# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ. ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**ΑΝΤΩΝΗΣ ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΣ**
Μαθηματικός – Συγγραφέας – μέλος του Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. – Πρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής του περιοδικού «Ευκλείδης Β΄»

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ. ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Υπενθυμίζουμε ότι:

**α)** Στο Λύκειο το σύμβολο $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ορίζεται μόνο όταν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τους αριθμούς α και β. Η μεταβλητή x ανήκει στο διάστημα αυτό και ονομάζεται **μεταβλητή της ολοκλήρωσης.**

**β)** Το σύμβολο $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, όταν ορίζεται, παριστάνει ένα πραγματικό αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από τη συνάρτηση f και τους αριθμούς α και β και όχι από τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης x, η οποία, λόγω αυτού, ονομάζεται και **βουβή μεταβλητή**. Έχουμε λοιπόν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\omega)d\omega = \ldots$$

## 2. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$. Τότε, ορίζεται στο Δ η συνάρτηση:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt.$$

Στο συμβολισμό αυτό βλέπουμε δύο μεταβλητές, το x και το t. Το x διατρέχει το διάστημα Δ και είναι η μεταβλητή της συνάρτησης F. Το t είναι η μεταβλητή της ολοκλήρωσης (βουβή μεταβλητή) και για το ολοκλήρωμα, κάθε άλλο γράμμα, μηδέ εξαιρουμένου του x, θεωρείται σταθερά.

Αποδεικνύεται το εξής θεώρημα:

**Θεώρημα. Η παραπάνω συνάρτηση F είναι μία παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή, η F είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:**

$$\mathbf{F'(x) = f(x),\ \forall x \in \Delta}.$$

Έτσι, κάθε συνάρτηση f που είναι ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο Δ (μία παράγουσα αυτής είναι η παραπάνω συνάρτηση F).

Με βάση το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται εύκολα το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού Λογισμού, που είναι το εξής:

**Θεώρημα.** **Αν f είναι μία συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και G είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε για κάθε α, β $\in$ Δ ισχύει:**

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha).$$

Σημειώνουμε ότι, όλες οι συναρτήσεις που ορίζονται από ολοκληρώματα δεν μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των στοιχειωδών συναρτήσεων (πολυωνυμικές, ρητές, εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές). Για παράδειγμα, μια τέτοια συνάρτηση είναι η ονομαζόμενη «συνάρτηση σφάλματος»:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}dt,$$

η οποία είναι πολύ χρήσιμη στις πιθανότητες, στη θεωρία διάδοσης της θερμότητας, στη θεωρία διάδοσης σημάτων κτλ.

– Στη συνέχεια, θα δούμε πώς βρίσκουμε το σύνολο ορισμού και την παράγωγο μιας συνάρτησης που ορίζεται από ολοκλήρωμα. Θα θεωρήσουμε γνωστή μόνο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου.

## 3. ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

**Πρόβλημα.** **Να βρεθεί το σύνολο ορισμού και η παράγωγος της συνάρτησης:**

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt,$$

**όπου f, g και h δοσμένες συναρτήσεις.**

Ειδικές περιπτώσεις είναι οι συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt \quad \text{και} \quad F(x) = \int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt.$$

**Σύνολο ορισμού της συνάρτησης F.**

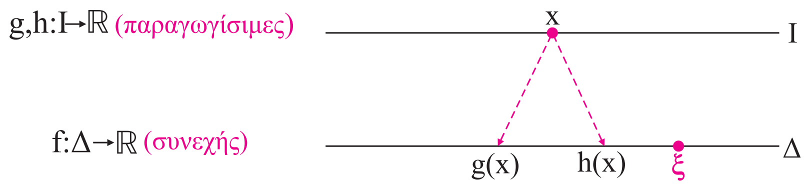
Βρίσκουμε το σύνολο A στο οποίο η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής. Μετά, βρίσκουμε το σύνολο ορισμού B της g και το σύνολο ορισμού Γ της h.

