_1 \quad \Rightarrow \quad x = g_1 + g_2.$$

Αφού το x *είναι τυχαίο προκύπτει ότι* $G + G = X$. $\square$

2.2 Κατηγορία στο $\mathcal{N}_d$

Ο χώρος στον οποίο θα αποδείξουμε την ύπαρξη πουθενά παραγωγίσιμων συναρτήσεων είναι το σύνολο όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ *και πεδίο τιμών το* $\mathbb{R}$. *Η απόδειξη που θα παραθέσουμε, είναι από το βιβλίο του Oxtoby, "Measure and Category" βλέπε [5]. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του αποτελέσματος αυτής της ενότητας θα πρέπει να μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του χώρου* $C[0, 1]$ *στον οποίο και θα εργαστούμε. Πρώτα πρέπει να εφοδιάσουμε το χώρο αυτόν με μια κατάλληλη μετρική. Εφόσον οι συναρτήσεις ορίζονται στο συμπαγές* $[0, 1]$ *θα επιλέξουμε την supremum μετρική,* ϱ, *η οποία ορίζεται από την σχέση:*

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \quad \forall\, f, g \in C[0, 1].$$

Η τοπολογία στον $C[0, 1]$ *επιλέγεται να είναι αυτή που φυσιολογικά απορρέει απο την παραπάνω μετρική. Για να εφαρμόσουμε τη θεωρία που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα θα πρέπει πρώτα να δείξουμε ότι ο χώρος* $(C[0, 1], \varrho)$ *είναι πλήρης.*

Πρόταση 2.2.1 *Ο χώρος* $(C[0, 1], \varrho)$ *είναι πλήρης.*

Απόδειξη: Έστω $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *μία ακολουθία συναρτήσεων από το* $C[0, 1]$ *η οποία είναι Cauchy. Ισχύει το εξής:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad : \quad \varrho(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N \quad \Rightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad : \quad \sup_{x\in[0,1]} \mid f_n(x) - f_m(x) \mid < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N \quad \Rightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad : \quad \mid f_n(x) - f_m(x) \mid < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Οπότε για κάθε $x \in [0,1]$ η ακολουθία των αριθμών $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy και αναγκαστικά θα συγκλίνει σε έναν αριθμό $f(x)$. Αν στην τελευταία σχέση αφήσουμε το m να πάει στο $+\infty$ παίρνουμε:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \quad : \quad \mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \quad \forall\, x \in [0,1]$$

που σημαίνει ότι η $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. $\square$

Στη συνέχεια θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε μια ειδικής μορφής ακολουθία συνόλων την οποία συμβολίζουμε με $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ καθώς και μία κατά τμήματα γραμμική, περιοδική συνάρτηση $\phi(x)$. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα παραθέσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες αυτών.

Η συνάρτηση $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{min}(\mathbf{x} - [\mathbf{x}], \mathbf{x} + \mathbf{1} - [\mathbf{x}])$.

Η $\phi(x)$ είναι η συνάρτηση της απόστασης ενός αριθμού x από το πλησιέστερο σε αυτόν ακέραιο. Ο τύπος της σε όλο το $\mathbb{R}$ είναι:

$$\phi(x) = \begin{cases} x - n, & n \leq x < n + \frac{1}{2}, \\ \\ -(x-n) + 1, & n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1. \end{cases}$$

Η ϕ είναι φραγμένη αφού $0 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι περιοδική με περίοδο $T = 1$ και η παράγωγός της, που ορίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία εκτός των σημείων $\{n + \frac{1}{2} : n \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{Z}$ είναι ίση με ± 1. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\sigma(x) = \varepsilon\phi(mx)$. Η σ δίνεται από το τύπο

$$\sigma(x) = \varepsilon\phi(mx) = \begin{cases} \varepsilon m(x - \frac{n}{m}), & \frac{n}{m} \leq x < \frac{n}{m} + \frac{1}{2m}, \\ \\ -\varepsilon m(x - \frac{n}{m}) + 1, & \frac{n}{m} + \frac{1}{2m} \leq x < \frac{n+1}{m}. \end{cases}$$

και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $0 \leq \sigma(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$
2. $\sigma(x + \frac{1}{m}) = \sigma(x)$, *δηλαδή η σ είναι $\frac{1}{m}$-περιοδική,*
3. $\sigma'(x) = \pm\varepsilon m$.

Αν $y = \alpha x + \beta$ είναι μία ευθεία θα δούμε πώς ακριβώς επηρεάζεται αν της προσθέσουμε την $\sigma(x)$. Η $\eta(x) = \sigma(x) + \alpha x + \beta$ αποτελεί μια γεμάτη γωνίες μορφοποίηση της ευθείας, το πλήθος των οποίων εξαρτάται από το m ενώ το ύψος τους από το ε. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η εκτίμηση που αφορά το πόσο κοντά βρίσκονται αυτές οι δύο συναρτήσεις.

$$\varrho(\eta, \sigma) = \sup_{x \in [0.1]} \mid \eta(x) - \sigma(x) \mid = \sup_{x \in [0,1]} \mid \varepsilon \phi(mx) \mid = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τα σύνολα $\mathbf{E_n}$.

Ορίζουμε το εξής σύνολο:

$$E_n = \Big\{ f \in C[0,1] : \ \exists \ x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \quad \mid f(x+h) - f(x) \mid \leq nh \quad \forall \ h \in (0, 1-x) \Big\}.$$

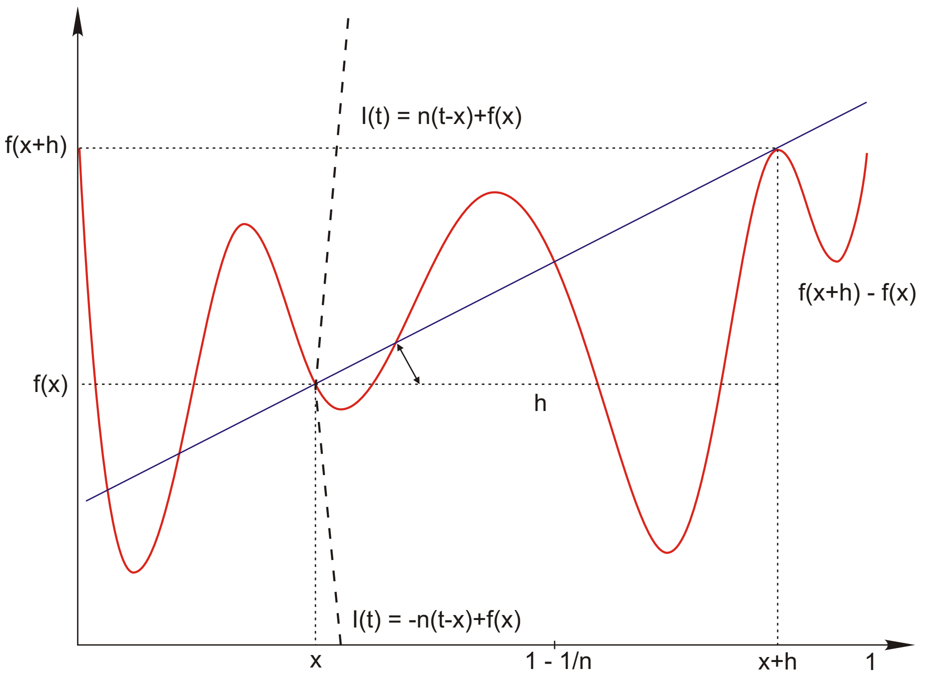
Αν πάρουμε $n = 1$ τότε το E_1 μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$E_1 = \Big\{ f \in C[0,1] : -1 \leq \frac{f(h) - f(0)}{h} \leq 1 \quad \forall \ h \in (0,1) \Big\}$$

Στο E_1 περιέχονται όλες οι συνεχείς συναρτήσει στο $[0,1]$ οι οποίες από το 0 και μετά εγκλωβίζονται μεταξύ των ευθειών $l(t) = t + f(0)$ και $l(t) = -t + f(0)$.

$$E_2 = \Big\{ f \in C[0,1] : \ \exists \ x \in [0, \frac{1}{2}] \quad -2 \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 2 \quad \forall \ h \in (0, 1-x) \Big\}.$$

Αντίστοιχα στο E_2 περιέχονται αυτές οι συναρτήσεις που από κάποιο $x \in [0, \frac{1}{2}]$ και δεξιότερα εγκλωβίζονται στην περιοχή που οριοθετούν οι ευθείες $l(t) = 2(t-x) + f(x)$ και $l(t) = -2(t-x) + f(x)$. Οι κλίσεις αυτών των ευθειών, όπως φαίνεται καθαρά από τις εξισώσεις τους, είναι 2 και -2. Γενικότερα για κάποιο μεγάλο n, μια συνάρτηση f μπορεί να συμμετέχει στο E_n αν διαθέτει κάποιο $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ ώστε από αυτό το x και δεξιότερα το γράφημα της f να βρίσκεται κάτω από την $l(t) = n(t-x) + f(x)$ και πάνω από την $l(t) = -n(t-x) + f(0)$.



Μία συνάρτηση f η οποία περιέχεται στο E_n

Παρατήρηση 2.2.1 *Παρατηρούμε ότι για πολύ μεγάλα n οι ευθείες $l(t)$ τείνουν να αποκτήσουν κατακόρυφες κλίσεις. Αυτό σημαίνει ότι οι περιορισμοί που μπορούν να επιφέρουν στο ανάπτυγμα μια συνάρτησης δεν είναι ιδιαίτερα ισχυροί και εκ πρώτης όψεως, λίγες συναρτήσεις θα μείνουν έξω από τα E_n. Αν πάρουμε δηλαδή μία τυχαία f, αυτή για να συμμετέχει σε κάποιο E_n θα πρέπει να υπάρχει κάποιο x, οσοδήποτε κοντά στο 1, ώστε από αυτό το x και δεξιότερα το γράφημα της f να περιορίζεται μεταξύ δύο "σχεδόν" κατακόρυφων ευθειών διερχόμενων του σημείου $(x, f(x))$!*

Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, το συμπλήρωμα του $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ θα περιμέναμε να περιέχει "λίγα" στοιχεία. Αυτό που θα δείξουμε στο επόμενο θεώρημα είναι ότι όχι μόνο δεν περιέχει "λίγα" στοιχεία αλλά είναι τόσο μεγάλο ώστε διαθέτει ένα G_δ και πυκνό υποσύνολο. Με αυτόν τον τρόπο θα αποδείξουμε την ύπαρξη των μη-παραγωγίσιμων συναρτήσεων, αφού αυτές θα περιέχονται σε κάποιο σύνολο που ως πυκνό, δεν θα είναι κενό.

