Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Μπάμπης Στεργίου – Ιανουάριος 2017

Αν ξεφυλλίσει κάποιος οποιοδήποτε βιβλίο με θέματα μαθηματικών διαγωνισμών ή Μαθηματικών Ολυμπιάδων, θα διαπιστώσει ότι ανάμεσα στα αλγεβρικά θέματα που τίθενται επικρατούν ασκήσεις που αφορούν τις ανισότητες. Οι ανισότητες παίζουν τεράστιο ρόλο στα ανώτερα Μαθηματικά, τόσο που ο Hilbert έκανε την εξής διαπίστωση:

« Η σχέση που πραγματικά κυβερνάει τα Μαθηματικά είναι η ανισότητα. Η ισότητα παρουσιάζεται μόνο ως μια ειδική περίπτωση! »

Η σημασία λοιπόν των ανισοτήτων από τη μια και η ανάγκη ευφυών επινοήσεων, που απαιτούνται για την απόδειξή τους, από την άλλη έχουν ως αποτέλεσμα τη συχνότατη εμφάνισή τους σχεδόν σε κάθε διαγωνισμό. Στη Βαλκανιάδα Νέων του 2003 τέθηκε το παρακάτω θέμα ανισοτήτων που προτάθηκε από τη Ρουμανία και κατασκευάστηκε από τον καθηγητή Laurentiu Panaïtopol. Από τότε και κάθε χρόνο θέμα από το χώρο των ανισοτήτων βλέπουμε σχεδόν σε κάθε σοβαρό εθνικό ή διεθνή μαθηματικό διαγωνισμό.

Το θέμα αυτό είναι το εξής:

Αν $x, y, \omega > -1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1+x^2}{1+y+\omega^2}+\frac{1+y^2}{1+\omega+x^2}+\frac{1+\omega^2}{1+x+y^2}\geq 2$$

Είναι σίγουρο πως οποιοσδήποτε μαθητής του γυμνασίου ή του λυκείου, ο οποίος δεν έχει παρακολουθήσει ειδικά μαθήματα ή δεν έχει μελετήσει βιβλία σχετικά με ανισότητες, δεν μπορεί να λύσει το θέμα αυτό. Κι όμως, στη Βαλκανιάδα Νέων , πολλοί μαθητές (μέχρι δεκαπεντέμιση ετών) έλυσαν το συγκεκριμένο θέμα.

Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε να δώσουμε στους μικρούς αναγνώστες (διεθνώς χαρακτηρίζονται ως «Junior») όλες τις απαραίτητες γνώσεις, ώστε ακόμα και ένα τέτοιο θέμα να είναι προσιτό όχι μόνο στα «παιδιά-θαύματα», αλλά και σε κάθε παιδί που τρέφει αγάπη για τα Μαθηματικά και διαθέτει τα απαραίτητα πνευματικά προσόντα. Πριν όμως προχωρήσουμε στην παρουσίαση της ενότητας, πρέπει να επισημάνουμε και τα εξής:

♦ Όπως κάθε μαθητής που έχει κλίση στον αθλητισμό δεν αρκείται στις δύο ώρες που αθλείται στο σχολείο του εβδομαδιαία, έτσι και όποιος θέλει να πάρει μέρος σε μαθηματικούς διαγωνισμούς δεν πρέπει να αρκεστεί στις λίγες και αποσπασματικές γνώσεις του σχολείου. Αυτό δεν σημαίνει ότι το σχολείο δεν προσφέρει σημαντικές γνώσεις, αλλά ότι οι γνώσεις αυτές δεν επαρκούν για τη συμμετοχή των μαθητών σε διεθνείς διαγωνισμούς και Ολυμπιάδες.

♦ Για να διακριθεί κάποιος μαθητής σε διεθνή μαθηματικό διαγωνισμό πρέπει μέχρι το τέλος της Γ΄ Γυμνασίου να έχει εμπεδώσει όλα τα Μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο μέχρι και το τέλος της Β΄ Λυκείου, καθώς και το εισαγωγικό μέρος των συναρτήσεων. Εδώ είναι απαραίτητο να τονίσουμε ότι στους μαθηματικούς διαγωνισμούς δεν εξετάζεται το πλήθος, αλλά η ποιότητα των μαθηματικών γνώσεων και η ικανότητα αξιοποίησής τους, η δυνατότητα δηλαδή να χρησιμοποιεί κάποιος αυτά που γνωρίζει για την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις πιο σημαντικές ανισότητες. Όλες αυτές τις ανι- σότητες ο μαθητής πρέπει να τις γνωρίζει πολύ καλά, ώστε να μπορεί να τις εφαρμόσει κατάλληλα και αποτελεσματικά, όπου αυτό κριθεί απαραίτητο. Πριν όμως περάσουμε στις ανισότητες αυτές, επισημαίνουμε ότι:

Η μητέρα των ανισοτήτων είναι η $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta$.

Πιθανόν να φαίνεται υπερβολική η σημασία μιας τόσο προφανούς ανισότητας, όπως η $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, αφού κάθε άρτια δύναμη πραγματικού αριθμού είναι αριθμός μη αρνητικός. Κι όμως, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, η απόδειξη πολλών βασικών ανισοτήτων βασίζεται ή ανάγεται στην παραπάνω ανισότητα.

Θεώρημα 1ο

Για τυχαίους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ισχύουν οι ανισότητες:

Α. α) $\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta$ β) $(\alpha+\beta)^2 \ge 4\alpha\beta$ γ) $2(\alpha^2+\beta^2) \ge (\alpha+\beta)^2$

Β. α) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ge \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 \ge 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

γ) $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \ge (\alpha+\beta+\gamma)^2$

Απόδειξη

Α. α) Είναι:

$$\alpha^2+\beta^2 \ge 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \ge 0, \quad \text{που ισχύει}$$

β) $(\alpha+\beta)^2 \ge 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \ge 0$, που ισχύει

γ) $2(\alpha^2+\beta^2) \ge (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \ge \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \ge 0$, που ισχύει

Και στις τρεις από τις παραπάνω ανισότητες η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta$.

Β. α) Ισχύει ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2 \ge 0$$

που ισχύει ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών. Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$.

Άλλος τρόπος

Οι βασικές ανισότητες $\alpha^2+\beta^2 \ge 2\alpha\beta$, $\beta^2+\gamma^2 \ge 2\beta\gamma$ και $\gamma^2+\alpha^2 \ge 2\gamma\alpha$ με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \ge 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

β) Είναι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 \ge 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \ge 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

που ισχύει από το ερώτημα Β(α). Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$.

γ) Είναι:

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \ge (\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2 \ge \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2 \ge 2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

που ισχύει από το ερώτημα Β(α). Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$.

3.1 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)$$

Λύση

Ισχύει ότι:

$$(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta \overset{\alpha\beta>0}{\Longleftrightarrow} \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}$$

Όμοια:

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq\frac{4}{\beta+\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\geq\frac{4}{\gamma+\alpha}$$

Επομένως:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\geq\frac{4}{\alpha+\beta}+\frac{4}{\beta+\gamma}+\frac{4}{\gamma+\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 4\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right) \Leftrightarrow\ \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 2\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$, αφού στην ανισότητα $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta$.

Παρατήρηση

Είναι λογικό να εξετάσουμε μήπως:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{4}{\alpha+\beta}$$

διότι τότε με κυκλική εναλλαγή και πρόσθεση παίρνουμε τη ζητούμενη. Αλλά αυτή γίνεται $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$, που ισχύει.

3.2 Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$ και $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδειχθεί ότι $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha+\beta+\gamma$.