- **Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της F αν, και μόνο αν, $x \in (B \cap \Gamma)$ και η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τους αριθμούς h(x) και g(x).**

**Παράγωγος της συνάρτησης F.**

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη και **συνεχής** σ' ένα **διάστημα** Δ και οι συναρτήσεις g και h είναι ορισμένες και **παραγωγίσιμες** σ' ένα **σύνολο** I και ισχύουν: $g(x) \in \Delta$ και $h(x) \in \Delta$, για κάθε $x \in I$.

Σχηματικά:




Τότε, η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο I. Για να βρούμε την παράγωγο της F εργαζόμαστε με ένα από τους παρακάτω τρόπους:

**Πρώτος τρόπος.** Θεωρούμε ένα αριθμό $\xi \in \Delta$. Έχουμε, για κάθε $x \in I$:

$$F(x) = \int_{h(x)}^{\xi} f(t)dt + \int_{\xi}^{g(x)} f(t)dt = -\int_{\xi}^{h(x)} f(t)dt + \int_{\xi}^{g(x)} f(t)dt .$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \int_{\xi}^{x} f(t)dt, \quad x \in \Delta \text{, οπότε: } \varphi'(x) = f(x), \ \forall x \in \Delta .$$

Έτσι, έχουμε στο I:

$$F(x) = -\varphi(h(x)) + \varphi(g(x)) .$$

Συνεπώς, έχουμε στο I:

$$F'(x) = -\varphi'(h(x)) \cdot h'(x) + \varphi'(g(x)) \cdot g'(x) = -f(h(x)) \cdot h'(x) + f(g(x)) \cdot g'(x) .$$

**Δεύτερος τρόπος.** Έστω ότι G είναι μία παράγουσα της f στο Δ, οπότε:

$$G'(t) = f(t), \ \forall t \in \Delta .$$

Έτσι, έχουμε στο I:

$$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = G(g(x)) - G(h(x)) .$$

Συνεπώς, έχουμε στο I:

$$F'(x) = G'(g(x)) \cdot g'(x) - G'(h(x)) \cdot h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x) .$$

## 4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

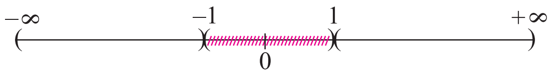
**Παράδειγμα 1.** **Να βρείτε το σύνολο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης:**

$$\mathbf{F(x) = \int_{0}^{x} \frac{\eta\mu t}{t^2 - 1} dt} .$$

**Λύση.**

**Σύνολο ορισμού.** Η συνάρτηση: $f(t)=\dfrac{\eta\mu t}{t^2-1}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο σύνολο:

$A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.




Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της συνάρτησης F αν, και μόνο αν, η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τους αριθμούς 0 και x. Προς τούτο πρέπει και αρκεί: $-1<x<1$. Άρα το σύνολο ορισμού της F είναι: $A_F=(-1,1)$.

**Παράγωγος.** Η παράγωγος της F στο $A_F$ είναι:

$$F'(x)=f(x)=\frac{\eta\mu x}{x^2-1}.$$

**Σημείωση.** Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$F(x)=\int_{-2}^{x}\frac{\eta\mu t}{t^2-1}dt \quad \text{είναι} \quad A_F=(-\infty,-1)$$

και της συνάρτησης:

$$F(x)=\int_{3}^{x}\frac{\eta\mu t}{t^2-1}dt \quad \text{είναι} \quad A_F=(1,+\infty).$$

Η παράγωγος των συναρτήσεων αυτών στα σύνολα ορισμού τους, είναι:

$$F'(x)=\frac{\eta\mu x}{x^2-1}.$$

**Παράδειγμα 2.** **Να βρείτε το σύνολο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης:**

$$\mathbf{F(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}}\sqrt{9-t^2}\cdot\eta\mu t\,dt.}$$

**Λύση.**

**Σύνολο ορισμού.** Η συνάρτηση:

$$f(t)=\sqrt{9-t^2}\cdot\eta\mu t$$

είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα:

$\Delta=[-3,3]$.


