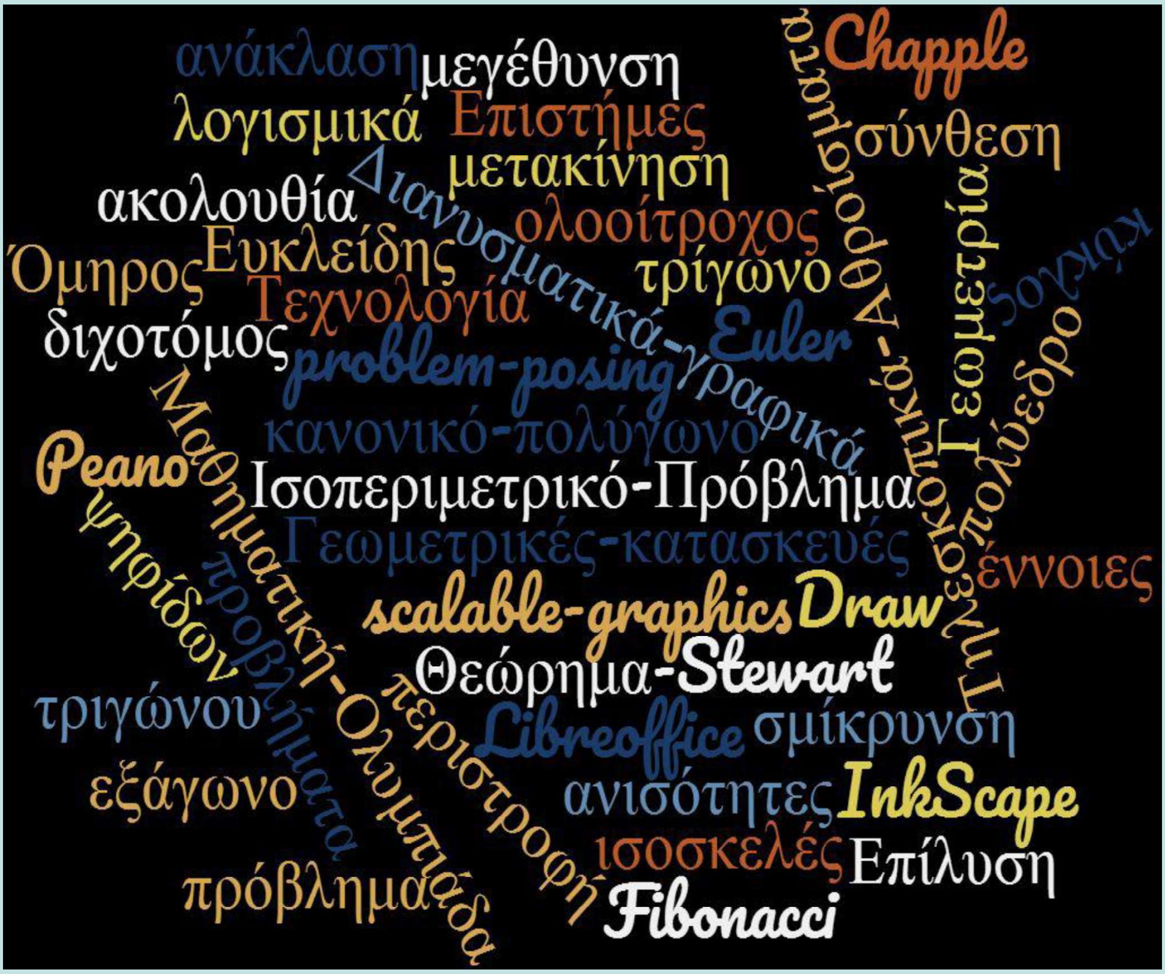
Μελέτη

Μαθητικό Περιοδικό του www.mathematica.gr



Τεύχος 1, Μάρτιος 2017

Έκδοση 2η - 05/04

www.mathematica.gr

Τηλεσκοπικά Αθροίσματα και Γινόμενα

Θάνος Μάγκος

Ο υπολογισμός αθροισμάτων και γινομένων είναι ένα θέμα που συναντάμε πολύ συχνά στα Μαθηματικά. Ειδικά όταν το πλήθος των όρων που καλούμαστε να προσθέσουμε ή να πολλαπλασιάσουμε είναι μεγάλο, αυτό μπορεί να αποτελέσει μια άκρως κοπιαστική διαδικασία. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις, στις οποίες η διαδικασία αυτή μπορεί να επισπευσθεί σημαντικά.
Ας δούμε δύο τέτοια παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ο :