Λύση

Σύμφωνα με την ανισότητα:

$$x^2+y^2+\omega^2\geq xy+y\omega+\omega x$$

η οποία ισχύει για κάθε $x, y, \omega\in\mathrm{R}$ παίρνουμε:

- $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \qquad (1)$
- $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta=$
  $=\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma \qquad (2)$

Οι ανισότητες (1) και (2) δίνουν:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha+\beta+\gamma$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Με βάση την ανισότητα $xy\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}$ είναι:

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^2(\beta\gamma)+\beta^2(\gamma\alpha)+\gamma^2(\alpha\beta)\leq$$

$$\leq\alpha^2\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}+\beta^2\cdot\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2}+\gamma^2\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\leq\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$$

σύμφωνα με τη σχέση $xy+y\omega+\omega x\leq x^2+y^2+\omega^2$.

3.3 Αν $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2)(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2)\geq\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Λύση

Είναι:

$$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0 \qquad (1)$$

που ισχύει. Έτσι πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ανισότητες:

$$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq\alpha\beta,\quad \beta^2-\beta\gamma+\gamma^2\geq\beta\gamma \quad\text{και}\quad \gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2\geq\gamma\alpha$$

παίρνουμε τη ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$, κάτι που προκύπτει από τη σχέση (1).

Θεώρημα 2ο

Ισχύει ότι:

α) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2$ για κάθε $\alpha>0$

β) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\leq -2$ για κάθε $\alpha<0$

γ) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\geq 2$, αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι

δ) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\leq -2$, αν οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι

Απόδειξη

α) Είναι $\alpha>0$, οπότε:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2 \overset{\alpha>0}{\Longleftrightarrow} \alpha\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1\geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2\geq 0$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει για $\alpha=1$.

β) Είναι $\alpha<0$, οπότε:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1+2\alpha\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\geq 0,\quad \text{που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=-1$.

γ) Είναι $\alpha\beta > 0$, οπότε:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\geq 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Longleftrightarrow} \alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0,$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta$.

δ) Είναι $\alpha\beta < 0$, οπότε:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\leq -2 \overset{\alpha\beta<0}{\Longleftrightarrow} \alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\geq 0,$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν οι α και β είναι αντίθετοι $(\alpha = -\beta)$.

3.4 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+1+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 27$$

Λύση

Προφανώς η εκτέλεση των πράξεων είναι ασύμφορη. Ισχύει ότι $x+\frac{1}{x}\geq 2$ για κάθε $x>0$. Έτσι:

$$\alpha+1+\frac{1}{\alpha}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+1\geq 2+1=3$$

και όμοια:

$$\beta+1+\frac{1}{\beta}\geq 3 \quad \text{και} \quad \gamma+1+\frac{1}{\gamma}\geq 3$$

Άρα:

$$\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\gamma+1+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 3\cdot 3\cdot 3=27$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma=1$.

3.5 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9 \qquad (1)$$

Λύση

Η ανισότητα (1) αποτελεί βασική πρόταση και πρέπει να αναγνωρίζεται εύκολα σε περίπτωση που παρουσιαστεί το α΄ μέλος. Η απόδειξη γίνεται ως εξής:

Εκτελούμε τις πράξεις και παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\left(\frac{\beta}{\alpha}+1+\frac{\beta}{\gamma}\right)+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}+1\right)\geq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\geq 6$$

που ισχύει διότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2,\ \ \frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\geq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\geq 2$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Με βάση την ιδιότητα (γ) του επόμενου θεωρήματος παίρνουμε:

$$\alpha+\beta+\gamma\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}$$

Έτσι με πολλαπλασιασμό παίρνουμε $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$, αφού:

$$\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}=\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma\cdot\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}=\sqrt[3]{1}=1$$

Θεώρημα 3ο

Για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι:

α) $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ *και* $\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}\geq\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$ $(\alpha,\beta>0)$

β) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma$ **γ)** $\alpha+\beta+\gamma\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

(Ανισότητα AM - GM)

δ) $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\geq\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$

(Ανισότητα των μέσων AM – GM – HM)

Απόδειξη

α) Είναι:

$$\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\geq\left(2\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0, \quad \text{που ισχύει}$$

Άλλος τρόπος

Η βασική ανισότητα $x^2+y^2\geq 2xy$ για $x=\sqrt{\alpha}$ και $y=\sqrt{\beta}$ δίνει:

$$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt{\beta}\right)^2\geq 2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta$ και μόνο.

Η δεύτερη ανισότητα και ειδικά το β΄ σκέλος της προκύπτει με τον ίδιο ακριβώς τρό- πο ή θέτοντας στην πρώτη όπου α και β τα $\frac{1}{\alpha}$ και $\frac{1}{\beta}$ αντίστοιχα.

Οι αριθμοί:

$$\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \sqrt{\alpha\beta},\quad \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}$$

λέγονται αντίστοιχα αριθμητικός, γεωμετρικός και αρμονικός μέσος των α και β.

β) Από την ταυτότητα του Euler:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

και επειδή $\alpha+\beta+\gamma\geq 0,$ προκύπτει ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq 3\alpha\beta\gamma$$

Προφανώς η παράσταση στην αγκύλη είναι μη αρνητικός αριθμός. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma.$

γ) Η προηγούμενη ανισότητα $x^3+y^3+\omega^3\geq 3xy\omega$ για $x=\sqrt[3]{\alpha},\ y=\sqrt[3]{\beta}$ και $\omega=\sqrt[3]{\gamma}$ δίνει:

$$\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\gamma}\right)^3\geq 3\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[3]{\gamma} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $\sqrt[3]{\alpha}=x\Leftrightarrow x^3=\alpha.$) Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma.$

δ) Το α΄ σκέλος $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ αποτελεί την ανισότητα AM - GM. Αν τώρα στην ανισότητα $\alpha+\beta+\gamma\geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ θέσουμε όπου α, β και γ τα $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\gamma}$ αντίστοιχα, παίρνουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\geq\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$$

Άρα:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\geq\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma.$ (Η ανισότητα συμβολίζεται AM – GM – HM.)

Οι αριθμοί:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},\quad \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\quad \text{και}\quad \frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$$

λέγονται αντίστοιχα αριθμητικός, γεωμετρικός και αρμονικός μέσος των α, β και γ.

Γενίκευση

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$, τότε $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu} \geq \dfrac{\nu}{\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\ldots+\dfrac{1}{\alpha_\nu}}$.

(Ανισότητα των μέσων: AM – GM - HM)

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu$.

3.6 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$$

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\alpha+\beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \quad \beta+\gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma} \quad \text{και} \quad \gamma+\alpha \geq 2\sqrt{\gamma\alpha}$$

Οι σχέσεις αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$, διότι:

$$\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\beta\gamma}\cdot\sqrt{\gamma\alpha} = \sqrt{\alpha\beta\beta\gamma\gamma\alpha} = \sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = \sqrt{(\alpha\beta\gamma)^2} = \alpha\beta\gamma$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Άλλος τρόπος

Από τις ανισότητες $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$, $(\beta+\gamma)^2 \geq 4\beta\gamma$ και $(\gamma+\alpha)^2 \geq 4\gamma\alpha$ με πολλαπλασιασμό παίρνουμε τελικά τη ζητούμενη.