Η συνάρτηση: $g(x)=\sqrt{x}$ είναι ορισμένη στο σύνολο $B=[0,+\infty)$.

Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της συνάρτησης F αν, και μόνο αν, $x\in B$ και η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τους αριθμούς 1 και $g(x)=\sqrt{x}$. Προς τούτο πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ -3\leq\sqrt{x}\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 9\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 9.$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της F είναι $A_F=[0,9]$.

**Παράγωγος.** Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Έτσι, η F είναι παραγωγίσιμη στο $I=(0,+\infty)\cap[0,9]=(0,9]$.

Έστω G μία παράγουσα της f στο Δ, οπότε:

$$G'(t)=f(t)=\sqrt{9-t^2}\cdot\eta\mu t,\ \forall t\in\Delta.$$

Έτσι, έχουμε στο I:

$$F(x)=\int_1^{\sqrt{x}}f(t)dt=G(\sqrt{x})-G(1).$$

Συνεπώς, έχουμε στο I:

$$F'(x)=G'(\sqrt{x})(\sqrt{x})'=\sqrt{9-x}\cdot\eta\mu\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{9-x}}{2\sqrt{x}}\cdot\eta\mu\sqrt{x}.$$

Εξετάζουμε τώρα τη (δεξιά) παράγωγο στο 0. Έχουμε:

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\ (\text{μορφή } \frac{0}{0})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(F(x)-F(0)\right)'}{(x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{9-x}}{2}\cdot\frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=\frac{3}{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι:

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{9-x}}{2\sqrt{x}}\cdot\eta\mu\sqrt{x}, & \text{αν } 0<x\leq 9\\ \dfrac{3}{2}, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

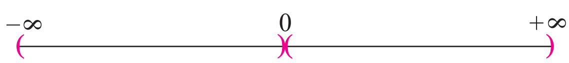
**Παράδειγμα 3.** **Να βρείτε το σύνολο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης:**

$$\mathbf{F(x)=\int_{\frac{1}{x-1}}^{x-2}e^t\ln|t|dt}.$$

**Λύση.**

**Σύνολο ορισμού.** Η συνάρτηση $f(t)=e^t\ell n|t|$ είναι ορισμένη και συνεχής στο σύνολο:

$A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.



Η συνάρτηση $g(x)=x-2$ είναι ορισμένη στο $B=\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$ είναι ορισμένη στο $\Gamma=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Έχουμε:

$$B\cap\Gamma=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της συνάρτησης F αν, και μόνο αν, $x\in(B\cap\Gamma)$ και η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα τους αριθμούς h(x) και g(x). Προς τούτο, πρέπει και αρκεί:

$$\left(\begin{cases}x\neq 1\\ x-2<0\\ \dfrac{1}{x-1}<0\end{cases} \text{ή } \begin{cases}x\neq 1\\ x-2>0\\ \dfrac{1}{x-1}>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq 1\\ x<2\\ x<1\end{cases}\text{ή }\begin{cases}x\neq 1\\ x>2\\ x>1\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x<1\ \text{ ή }\ x>2).$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της F είναι: $A_F=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

**Παράγωγος. i) Παράγωγος στο $I_1=(-\infty,1)$.** Οι συναρτήσεις $g(x)=x-2$ και $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$ είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $I_1$ και οι τιμές τους ανήκουν στο $\Delta_1=(-\infty,0)$, για κάθε $x\in I_1$. Έτσι, η F είναι παραγωγίσιμη στο $I_1$.