Ας υποθέσουμε ότι μας ζητείται να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}.$$

Πρόκειται για ένα άθροισμα με μόλις εννέα προσθετέους! Μάλλον η πρώτη σκέψη είναι να μετατρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα. Γρήγορα όμως φαίνεται ότι αυτό είναι μάλλον χρονοβόρο και κοπιαστικό, αφού το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι ο αριθμός 2.520. Μήπως μπορούμε να βρούμε κάποιον πιο σύντομο τρόπο;

Ας παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα γράφεται ως εξής:

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=$$

$$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\frac{5-4}{4\cdot 5}+\frac{6-5}{5\cdot 6}+\frac{7-6}{6\cdot 7}+\frac{8-7}{7\cdot 8}+\frac{9-8}{8\cdot 9}+\frac{10-9}{9\cdot 10}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right).$$

Τώρα είναι φανερό, ότι ο δεύτερος όρος κάθε παρένθεσης προστιθέμενος με τον πρώτο όρο της επόμενης παρένθεσης, δίνει αποτέλεσμα μηδέν.
Επομένως οι μόνοι όροι που επιβιώνουν είναι οι

$$1-\frac{1}{10}$$

και τελικά το άθροισμα ισούται με $\frac{9}{10}$.

<u>Παράδειγμα 2ο</u> :

Θέλουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο των αριθμών

$$\frac{1}{4},\frac{2}{6},\frac{3}{8},\frac{4}{10},\frac{5}{12},\frac{6}{14},\frac{7}{16},\frac{8}{18},\frac{9}{11},$$

δηλαδή τον αριθμό

$$\mathrm{B}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{8}{18}\cdot\frac{9}{11}.$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής κάθε κλάσματος (εκτός από το τελευταίο) είναι άρτιος και, ακριβέστερα, ισούται με το γινόμενο του 2 επί έναν παράγοντα, ο οποίος είναι ο ίδιος με τον αμέσως επόμενο αριθμητή:

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2}{2\cdot 3}\cdot\frac{3}{2\cdot 4}\cdot\frac{4}{2\cdot 5}\cdot\frac{5}{2\cdot 6}\cdot\frac{6}{2\cdot 7}\cdot\frac{7}{2\cdot 8}\cdot\frac{8}{2\cdot 9}\cdot\frac{9}{11}.$$

Επομένως, κατά τον πολλαπλασιασμό, απλοποιούνται όλοι οι αριθμητές των κλασμάτων και στον παρονομαστή απομένει το γινόμενο $2^8\cdot 11=2816.$
Δηλαδή βρίσκουμε

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2816}.$$

Στη συνέχεια θα δούμε παραδείγματα στα οποία εμφανίζεται το παραπάνω φαινόμενο, δηλαδή αθροίσματα και γινόμενα των οποίων οι περισσότεροι ενδιάμεσοι όροι απλοποιούνται. Αυτά τα αθροίσματα και τα γινόμενα ονομάζονται ***<u>τηλεσκοπικά</u>***.
Αρχικά αναφέρουμε δύο συμβολισμούς, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να γράφουμε ορισμένες μακροσκελείς παραστάσεις συνοπτικότερα.

- Ένα άθροισμα της μορφής

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu$$

το γράφουμε συντομότερα ως

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa$$

- Ένα γινόμενο της μορφής

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_\nu$$

το γράφουμε συντομότερα ως

$$\prod_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa$$

Για παράδειγμα είναι

$$\sum_{\kappa=1}^{4} \alpha_\kappa^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2,$$

$$\sum_{\kappa=2}^{5} \frac{1}{7-\kappa} = \frac{1}{7-2} + \frac{1}{7-3} + \frac{1}{7-4} + \frac{1}{7-5} = \frac{77}{60},$$

$$\prod_{\kappa=3}^{7} (\kappa^2 - 8) = (3^2-8)(4^2-8)(5^2-8)(6^2-8)(7^2-8) = 156128.$$

<u>Παράδειγμα 3^ο</u> : Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = \sum_{\kappa=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{\kappa} + \sqrt{\kappa+1}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa+1}} = \frac{\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}}{\left(\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}\right)\left(\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}\right)} = \frac{\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa+1}^2 - \sqrt{\kappa}^2}$$
$$= \frac{\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}}{1} =$$
$$= \sqrt{\kappa+1} - \sqrt{\kappa}.$$

Επομένως είναι

$$S = \sum_{\kappa=1}^{99} \left(\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}\right) = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right) + \cdots$$
$$+\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right) + \left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right) == \sqrt{100} - \sqrt{1} = 9.$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $\nu!$, το οποίο διαβάζεται ν παραγοντικό και ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$0! = 1, 1! = 1, \nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu, \quad \text{αν } \nu \geq 2.$$

Είναι δηλαδή

$2! = 1 \cdot 2 = 2,\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ κτλ.