Θεώρημα 2.2.1 *Το σύνολο $\mathcal{N}_d$ των πουθενά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[0, 1]$ είναι σύνολο $2^{ης}$ κατηγορίας.*

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει το σύνολο E_n να είναι ίσο με:

$$E_n$$

$$= \Big\{ f \in C[0,1] : \ \exists\, x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \quad | f(x+h) - f(x) | \leq nh \quad \forall\, h \in (0, 1-x) \Big\}$$

και ομοίως θεωρούμε το

$$F_n$$

$$= \Big\{ f \in C[0,1] : \ \exists\, x \in [\frac{1}{n}, 1] \quad | f(x) - f(x-h) | \leq nh \quad \forall\, h \in (0, x) \Big\}$$

ως το σύνολο των συναρτήσεων οι οποίες εγκλωβίζονται μεταξύ δύο ευθειών, κλίσης n και $-n$ αντίστοιχα από κάποιο σημείο x και αριστερά. Στη συνέχεια παίρνουμε την ένωση αυτών των δύο συνόλων

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \quad \text{και} \quad F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

και θα αποδείξουμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 2.2.2 *Το σύνολο $E \cup F$ περιέχει όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις.*

Απόδειξη: Έστω μια συνεχής συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη από τα δεξιά σε ένα σημείο $x \in [0,1)$ και η παράγωγος αυτή είναι ίση με κάποιον αριθμό $f'(x^+) \in \mathbb{R}$. Αυτό που θέλουμε να επιτύχουμε είναι να βρούμε ένα δείκτη n αρκετά μεγάλο ώστε η f να περιέχεται στο E_n. Πρώτα θα πρέπει να απαιτήσουμε να ισχύει $n \geq | f'(x^+) |$ και μετά το n να αποτελεί ένα άνω φράγμα για τα πηλίκα των διαφορών που ορίζουν το E_n. Για αυτόν τον λόγο ορίζουμε την συνάρτηση $L : [0, 1-x] \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$L(h) = \begin{cases} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h}, & h \in (0, 1-x], \\ \\ |f'(x^+)|, & h = 0. \end{cases}$$

Η L είναι συνεχής στο $(0, 1-x]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η συνέχεια της L στο 0 προκύπτει από την παραγωγισιμότητα της f στο x από τα δεξιά. Αφού λοιπόν η L είναι ορισμένη στο συμπαγές $[0, 1-x]$ θα πρέπει να παίρνει μια μέγιστη τιμή σε αυτό, ας την πούμε N. Αν επιλέξουμε $n \geq N$ και αρκετά μεγάλο ώστε $x \in [0, 1 - \frac{1}{n})$ τότε $f \in E_n$ και ***κάθε συνάρτηση $\mathbf{f \in C[0,1]}$ που παραγωγίζεται από τα δεξιά τουλάχιστον σε ένα σημείο του [0,1) θα περιέχεται σε κάποιο $\mathbf{E_n}$ και άρα $\mathbf{f \in E}$***. *Ακολουθώντας τους ίδιους συλλογισμούς συμπεραίνουμε ότι* ***κάθε συνάρτηση $\mathbf{f \in C[0,1]}$ που παραγωγίζεται από τα αριστερά τουλάχιστον σε ένα σημείο του (0,1]***

θα περιέχεται σε κάποιο $\mathbf{F_n}$ ***και άρα*** $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ *και έτσι η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε.* $\square$

Λήμμα 2.2.3 *Τα σύνολα E_n, F_n είναι κλειστά για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη: Έστω $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στο E_n που συγκλίνει σε κάποια f. Για κάθε $f_k \in E_n$ υπάρχει ένα αντίστοιχο x_k τέτοιο ώστε:

$$x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \quad \kappa\alpha\iota \quad | f_k(x_k + h) - f_k(x_k) | \leq nh \quad \forall\, h \in (0, 1 - x_k)$$

Αφού το $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ είναι συμπαγές θα υπάρχει μία υποακολουθία της $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ η οποία θα συγκλίνει σε κάποιο $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$. Επιλέγουμε την υποακολουθία αυτή και χωρίς βλάβη της γενικότητας (όπως θα προκύψει από τα παρακάτω) μπορούμε να υποθέσουμε ότι η υποακολουθία είναι η $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Οι προηγούμενες σχέσεις που ίσχυαν για την αρχική ακολουθία διατηρούνται ως έχουν αφού ισχύουν για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επιπλέον

$$| f(x+h) - f(x) | \leq | f(x+h) - f(x_k + h) | + | f(x_k + h) - f_k(x_k + h) | +$$

$$+ | f_k(x_k + h) - f_k(x_k) | + | f_k(x_x) - f(x_k) | + | f(x_k) - f(x) | \leq$$

$$\leq | f(x+h) - f(x_k + h) | + \varrho(f, f_k) + nh + \varrho(f_k, f) + | f(x_k) - f(x) |$$

Όταν $k \longrightarrow +\infty$ τότε $\varrho(f, f_k) \longrightarrow 0$ λόγω ομοιόμορφής σύγκλισης της $\{f_k\}$ και $| f(x+h) - f(x_k + h) |, | f(x_k) - f(x) | \longrightarrow 0$ λόγω συνέχειας της f στο x. Αφού τώρα $0 \leq x_k \leq 1 - \frac{1}{n}$ και $x_k \longrightarrow x$ θα έχουμε $0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$ και

$$| f(x+h) - f(x) | \leq nh \qquad \forall\, h \in [0, 1 - x]$$

που σημαίνει ότι η f ανήκει στο E_n.$\square$

Λήμμα 2.2.4 *Το $C[0,1] \backslash E_n$ είναι πυκνό.*

Απόδειξη: Έστω $f \in C[0,1]$ και $\varepsilon > 0$. Είναι γνωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί, οσοδήποτε κοντά, από κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Υποθέτω ότι h είναι μια τέτοια προσέγγιση της f για την οποία ισχύει $\varrho(f, h) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi(x) = min(x - [x], x + 1 - [x])$ και μέσω αυτής θα διαταράξουμε την γραμμικότητα της h με τέτοιο τρόπο ώστε η συνάρτηση που θα πάρουμε δεν θα περιέχεται στο E_n. Επιλέγουμε $g(x) = h(x) + \varepsilon\phi(mx)$ από όπου παίρνουμε ότι $g'(x) = h'(x) \pm \varepsilon m$. Αν *τώρα* M *είναι η μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, κλίση των γραμμικών συνιστωσών της* h *τότε από την μία θα ισχύει* $-M \le h'(x) \le M$ *ενώ από την άλλη θα θέλαμε οι κλίσεις της* g *να είναι είτε μεγαλύτερες από* n *είτε μικρότερες από* $-n$. *Επιλέγουμε τέτοιο* m *ώστε* $m\varepsilon > n + M$. *Τότε οι παρακάτω εκτιμήσεις:*

$$h'(x) + \varepsilon m > -M + \varepsilon m > n$$
$$h'(x) - \varepsilon m < M - \varepsilon m < -n$$

δίνουν οτι $g \in C[0,1]\backslash E_n$. *Τέλος, από όσα έχουν ειπωθεί πριν την διατύπωση του θεωρήματος, ισχύει* $\varrho(g,h) = \frac{\varepsilon}{2}$ *και τελικά:*

$$\varrho(f,g) \le \varrho(f,h) + \varrho(h,g) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Οπότε το $C[0,1]\backslash E_n$ *είναι πυκνό. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και το* $C[0,1]\backslash F_n$ *είναι πυκνό στον* $C[0,1]$.□

Αφού οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $[0,1]$ *περιέχονται στο* $E \cup F$, *έχουμε*

$$C[0,1]\backslash(E \cup F) \subset \mathcal{N}_d$$

και οπότε

$$\begin{aligned} C[0,1]\backslash(E \cup F) &= C[0,1]\backslash E \cup C[0,1]\backslash F \\ &= \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C[0,1]\backslash E_n\Big)\bigcup\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C[0,1]\backslash F_n\Big) \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 2.2.3 τα E_n, F_n *είναι κλειστά άρα τα* $C[0,1]\backslash E_n, C[0,1]\backslash F_n$ *είναι ανοιχτά ενώ από το Λήμμα 2.2.4 τα τελευταία είναι και πυκνά. Άρα το* $\mathcal{N}_d$ *περιέχει σύνολο* $2^{ης}$ *κατηγορίας, άρα είναι και το ίδιο* $2^{ης}$ *κατηγορίας.* □

Κεφάλαιο 3

Παραδείγματα Πουθενά Παραγωγίσιμων Συνεχών Συναρτήσεων

3.1 Κατασκευή μιας πουθενά παραγωγίσιμης συνεχούς συνάρτησης

Ο πλέον κλασικός τρόπος κατασκευής τέτοιων ιδιόμορφων συναρτήσεων είναι αυτός που η ζητούμενη συνάρτηση προκύπτει ως το ομοιόμορφο όριο κάποιας, κατάλληλα επιλεγμένης, σειράς συνεχών συναρτήσεων. Ως πρώτο παράδειγμα, βλέπε [6] σελίδα 154, παραθέτουμε μια συνάρτηση για την οποία η απόδειξη της μη παραγωγισιμότητας θεωρείται εύκολη σε σχέση με άλλα δημοφιλή παραδείγματα, δύο από τα οποία παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *η οποία για* $-1 \leq x \leq 1$ *είναι ίση με* $\psi(x) = |x|$ *και στη συνέχεια την επεντείνουμε περιοδικά στην υπόλοιπη πραγματική ευθεία. Δηλαδή έχουμε* $\psi(x+2) = \psi(x)$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$. *Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \psi(4^n x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *και θα δείξουμε ότι είναι συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.1.1 *Η συνάρτηση* Ψ *είναι συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη σε όλο το* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Για την ψ ισχύει $0 \leq |\psi(x)| \leq 1$ και άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \psi(4^n x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n < +\infty.$$