Θεωρούμε ένα αριθμό $\xi\in(-\infty,0)=\Delta_1$. Έχουμε για κάθε $x\in I_1$:

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x-1}}^{x-2}f(t)dt=\int_{\frac{1}{x-1}}^{\xi}f(t)dt+\int_{\xi}^{x-2}f(t)dt=-\int_{\xi}^{\frac{1}{x-1}}f(t)dt+\int_{\xi}^{x-2}f(t)dt.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\int_{\xi}^{x}f(t)dt,\ \ x\in(-\infty,0),\ \text{οπότε: } \varphi'(x)=f(x),\ \forall x\in(-\infty,0).$$

Έτσι, έχουμε στο $I_1$:

$$F(x)=-\varphi\left(\frac{1}{x-1}\right)+\varphi(x-2).$$

Συνεπώς, έχουμε στο $I_1$:

$$F'(x)=-\varphi'\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)'+\varphi'(x-2)(x-2)'=\frac{1}{(x-1)^2}f\left(\frac{1}{x-1}\right)+f(x-2)$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}\ln\left|\frac{1}{x-1}\right|+e^{x-2}\ln|x-2|.$$

**ii) Παράγωγος στο $I_2=(2,+\infty)$.** Εργαζόμαστε όμοια και βρίσκουμε τον ίδιο τύπο.

## 5. ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

### Θέμα 1.

**Θεωρούμε τη συνάρτηση:**

$$\mathbf{F(x)=\int_1^x\left(\int_1^t\sqrt{\omega^2-1}\cdot d\omega\right)dt}.$$

**α) Να βρείτε το σύνολο ορισμού της F.**

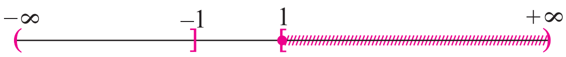
**β) Να δείξετε ότι η F είναι γνησίως μονότονη και κυρτή.**

**Λύση. α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(t)=\int_1^t\sqrt{\omega^2-1}\cdot d\omega.$$

Επειδή η συνάρτηση: $\varphi(\omega)=\sqrt{\omega^2-1}$ είναι ορισμένη και συνεχής στο σύνολο:

$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,




βρίσκουμε εύκολα ότι το σύνολο ορισμού της f είναι: $A=[1,+\infty)$. Στο σύνολο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(t)=\sqrt{t^2-1}$. Έτσι, η f είναι συνεχής στο A και, όπως βρίσκουμε εύκολα, το σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt \quad \text{είναι το} \quad A=[1,+\infty).$$

**β)** Για κάθε $x\in A$, έχουμε:

$$F'(x)=f(x)=\int_1^x\sqrt{\omega^2-1}\cdot d\omega=\int_1^x\varphi(\omega)d\omega \quad \text{και} \quad F''(x)=f'(x)=\sqrt{x^2-1}.$$

- Η F στο $[1,+\infty)$ είναι συνεχής (αφού εκεί είναι παραγωγίσιμη). Έστω ένας αριθμός $x\in(1,+\infty)$. Για κάθε $\omega\in[1,x]$, ισχύει $\varphi(\omega)=\sqrt{\omega^2-1}\geq 0$, με το = μόνο αν ω = 1. Άρα, ισχύει:

  $$\int_1^x\varphi(\omega)d\omega>0 \text{ και τούτο για κάθε } x\in(1,+\infty).$$

  Συνεπώς: $F'(x)>0$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[1,+\infty)$.
- Η F στο $[1,+\infty)$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει: $F''(x)=\sqrt{x^2-1}>0$.

  Άρα, η F είναι κυρτή στο $A=[1,+\infty)$.

## Θέμα 2

**Έστω η συνάρτηση:**

$$\mathbf{F(x)=\int_{-\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt.}$$

**α) Να βρείτε το σύνολο ορισμού της F.**

**β) Να δείξετε ότι η F είναι σταθερή σε κάθε διάστημα I του $\mathbb{R}$, στο οποίο είναι ορισμένη και ισχύει: $\eta\mu 2x>0$.**

**Λύση.** **α)** Η συνάρτηση:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα (–1, 1).

Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της F αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases}-1<\eta\mu x<1\\-1<-\sigma\upsilon\nu x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<\eta\mu x<1\\-1<\sigma\upsilon\nu x<1\end{cases}\Leftrightarrow\left(x\neq\frac{\kappa\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\right).$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της F είναι: $A_F=\mathbb{R}-\left\{\frac{\kappa\pi}{2}\mid\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$.