<u>Παράδειγμα 4^ο</u> : Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 2017 \cdot 2017!$

Ο υπολογισμός βασίζεται στην απλή παρατήρηση ότι

$$\nu \cdot \nu! = (\nu + 1 - 1)\nu! = (\nu+1)\nu! - \nu! = (\nu+1)! - \nu!.$$

Επομένως είναι

$$S = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (2018! - 2017!).$$

Το άθροισμα είναι προφανώς τηλεσκοπικό και προκύπτει τελικά

$$S = 2018! - 1.$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα ασχοληθούμε με ένα θέμα της $5^{ης}$ Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας (Πολωνία, 1963).

<u>Παράδειγμα $5^ο$</u> : Να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Αρχικά ας ονομάσουμε S το άθροισμα στα αριστερά και ας παρατηρήσουμε ότι αυτό γράφεται ως

$$S = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{7}.$$

Υπολογίζουμε τώρα το $2S \cdot \eta\mu\frac{\pi}{7}$. Με χρήση του τύπου

$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\beta + \alpha) - \eta\mu(\beta - \alpha)$ προκύπτει

$$2S \cdot \eta\mu\frac{\pi}{7} = \eta\mu\frac{2\pi}{7} + \eta\mu\frac{4\pi}{7} - \eta\mu\frac{2\pi}{7} + \eta\mu\frac{6\pi}{7} - \eta\mu\frac{4\pi}{7}$$

δηλαδή

$$2S \cdot \eta\mu\frac{\pi}{7} = \eta\mu\frac{6\pi}{7}$$

και επειδή είναι $\eta\mu\frac{\pi}{7} = \eta\mu\frac{6\pi}{7}$ βρίσκουμε $S = \frac{1}{2}$.

Ας επισημάνουμε ότι η ίδια τεχνική εφαρμόζεται στον υπολογισμό αθροισμάτων ημιτόνων ή συνημιτόνων στα οποία τα τόξα που εμφανίζονται αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε ένα κλασικό τηλεσκοπικό γινόμενο.

<u>Παράδειγμα $6^ο$</u> : Να αποδειχθεί ότι

$$\prod_{\kappa=1}^{6} \sigma\upsilon\nu\frac{\kappa\pi}{13} = \frac{1}{64}.$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x},$$

οπότε είναι

$$\prod_{\kappa=1}^{6}\sigma\upsilon\nu\frac{\kappa\pi}{13}=\frac{\eta\mu\frac{2\pi}{13}}{2\eta\mu\frac{\pi}{13}}\frac{\eta\mu\frac{4\pi}{13}}{2\eta\mu\frac{2\pi}{13}}\frac{\eta\mu\frac{8\pi}{13}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{13}}\frac{\eta\mu\frac{16\pi}{13}}{2\eta\mu\frac{8\pi}{13}}\frac{\eta\mu\frac{32\pi}{13}}{2\eta\mu\frac{16\pi}{13}}\frac{\eta\mu\frac{64\pi}{13}}{2\eta\mu\frac{32\pi}{13}}$$
$$=\frac{1}{64}\frac{\eta\mu\frac{64\pi}{13}}{\eta\mu\frac{\pi}{13}}=\frac{1}{64},$$

αφού $\eta\mu\frac{64\pi}{13}=\eta\mu\left(5\pi-\frac{\pi}{13}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{13}$.