3.7 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι $\left(\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}\right) \geq 8.$

Λύση

Τίποτα σχεδόν δεν μαρτυράει ότι πρέπει να στηριχθούμε στην ανισότητα $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, εκτός από το γεγονός ότι $8 = 2^3$ και το α΄ μέλος περιέχει τρεις παράγοντες. Έτσι:

- $\alpha+\dfrac{\beta}{\gamma\alpha} \geq 2\sqrt{\alpha\cdot\dfrac{\beta}{\gamma\alpha}} = 2\sqrt{\dfrac{\beta}{\gamma}}$
- $\beta+\dfrac{\gamma}{\alpha\beta} \geq 2\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}$
- $\gamma+\dfrac{\alpha}{\beta\gamma} \geq 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων αυτών παίρνουμε:

$$\left(\alpha+\frac{\beta}{\gamma\alpha}\right)\left(\beta+\frac{\gamma}{\alpha\beta}\right)\left(\gamma+\frac{\alpha}{\beta\gamma}\right) \geq 8\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 8\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}} = 8$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Πραγματικά πρέπει:

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma\alpha}, \quad \beta = \frac{\gamma}{\alpha\beta} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0$$

Αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν $\alpha\beta\gamma = 1$. Έτσι προκύπτει $\alpha = \beta^2$, $\beta = \gamma^2$ και $\gamma = \alpha^2$.
Άρα $\alpha = \beta^2 = (\gamma^2)^2 = \gamma^4 = (\alpha^2)^4 = \alpha^8$, δηλαδή $\alpha = 1$ και τελικά $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

3.8 Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \geq 9\alpha\beta\gamma$ β) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \geq 9\alpha\beta\gamma$

Λύση

α) Είναι:

- $\alpha+\beta+\gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ και $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha} = 3\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}$
- $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \geq \left(3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right)\left(3\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}\right) = 9\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^3} = 9\alpha\beta\gamma$

Άλλος τρόπος

Είναι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \geq 9\alpha\beta\gamma$$

αφού $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$.

β) Είναι:

- $\alpha+\beta+\gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$
- $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 3\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2}$

Αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν τη ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλιο

Το ερώτημα (α) προκύπτει αμέσως από το (β), διότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

Θεώρημα 4ο

Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς ισχύει ότι:

α) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) \geq (\alpha x+\beta y)^2$

β) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2) \geq (\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$ (Ανισότητα B.C.S.)

Απόδειξη

α) Είναι:

$$(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) \geq (\alpha x+\beta y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2x^2+\beta^2y^2 \geq \alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2y^2+\beta^2x^2-2\alpha\beta xy \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha y-\beta x)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\alpha y-\beta x=0 \Leftrightarrow \alpha y=\beta x \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y} \quad (\text{για } x, y \neq 0)$$

β) Η ανισότητα μετά τις πράξεις μάς οδηγεί στην ισοδυναμία ανισοτήτων:

$$(\alpha^2y^2 + \beta^2x^2 - 2\alpha\beta xy) + (\beta^2\omega^2 + \gamma^2y^2 - 2\beta\gamma y\omega) + (\alpha^2\omega^2 + \gamma^2x^2 - 2\alpha\gamma x\omega) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha y - \beta x)^2 + (\beta\omega - \gamma y)^2 + (\alpha\omega - \gamma x)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega}, \quad \text{όπου } x, y, \omega \neq 0 \text{ Þ } x = y = \omega = 0$$

Η ανισότητα B.C.S. (Buniakowsky – Cauchy – Schwarz) είναι πολύ σπουδαία, αποδεικνύεται δε πολύ πιο απλά με τη θεωρία τριωνύμου και ισχύει για τυχαίο πλήθος όρων.

Γενίκευση

Αν $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ και $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$ είναι δύο ν-άδες πραγματικών αριθμών, τότε:

$$\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2\right) \geq \left(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu\right)^2$$

(Ανισότητα B.C.S.)

Η ισότητα ισχύει αν για κάποιο $\lambda \in R$ ισχύει ότι $\alpha_1 = \lambda\beta_1$, $\alpha_2 = \lambda\beta_2$, …, $\alpha_\nu = \lambda\beta_\nu$, δηλαδή αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι ανάλογοι των $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$.

3.9 Αν α, β, γ και δ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$(1 + \alpha^4)(1 + \beta^4)(1 + \gamma^4)(1 + \delta^4) \geq (1 + \alpha\beta\gamma\delta)^4$$

Λύση

Από τη γενική ανισότητα $\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \geq \left(\alpha x + \beta y\right)^2$ παίρνουμε:

- $(1 + \alpha^4)(1 + \beta^4) = \left[1^2 + \left(\alpha^2\right)^2\right]\left[1^2 + \left(\beta^2\right)^2\right] \geq \left(1 + \alpha^2\beta^2\right)^2$

και όμοια:

- $\left(1 + \gamma^4\right)\left(1 + \delta^4\right) \geq \left(1 + \gamma^2\delta^2\right)^2$
- $\left(1 + \alpha^2\beta^2\right)\left(1 + \gamma^2\delta^2\right) \geq \left(1 + \alpha\beta\gamma\delta\right)^2$

Επομένως:

$$\left(1 + \alpha^4\right)\left(1 + \beta^4\right)\left(1 + \gamma^4\right)\left(1 + \delta^4\right) \geq \left(1 + \alpha^2\beta^2\right)^2\left(1 + \gamma^2\delta^2\right)^2 =$$

$$= \left[(1 + \alpha^2\beta^2)(1 + \gamma^2\delta^2)\right]^2 \geq \left[(1 + \alpha\beta\gamma\delta)^2\right]^2 = (1 + \alpha\beta\gamma\delta)^4$$

Η ισότητα ισχύει (όχι προφανώς) για $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$.

3.10 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$.

Λύση

Από την ανισότητα B.C.S. παίρνουμε:

$$\left[\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2+\left(\sqrt{\beta\gamma}\right)^2+\left(\sqrt{\gamma\alpha}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left(\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\beta\gamma}\cdot\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}+\sqrt{\gamma\alpha}\cdot\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

διότι $\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\alpha\beta\cdot\frac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{\alpha^2}=\alpha$ κ.λπ. Η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta=\gamma$.

Θεώρημα 5ο

α) Αν $\alpha, \beta>0$, τότε $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}$.

β) Αν $\alpha, \beta>0$, τότε $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}$.

γ) Αν $\alpha, \beta>0$, τότε $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{4}$.

δ) Αν $\alpha, \beta>0$, τότε $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$.

ε) Αν $\alpha, \beta>0$, τότε $\frac{4}{\alpha+\beta}\leq\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

στ) Αν $\alpha, \beta\geq 0$, τότε:

i) $\alpha^3+\beta^3\geq\alpha\beta(\alpha+\beta)$ ii) $\alpha^4+\beta^4\geq\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$ iii) $\alpha^5+\beta^5\geq\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)\geq\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

ζ) Αν $\alpha, \beta, \gamma\geq 0$, τότε $\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)}\geq\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta}$.

Απόδειξη

Τα ερωτήματα αυτού του θεωρήματος αποτελούν θεμελιώδη τεχνάσματα για τη λύση πολλών ασκήσεων που τίθενται συχνά σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Τα ερωτήματα (στ) και (ζ) χρειάζονται απομνημόνευση. Τα υπόλοιπα όμως προκύπτουν από τις βασικές ανισότητες ως εξής:

α) Η ανισότητα $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$ δίνει:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\geq 2\cdot\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}, \quad \text{διότι} \quad \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

β) Η ανισότητα $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2$ δίνει $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}$, διότι $\alpha+\beta>0$.

γ) Η βασική ανισότητα $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta$ δίνει $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{4}$, διότι $\alpha+\beta>0$.

δ) Ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$, οπότε:

$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{1}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

ε) Η ανισότητα $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ δίνει:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \geq \frac{4}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \geq \frac{4}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \frac{4}{\alpha+\beta} \leq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$$

Τα ερωτήματα (στ) και (ζ) αποδεικνύονται όμως με ισοδυναμίες.