**β)** Έστω G μία παράγουσα της f στο (–1,1), οπότε:

$$G'(t)=f(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},\ \forall t\in(-1,1).$$

Έτσι, για κάθε $x\in I$, έχουμε:

$F(x)=G(\eta\mu x)-G(-\sigma\upsilon\nu x)$, οπότε έχουμε στο I:

$$F'(x)=G'(\eta\mu x)\cdot(\eta\mu x)'-G'(-\sigma\upsilon\nu x)(-\sigma\upsilon\nu x)'=\ldots=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{|\sigma\upsilon\nu x|}-\frac{\eta\mu x}{|\eta\mu x|}=0,$$

γιατί $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x>0$, αφού $\eta\mu 2x>0$.

Άρα, η F στο I είναι σταθερή.

## Θέμα 3

**Δίνεται μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:**

$$\mathbf{F(x)=x^2\int_0^1 t\cdot f(tx)dt}.$$

**Λύση.** Έχουμε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$F(x)=\int_0^1(xt)f(xt)\cdot xdt.$$

Θέτουμε: $\omega = xt$, οπότε $d\omega = xdt$. Για $t=0$ έχουμε $\omega_1 = 0$ και για $t=1$, έχουμε $\omega_2 = x$. Έτσι, έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x \omega f(\omega)d\omega \text{ και άρα: } F'(x) = xf(x).$$

## Θέμα 4

**Δίνεται μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επίσης, δίνονται δύο αριθμοί α, β $\in \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:**

$$\mathbf{F(x) = \int_\alpha^\beta f(x-t)dt.}$$

**Λύση.** Θέτουμε: $\omega = x - t$, οπότε $d\omega = -dt$. Με $t = \alpha$ έχουμε: $\omega_1 = x - \alpha$ και με $t = \beta$, έχουμε: $\omega_2 = x - \beta$. Έτσι, έχουμε:

$$F(x) = -\int_{x-\alpha}^{x-\beta} f(\omega)d\omega = \int_{x-\beta}^{x-\alpha} f(\omega)d\omega.$$

Έστω G μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$G'(\omega) = f(\omega),\ \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, έχουμε:

$$F(x) = \left[G(\omega)\right]_{x-\beta}^{x-\alpha} = G(x-\alpha) - G(x-\beta).$$

Συνεπώς:

$$F'(x) = G'(x-\alpha)(x-\alpha)' - G(x-\beta)(x-\beta)' = f(x-\alpha) - f(x-\beta).$$

## Θέμα 5

**Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:**

**α)** $\mathbf{F(x) = \int_1^2 \frac{\eta\mu(tx)}{t}dt,\ x \in (0,+\infty)}$.

**β)** $\mathbf{F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\eta\mu(xt)}{t}dt,\ x \in (0,+\infty)}$.

**Λύση. α)** Έστω ένας αριθμός x>0. Θέτουμε ω = xt, οπότε dω = xdt. Για t = 1 έχουμε $\omega_1 = x$ και για $t = 2$ έχουμε $\omega_2 = 2x$. Έτσι, στο (0, +∞) έχουμε:

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\eta\mu\omega}{\frac{\omega}{x}} \cdot \frac{d\omega}{x} = \int_x^{2x} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} d\omega = \int_x^{1} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} d\omega + \int_1^{2x} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} d\omega =$$

$$= \int_1^{2x} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} d\omega - \int_1^{x} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} d\omega.$$

Άρα, στο $(0,+\infty)$, έχουμε:

$$F'(x)=\frac{\eta\mu 2x}{2x}(2x)'-\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{\eta\mu 2x-\eta\mu x}{x}.$$

**β)** Όμοια με x>0 θέτουμε ω = xt και βρίσκουμε ότι:

$$F(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{\eta\mu\omega}{\omega}d\omega,\ \text{ και μετά ότι }\ F'(x)=\frac{3\eta\mu x^3-2\eta\mu x^2}{x}.$$