Επομένως η προηγούμενη σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\Psi(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ομοιόμορφο όριο συνεχών. Θα δείξουμε ότι η $\Psi(x)$ δεν παραγωγίζεται πουθενά. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε ακολουθία $x_m = x + \delta_m$ με $\delta_m = \pm\frac{1}{2}4^{-m}$ και το πρόσημο να είναι τέτοιο ώστε να μην περιέχεται ακέραιος ανάμεσα στους αριθμούς $4^m x$ και $4^m(x + \delta_m)$. Τότε

$$\left|\frac{\Psi(x_m) - \Psi(x)}{x_m - x}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\psi(4^n(x + \delta_m)) - \psi(4^n x)}{\delta_m}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \tag{3.1}$$

όπου $\gamma_n = \frac{\psi(4^n(x+\delta_m))-\psi(4^n x)}{\delta_m}$. Θα υπολογίσουμε το γ_n για τις διάφορες τιμές του n. Αν $n > m$ τότε ο αριθμός $4^n\delta_m$ είναι ένας άρτιος ακέραιος και αφού η ψ είναι 2-περιοδική έχουμε $\psi(4^n(x + \delta_m)) = \psi(4^n x)$ και $\gamma_n = 0$ ενώ αν $n = m$ τότε $|\gamma_m| = 4^n$. Για την ψ επιπλέον ισχύει ότι $|\psi(x) - \psi(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έτσι για $n < m$ έχουμε $\gamma_n \leq 4^n$. Η 3.1 τότε γίνεται

$$\left|\frac{\Psi(x_m) - \Psi(x)}{x_m - x}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n\right| \geq |\gamma_m| - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\gamma_n|$$

$$\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}3^m + \frac{1}{2} \longrightarrow +\infty$$

καθώς $m \longrightarrow +\infty$ και οπότε η Ψ δεν παραγωγίζεται στο x. $\square$

3.2 Η συνάρτηση του Bolzano.(~ 1830)

Το πρώτο παράδειγμα πουθενά παραγωγίσιμης συνεχούς συνάρτησης πιθανόν προέρχεται από το γνωστό Τσέχο μαθηματικό Bernard Bolzano (1781-1848). Η κατα σκευή αυτής της συνάρτησης καθώς και η απόδειξη της μη παραγωγισιμότητας περιέχονται σε ένα από τα χειρόγραφα του Bolzano εν ονόματι "functionenlehre". Το παράδειγμα αυτό, παρόλο που είχε γραφτεί γύρω στο 1830, δημοσιεύθηκε σχεδόν έναν αιώνα αργότερα, το 1930, αφού και ανακαλύφθηκε το 1920 στην Εθνική Βιβλιοθήκη της Βιέννης από τον Τσέχο μαθηματικό Martin Jasek. Για ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία και βιβλιογραφία που αφορά τον Bolzano παραπέμπουμε στα [3][8]. Συγκεκριμένα η συνάρτηση του

Bolzano γράφτηκε ως ένα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα $[a, b]$ *η οποία σε κάθε υποδιάστημα του* $[a, b]$ *δεν είναι μονότονη. Στη συνέχεια ο Bolzano απέδειξε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο είναι πυκνό στο* $[a, b]$. *Λόγω του ότι η σημερινή θεωρία περί πυκνών συνόλων δεν υπήρχε εκείνο τον καιρό, αυτό που ακριβώς έδειξε ο Bolzano ήταν ότι μεταξύ οποιονδήποτε δυο σημείων στα οποία η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται, υπάρχει ένα επιπλέον σημείο μη παραγωγισιμότητας.*

Σε σχέση με άλλα παραδείγματα μη παραγωγίσιμων συναρτήσεων που βασίζονται στην προσεγγίσεις μέσω απειροσειρών, η συνάρτηση του Bolzano προέρχεται από μια γεωμετρική κατασκευή και προκύπτει ως όριο μιας ακολουθίας, κατά τμήματα γραμμικών, συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. *Στις σελίδες που ακολουθούν περιέχεται η κατασκευή της συνάρτησης, η απόδειξη των ισχυρισμών του Bolzano και μια πλήρης απόδειξη για την συνέχεια της συνάρτησης. Επιπλέον θα αποδείξουμε ότι όντως η* B *είναι πουθενά παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.*

Η Κατασκευή της Ακολουθίας $\{\mathbf{B_n(x)}\}_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$.

Θεωρούμε δύο τυχαίες τιμές A, B *και επιλέγουμε* $B_1 : [a, b] \to [A, B]$ *να είναι η συνάρτηση με εξίσωση:*

$$B_1(x) = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A.$$

Στη συνέχεια χωρίζουμε το $I_1^{(1)} = [a, b]$ *στα ακόλουθα 4 υποδιαστήματα*

$$I_1^{(2)} = [a, a + \frac{3}{8}(b-a)]$$

$$I_2^{(2)} = [a + \frac{3}{8}(b-a), \frac{1}{2}(a+b)]$$

$$I_3^{(2)} = [\frac{1}{2}(a+b), a + \frac{7}{8}(b-a)]$$

$$I_4^{(2)} = [a + \frac{7}{8}(b-a), b]$$

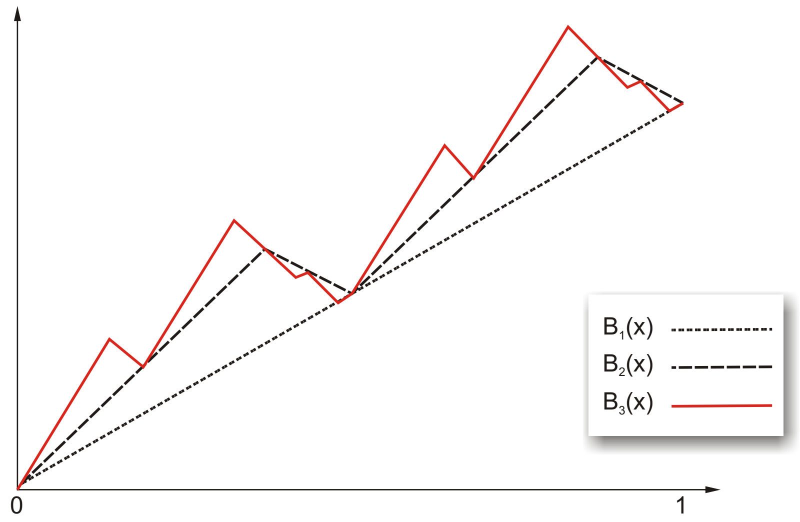
και παίρνουμε $B_2(x)$ *να είναι η κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση που στα σημεία διαμέρισης παίρνει τιμές:*

$$B_2(a) = A$$

$$B_2(a + \frac{3}{8}(b-a)) = A + \frac{5}{8}(B-A)$$

$$B_2(\frac{1}{2}(a+b)) = A + \frac{1}{2}(B-A)$$
$$B_2(a+\frac{7}{8}(b-a)) = B + \frac{1}{8}(B-A)$$
$$B_2(b) = B$$

Σε κάθε υποδιάστημα $I_i^{(2)}, i = 1,2,3,4$ *η* $B_3(x)$ *ορίζεται ακριβώς όπως η* $B_2(x)$ *στο* $I_1^{(1)}$. *Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται για κάθε φυσικό n και το όριο της ακολουθίας* $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *που σχηματίζεται είναι η συνάρτηση* $B(x)$ *του Bolzano.*



Οι τρεις πρώτοι όροι της ακολουθίας του *Bolzano* με
α = A = 0 και b = B = 1.

Θεώρημα 3.2.1 *Η συνάρτηση* $B(x)$ *του Bolzano είναι συνεχής και το σύνολο των σημείων στα οποία η* B *δεν παραγωγίζεται είναι πυκνό στο* $[a,b]$.

Απόδειξη: Πρώτα θα δείξουμε ότι η B *είναι συνεχής. Ας ορίσουμε* $C^{(n)}$ *να είναι η οικογένεια των διαστημάτων γραμμικότητας της* $B_n(x)$,

$$\mathrm{C}^{(n)} = \left\{ I_k^{(n)} : k = 1,2,...,4^{n-1} \right\}$$

και ως

$$D^{(n)} = \left\{ M_k^{(n)}, k = 1,2,...,4^{n-1} \right\}$$

το σύνολο που περιέχει τις κλίσεις κάθε γραμμικής συνιστώσας της $B_n(x)$, *σε αντιστοιχία με το ορισμό της* $C^{(n)}$. *Το πλήθος των στοιχείων αυτών των δύο συνόλων είναι* 4^{n-1} *και προφανώς* $C^{(1)} = \{[a,b]\}$ *και* $D^{(1)} = \{\frac{B-A}{b-a}\}$.

Αν υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε κάποιο διάστημα $I_k^{(n)} = [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$ *της* $B_n(x)$ *τότε η κλίση της* $B_{n+1}(x)$ *πάνω από το συγκεκριμένο διάστημα θα παίρνει 4 τιμές οι οποίες είναι ίσες με:*

$$M_{i_k}^{(n+1)} = \frac{B_n(a_k + \frac{3}{8}(b_k - a_k)) - B_n(a_k)}{a_k + \frac{3}{8}(b_k - a_k) - a_k} = \frac{\frac{5}{8}(B_k - A_k)}{\frac{3}{8}(b_k - a_k)} = \frac{5}{3}M_k^{(n)}$$

$$M_{i_k+1}^{(n+1)} = \frac{B_n(\frac{1}{2}(a_k + b_k)) - B_n(a_k + \frac{3}{8}(b_k - a_k))}{\frac{1}{2}(a_k + b_k) - a_k - \frac{3}{8}(b_k - a_k)} = \frac{-\frac{1}{8}(B_k - A_k)}{\frac{1}{8}(b_k - b_k)} = -M_k^{(n)}$$

$$M_{i_k+2}^{(n+1)} = \frac{B_n(a_k + \frac{7}{8}(b_k - a_k)) - B_n(\frac{1}{2}(a_k + b_k))}{a_k + \frac{7}{8}(b_k - a_k) - \frac{1}{2}(a_k + b_k)} = \frac{\frac{5}{8}(B_k - A_k)}{\frac{3}{8}(b_k - a_k)} = \frac{5}{3}M_k^{(n)}$$

$$M_{i_k+3}^{(n+1)} = \frac{B_n(b_k) - B_n(a_k + \frac{7}{8}(b_k - a_k))}{b_k - a_k - \frac{7}{8}(b_k - a_k)} = \frac{-\frac{1}{8}(B_k - A_k)}{\frac{1}{8}(b_k - b_k)} = -M_k^{(n)}$$