στ) i) $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta) \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2 \geq 0,$$

που ισχύει. Η ισότητα ισχύει για $\alpha = \beta$.

ii) Είναι:

$$\alpha^4 + \beta^4 \geq \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \Leftrightarrow \alpha^4 - \alpha^3\beta + \beta^4 - \alpha\beta^3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3(\alpha - \beta) - \beta^3(\alpha - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \geq 0$$

που ισχύει, διότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ για κάθε α και β.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha = \beta$.

iii) Η πρώτη ανισότητα γράφεται:

$$\alpha^4(\alpha - \beta) - \beta^4(\alpha - \beta) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha^4 - \beta^4) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) \geq 0, \quad \text{που ισχύει}$$

Επίσης είναι $\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) \geq \alpha\beta \cdot \alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$, λόγω του ερωτήματος (i).

ζ) Είναι:

$$\sqrt{(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)} \geq \sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) \geq \left(\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta \geq \alpha\gamma+\beta\delta+2\sqrt{\alpha\gamma\beta\delta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\delta+\beta\gamma-2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha\delta}-\sqrt{\beta\gamma}\right)^2 \geq 0, \quad \text{που ισχύει}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ ή $\gamma = \delta = 0$.

Σημείωση

Να μην υποτιμηθεί η αξία των προηγούμενων απλών ερωτημάτων γιατί αποτελούν το κλειδί για τη λύση πολλών σύνθετων ασκήσεων.

3.11 Αν $x, y, \omega > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{(x^3+y^3)(y^3+\omega^3)(\omega^3+x^3)}{x^3y^3\omega^3} \geq \frac{(x+y)(y+\omega)(\omega+x)}{xy\omega}$$

Λύση

Επειδή $\alpha^3+\beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)$, παίρνουμε:

$$\frac{x^3+y^3}{xy} \geq x+y, \quad \frac{y^3+\omega^3}{y\omega} \geq y+\omega \quad \text{και} \quad \frac{\omega^3+x^3}{\omega x} \geq \omega+x$$

Αυτές με πολλαπλασιασμό δίνουν:

$$\frac{(x^3+y^3)(y^3+\omega^3)(\omega^3+x^3)}{x^2y^2\omega^2} \geq (x+y)(y+\omega)(\omega+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3+y^3)(y^3+\omega^3)(\omega^3+x^3)}{x^3y^3\omega^3} \geq \frac{(x+y)(y+\omega)(\omega+x)}{xy\omega}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=y=\omega$.

3.12 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} + \frac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\gamma^5+\alpha^5+\gamma\alpha} \leq 1$$

(ΔΜΟ, Shortlist – 1996)

Λύση

Η άσκηση αυτή δείχνει πόσο σημαντικό είναι για κάποιον μαθητή να γνωρίζει ορισμέ νες απλές, στοιχειώδεις ανισότητες και να τις εφαρμόζει για τη λύση σύνθετων θεμάτων. Σύμφωνα με τη σχέση (στ) του θεωρήματος 5 ισχύει $\alpha^5+\beta^5 \geq \alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$.

Επομένως:

$$\frac{1}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} \leq \frac{1}{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} \leq \frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta)+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} \leq \frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} \leq \frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Είναι δηλαδή:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} \leq \frac{1}{\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

διότι $\alpha\beta\gamma = 1$. Άρα, εργαζόμενοι κυκλικά, παίρνουμε:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha^5+\beta^5+\alpha\beta} + \frac{\beta\gamma}{\beta^5+\gamma^5+\beta\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\gamma^5+\alpha^5+\gamma\alpha} \leq \leq \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{\gamma+\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma} = 1$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=1$.

Θεώρημα 6ο

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $x, y, \omega \in R$, τότε:

α) $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta} \geq \dfrac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$ β) $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{\omega^2}{\gamma} \geq \dfrac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$

(Ανισότητα Andreescu ή Bergström)

Απόδειξη

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ισοδυναμιών. Είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta} \geq \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow (\beta x^2+\alpha y^2)(\alpha+\beta) \geq \alpha\beta(x+y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta x^2+\beta^2x^2+\alpha^2y^2+\alpha\beta y^2 \geq \alpha\beta x^2+2\alpha\beta xy+\alpha\beta y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2x^2-2\alpha\beta xy+\alpha^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\beta x-\alpha y)^2 \geq 0$$

η οποία ισχύει. Προφανώς η ισότητα ισχύει όταν:

$$\beta x-\alpha y=0 \Leftrightarrow \beta x=\alpha y \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}$$

β) Με βάση το ερώτημα (α) παίρνουμε:

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma}=\left(\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}\right)+\frac{\omega^2}{\gamma} \geq \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}+\frac{\omega^2}{\gamma} \geq \frac{[(x+y)+\omega]^2}{(\alpha+\beta)+\gamma}$$

δηλαδή $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}+\dfrac{\omega^2}{\gamma} \geq \dfrac{(x+y+\omega)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$. Η ισότητα ισχύει όταν $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{\omega}{\gamma}$.

*** Η παραπάνω ανισότητα είναι προφανώς εφαρμογή της ανισότητας C – S- B

Γενίκευση

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in R$ και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$, τότε:

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{x_\nu^2}{\alpha_\nu} \geq \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\dfrac{x_1}{\alpha_1}=\dfrac{x_2}{\alpha_2}=\ldots=\dfrac{x_\nu}{\alpha_\nu}$.

(Ανισότητα Andreescu- Bergström)

Απόδειξη

Για τις ν-άδες $\left(\dfrac{x_1}{\sqrt{\alpha_1}}, \dfrac{x_2}{\sqrt{\alpha_2}}, \ldots, \dfrac{x_\nu}{\sqrt{\alpha_\nu}}\right)$, $\left(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \ldots, \sqrt{\alpha_\nu}\right)$ η ανισότητα B.C.S. (Buniakowsky – Cauchy – Schwarz) δίνει:

$$\left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{\alpha_1}}\right)^2+\left(\frac{x_2}{\sqrt{\alpha_2}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_\nu}{\sqrt{\alpha_\nu}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{\alpha_1}\right)^2+\left(\sqrt{\alpha_2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{\alpha_\nu}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left(\frac{x_1}{\sqrt{\alpha_1}}\cdot\sqrt{\alpha_1}+\frac{x_2}{\sqrt{\alpha_2}}\cdot\sqrt{\alpha_2}+\ldots+\frac{x_\nu}{\sqrt{\alpha_\nu}}\cdot\sqrt{\alpha_\nu}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x_1^2}{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{x_\nu^2}{\alpha_\nu}\right)(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)\geq(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{x_\nu^2}{\alpha_\nu}\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}$$

Η παραπάνω ανισότητα είναι ειδική μορφή της ανισότητες Cauchy- Schwarz .

3.13 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\geq 1$$

Λύση

Σύμφωνα με το θεώρημα 6 είναι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1}\geq\frac{\left[(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\right]^2}{(\gamma+1)+(\alpha+1)+(\beta+1)}=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)+3}=\frac{4}{1+3}=1$$

Έτσι η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha+1}=\frac{\gamma+\alpha}{\beta+1}$. Η πρώτη ισότητα δίνει τελικά:

$$(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+1)=0 \Leftrightarrow \alpha=\gamma$$

Άρα η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$.

3.14 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί και $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}\geq\frac{3}{2}$$

(36η ΔΜΟ – 1995)

Λύση

Είναι $\alpha\beta\gamma=1$, οπότε:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{\alpha^3(\beta+\gamma)}=\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha(\beta+\gamma)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (β) του θεωρήματος 6, παίρνουμε:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)}=\frac{(\beta\gamma)^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma}+\frac{(\gamma\alpha)^2}{\beta\gamma+\beta\alpha}+\frac{(\alpha\beta)^2}{\gamma\alpha+\gamma\beta}\geq$$

$$\geq\frac{(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^2}{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha}}{2}=\frac{3}{2}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $x+y+\omega\geq 3\sqrt[3]{xy\omega}$ με $x=\alpha\beta$, $y=\beta\gamma$ και $\omega=\gamma\alpha$.