## Θέμα 6

**Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:**

$$3\int_0^x f(t)dt-\int_1^{-x} f(t)dt=2x^2+2x+1. \qquad (1)$$

**Λύση** Έστω ότι μία συνάρτηση f πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Από την (1) παραγωγίζοντας, έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$$3f(x)-f(-x)(-x)'=4x+2\Rightarrow 3f(x)+f(-x)=4x+2 \qquad (2).$$

Θέτοντας στη (2) όπου x το –x βρίσκουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$3f(-x)+f(x)=-4x+2. \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) (απαλείφοντας το f(– x)), βρίσκουμε ότι:

$$f(x)=2x+\frac{1}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (4)$$

**Αντιστρόφως.** Όπως βρίσκουμε εύκολα η συνάρτηση (4) δεν πληροί την ισότητα (1) και άρα τέτοια συνάρτηση f δεν υπάρχει.

**Σημείωση.** Αν το δεύτερο μέλος της (1) ήταν: $2x^2+2x+\frac{3}{2}$, τότε θα υπήρχε μία μοναδική ζητούμενη συνάρτηση, η (4).

- Παρατηρείστε ότι από την (1) (ακόμα και αν το δεύτερο μέλος ήταν αυτό που είπαμε) δεν μπορούμε να βρούμε μία αρχική συνθήκη για την f.

## Θέμα 7

**Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν: $f(1)=1$ και**

$$\int_0^1 f(tx)dt=\frac{1}{4}f(x),\ \forall x\in(0,+\infty). \qquad (1)$$

**Λύση.** Έστω ότι μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Θεωρούμε ένα αριθμό x > 0 και θέτουμε: ω = tx, οπότε dω = xdt. Για

$t = 0$ έχουμε $\omega_1 = 0$ και για $t = 1$ έχουμε: $\omega_2 = x$. Από την (1) έχουμε για κάθε $x > 0$:

$$\int_0^1 xf(tx)dt = \frac{x}{4}f(x) \Rightarrow \int_0^x f(\omega)d\omega = \frac{x}{4}\cdot f(x).$$

Από την τελευταία ισότητα βρίσκουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και (παραγωγίζοντας) ότι:

$$4f(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow xf'(x) - 3f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3f'(x) - 3x^2f(x)}{x^6} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^3}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x^3} = c\ (c \in \mathbb{R}) \Rightarrow f(x) = c\cdot x^3.$$

Επειδή f(1) = 1, βρίσκουμε ότι c = 1 και άρα: $f(x) = x^3,\ x > 0$.

Επειδή $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0$, έχουμε: $f(x) = x^3,\ x \in [0,+\infty)$ (2).

**Αντιστρόφως.** Όπως βρίσκουμε εύκολα, η συνάρτηση (2) πληροί τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

## Θέμα 8

**Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες για κάθε $x > 0$ ισχύει:**

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2-1}{2} + \int_x^{x^2} \frac{2}{t} f\left(\frac{t}{x}\right)dt.} \qquad \mathbf{(1)}$$

**Λύση.** Έστω ότι μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Θεωρούμε ένα αριθμό $x > 0$ και θέτουμε: $\omega = \frac{t}{x}$ οπότε $d\omega = \frac{1}{x}dt$. Με $t = x$ έχουμε $\omega_1 = 1$ και με $t = x^2$ έχουμε $\omega_2 = x$. Έτσι, από την (1) έπεται:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{2} + 2\int_1^x \frac{1}{\omega x} f(\omega)\cdot x d\omega \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{2} + 2\int_1^x \frac{f(\omega)}{\omega}d\omega.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ότι:

$$f'(x) = x + 2\frac{f(x)}{x} \Rightarrow xf'(x) = x^2 + 2f(x) \Rightarrow xf'(x) - 2f(x) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2f'(x) - 2xf(x) = x^3 \Rightarrow \frac{x^2f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)' = (\ln x)' \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c(c\in\mathbb{R}) \Rightarrow f(x) = x^2\ln x + cx^2.$$