για κάποιο $i_k \in \{1, 2, ..., 4^{n-1}\}$. *Τα* a_k, b_k, A_k, B_k *αναφέρονται στην* B_n *και κανονικά θα έπρεπε να συνοδεύονται από έναν άνω δείκτη n ο οποίος όμως παραλείπεται για λόγους απλότητας. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την μέγιστη, κατά απόλυτη τιμή, κλίση της* B_n. *Από τους προηγούμενους υπολογισμούς παίρνουμε ότι αν*

$$M_n = \sup\Big\{\mid M_k^{(n)} \mid, k = 1, 2, ..., 4^{n-1}\Big\}$$

θα είναι

$$M_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \left|\frac{B - A}{b - a}\right|.$$

Αφού από κάθε διάστημα $I_k^{(n)}$ *παράγονται 4 νέα διαστήματα, 2 μήκους* $\frac{3}{8}\ell(I_k^{(n)})$ *και άλλα 2 μήκους* $\frac{1}{8}\ell(I_k^{(n)})$, *αν* L_n *είναι το μήκος του μεγαλύτερου διαστήματος στο* $C^{(n)}$ *τότε θέτοντας*

$$L_n = \sup\Big\{\ell(I_k^{(n)}) : k = 1, 2, ..., 4^{n-1}\Big\}$$

παίρνουμε

$$L_n = \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} |b - a|.$$

Έστω $I_k^{(n)} = [a_k, b_k] \in C^{(n)}$. *Τότε σε αυτό το διάστημα το γραφήματα των* B_n *και* B_{n+1} *δημιουργούν κάποια τρίγωνα σε καθένα από τα οποία η μία* *πλευρά ανήκει στο γράφημα της B_n ενώ οι άλλες 2 στο γράφημα της B_{n+1}. Η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή διαφορά $B_{n+1}(x) - B_n(x)$ φράσσεται τότε από το γινόμενο $M_{n+1}L_{n+1}$. Οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:*

$$\sup_{x\in[a,b]} |B_{n+1}(x) - B_n(x)| \leq \left(\frac{5}{8}\right)^n |B - A|.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $B_n \longrightarrow B$ ομοιόμορφα. Στην Πρόταση 2.2.1 δείξαμε ότι ο χώρος $(C[a,b], \varrho)$ είναι πλήρης, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[a,b]} |B_m(x) - B_n(x)| &\leq \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{k=n}^{m-1} |B_{k+1}(x) - B_k(x)| \right) \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{x\in[a,b]} |B_{k+1}(x) - B_k(x)| \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{5}{8}\right)^k |B - A| \\
&= |B - A| \left(\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{5}{8}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{8}\right)^k \right) \\
&\longrightarrow |B - A| \left(\frac{1}{1-\frac{5}{8}} - \frac{1}{1-\frac{5}{8}} \right) = 0
\end{aligned}$$

καθώς $m, n \longrightarrow +\infty$. Αφού οι $B_n(x)$ είναι συνεχείς η $B(x)$ πρέπει επίσης να είναι συνεχής.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο των σημείων που η $B(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη είναι πυκνό στο $[a,b]$. Θέτουμε

$$N = \{x, y \in \mathbb{R} : \exists\, n, k \in \mathbb{N} \quad [x,y] = I_k^{(n)}\}$$

Έστω $x \in [a,b]$. Θα βρούμε $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ ώστε $x_n \to x$. Αν $x \in N$ δεν έχω τίποτε να δείξω. Έστω ότι $x \in [a,b]\backslash N$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία διαστημάτων $J_n = [a_n, b_n]$ τέτοια ώστε

1. $J_n \in C^{(n)} \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
2. $x \in J_n^\circ \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ *και*
3. $\ell(J_n) \leq L_n = \left(\frac{3}{8}\right)^{n-1} |b - a|$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Cantor στην ακολουθία J_n παίρνουμε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{x\}$$

οπότε $a_n \longrightarrow x, b_n \longrightarrow x$ *καθώς* $n \longrightarrow \infty$ *και αφού* $a_n, b_n \in N$ *το* N *αποδείχθηκε πυκνό στο* $[a,b]$. *Αν δείξουμε ότι η παράγωγος της* B *σε κάθε σημείο του συνόλου* N *δεν υπάρχει τελειώσαμε. Έστω* $x \in N$. *Αν πάρουμε πρώτα την περίπτωση* $x = a$ *τότε η ακολουθία* $x_n = a + (\frac{3}{8})^n|b-a|$ *συγκλίνει στο* a. *Αφού* $x_n \in N$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *από την κατασκευή της* B_n *συμπεραίνουμε ότι* $B(x) = B_{n+1}(x_n)$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Έτσι* $B(a) = A$ *ενώ στο* x_n *παίρνει την τιμή* $B(x_n) = (\frac{5}{3})^n|\frac{B-A}{b-A}|(x_n - a) + A$ *δηλαδή* $B(x_n) = (\frac{5}{3})^n|B-A| + A$. *Τελικά*

$$\frac{B(x_n) - B(a)}{x_n - a} = \frac{(\frac{5}{3})^n|B-A|}{(\frac{3}{8})^n|b-a|} = \Big(\frac{5}{3}\Big)^n\Big|\frac{B-A}{b-a}\Big| \longrightarrow +\infty$$

καθώς $n \longrightarrow +\infty$ *και αποδείξαμε ότι η* B *δεν παραγωγίζεται στο* $x = a$. *Έστω τώρα* $x \in N \backslash \{a\}$. *Τότε το* x *θα είναι δεξί άκρο κάποιου διαστήματος* $I_k^{(p)} \in C^{(p)}$ *μήκους* ℓ_0 *για κάποιο* $p \in \mathbb{N}$. *Αυτό το διάστημα θα διαμεριστεί σε 4 νέα διαστήματα από τα οποία αυτό που θα έχει το* x *ως δεξί άκρο θα έχει μήκος* $\frac{1}{8}\ell_0$. *Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε την ακολουθία των αριστερών άκρων αυτών των διαστημάτων* $x_n = x - (\frac{1}{8})^n\ell_0$ *η οποία φυσικά συγκλίνει στο* x. *Γενικότερα θα ισχύει* $B(x_n) = B_{p+n}(x_n)$ *και αν* K *θεωρήσουμε την κλίση της* B_p *πάνω από το* $I_k^{(p)}$ *τότε η κλίση της* B_{p+1} *πάνω από το διάστημα που προκύπτει από τον διαμερισμό του* $I_k^{(p)}$ *και έχει δεξί άκρο το* x *θα είναι ίση με* $-K$. *Από αυτό συμπεραίνουμε ότι* $B(x_n) = (-1)^nK(x_n - x) + B(x)$ *με το* K *να ικανοποιεί την ανισότητα* $|K| \geq |\frac{B-A}{b-a}|$. *Αναλυτικότερα* $B(x_n) = (-1)^nK(\frac{1}{8})^n\ell_0 + B(x)$ *και*

$$\frac{B(x_n) - B(x)}{x_n - x} = \frac{(-1)^nK(\frac{1}{8})^n\ell_0}{-(\frac{1}{8})^n\ell_0} = -(-1)^nK.$$

Αφού τώρα το $(-1)^nK$ *δεν συγκλίνει η* B *δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο* $x \in N \backslash \{a\}$. *Άρα το σύνολο των σημείων μη παραγωγισιμότητας της* B *είναι πυκνό αφού, όπως αποδείξαμε, το* N *είναι υποσύνολο του και είναι επίσης πυκνό.* $\square$

Δείξαμε ότι η B *δεν παραγωγίζεται στο* N, *το οποίο* N *είναι ένα αρκετά μεγάλο υποσύνολο του* $[a,b]$. *Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο μη παραγωγισιμότητας της* B *είναι ολόκληρο το διάστημα* $[a,b]$.

Θεώρημα 3.2.2 *Η συνάρτηση* B *δεν παραγωγίζεται σε κανένα σημείο του* $[a,b]$.

Απόδειξη: Έστω $x \in [a,b] \backslash N$, όπου το N είναι το σύνολο στο οποίο έχουμε ήδη αποδείξει την μη παραγωγισιμότητα της B. Όπως και νωρίτερα υπάρχει ακολουθία κλειστών διαστημάτων $J_n = [a_n, b_n] \subset [a,b]$ που περιέχουν το x για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $a_n \longrightarrow x$ και $b_n \longrightarrow x$ καθώς $n \longrightarrow \infty$. Τότε, λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης της $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, έχουμε ότι $B(x) = \lim_{m\to\infty} B_m(x)$. Σε συνδυασμό με το ότι $B(b_n) = B_m(b_n)$, για οποιοδήποτε $m \geq n$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B(b_n) - B(x)}{b_n - x} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{B_m(b_n) - B_m(x)}{b_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n(b_n) - B_n(x)}{b_n - x}.$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$\vartheta_n = \frac{B_n(b_n) - B_n(x)}{b_n - x}$$

και θα δείξουμε ότι το όριο της ϑ_n δεν υπάρχει. Από την κατασκευή της ακολουθίας $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συμπεραίνουμε ότι $\vartheta_n = \frac{5}{3}\vartheta_{n-1}$ ή $\vartheta_n = -\vartheta_{n-1}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \vartheta_n = \frac{5}{3}\vartheta_{n-1}\}$$

και παίρνουμε δύο περιπτώσεις. Αν το A είναι πεπερασμένο τότε επιλέγουμε $n_0 = maxA$ και έτσι καταλήγουμε στην σχέση

$$\vartheta_n = (-1)^{n-n_0}\vartheta_{n_0} \qquad n \geq n_0$$

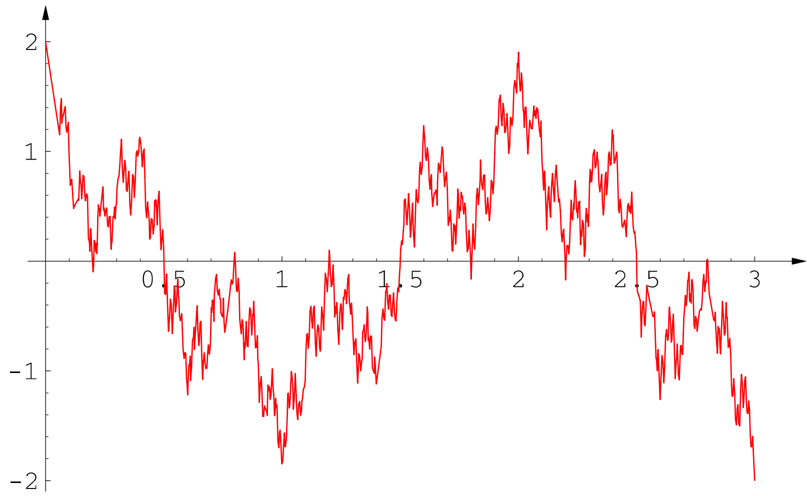
από την οποία φαίνεται ότι το όριο της ϑ_n δεν υπάρχει. Αν τώρα το σύνολο A είναι άπειρο θα υπάρχει μια υποακολουθία $\{\vartheta_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\vartheta_{n_k} = \frac{5}{3}\vartheta_{n_{k-1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και

$$|\vartheta_{n_k}| = \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} |\vartheta_{n_1}| \longrightarrow +\infty \quad , \quad k \to +\infty$$