Προφανώς $xy\omega=\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=(\alpha\beta\gamma)^2=1$. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=1$, αφού πρέπει $x=y=\omega$.

Θεωρημα 7ο (The Rearrangement Inequality)

Δίνονται οι τριάδες $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και οι αριθμοί $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ που προκύπτουν από τους β_1,β_2,β_3 γράφοντάς τους με τυχαία σειρά. Ισχύει τότε ότι:

- αν $(\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha_3$ και $\beta_1\leq\beta_2\leq\beta_3)$ ή $(\alpha_1\geq\alpha_2\geq\alpha_3$ και $\beta_1\geq\beta_2\geq\beta_3)$, δηλαδή αν οι τριάδες $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ έχουν την ίδια διάταξη, τότε:

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3\geq\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ ή $\beta_1=\beta_2=\beta_3$.

- αν $(\alpha_1\leq\alpha_2\leq\alpha_3$ και $\beta_1\geq\beta_2\geq\beta_3)$ ή $(\alpha_1\geq\alpha_2\geq\alpha_3$ και $\beta_1\leq\beta_2\leq\beta_3)$, δηλαδή αν οι τριάδες $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ έχουν αντίθετη διάταξη, τότε:

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3\leq\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ ή $\beta_1=\beta_2=\beta_3$.

(Ανισότητα της αναδιάταξης)

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα αθροίσματα:

$$S=\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3 \quad\text{και}\quad S'=\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1+\alpha_3\gamma_3$$

στα οποία $\alpha_1\leq\alpha_2$. Τότε:

$$S-S'=(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)-(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)=\alpha_1(\gamma_1-\gamma_2)+\alpha_2(\gamma_2-\gamma_1)=(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma_1-\gamma_2)$$

Επομένως:

- $\gamma_1\leq\gamma_2 \Leftrightarrow S-S'\geq 0 \Leftrightarrow S\geq S'$
- $\gamma_1\geq\gamma_2 \Leftrightarrow S-S'\leq 0 \Leftrightarrow S\leq S'$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν οι γ_1 και γ_2 έχουν την ίδια διάταξη με τους α_1 και α_2, τότε $S\geq S'$, ενώ αν έχουν διαφορετική διάταξη, τότε $S\leq S'$. Προκύπτει έτσι ότι αν οι β_1,β_2,β_3 έχουν την ίδια διάταξη με τους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, τότε:

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3\geq\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3$$

ενώ αν έχουν αντίθετη διάταξη, τότε:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \le \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3$$

Σχόλια

i) Αν συμβολίσουμε με $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$, τότε η ανισότητα της ανα- διάταξης

διατυπώνεται, για ευκολία, και ως εξής:

♦ Αν οι τριάδες $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ έχουν την ίδια διάταξη (για παράδειγμα $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$ και $\beta_1 \le \beta_2 \le \beta_3$), τότε:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_3} \\ \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\beta_3} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_3} \\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2} & \boldsymbol{\gamma_3} \end{bmatrix}$$

για οποιαδήποτε μετάθεση (αναδιάταξη) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ των αριθμών $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

♦ Αν οι τριάδες $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ έχουν αντίθετη διάταξη (για παράδειγμα $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$ και $\beta_1 \ge \beta_2 \ge \beta_3$), τότε:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_3} \\ \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\beta_3} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_3} \\ \boldsymbol{\gamma_1} & \boldsymbol{\gamma_2} & \boldsymbol{\gamma_3} \end{bmatrix}$$

για οποιαδήποτε μετάθεση (αναδιάταξη) $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ των αριθμών $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

ii) Η ανισότητα της αναδιάταξης ισχύει και για τυχαίο πλήθος αριθμών. Έτσι:

♦ Αν οι ακολουθίες $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$ έχουν την ίδια διάταξη και $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu\} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu\}$, δηλαδή οι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ είναι οι αριθμοί $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ με διαφορετική ίσως σειρά, τότε:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu \ge \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_\nu\gamma_\nu$$

♦ Αν οι ακολουθίες $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$ έχουν αντίθετη διάταξη και $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ είναι μια μετάθεση (αναδιάταξη) των $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$, δηλαδή οι $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ είναι οι αριθμοί $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ με διαφορετική ίσως σειρά, τότε:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu \le \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_\nu\gamma_\nu$$

Και στις δύο περιπτώσεις η ισότητα ισχύει αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu$ ή $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu$.

iii) Η ανισότητα της αναδιάταξης είναι μία από τις σημαντικότερες ανισότητες, διό- τι εκτός από την απλότητά της έχει το πλεονέκτημα να ισχύει για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς και όχι μόνο για θετικούς ή μη αρνητικούς, που ισχύουν οι περισσότερες από τις κλασικές ανισότητες.

Θεώρημα 8ο

Έστω $x = (x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ και $y = (y_1, y_2, \dots, y_\nu)$ δύο ν-άδες θετικών αριθμών και $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu)$ μια ν-άδα στην οποία οι αριθμοί $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ είναι οι αριθμοί $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ με διαφορετική ίσως σειρά. Τότε:

♦ αν οι ν-άδες x και y είναι όμοια διατεταγμένες, δηλαδή $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_\nu$ και $y_1 \le y_2 \le \dots \le y_\nu$ $\left(\text{ή } x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_\nu \text{ και } y_1 \ge y_2 \ge \dots \ge y_\nu\right)$, τότε:

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\dots(x_\nu + y_\nu) \le (x_1 + \omega_1)(x_2 + \omega_2)\dots(x_\nu + \omega_\nu)$$

♦ αν οι ν-άδες x και y έχουν αντίθετη διάταξη, τότε:

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\dots(x_\nu + y_\nu) \ge (x_1 + \omega_1)(x_2 + \omega_2)\dots(x_\nu + \omega_\nu)$$

Για $x_1 = x_2 = \dots = x_\nu$ ή $y_1 = y_2 = \dots = y_\nu$ ισχύει η ισότητα, περίπτωση που είναι και η μοναδική, αν η ω είναι κυκλική αναδιάταξη της y.

Σχόλιο

Αν εισάγουμε τον συμβολισμό:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_\nu \\ y_1 & y_2 & \dots & y_\nu \end{pmatrix} = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\dots(x_\nu + y_\nu)$$

τότε το παραπάνω θεώρημα παίρνει τη μορφή:

♦ Αν οι ν-άδες x και y έχουν την ίδια διάταξη και η ω είναι αναδιάταξη της y, τότε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}.$$

♦ Αν οι ν-άδες x και y έχουν διαφορετική διάταξη και η ω είναι αναδιάταξη της y, τότε

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Εφαρμογή 1η

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha^2 + \beta\gamma)(\beta^2 + \gamma\alpha)(\gamma^2 + \alpha\beta) \ge \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

Απόδειξη

Η ανισότητα γράφεται:

$$(\alpha^2 + \beta\gamma)(\beta^2 + \gamma\alpha)(\gamma^2 + \alpha\beta) \ge (\alpha^2 + \alpha\beta)(\beta^2 + \beta\gamma)(\gamma^2 + \gamma\alpha) \qquad (1)$$

Θεωρούμε τις τριάδες $x = (\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$, $y = (\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta)$ και $\omega = (\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$. Οι τριά- δες x και y έχουν αντίθετη διάταξη, αφού:

$$\alpha^2 \le \beta^2 \le \gamma^2 \Leftrightarrow \beta\gamma \ge \gamma\alpha \ge \alpha\beta$$

Πραγματικά, είναι:

$$\beta\gamma \ge \gamma\alpha \ge \alpha\beta \;\Leftrightarrow\; (\beta \ge \alpha \;\; \text{και} \;\; \gamma \ge \beta) \;\Leftrightarrow\; \gamma \ge \beta \ge \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha^2 \le \beta^2 \le \gamma^2$$