Από την (1) έχουμε: $f(1)=0$, οπότε βρίσκουμε ότι: c = 0 και άρα:

$$f(x)=x^2\ln x,\quad x\in(0,+\infty). \qquad (2)$$

**Αντιστρόφως.** Όπως βρίσκουμε εύκολα, η συνάρτηση (2) επαληθεύει τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

## Θέμα 9

**Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες για κάθε $x>0$ ισχύει:**

$$\mathbf{f(x)=2\ln x-\int_x^1 \frac{1}{t^2} f\left(\frac{x}{t}\right)dt}. \qquad \mathbf{(1)}$$

**Λύση.** Έστω ότι μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Θεωρούμε ένα αριθμό x > 0 και θέτουμε: $\omega=\frac{x}{t}$, οπότε $d\omega=-\frac{1}{t^2}xdt$. Με t = x έχουμε $\omega_1=1$ και με $t=1$ έχουμε $\omega_2$ = x. Έτσι, από την (1) έπεται:

$$f(x)=2\ln x+\int_1^x \frac{1}{x} f(\omega)d\omega \Rightarrow f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}\int_1^x f(\omega)d\omega \qquad (2)$$

$$\Rightarrow xf(x)=2x\ln x+\int_1^x f(\omega)d\omega. \qquad (3)$$

Από τη (2) έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και έτσι, από την (3) (παραγωγίζοντας) έπεται ότι:

$$f(x)+xf'(x)=2\ln x+2+f(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right)dx=2\int\frac{1}{x}dx+2\int(\ln x)'\ln x\,dx=$$

$$=2\ln x+\ln^2 x+c\quad (c\in\mathbb{R}).$$

Από την (1) έχουμε: f(1) = 0, οπότε βρίσκουμε ότι c = 0 και άρα:

$$f(x)=2\ln x+\ln^2 x,\ \ x\in(0,+\infty). \qquad (4)$$

**Αντιστρόφως.** Όπως βρίσκουμε εύκολα, η συνάρτηση (4) επαληθεύει τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

## Θέμα 10

**Δίνεται ένας αριθμός α > 0. Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:**

$$\mathbf{f(x) = 3\alpha x^2 + \alpha \int_0^{\frac{x}{\alpha}} e^{-\alpha t} f(x-\alpha t)dt} . \qquad \mathbf{(1)}$$

**Λύση.** Έστω ότι μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ πληροί τις δοσμένες συνθήκες. Θεωρούμε ένα αριθμό $x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε: $\omega = x-\alpha t$, οπότε $d\omega = -\alpha dt$. Με $t = 0$ έχουμε $\omega_1 = x$ και με $t=\frac{x}{\alpha}$ έχουμε $\omega_2 = 0$. Έτσι, από την (1) έπεται:

$$f(x) = 3\alpha x^2 - \int_x^0 e^{\omega - x} f(\omega)d\omega \Rightarrow f(x) = 3\alpha x^2 + e^{-x}\int_0^x e^{\omega} f(\omega)\,d\omega \qquad (2)$$

$$\Rightarrow e^x f(x) = 3\alpha x^2 e^x + \int_0^x e^{\omega} f(\omega)d\omega . \qquad (3)$$

Από την (2) έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έτσι, από την (3) (παραγωγίζοντας), έχουμε:

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = 6\alpha x e^x + 3\alpha x^2 e^x + e^x f(x) \Rightarrow f'(x) = 6\alpha x + 3\alpha x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (6\alpha x + 3\alpha x^2)dx \Rightarrow f(x) = 3\alpha x^2 + \alpha x^3 + c .$$

Από την (1) με $x = 0$ έχουμε $f(0) = 0$, οπότε βρίσκουμε $c = 0$ και άρα:

$$f(x) = 3\alpha x^2 + \alpha x^3 . \qquad (4)$$

**Αντιστρόφως.** Όπως βρίσκουμε εύκολα, η συνάρτηση (4) επαληθεύει τις δοσμένες συνθήκες και άρα είναι η μοναδική ζητούμενη.