με $|\vartheta_{n_1}| \geq \frac{B-A}{b-a}$. Αυτό σημαίνει ότι η ϑ_n είτε δεν συγκλίνει είτε αποκλίνει στο άπειρο. Οπότε σε κάθε περίπτωση η δεξιά παράγωγος της B στο x δεν μπορεί να υπάρχει. Ακολουθώντας ακριβώς τα ίδια βήματα και μέσω της ακολουθίας a_n, η οποία συγκλίνει στο x από δεξιά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ούτε η αριστερή παράγωγος της B υπάρχει, καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο. □

3.3 Η συνάρτηση του Weierstrass.(1872)

Το Ιούλιο του 1872 στο Βασιλική Ακαδημία των Επιστημών στο Βερολίνο ο Karl Weierstrass έδωσε μια διάλεξη με θέμα ένα παράδειγμα μιας συνεχούς *και πουθενά παραγωγίσιμης συνάρτησης με πεδίο ορισμού όλη την ευθεία των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση του Weierstrass ήταν το πρώτο παράδειγμα μη παραγωγίσιμης συνάρτησης που δημοσιεύτηκε, πράγμα το οποίο έγινε το 1875 από τον Paul du Bois-Reymond. Η συνάρτηση αυτή λειτούργησε επίσης και ως ένα ισχυρό αντιπαράδειγμα για τον φημισμένο εκείνης της εποχής ισχυρισμό του Ampere ο οποίος συνοπτικά ακολουθούσε την παραδοχή ότι "κάθε συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη παντού έκτος από κάποια λίγα και απομονωμένα σημεία". Η απόδειξη που ακολουθεί στο παρακάτω θεώρημα, δες [8], είναι αρκετά κοντά σε αυτή του Weierstrass.*



Η προσέγγιση της συνάρτησης του *Weierstrass* για άθροισμα 10 όρων (n = 10) με α = 0.5 και b = 5.

Θεώρημα 3.3.1 *Η συνάρτηση του Weierstrass,*

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

όπου $0 < a < 1, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ *και* $b > 1$ *περιττός ακέραιος, είναι συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Πρώτα θα δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνεχή συνάρτηση. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα μέσω του θεωρήματος ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass και της σχέσης

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a^n \cos(b^n \pi x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty$$

η οποία ισχύει λόγο της υπόθεσης $0 < a < 1$. Θα δείξουμε τώρα ότι η W είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε κατάλληλο $p_m \in \mathbb{R}$ ώστε $x_{m+1} = b^m x - p_m \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Στη συνέχεια ορίζουμε τις ακολουθίες

$$s_m = \frac{p_m - 1}{b^m} \qquad t_m = \frac{p_m + 1}{b^m}$$

και λόγω του ότι το x_{m+1} βρίσκεται πάντα στο διάστημα $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και

$$s_m - x = -\frac{1 + x_{m+1}}{b^m} < 0 < \frac{1 - x_{m+1}}{b^m} = t_m - x$$

παίρνουμε ότι $s_m < x < t_m$ και $s_m \to x$ από τα αριστερά ενώ $t_m \to x$ από τα δεξιά. Μέσω αυτών των ακολουθιών θα δείξουμε την μή παραγωγισιμότητα της W. Πρώτα παίρνουμε το πηλίκο

$$\frac{W(s_m) - W(x)}{s_m - x} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{\cos(b^n \pi s_m) - \cos(b^n \pi x)}{s_m - x} =$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\cos(b^n \pi s_m) - \cos(b^n \pi x)}{b^n (s_m - x)} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} \frac{\cos(b^{n+m} \pi s_m) - \cos(b^{n+m} \pi x)}{s_m - x} =$$
$$= S_1 + S_2.$$

Δουλεύοντας πρώτα με το S_1 και χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές σχέσεις $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$ και $|\frac{\sin(x)}{x}| \leq 1$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
|S_1| &= \left| \sum_{n=0}^{m-1} (-1)(ab)^n \pi \sin\left(\frac{b^n \pi (s_m + x)}{2}\right) \frac{\sin(\frac{b^n \pi (s_m - x)}{2})}{b^n \pi \frac{s_m - x}{2}} \right| \\
&\leq \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \leq \pi \frac{(ab)^m}{ab - 1}
\end{aligned}$$

ένα άνω φράγμα του $|S_1|$. Για το S_2 αφού το $b > 1$ είναι περιττός ακέραιος και το p_m είναι επίσης ακέραιος μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής

$$\cos(b^{n+m} \pi s_m) = \cos(b^{n+m} \pi (\frac{p_m - 1}{b^m})) = \cos(b^n \pi (p_m - 1)) =$$
$$= (-1)^{b^n}(p_m - 1) = -(-1)^{p_m}$$

και

$$\begin{aligned}
\cos(b^{n+m} \pi x) &= \cos(b^{n+m} \pi \frac{x_{m+1} + p_m}{b^m}) \\
&= \cos(b^n x_{m+1} \pi) \cos(b^n p_m \pi) - \sin(b^n x_{m+1} \pi) \sin(b^n p_m \pi) \\
&= \cos(b^n x_{m+1} \pi)(-1)^{b^n p_m} - \sin(b^n x_{m+1} \pi) \cdot 0 \\
&= (-1)^{p_m} \cos(b^n x_{m+1} \pi).
\end{aligned}$$

Οπότε για το S_2 *έχουμε*

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} \frac{-(-1)^{p_m} - (-1)^{p_m}\cos(b^n \pi x_{m+1})}{s_m - x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} [-(-1)^{p_m}] \frac{1+\cos(b^n \pi x_{m+1})}{-\frac{1+x_{m+1}}{b^n}} \\ &= (-1)^{p_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1+\cos(b^n \pi x_{m+1})}{1+x_{m+1}}. \end{aligned}$$

Εφόσον $x_{m+1} \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *οι όροι της παραπάνω σειράς είναι θετικοί, έτσι ο πρώτος από αυτούς θα είναι μικρότερος από το όριο της σειράς*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1+\cos(b^n \pi x_{m+1})}{1+x_{m+1}} \geq \frac{1+\cos(\pi x_{m+1})}{1+x_{m+1}} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \tag{3.2}$$

καταλήγοντας στην εκτίμηση $|S_2| \geq \frac{2}{3}(ab)^m$. *Στη συνέχεια έχουμε*

$$\begin{aligned} \left| \frac{W(s_m) - W(x)}{s_m - x} \right| &\geq |S_2| - |S_1| \\ &\geq \frac{2}{3}(ab)^m - \pi \frac{(ab)^m}{ab-1} \\ &= (ab)^m \Big(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \Big) \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

αφού η υπόθεση $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$ *εξασφαλίζει ότι* $(ab)^m \longrightarrow +\infty$ *και* $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} > 0$ *και συνεπώς* ***η παράγωγος της*** W ***από αριστερά στο*** $x \in \mathbb{R}$ ***δεν υπάρχει.***

Δουλεύοντας αντίστοιχα με την ακολουθία $\{t_m\}$ *διαμορφώνουμε το πηλίκο ως*

$$\frac{W(s_m) - W(x)}{t_m - x} = S_1' + S_2'$$

με τα S_1', S_2' *να προκύπτουν ακριβώς όπως τα* S_1, S_2 *προηγουμένως. Για το* S_1' *εξακολουθεί να ισχύει η εκτίμηση*

$$|S_1'| \leq \pi \frac{(ab)^m}{ab-1}$$

και για το S_2' *έχουμε*

$$S_2' = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} \frac{\cos(b^{n+m}\pi t_m) - \cos(b^{n+m}\pi x)}{t_m - x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+m} \frac{-(-1)^{p_m} - (-1)^{p_m} \cos(b^n \pi x_{m+1})}{\frac{1-x_{m+1}}{b^m}} \\
&= -(ab)^m (-1)^{p_m} \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1+\cos(b^n \pi x_{m+1})}{1-x_{m+1}}.
\end{aligned}
$$

Όπως νωρίτερα και λόγω του ότι $x_{m+1} \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *ισχύει*

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{1+\cos(b_n \pi x_{m+1})}{1-x_{m+1}} \geq \frac{1+\cos(\pi x_{m+1})}{1-x_{m+1}} \geq \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.
$$

Επομένως συμπαιρένουμε ότι

$$
|S_2'| \geq \frac{2}{3}(ab)^m
$$

και έτσι καταλήγουμε

$$
\left| \frac{W(t_m) - W(x)}{t_m - x} \right| \geq |S_2'| - |S_1'| = (ab)^m \Big(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1} \Big) \longrightarrow +\infty
$$

καθώς $m \longrightarrow +\infty$ *και οπότε* ***η παράγωγος της*** W ***από δεξιά στο*** $x \in \mathbb{R}$ ***δεν υπάρχει***. $\square$

Κεφάλαιο 4

Μια μετρο-θεωρητική προσέγγιση του $\mathcal{N}_d$

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδείχθηκε η ύπαρξη των μη παραγωγίσιμων και συνεχών συναρτήσεων και παράλληλα δόθηκε και μια εκτίμηση για το μέγεθος του συνόλου τους σε σχέση με το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων. Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο, δόθηκαν κάποια κλασικά παραδείγματα μη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθενται κάποιες επιπλέον εκτιμήσεις για το μέγεθος του $\mathcal{N}_d$ από την μέτρο-θεωρητική πλευρά και παράλληλα παρέχουμε "μια εύχρηστη μέθοδο" κατασκευής μη παραγωγίσιμων συναρτήσεων μέσω οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης. Τα αποτελέσματα που θα παραθέσουμε οφείλονται στον B. Hunt [1], βλέπε επίσης [2].