Άρα:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha\beta & \beta\gamma & \gamma\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\alpha^2 + \beta\gamma)(\beta^2 + \gamma\alpha)(\gamma^2 + \alpha\beta) \ge (\alpha^2 + \alpha\beta)(\beta^2 + \beta\gamma)(\gamma^2 + \gamma\alpha)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Εφαρμογή 2η

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(1 + \alpha + \alpha\beta)(1 + \beta + \beta\gamma)(1 + \gamma + \gamma\alpha) \le (1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \beta + \beta^2)(1 + \gamma + \gamma^2)$$

Απόδειξη

Η ανισότητα παίρνει τη μορφή:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+1+\beta\right)\left(\frac{1}{\beta}+1+\gamma\right)\left(\frac{1}{\gamma}+1+\alpha\right) \le \left(\frac{1}{\alpha}+1+\alpha\right)\left(\frac{1}{\beta}+1+\beta\right)\left(\frac{1}{\gamma}+1+\gamma\right)$$

αρκεί να διαιρέσουμε και στα δύο μέλη τους όρους του α' παράγοντα με α, του β' με β και του γ' παράγοντα με γ. Έστω:

$$x = \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right), \quad y = (1+\alpha,\; 1+\beta,\; 1+\gamma) \quad \text{και} \quad \omega = (1+\beta,\; 1+\gamma,\; 1+\alpha)$$

Επειδή οι τριάδες x και y έχουν αντίθετη διάταξη και η ω είναι αναδιάταξη της y, θα ισχύει:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ 1+\alpha & 1+\beta & 1+\gamma \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \\ 1+\beta & 1+\gamma & 1+\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha}+1+\alpha\right)\left(\frac{1}{\beta}+1+\beta\right)\left(\frac{1}{\gamma}+1+\gamma\right) \ge \left(\frac{1}{\alpha}+1+\beta\right)\left(\frac{1}{\beta}+1+\gamma\right)\left(\frac{1}{\gamma}+1+\alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (1 + \alpha + \alpha^2)(1 + \beta + \beta^2)(1 + \gamma + \gamma^2) \ge (1 + \alpha + \alpha\beta)(1 + \beta + \beta\gamma)(1 + \gamma + \gamma\alpha)$$

που είναι η ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$.

3.15 Αν $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \ge \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$.

Λύση

Οι τριάδες (α, β, γ) και $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ έχουν την ίδια διάταξη. Επομένως έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \ge \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$$

Με άλλα λόγια θεωρήσαμε τις τριάδες $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$, (α, β, γ), οι οποίες έχουν την ίδια διάταξη (αφού $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$) και την αναδιάταξη (β, γ, α) των αριθμών (α, β, γ). Η ισότητα ισχύει αν:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

3.16 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \dfrac{3}{2}$.

(Θέμα εθνικών ολυμπιάδων)

Λύση

Λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζει η ανισότητα μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, ότι $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Τότε:

$$\frac{1}{\beta+\gamma} \geq \frac{1}{\gamma+\alpha} \geq \frac{1}{\alpha+\beta}$$

Επομένως από την ανισότητα της αναδιάταξης παίρνουμε:

- $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{1}{\beta+\gamma} & \dfrac{1}{\gamma+\alpha} & \dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{1}{\gamma+\alpha} & \dfrac{1}{\alpha+\beta} & \dfrac{1}{\beta+\gamma} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma} \qquad (1)$$

- $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{1}{\beta+\gamma} & \dfrac{1}{\gamma+\alpha} & \dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{1}{\alpha+\beta} & \dfrac{1}{\beta+\gamma} & \dfrac{1}{\alpha+\gamma} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\gamma} \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση δίνουν:

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\right) \geq \left(\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)+\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$$

διότι η παράσταση στο β΄ μέλος είναι ίση με 3. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$.

Σημείωση

Πρόκειται για μια πολύ ενδιαφέρουσα ανισότητα (Nesbitt) με αρκετές ιδιαίτερα διδακτικές και χαρακτηριστικές αποδείξεις. Η διαπίστωση αυτή δικαιολογείται από το γεγονός ότι η ανισότητα τίθεται σε πλήθος μαθηματικών διαγωνισμών σε ολόκληρο τον κόσμο.

3.17 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha+\beta+\gamma \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta} \le \frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}$$

Λύση

Στο θέμα αυτό θα δώσουμε δύο λύσεις. Η πρώτη βασίζεται στην ανισότητα της αναδιάταξης και η δεύτερη στη μέθοδο της αναγωγής που αποτελεί κατά κάποιο τρόπο έναν κλασικότερο τρόπο απόδειξης ανισοτήτων.

α) Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta} \ge \alpha+\beta+\gamma \qquad (1)$$

Η ανισότητα (1) είναι συμμετρική και για τον λόγο αυτό θεωρούμε $\alpha \le \beta \le \gamma$. Οι τριάδες $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ και $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}\right)$ έχουν αντίθετη διάταξη. Έτσι:

- ♦ $\begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma \le \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha}$
- ♦ $\begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma \le \frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\gamma^2}{\beta}$

Οι δύο τελευταίες ανισότητες με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$2(\alpha+\beta+\gamma) \le \left(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\gamma^2}{\beta}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Σύμφωνα με τις ανισότητες:

$$x^2+y^2 \ge 2xy \quad \text{και} \quad x^2+y^2+\omega^2 \ge xy+y\omega+\omega x \qquad (2)$$

παίρνουμε:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta} \ge \frac{2\alpha\beta}{2\gamma}+\frac{2\beta\gamma}{2\alpha}+\frac{2\gamma\alpha}{2\beta}= \frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2}{\alpha\beta\gamma} \ge$$

$$\ge \frac{\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=\alpha+\beta+\gamma$$

Επομένως:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta}\geq\alpha+\beta+\gamma$$

Η ισότητα ισχύει, λόγω των ανισοτήτων (2), μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$ [αφού στις σχέσεις (2) η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=y$ και $x=y=\omega$ αντίστοιχα].

β) Θα αποδείξουμε τώρα ότι:

$$\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\geq\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta} \qquad (3)$$

Η (3) είναι επίσης συμμετρική και έτσι θεωρούμε, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, ότι $\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Τότε οι τριάδες $(\alpha^3,\beta^3,\gamma^3)$ και $\left(\frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma},\frac{\beta}{\alpha\beta\gamma},\frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)$ έχουν την ίδια διάταξη. Σύμφωνα με την ανισότητα της αναδιάταξης παίρνουμε:

- $$\begin{bmatrix}\alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\\ \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\beta}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma}\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}\alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\\ \frac{\beta}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\geq\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\gamma^2}{\beta}$$
- $$\begin{bmatrix}\alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\\ \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\beta}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma}\end{bmatrix}\geq\begin{bmatrix}\alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\\ \frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma} & \frac{\beta}{\alpha\beta\gamma}\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\geq\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha}$$

Οι δύο τελευταίες ανισότητες με πρόσθεση δίνουν:

$$\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\geq\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{2\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\beta}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Η προς απόδειξη ανισότητα (3) γράφεται:

$$2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)\geq\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)+\gamma\alpha(\gamma^2+\alpha^2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha^4+\beta^4-\alpha^3\beta-\alpha\beta^3)+(\beta^4+\gamma^4-\beta^3\gamma-\beta\gamma^3)+(\gamma^4+\alpha^4-\gamma^3\alpha-\gamma\alpha^3)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\alpha^3(\alpha-\beta)-\beta^3(\alpha-\beta)\right]+\left[\beta^3(\beta-\gamma)-\gamma^3(\beta-\gamma)\right]+\left[\gamma^3(\gamma-\alpha)-\alpha^3(\gamma-\alpha)\right]\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+(\beta-\gamma)^2(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)+(\gamma-\alpha)^2(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)\geq 0$$

η οποία ισχύει. Προφανώς η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Σημείωση

Επειδή γενικά είναι $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geq 0$ $(x, y\geq 0)$, θα είναι:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0,\quad \beta^2+\beta\gamma+\gamma^2>0\quad\text{και}\quad\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2>0$$

Πρόκληση

Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + (\alpha\beta)^3 + (\beta\gamma)^3 + (\gamma\alpha)^3 \geq 2(\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha)$$

(Crux – 2004)

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα της αναδιάταξης.