## Θέμα 11

**Θεωρούμε έναν αριθμό α > 0 και μία συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, α] με $\mathbf{f(0)=0}$ και $\mathbf{f'(x)>0}$, για κάθε $\mathbf{x\in[0,\alpha]}$. Να δείξετε ότι για κάθε $\mathbf{x\in[0,\alpha]}$ ισχύει:**

$$\mathbf{\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)} . \qquad \mathbf{(1)}$$

**Θεωρούμε γνωστή την πρόταση: «Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της $\mathbf{f^{-1}}$ είναι συνεχής στο f(Δ)».**

**Λύση.** Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, α], άρα είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται στο διάστημα αυτό και μάλιστα η αντίστροφή της $f^{-1}$ είναι συνεχής στο $f([0,\alpha]) = [f(0), f(\alpha)] = [0, f(\alpha)]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt-xf(x).$$

Η F είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [0, α] με:

$$F'(x)=f(x)+f^{-1}(f(x))\cdot f'(x)-f(x)-xf'(x)$$
$$=f(x)+xf'(x)-f(x)-xf'(x)=0.$$

Άρα $F(x)=c$, για κάθε $x\in[0,\alpha]$ $(c\in\mathbb{R})$ και επειδή F(0) = 0, έπεται ότι c = 0. Άρα F(x) = 0, για κάθε $x\in[0,\alpha]$. Έτσι, η (1) ισχύει για κάθε $x\in[0,\alpha]$.

## Θέμα 12

**Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση:**

$$\mathbf{F(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt}$$

**είναι φθίνουσα. Να δείξετε ότι:**

$$\mathbf{f(x)=0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}}.$$

**Προς τούτο θεωρήστε τη συνάρτηση:**

$$\mathbf{g(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}.$$

**Λύση.** Η συνάρτηση F είναι προφανώς ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x)=2\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=2f(x)\int_0^x f(t)dt=2F(x).$$

Άρα $g'\downarrow\mathbb{R}$. Λόγω αυτού και επειδή $g'(0)=2F(0)=0$, με $x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$x\le 0\Rightarrow g'(x)\ge g'(0)=0\Rightarrow g'(x)\ge 0$$

και $x\ge 0\Rightarrow g'(x)\le g'(0)=0\Rightarrow g'(x)\le 0$.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| g′ | + | 0 | − |
| g | ↗ | μεγ. 0 | ↘ |

Συμπεραίνουμε ότι η g στο 0 έχει μέγιστο, ίσο με $g(0)=0$. Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $g(x)\le 0$ και επειδή $g(x)\ge 0$, έχουμε:

$$g(x)=0\Rightarrow\left(\int_0^x f(t)dt^2\right)^2=0\Rightarrow\int_0^x f(t)dt=0\Rightarrow\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=0\Rightarrow f(x)=0.$$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Δ. Κάππου: «ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ».
2. Δ. Στρατηγόπουλου: «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ»
3. Louis Brand: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ».
4. G. Thomas – R. Finney: «ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ».
5. M. Spivak: «ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ».
6. Θ. Καζαντζή: «ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ».
7. Περιοδικό της Ε.Μ.Ε.: «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄».

Αθήνα 30/3/2006

## ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΑΝΤΩΝΗ ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΥ

Γεννήθηκε στο χωριό «Ίκλαινα - Μεσσηνίας». Τελείωσε τη Μέση εκπαίδευση στο τότε «Πρακτικό Λύκειο Καλαμών». Πέτυχε στο μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών, το οποίο τελείωσε με «Άριστα». Διετέλεσε βοηθός του καθηγητή της Ανάλυσης του Πανεπιστημίου Αθηνών, αείμνηστου Δημητρίου Κάππου. Στη συνέχεια ασχολήθηκε με τα φροντιστήρια για τους υποψήφιους των Ανωτάτων Σχολών. Συνέγραψε είκοσι μαθηματικά βιβλία για τους υποψήφιους και τους φοιτητές των Ανωτάτων Σχολών.

Σήμερα είναι μέλος του Δ.Σ. της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και πρόεδρος της συντακτικής επιτροπής του περιοδικού της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας «Ευκλείδη Β΄».