4.1 Μέτρο *Lebesgue* και πουθενά παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Το $\mathcal{N}_d$ ως σύνολο $2^{ης}$ κατηγορίας μπορεί διαισθητικά να θεωρηθεί μεγάλο σύνολο και από τοπολογικής πλευράς αυτό είναι γεγονός. Χρησιμοποιώντας το μέτρο Lebesgue θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε κάποιες προτάσεις που αφορούν επίσης το μέγεθος του $\mathcal{N}_d$ και δίνουν μια διαφορετική εικόνα για την κατανομή του μέσα στο $C[0,1]$.

Ορισμός 4.1.1 *Αν $E \subset \mathbb{R}$ τότε το εξωτερικό μέτρο Lebesque του E συμβολίζεται με $\mu^*(E)$ και ορίζεται να είναι ίσο με*

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big\}$$

όπου τα I_n είναι ανοιχτά διαστήματα πεπερασμένου μήκους.

Ορισμός 4.1.2 *Ένα $E \subset \mathbb{R}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμο αν για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Η οικογένεια των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathcal{M}$.

Ορισμός 4.1.3 *Ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ συμβολίζεται με μ και ονομάζεται **μέτρο** Lebesgue.*

Είναι γνωστό ότι το $\mathbb{Q}$ είναι σύνολο $1^{\eta\varsigma}$κατηγορίας ενώ το $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ $2^{\eta\varsigma}$ κατηγορίας. Οι αντίστοιχες εκτιμήσεις του μέτρου Lebesgue για τα παραπάνω σύνολα είναι $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ και $\mu(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \infty$ οι οποίες διαισθητικά συμφωνούν με τις προηγούμενες τοπολογικές. Το ερώτημα που προκύπτει είναι αν και και κατά πόσο το μέτρο Lebesgue συμφωνεί με την θεωρήματα κατηγορίας όπως αυτά έχουν διατυπωθεί στο κεφάλαιο 2. Η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι αρνητική και υποστηρίζεται από το γεγονός ότι στο $\mathbb{R}^n$ μπορεί κάποιος να κατασκευάσει τοπολογικά "μεγάλα" σύνολα που το μέτρο τους όμως είναι ίσο με 0. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και το σύνολο E η κατασκευή του οποίου παρατίθεται αμέσως μετά και βασίζεται στα σύνολα του Cantor.

Για $d = 4^k$, όπου k φυσικός, θεωρούμε το σύνολο $D_0 = [0, 1]$ το οποίο και χωρίζουμε σε τρία κλειστά διαδοχικά διαστήματα. Αφαιρούμε το μεσαίο από αυτά μήκους $1/d$ και παίρνουμε ως D_1 την ένωση των υπολοίπων δύο, ίσου μήκους. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και αφαιρούμε 2 διαστήματα, ένα από κάθε συνιστώσα του D_1, μήκους $1/d^2$ αυτή τη φορά, και αυτό που μένει είναι το D_2. Στο τρίτο βήμα αφαιρούμε 2^2 διαστήματα μήκους $1/d^3$ από το D_2 και έτσι φτάνουμε στο n-στο βήμα

1. *$D_n \supset D_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$\mu(D_n) = \mu(D_{n-1}) - 2^{n-1}\frac{1}{d^n}$.*

Το σύνολο

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$$

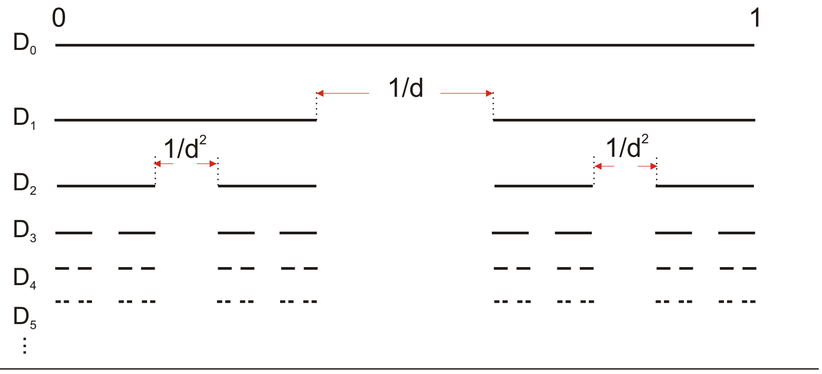
είναι ένα σύνολο Cantor το μέτρο του οποίου μπορεί να υπολογιστεί ώς εξής:

$$\mu(C) = \mu([0,1]) - \mu([0,1]\backslash C) = 1 - \Big(\frac{1}{d} + \frac{2}{d^2} + \frac{2^2}{d^3} + \ \ldots\ \Big)$$

$$= 1 - \frac{1}{d}\Big(1 + \frac{2}{d} + \Big(\frac{2}{d}\Big)^2 + \Big(\frac{2}{d}\Big)^3 + \ldots\Big) = 1 - \frac{1}{d(1-\frac{2}{d})} = 1 - \frac{1}{d-2}$$

από όπου για $d = 4^k$ έχουμε

$$\mu(C_k) = 1 - \frac{1}{4^k - 2}$$



Τα σύνολα D_n, η τομή των οποίων παράγει το σύνολο Cantor C_k.
Στην παρούσα κατασκευή το d επιλέχτηκε να είναι ίσο με 4^k.

Πρόταση 4.1.1 *Το σύνολο C_k είναι πουθενά πυκνό για κάθε $k \in \mathbb{N}$*

Απόδειξη: Το C_k είναι κλειστό ως αριθμήσιμη τομή κλειστών, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το εσωτερικό του είναι κενό. Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε υπάρχει ανοιχτό διάστημα (α, β) που περιέχεται στο C_k^o. Άρα υπάρχει ακολουθία κλειστών διαστημάτων με $(\alpha, \beta) \subset I_n \subset D_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την κατασκευή των D_n συμπεραίνουμε ότι $\ell(I_n) = \frac{1}{2^n}\mu(D_n)$ και παράλληλα παρατηρούμε ότι

$$0 \leq \frac{1}{2^n}\mu(D_n) \leq \frac{1}{2^n}\mu([0,1]) = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0.$$

Οπότε $\ell(I_n) \longrightarrow 0$ καθώς $n \longrightarrow +\infty$. Έχουμε όμως υποθέσει ότι κάθε I_n περιέχουν κάποιο ανοιχτό διάστημα και άρα $\ell(I_n) \geq \beta - \alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το οποίο μας οδηγεί σε άτοπο. Αφού τώρα το ανοιχτό $\overline{C_k}^o$ δεν περιέχει κανένα ανοιχτό διάστημα πρέπει $\overline{C_k}^o = \emptyset$.$\square$

Ορίζουμε τώρα το $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ το οποίο είναι προφανώς $1^{ης}$ κατηγορίας και το μέτρο του είναι ίσο με 1. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$\mu(C_k) \leq \mu(F) \leq \mu([0,1])$$

και αφού $\mu(C_k) = 1 - \frac{1}{4^k - 2} \longrightarrow 1$ καθώς $k \longrightarrow +\infty$ παίρνουμε το ζητούμενο $\mu(F) = 1$. Το $E = [0,1] \setminus F$ θα είναι ένα σύνολο $2^{ης}$ κατηγορίας και θα έχει μέτρο $\mu(E) = 1 - \mu(F) = 0$.

Προχωρώντας ακόμα παραπέρα βλέπουμε ότι αν διαμερίσουμε την πραγματική ευθεία σε κλειστά διαστήματα μήκους 1, $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n+1]$, *για καθένα από αυτά θα υπάρχει σύνολο* $F_n \subset [n, n+1]$, $1^{\eta\varsigma}$ *κατηγορίας με μέτρο* $\mu(F_n) = 1$. *Έτσι το* $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ *προκύπτει να είναι* $1^{\eta\varsigma}$ *κατηγορίας αφού μπορεί να γραφεί στην μορφή*

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k^{(n)} = \bigcup_{(n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} C_k^{(n)}$$

με $C_k^{(n)} = n + C_k$ *ενώ το μέτρο του* F *είναι άπειρο αφού* $\mu(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu(F_n) = +\infty$. *Έτσι αν επιλέξουμε* $E = [0,1]\backslash F$ *τότε αυτό είναι σύνολο* $2^{\eta\varsigma}$ *κατηγορίας με μέτρο* $\mu(E) = 0$.

Θέλοντας τώρα να συσχετίσουμε το σύνολο $\mathcal{N}_d$ *με το μέτρο Lebesgue θα χρησιμοποιήσουμε την γραμμικότητα του χώρου των συνεχών συναρτήσεων γιατί ως γνωστόν ο χώρος* $C[0,1]$ *είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το* $\mathbb{R}$. *Συγκεκριμένα στις επόμενες σελίδες θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν δύο συναρτήσεις* $g, h \in \mathcal{N}_d$ *τέτοιες ώστε για κάθε* $f \in C[0,1]$ *να ισχύει*

$$f(x) + \alpha g(x) + \beta h(x) \in \mathcal{N}_d$$

και αυτό σχεδόν για κάθε $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. *Αν δούμε τις συναρτήσεις* g, h *ως βάση κάποιου διανυσματικού υπόχωρου του* $C[0,1]$, *τότε αυτό που παράγουν είναι κάποιου είδους "επιπέδου" διάστασης 2. Σε αυτό το επίπεδο, δηλαδή στο* $P = \{\alpha g(x) + \beta h(x) : (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$, *αλλά και σε κάθε μεταφορά* $f + P$ *αυτού, "σχεδόν όλες" οι συναρτήσεις είναι μη παραγωγίσιμες. Αφού τώρα οι παράλληλες μεταφορές* $f + P$ *εξαντλούν όλο το* $C[0,1]$ *μπορούμε να ισχυριστούμε ότι διαθέτουμε μια ιδιόμορφη αλλά ουσιαστική εκτίμηση, από την πλευρά του μέτρου Lebesque, για το μέγεθος του* $\mathcal{N}_d$ *σε σχέση με το* $C[0,1]$.