Οι τριάδες $(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ και (α, β, γ) έχουν την ίδια διάταξη. Το ίδιο ισχύει και για τις τριάδες $\left((\alpha\beta)^2, (\beta\gamma)^2, (\gamma\alpha)^2\right)$ και $(\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha)$. Επομένως:

- $\begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha \qquad (1)$

- $\begin{bmatrix} (\alpha\beta)^2 & (\beta\gamma)^2 & (\gamma\alpha)^2 \\ \alpha\beta & \beta\gamma & \gamma\alpha \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} (\alpha\beta)^2 & (\beta\gamma)^2 & (\gamma\alpha)^2 \\ \gamma\alpha & \alpha\beta & \beta\gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\alpha\beta)^3 + (\beta\gamma)^3 + (\gamma\alpha)^3 \geq \alpha^3\beta^2\gamma + \beta^3\gamma^2\alpha + \gamma^3\alpha^2\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\beta)^3 + (\beta\gamma)^3 + (\gamma\alpha)^3 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\beta)^3 + (\beta\gamma)^3 + (\gamma\alpha)^3 \geq \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha \qquad (2)$$

διότι $\alpha\beta\gamma = 1$. Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) και παίρνουμε τη ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

3.18 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\alpha^3\beta}{\gamma} + \dfrac{\beta^3\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma^3\alpha}{\beta} + \dfrac{\alpha\beta^3}{\gamma} + \dfrac{\beta\gamma^3}{\alpha} + \dfrac{\gamma\alpha^3}{\beta} \geq 6\alpha\beta\gamma$.

Λύση

Έστω $\beta \geq \alpha \geq \gamma$. Τότε οι τριάδες $(\alpha^2\beta^2, \beta^2\gamma^2, \gamma^2\alpha^2)$ και $\left(\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}, \dfrac{\alpha}{\beta\gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma\alpha}\right)$ έχουν αντίθετη διάταξη.

Συνεπώς:

- $\begin{bmatrix} \alpha^2\beta^2 & \beta^2\gamma^2 & \gamma^2\alpha^2 \\ \dfrac{\gamma}{\alpha\beta} & \dfrac{\alpha}{\beta\gamma} & \dfrac{\beta}{\gamma\alpha} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \alpha^2\beta^2 & \beta^2\gamma^2 & \gamma^2\alpha^2 \\ \dfrac{\alpha}{\beta\gamma} & \dfrac{\beta}{\gamma\alpha} & \dfrac{\gamma}{\alpha\beta} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2 \cdot \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \beta^2\gamma^2 \cdot \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \gamma^2\alpha^2 \cdot \frac{\beta}{\gamma\alpha} \leq \alpha^2\beta^2 \cdot \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \beta^2\gamma^2 \cdot \frac{\beta}{\gamma\alpha} + \gamma^2\alpha^2 \cdot \frac{\gamma}{\alpha\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma \leq \frac{\alpha^3\beta}{\gamma} + \frac{\beta^3\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma^3\alpha}{\beta} \qquad (1)$$

♦ $$\begin{bmatrix} \alpha^2\beta^2 & \beta^2\gamma^2 & \gamma^2\alpha^2 \\ \dfrac{\gamma}{\alpha\beta} & \dfrac{\alpha}{\beta\gamma} & \dfrac{\beta}{\gamma\alpha} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \alpha^2\beta^2 & \beta^2\gamma^2 & \gamma^2\alpha^2 \\ \dfrac{\beta}{\gamma\alpha} & \dfrac{\gamma}{\alpha\beta} & \dfrac{\alpha}{\beta\gamma} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^2\beta^2\cdot\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\beta^2\gamma^2\cdot\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\gamma^2\alpha^2\cdot\frac{\beta}{\gamma\alpha}\le\alpha^2\beta^2\cdot\frac{\beta}{\gamma\alpha}+\beta^2\gamma^2\cdot\frac{\gamma}{\alpha\beta}+\gamma^2\alpha^2\cdot\frac{\alpha}{\beta\gamma}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\le\frac{\alpha\beta^3}{\gamma}+\frac{\beta\gamma^3}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha^3}{\beta}\qquad(2)$$

Οι ανισότητες (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$\frac{\alpha^3\beta}{\gamma}+\frac{\beta^3\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma^3\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta^3}{\gamma}+\frac{\beta\gamma^3}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha^3}{\beta}\ge 6\alpha\beta\gamma$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$.

Άλλος τρόπος

Από την ανισότητα του Cauchy (AM – GM) παίρνουμε:

♦ $\dfrac{\alpha^3\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta^3\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma^3\alpha}{\beta}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{\alpha^3\beta}{\gamma}\cdot\dfrac{\beta^3\gamma}{\alpha}\cdot\dfrac{\gamma^3\alpha}{\beta}}=3\alpha\beta\gamma$

♦ $\dfrac{\alpha\beta^3}{\gamma}+\dfrac{\beta\gamma^3}{\alpha}+\dfrac{\gamma\alpha^3}{\beta}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{\alpha\beta^3}{\gamma}\cdot\dfrac{\beta\gamma^3}{\alpha}\cdot\dfrac{\gamma\alpha^3}{\beta}}=3\alpha\beta\gamma$

Οι σχέσεις αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν τη ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν

$$\alpha=\beta=\gamma.$$

Είναι φανερό ότι η ανισότητα προκύπτει και άμεσα ως εφαρμογή της AM – GM για έξι όρους.

3.19 Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha^8+\beta^8+\gamma^8\ge\alpha^3\beta^3\gamma^3\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$.

Λύση

Οι τριάδες $(\alpha^5,\beta^5,\gamma^5)$ και $\left(\dfrac{1}{\beta^3\gamma^3},\dfrac{1}{\alpha^3\gamma^3},\dfrac{1}{\alpha^3\beta^3}\right)$ έχουν την ίδια διάταξη. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \alpha^5 & \beta^5 & \gamma^5 \\ \dfrac{1}{\beta^3\gamma^3} & \dfrac{1}{\alpha^3\gamma^3} & \dfrac{1}{\alpha^3\beta^3} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} \alpha^5 & \beta^5 & \gamma^5 \\ \dfrac{1}{\alpha^3\beta^3} & \dfrac{1}{\beta^3\gamma^3} & \dfrac{1}{\alpha^3\gamma^3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{\alpha^5}{\beta^3\gamma^3}+\frac{\beta^5}{\alpha^3\gamma^3}+\frac{\gamma^5}{\alpha^3\beta^3}\ge\frac{\alpha^2}{\beta^3}+\frac{\beta^2}{\gamma^3}+\frac{\gamma^2}{\alpha^3}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha^8+\beta^8+\gamma^8\ge\alpha^5\gamma^3+\beta^5\alpha^3+\gamma^5\beta^3\qquad(1)$$

Οι τριάδες $(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)$ και $\left(\dfrac{1}{\alpha^3},\dfrac{1}{\beta^3},\dfrac{1}{\gamma^3}\right)$ έχουν αντίθετη διάταξη. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \dfrac{1}{\alpha^3} & \dfrac{1}{\beta^3} & \dfrac{1}{\gamma^3} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \dfrac{1}{\beta^3} & \dfrac{1}{\gamma^3} & \dfrac{1}{\alpha^3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\le\frac{\alpha^2}{\beta^3}+\frac{\beta^2}{\gamma^3}+\frac{\gamma^2}{\alpha^3}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^5\gamma^3+\beta^5\alpha^3+\gamma^5\beta^3}{\alpha^3\beta^3\gamma^3} \geq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha^5\gamma^3+\beta^5\alpha^3+\gamma^5\beta^3 \geq \alpha^3\beta^3\gamma^3\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\alpha^8+\beta^8+\gamma^8 \geq \alpha^3\beta^3\gamma^3\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Θεώρημα 9ο

Έστω (α, β, γ) και (x, y, ω) δύο τριάδες πραγματικών αριθμών.