Συνεχίζουμε με ένα ακόμα τηλεσκοπικό γινόμενο:

<u>Παράδειγμα 7°</u> : Να υπολογιστεί το γινόμενο

$$P=\prod_{\kappa=2}^{2017}\frac{\kappa^3-1}{\kappa^3+1}$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο γράφεται ως

$$\prod_{\kappa=2}^{2017}\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\prod_{\kappa=2}^{2017}\frac{\kappa^2+\kappa+1}{\kappa^2-\kappa+1}.$$

Το πρώτο γινόμενο είναι τηλεσκοπικό:

$$\prod_{\kappa=2}^{2017}\frac{\kappa-1}{\kappa+1}=\frac{1}{3}\frac{2}{4}\frac{3}{5}\cdots\frac{2015}{2017}\frac{2016}{2018}=\frac{2}{2017\cdot 2018}=\frac{1}{2017\cdot 1009}.$$

Το δεύτερο είναι επίσης τηλεσκοπικό, αφού ο αριθμητής κάθε κλάσματος ισούται με τον παρονομαστή του επόμενού του

$$\prod_{\kappa=2}^{2017}\frac{\kappa^2+\kappa+1}{\kappa^2-\kappa+1}$$
$$=\prod_{\kappa=2}^{2017}\frac{\kappa(\kappa+1)+1}{(\kappa-1)\kappa+1}$$
$$=\frac{2\cdot 3+1}{1\cdot 2+1}\cdot\frac{3\cdot 4+1}{2\cdot 3+1}\cdot\frac{4\cdot 5+1}{3\cdot 4+1}\cdots\frac{2017\cdot 2018+1}{2016\cdot 2017+1}=$$

$$= \frac{2017 \cdot 2018 + 1}{3} = 331 \cdot 4099.$$

Επομένως, είναι

$$P = \frac{331 \cdot 4099}{1009 \cdot 2017}.$$

Για το επόμενο παράδειγμα, αφετηρία αποτελεί το διάσημο άθροισμα $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, το οποίο, λέγεται ότι, υπολόγισε ο Gauss όντας μαθητής δημοτικού. Είναι λογικό να αναζητήσουμε τύπους και για τα αθροίσματα

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2,$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3,$$

και γενικά για το $S_a = 1^a + 2^a + 3^a + \cdots + \nu^a$.

Παράδειγμα 8ο : Να υπολογιστεί το S_2.

Ας παρατηρήσουμε ότι

$$\nu^3 - (\nu - 1)^3 = 3\nu^2 - 3\nu + 1.$$

Στην ταυτότητα αυτή θέτουμε διαδοχικά $\nu = 1,2,3, \ldots, \nu$, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1$$

.

.

$$\nu^3 - (\nu - 1)^3 = 3 \cdot \nu^2 - 3 \cdot \nu + 1.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε στο αριστερό μέλος ένα τηλεσκοπικό άθροισμα, το οποίο ισούται με ν^3, οπότε λαμβάνουμε

$$\nu^3 = 3\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 - 3\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa + \nu.$$

Επειδή ισχύει

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

προκύπτει

$$S_2 = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, κάνοντας τώρα χρήση της ταυτότητας

$$\nu^4 - (\nu-1)^4 = 4\nu^3 - 6\nu^2 + 4\nu - 1$$

βρίσκουμε

$$S_3 = \left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2.$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία Fibonacci, η οποία ορίζεται ως εξής: Είναι $F_1 = F_2 = 1$ και $F_{\nu+1} = F_\nu + F_{\nu-1}$ για κάθε $\nu \geq 2$.

Παράδειγμα 9ο : Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$S = \sum_{\kappa=2}^{2017} \frac{1}{F_{\kappa-1}F_{\kappa+1}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{\kappa=2}^{2017} \frac{1}{F_{\kappa-1}F_{\kappa+1}} = \sum_{\kappa=2}^{2017} \frac{F_\kappa}{F_{\kappa-1}F_\kappa F_{\kappa+1}} = \sum_{\kappa=2}^{2017} \frac{F_{\kappa+1} - F_{\kappa-1}}{F_{\kappa-1}F_\kappa F_{\kappa+1}}$$

$$= \sum_{\kappa=2}^{2017} \left(\frac{1}{F_{\kappa-1}F_\kappa} - \frac{1}{F_\kappa F_{\kappa+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_2F_3} + \frac{1}{F_2F_3} - \frac{1}{F_3F_4} + \cdots + \frac{1}{F_{2016}F_{2017}} - \frac{1}{F_{2017}F_{2018}}.$$

Είναι φανερό ότι το παραπάνω άθροισμα είναι τηλεσκοπικό, οπότε βρίσκουμε τελικά

$$S = 1 - \frac{1}{F_{2017}F_{2018}}.$$

Στη συνέχεια θα δούμε μερικές εφαρμογές των τηλεσκοπικών αθροισμάτων στην απόδειξη ανισοτήτων

<u>Παράδειγμα 10ο</u> : Αν ο $\nu \geq 2$ είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{\nu^2}>\frac{1}{2}\frac{\nu-1}{\nu+1}.$$

Πράγματι, είναι

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{\nu^2}=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{1}{\kappa^2}>\sum_{\kappa=2}^{\nu}\frac{1}{\kappa(\kappa+1)}=\sum_{\kappa=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{\kappa+1}\right).$$

Όμως, το τελευταίο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό και προφανώς ισούται με $\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu+1}=\frac{\nu-1}{2(\nu+1)}$.