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι η διάσταση του P *είναι η ελάχιστη δυνατή. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω πρόταση δεν θα μπορούσε να ισχύει για μεταφορές υπόχωρου διάστασης 1. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, ας πούμε από τον χώρο που παράγει κάποια* $g \in \mathcal{N}_d$, *επιλέγοντας* $f(x) = -xg(x)$ *η συνάρτηση* $f(x) + \alpha g(x) = (\alpha - x)g(x)$ *θα είναι παραγωγίσιμη στο* $x = \alpha$ *για κάθε* $\alpha \in [0,1]$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού θα χρειαστούμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 4.1.2 *Υπάρχει σταθερά* $c > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *και για κάθε κλειστό* $I \subset [0,1]$ *με* $\ell(I) = \varepsilon < \frac{1}{2}$ *ισχύει το εξής*

$$\max_{x\in I}(\alpha g(x) + \beta h(x)) - \min_{x\in I}(\alpha g(x) + \beta h(x)) \geq c\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{(log\varepsilon)^2}$$

όπου

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2^n \pi x) \qquad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(2^n \pi x)$$

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 4.1.4 *Αν $I \subset [0,1]$ είναι ένα κλειστό διάστημα μήκους $\ell(I) = 2^{-m}$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση f ισχύει η ανισότητα*

$$\max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x) \geq 2^m \pi \int_I f(x) \cos(2^{m+m_0}\pi x + \phi) dx$$

για κάθε $m_0 \in \mathbb{N}$ και κάθε $\phi \in [0, 2\pi)$.

Απόδειξη: Επιλέγουμε πραγματικό αριθμό η τέτοιον ώστε

$$\max_{x\in I}(f(x) + \eta) = -\min_{x\in I}(f(x) + \eta) = M.$$

Αφού η συνάρτηση $\cos(2^{m+m_0}\pi x + \phi)$ έχει περίοδο $T = \frac{2^{-m}}{2^{m_0-1}}$ και το μήκος του I είναι $2^{m_0+1}T$ (πολλαπλάσιο της περιόδου) το ολοκληρωμά της πάνω από το I θα είναι 0, έχουμε

$$2^m \pi \int_I f(x) \cos(2^{m+m_0}\pi x + \phi) dx = 2^m \pi \int_I (f(x) + \eta) \cos(2^{m+m_0}\pi x + \phi) dx$$

$$\leq 2^m \pi M \int_I |\cos(2^{m+m_0}\pi x + \phi)| dx = 2^m \pi M 2^{-m} \frac{2}{\pi} = 2M$$

$$= \max_{x\in I}(f(x) + \eta) - \min_{x\in I}(f(x) + \eta) = \max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x)$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.1.4 υποθέτοντας αρχικά ότι $\ell(I) = 2^{-m}$ και για $f(x) = \alpha g(x) + \beta h(x)$ η οποία είναι ίση με

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Big\{ \alpha \cos(2^n \pi x) + \beta \cos(2^n \pi x) \Big\} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2^n \pi x + \theta)$$

για κάποιο $\theta \in [0, 2\pi)$ που εξαρτάται μόνο από τα α, β. Οπότε υποθέτοντας προσωρινά ότι $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ και παίρνοντας $\phi = \theta$, έχουμε

$$\max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x) \geq 2^m \pi \int_I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(2^n \pi x + \theta) \cos(2^{m+m_0}\pi x + \theta) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^m \pi}{2n^2} \Big\{ \int_I \cos((2^{m+m_0} + 2^n)\pi x + 2\theta) dx + \int_I \cos((2^{m+m_0} - 2^n)\pi x) dx \Big\}.$$

Μένει να υπολογίσουμε δυό ολοκληρώματα, πάνω από το I, συναρτήσεων της μορφής $\cos((2^{m+m_0} + \omega)\pi x + \phi)$ όπου $\omega = \pm 2^n$ και $\phi = 0$ ή 2θ.

Αν $n > m$ τότε $n = m + M$ και

$$\int_I \cos((2^{m+m_0} + 2^n)\pi x + 2\theta) dx = \int_I \cos(2^m(2^{m_0} + 2^M)\pi x + 2\theta) dx = 0$$

αφού το μήκος του I είναι ακεραιο παλλαπλάσιο της περιόδου, ενώ

$$\int_I \cos((2^{m+m_0} - 2^n)\pi x) dx = \int_I \cos(2^m(2^{m_0} - 2^M)\pi x) dx = \begin{cases} 0 \;, & M \neq m_0, \\ 2^{-m}, & M = m_0 \end{cases}.$$

Για $n \leq m$ χρησιμοποιούμε την παρακάτω ανισότητα όπου ως y θεωρούμε το αριστερό ακρό του I

$$\int_I \cos((2^{m+m_0} + \omega)\pi x + \phi)$$

$$= \frac{\sin((2^{m+m_0} + \omega)\pi y + (2^{m+m_0} + \omega)\pi 2^{-m} + \phi) - \sin((2^{m+m_0} + \omega)\pi y + \phi)}{2^{m+m_0} + \omega}$$

$$= \frac{\sin((2^{m+m_0} + \omega)\pi y + \omega\pi 2^{-m} + \phi) - \sin((2^{m+m_0} + \omega)\pi y + \phi)}{2^{m+m_0} + \omega}$$

$$\geq -\frac{|2^{-m}\pi\omega|}{(2^{m+m_0} + \omega)\pi} = -\frac{|\omega|}{2^m(2^{m+m_0} + \omega)}.$$

Ετσι η αρχική εκτίμηση παίρνει την μορφή

$$\max_{x \in I} f(x) - \min_{x \in I} f(x)$$

$$\geq \frac{2^m \pi}{2(m+m_0)^2}(2^{-m} + 0) - \sum_{n=1}^{m} \frac{2^m \pi}{2n^2} \Big\{ \frac{2^n}{2^m(2^{m+m_0} + 2^n)} + \frac{2^n}{2^m(2^{m+m_0} - 2^n)} \Big\}$$

$$= \frac{\pi}{2(m+m_0)^2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{2^n \pi}{2n^2} \Big\{ \frac{1}{2^{m+m_0} + 2^n} + \frac{1}{2^{m+m_0} - 2^n} \Big\}$$

$$\geq \frac{\pi}{2(m+m_0)^2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{2^n \pi}{2n^2} \frac{2}{2^{m+m_0} - 2^n}$$

$$\geq \frac{\pi}{2(m+m_0)^2} - \frac{\pi}{2^m(2^{m_0} - 1)} \sum_{n=1}^{m} \frac{2^n}{n^2}.$$

Για να βελτιώσουμε τώρα την ανισότητα υποστηρίζουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{2^n}{n^2} \leq 5\frac{2^m}{m^2}$$

το οποίο φανερά ισχύει για $m = 1, 2, 3, 4$ *ενώ για μεγαλύτερους φυσικούς μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά μέσω της ανισότητας* $(m-1)^2 \geq (16/25)m^2$. *Έτσι λοιπόν έχουμε*

$$\max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x) \geq \frac{\pi}{2(m+m_0)^2} - \frac{5\pi}{(2^{m_0}-1)m^2}$$

όπου άν επιλέξουμε $m_0 = 10$ *και* $m \geq 2$ *καταλήγουμε στην*

$$\max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x) \geq \frac{\pi}{2(m+10)^2} - \frac{5\pi}{(2^10-1)m^2}$$

$$\geq \frac{\pi}{2(6m)^2} - \frac{\pi}{200m^2} = \frac{2\pi}{225m^2}.$$

Αν $I \subset [0,1]$ *είναι ένα κλειστό διάστημα μήκους* $\ell(I) = \varepsilon < \frac{1}{2}$ *υπάρχει κάποιος φυσικός* $m \geq 2$ *τέτοιος ώστε* $2^m \leq \varepsilon < 2^{1-m}$. *Τότε για κάθε κλειστό διάστημα* $J \subset I$ *μήκους* $\ell(J) = 2^{-m}$ *ισχύει*

$$\max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x) \geq \max_{x\in J} f(x) - \min_{x\in J} f(x) \geq$$

$$\geq \frac{2\pi}{225m^2} \geq \frac{\pi}{450(m-1)^2} \geq \frac{(\log 2)^2\pi}{450(\log\varepsilon)^2}.$$

Θέτωντας $c = \frac{(\log 2)^2\pi}{450}$ *και επαναφέροντας τον όρο* $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ *καταλήγουμε στην ζητούμενη ανισότητα*

$$\max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x) \geq c\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(\log\varepsilon)^2}.$$

$\square$

Έστω τώρα μια συνάρτηση $f \in C[0,1]$. *Αν για κάποιο* $x \in [0,1]$ *υπάρχει σταθερός αριθμός* M *τέτοιος ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \qquad \text{για κάθε } y \in [0,1]$$

τότε η f *λέγεται* $M-Lipschitz$ *στο* x. *Όπως ήδη έχουμε αποδείξει στην παράγραφο 2.2. κάθε συνάρτηση* f *η οποία παραγωγίζεται σε κάποιο σημείο*

$x \in [0,1]$ *οφείλει στο ίδιο σημείο να ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz για κάποια σταθερά* $M > 0$. *Έτσι το σύνολο όλων των σημείων που παραγωγίζεται η* f *είναι υποσύνολο εκείνου του συνόλου που περιέχει τα σημεία Lipschitz της* f. *Σε αυτήν την παρατήρηση βασίζεται η απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.*

Θεώρημα 4.1.5 *(B. Hunt) Υπάρχουν συναρτήσεις* $g, h \in \mathcal{N}_d$ *τέτοιες ώστε για κάθε* $f \in C[0,1]$, *η συνάρτηση* $f + \alpha g + \beta h$ *είναι πουθενά παραγωγίσιμη σχεδόν για κάθε* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη: Καταρχήν οι δύο συναρτήσεις g, h *είναι αυτές ακριβώς που ορίστηκαν νωρίτερα στην Πρόταση 4.1.2. Θεωρούμε τώρα τα σύνολα*

$$S = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{η } f + \alpha g + \beta h \text{ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο } x \in [0,1]\Big\}$$

$$T = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{η } f + \alpha g + \beta h \text{ είναι Lipschitz σε κάποιο } x \in [0,1]\Big\}.$$

Προφανώς έχουμε ότι $S \subset T$ *και για να δείξουμε ότι* $\mu(S) = 0$ *αρκεί* $\mu^*(S) = 0$ *γιατί κάθε σύνολο εξωτερικού μέτρου 0 είναι Lebesgue μετρήσιμο και το μετρό του είναι 0. Τώρα για να είναι* $\mu^*(S) = 0$, *αρκεί* $\mu^*(T) = 0$ *με το* T *να αναλύεται σε*

$$T = \bigcup_{M>0} T_M$$

όπου στο T_M *περιέχονται όλες οι συναρτήσεις που είναι* $M -$ *Lipschitz σε κάποιο* $x \in [0,1]$. *Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε* $T = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T_m$ *όπου τα* T_m *ορίζονται από τη σχέση*

$$T_m = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{η } f + \alpha g + \beta h \text{ είναι } m - \text{Lipschitz σε κάποιο } x \in [0,1]\Big\}$$

και αυτό που προφανώς θα προσπαθήσουμε να δείξουμε τώρα είναι ότι $\mu^*(T_m) = 0$ *για κάθε* m.

Σταθεροποιούμε κάποιο $m \in \mathbb{N}$, *χωρίζουμε το* $[0,1]$ *σε* N *ίσα κλειστά διαδοχικά διαστήματα* $\{I_n\}_{n=1}^N$ *μήκους* $\ell(I_n) = \varepsilon = 1/N$ *και ορίζουμε το σύνολο*

$$J_n = \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{η } f + \alpha g + \beta h \text{ είναι } m - \text{Lipschitz σε κάποιο } x \in I_n\Big\}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $T_m = \bigcup_{n=1}^N J_n$ *θα δείξουμε ότι τα* J_n *περιέχονται σε δίσκους ακτίνας* $c\varepsilon(log\varepsilon)^2$ *για μία σταθερά* c *ανεξάρτητη των* I_n, ε. *Τότε θα έχουμε δείξει ότι το* T_m *μπορεί να καλυφθεί από* N *το πλήθος ανοιχτούς δίσκους το εμβαδόν των οποίων μηδενίζεται καθώς το* N *αυξάνει προς το* $+\infty$. *Έστω*

$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in J_n$, $F_i = f + \alpha_i g + \beta_i h$ για $i = 1, 2$ και υποθέτουμε $x_i \in I_n$ να είναι το αντίστοιχο σημείο στο οποίο η F_i είναι $m - Lipschitz$. Τότε για κάθε $x \in I_n$ έχουμε

$$|F_i(x) - F_i(x_i)| \leq m|x - x_i| \leq m\varepsilon \qquad i = 1, 2.$$

Μέσω της ανισότητας $|x - y| \leq |x| + |y|$ παίρνουμε

$$|F_1(x) - F_2(x) - (F_1(x_1) - F_2(x_2))| \leq 2m\varepsilon \quad \text{για κάθε } x \in I_n$$

και συνεπώς

$$\max_{x \in I_n}(F_1 - F_2) - \min_{x \in I_n}(F_1 - F_2) \leq 4m\varepsilon.$$

Παρατηρώντας ότι $F_1 - F_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)g + (\beta_1 - \beta_2)h$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα της Πρότασης 4.1.2 καταλήγουμε στην

$$c\frac{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2}}{(\log \varepsilon)^2} \leq 4m\varepsilon$$

ή ισοδύναμα

$$\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2} \leq \frac{4m}{c}\varepsilon(\log \varepsilon)^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε J_n περιέχεται σε κάποιον δίσκο εμβαδού $2\pi(\frac{4m}{c}\varepsilon(\log \varepsilon)^2)^2$ και έτσι έχουμε

$$\mu^*(T_m) \leq \sum_{n+1}^{N} \mu^*(J_n) \leq Cm\varepsilon(\log \varepsilon)^4 \longrightarrow 0 \quad \text{καθώς } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

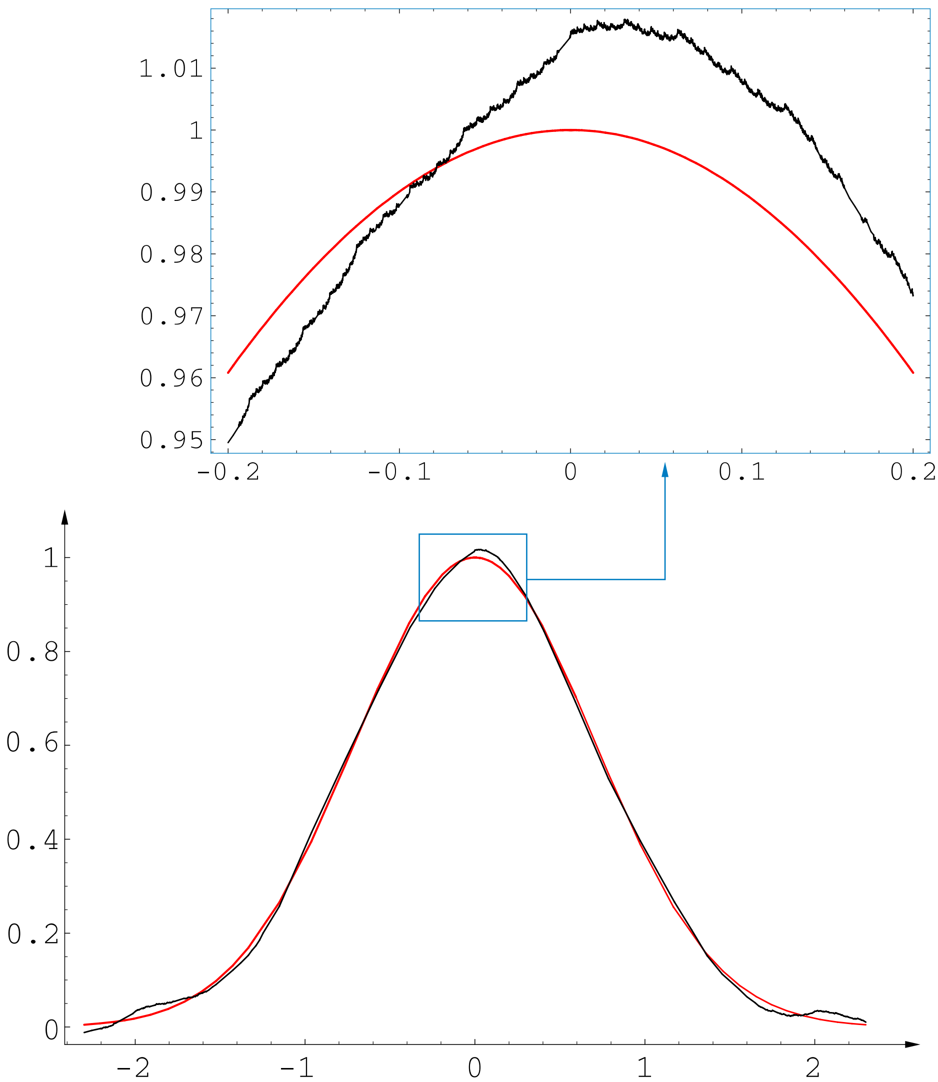
Άρα $\mu^*(S) = 0$. $\square$

Μέχρι στιγμής έχουμε στα χέρια μας κάποια συγκεκριμένα στοιχεία του $\mathcal{N}_d$ και είναι λογικό μέσω αυτών να προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε περισσότερες συνεχείς και μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αφού το $\mathcal{N}_d$ είναι $2^{ης}$ κατηγορίας από την Πρόταση 2.1.6 έχουμε $\mathcal{N}_d + \mathcal{N}_d = C[0, 1]$, από όπου παρατηρούμε ότι προσθέτοντας μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις μπορείς κανείς να πάρει οποιοδήποτε στοιχείο του $C[0.1]$.

Αφού η πρόσθεση δεν διατηρεί την μη παραγωγισιμότητα στηριζόμαστε στο Θεώρημα 4.1.5 για να παράγουμε νέες μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι f είναι μια οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση και παίρνουμε την $F = f + \alpha g + \beta h$. Αφού οι g, h είναι φραγμένες θα είναι $|g(x)| \leq M_1$ και $|h(x)| \leq M_2$ για κάποια $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$. Έτσι παίρνουμε

$$|F(x) - f(x)| = |\alpha g(x) + \beta h(x)| \leq |\alpha|M_1 + |\beta|M_2$$

και επιλέγοντας πολύ μικρά α, β *μπορούμε να προσεγγίσουμε την* f *όσο καλά θέλουμε με μία μη παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η επιλογή βέβαια των* α, β *δεν μπορεί να είναι οποιαδήποτε: σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.3 για κάθε τέτοια συνάρτηση* f *που θα διαλέξω υπάρχει ένα σύνολο* $E \subset \mathbb{R}^2$ *έτσι ώστε αν επιλέξω* $(\alpha, \beta) \in E$ *η συνάρτηση* $f + \alpha g + \beta h$ *δεν θα είναι αναγκαστικά μη παραγωγίσιμη. Το γεγονός όμως ότι το μέτρο Lebesgue του* E *είναι* 0 *μας εξασφαλίζει ότι η "πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο είναι* 0*". Έτσι σχεδόν σίγουρα η συνάρτηση* $f + \alpha g + \beta h$ *θα είναι μη παραγωγίσιμη. Ως παράδειγμα παίρνουμε μια μη παραγωγίσιμη προσέγγιση της* $f(x) = e^{-x^2}$ *η μορφή της οποίας φαίνεται στο σχήμα στην επόμενη σελίδα.*



Μια μη παραγωγίσιμη και συνεχής προσέγγιση της Gaussian,
με α = 0.01, β = 0.012 και n = 20.

Βιβλιογραφία

[1] *B.R. Hunt, The Prevalence of Continuous Nowhere Differentiable Functions, Proceedings of the American Mathematical Society* ***122*** *(1994), 711-717.*

[2] *B.R. Hunt, T. Sauer and J.A. Yorke , Prevalence:A Translation-Invariant "Allmost Every" on Infinite-Dimentional Spaces, Bulletin of the A.M.S.* ***27*** *(1992), 217-238.*

[3] *M. Hyskova, Karel Rychlik and Bernard Bolzano, unpublished.*

[4] *J.R. Munkres, Topology, A First Course, Prentice-Hall, Inc (1975).*

[5] *J.C. Oxtoby, Measure and Category, Springer-Verlag (1970).*

[6] *W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGRAW-HILL (1976).*

[7] *W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGRAW-HILL (1987).*

[8] *J. Thim, Master Thesis: Continuous Nowhere Differentiable Functions, LULEA University of Technology (2003).*