<u>Παράδειγμα 11ο</u> : Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{99^3}<\frac{1}{10}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots+\frac{1}{99^3}$$
$$=\sum_{\kappa=3}^{99}\frac{1}{\kappa^3}<\sum_{\kappa=3}^{99}\frac{1}{\kappa^3-\kappa}=\frac{1}{2}\sum_{\kappa=3}^{99}\left[\left(\frac{1}{\kappa+1}-\frac{1}{\kappa}\right)+\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa}\right)\right]$$

Δημιουργούνται δύο τηλεσκοπικά αθροίσματα:

$$\sum_{\kappa=3}^{99}\left(\frac{1}{\kappa+1}-\frac{1}{\kappa}\right)=\frac{1}{100}-\frac{1}{3}=-\frac{97}{300}$$

και

$$\sum_{\kappa=3}^{99}\left(\frac{1}{\kappa-1}-\frac{1}{\kappa}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{99}=\frac{97}{198}.$$

Επομένως, το αρχικό άθροισμα είναι μικρότερο από τον αριθμό

$$\frac{97}{198}-\frac{97}{300}=\frac{1649}{19800}<\frac{1}{10}.$$

<u>**Παράδειγμα 12ο**</u> : Αν ο $\nu \geq 1$ είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι

$$2\sqrt{\nu} > \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} > 2\left(\sqrt{\nu+1}-1\right).$$

Έχουμε

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} > \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{2}{\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}} = 2\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa}\right).$$

Το τελευταίο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό και ισούται με $2\left(\sqrt{\nu+1}-1\right)$.

Ακόμα είναι

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} < \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{2}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa-1}} = 2\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\kappa-1}\right)$$

με το τελευταίο άθροισμα να είναι τηλεσκοπικό. Ισούται με $2\sqrt{\nu}$.

<u>Προβλήματα προς επίλυση</u>

Όλα τα παρακάτω προβλήματα αντιμετωπίζονται με χρήση τηλεσκοπικών αθροισμάτων και γινομένων.

1. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{1000} \frac{1}{\kappa(\kappa+3)}.$$

2. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{2017} \kappa!\,(\kappa^2+\kappa+1).$$

3. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{\kappa-1}{\kappa!}$$

4. Να υπολογίσετε το γινόμενο

$$\prod_{\kappa=2}^{2017}\left(1-\frac{1}{\kappa^2}\right)$$

5. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{999999}{1000000}<\frac{1}{1000}.$$

6. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{100}\frac{\kappa}{\kappa^4+\kappa^2+1}$$

7. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{15}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\kappa\pi}{7}\right)$$

8. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\frac{\varepsilon\varphi 1^o}{\sigma\upsilon\nu 2^o}+\frac{\varepsilon\varphi 2^o}{\sigma\upsilon\nu 4^o}+\cdots+\frac{\varepsilon\varphi (2^\nu)^o}{\sigma\upsilon\nu\ (2^{\nu+1})^o}$$

9. Να υπολογίσετε το γινόμενο

$$\left(\sqrt{3}+\varepsilon\varphi 1^o\right)\left(\sqrt{3}+\varepsilon\varphi 2^o\right)\left(\sqrt{3}+\varepsilon\varphi 3^o\right)\cdots\left(\sqrt{3}+\varepsilon\varphi 29^o\right)$$

10. Να υπολογίσετε το γινόμενο

$$\left(\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu 9^o\right)\left(\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu 27^o\right)\left(\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu 81^o\right)\left(\frac{1}{2}+\sigma\upsilon\nu 243^o\right)$$

11. Αν $F_1, F_2, \ldots$ είναι η ακολουθία Fibonacci του παραδείγματος 9, να αποδείξετε ότι

α) $F_1+F_2+F_3+\cdots+F_n=F_{n+2}-1,$

β) $F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1},$

γ) $\sum_{\kappa=2}^{n}\frac{F_k}{F_{k-1}F_{k+1}}=2-\frac{F_{n+2}}{F_nF_{n+1}}$