α) Αν $(\alpha \leq \beta \leq \gamma$ και $x \leq y \leq \omega)$ ή $(\alpha \geq \beta \geq \gamma$ και $x \geq y \geq \omega)$, δηλαδή οι τριάδες (α, β, γ) και (x, y, ω) έχουν την ίδια διάταξη, τότε:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{x+y+\omega}{3} \leq \frac{\alpha x+\beta y+\gamma\omega}{3}$$

β) Αν $(\alpha \leq \beta \leq \gamma$ και $x \geq y \geq \omega)$ ή $(\alpha \geq \beta \geq \gamma$ και $x \leq y \leq \omega)$, δηλαδή οι τριάδες (α, β, γ) και (x, y, ω) έχουν διαφορετική διάταξη, τότε:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{x+y+\omega}{3} \geq \frac{\alpha x+\beta y+\gamma\omega}{3}$$

(Ανισότητα Tschebychev)

Απόδειξη

α) Από την ανισότητα της αναδιάταξης και επειδή οι τριάδες (α, β, γ) και (x, y, ω) έχουν την ίδια διάταξη, προκύπτει ότι:

- ♦ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega \geq \alpha x+\beta y+\gamma\omega$
- ♦ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega \geq \alpha y+\beta\omega+\gamma x$
- ♦ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega \geq \alpha\omega+\beta x+\gamma y$

Οι σχέσεις αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$3(\alpha x+\beta y+\gamma\omega) \geq \alpha(x+y+\omega)+\beta(y+\omega+x)+\gamma(\omega+x+y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha x+\beta y+\gamma\omega) \geq (\alpha+\beta+\gamma)(x+y+\omega) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{x+y+\omega}{3} \leq \frac{\alpha x+\beta y+\gamma\omega}{3}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$ ή $x=y=\omega$.

β) Από την ανισότητα της αναδιάταξης και επειδή οι τριάδες (α, β, γ) και (x, y, ω) έχουν αντίθετη διάταξη, συμπεραίνουμε ότι:

- ♦ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega \leq \alpha x+\beta y+\gamma\omega$
- ♦ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega \leq \alpha y+\beta\omega+\gamma x$
- ♦ $\alpha x+\beta y+\gamma\omega \leq \alpha\omega+\beta x+\gamma y$

Οι σχέσεις αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν τελικά:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{x+y+\omega}{3}\geq\frac{\alpha x+\beta y+\gamma\omega}{3}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha=\beta=\gamma$ ή $x=y=\omega$.

Σχόλιο

Η ανισότητα του Tschebychev ισχύει γενικά και για τυχαίο πλήθος όρων. Έτσι:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}\cdot\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}{\nu}\leq\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu}{\nu}$$

αν οι ακολουθίες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ έχουν την ίδια διάταξη,

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}\cdot\frac{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu}{\nu}\geq\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu}{\nu}$$

αν οι ακολουθίες $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ έχουν διαφορετική διάταξη.

Η ισότητα και στις δύο περιπτώσεις ισχύει αν:

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu \quad \text{ή} \quad \beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_\nu$$

3.20 Αν $\alpha, \beta, \gamma>0$, να αποδειχθεί ότι $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}$.

(Ανισότητα του Nesbitt)

Λύση

Έχουμε ήδη παρουσιάσει μια απόδειξη με τη βοήθεια της ανισότητας της αναδιάταξης. (Δες και θέμα 3.16.) Εδώ παρουσιάζουμε μια λύση με χρήση της ανισότητας Tschebychev.

Λόγω συμμετρίας θεωρούμε $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Τότε $\frac{1}{\beta+\gamma}\geq\frac{1}{\gamma+\alpha}\geq\frac{1}{\alpha+\beta}$. Έτσι η ανισότητα Tschebychev δίνει:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\frac{\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}}{3}\leq\frac{\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}+\frac{1}{\alpha+\beta}\right) \qquad (1)$$

Όμως:

$$\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)=\frac{1}{6}(2\alpha+2\beta+2\gamma)\left(\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left[(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\right]\left[\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right]\geq\frac{9}{6}=\frac{3}{2} \qquad (2)$$

αφού σύμφωνα με τη βασική ανισότητα $(x+y+\omega)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}\right)\geq 9$, όπου $x, y, \omega>0$ θα ισχύει ότι:

$$\left[(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)\right]\left[\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}\right]\geq 9$$

Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν τη ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Θεώρημα 10^{o} (Η ανισότητα Hölder)

Πρώτη μορφή

Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega, \kappa, \lambda, \mu$ ισχύει ότι:

α) $(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\geq \alpha x+\beta y$

β) $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)^{\frac{1}{3}}(x^3+y^3+\omega^3)^{\frac{1}{3}}\geq \alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu\omega$

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$ ή $\left(\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\beta}{\lambda}=\frac{\gamma}{\mu} \text{ και } \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}\right)$αντίστοιχα.

Δεύτερη μορφή

Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega$ και $\mu, \nu\in \mathbb{N}^*$ με $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1$ ισχύει:

α) $(\alpha^\mu+\beta^\mu)^{\frac{1}{\mu}}(x^\nu+y^\nu)^{\frac{1}{\nu}}\geq \alpha x+\beta y$

β) $(\alpha^\mu+\beta^\mu+\gamma^\mu)^{\frac{1}{\mu}}(x^\nu+y^\nu+\omega^\nu)^{\frac{1}{\nu}}\geq \alpha x+\beta y+\gamma\omega$

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$ ή $\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}$ αντίστοιχα.

Τονίζουμε ότι οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν και στην περίπτωση που οι μ, ν εί- ναι τυχαίοι θετικοί ρητοί αριθμοί ή ακόμα θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Τρίτη μορφή

Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega$ ισχύει ότι:

α) $(\alpha+\beta)^\mu(x+y)^\nu\geq \alpha^\mu x^\nu+\beta^\mu y^\nu$, όπου $\mu, \nu\in\mathbb{Q}_+^*$ με $\mu+\nu=1$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu(x+y+\omega)^\nu\geq \alpha^\mu x^\nu+\beta^\mu y^\nu+\gamma^\mu\omega^\nu$ με $\mu, \nu\in\mathbb{Q}_+^*$ και $\mu+\nu=1$

γ) $(\alpha+\beta+\gamma)^p(\kappa+\lambda+\mu)^q(x+y+\omega)^r\geq \alpha^p\kappa^q x^r+\beta^p\lambda^q y^r+\gamma^p\mu^q\omega^r$,

όπου p, q και r θετικοί αριθμοί με $p+q+r=1$

Η ισότητα ισχύει και εδώ αντίστοιχα όταν:

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\beta}{\lambda}=\frac{\gamma}{\mu} \text{ και } \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}\right)$$

δ) $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^{\mu_1}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)^{\mu_2}\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^{\mu_\kappa}\geq$

$$\geq \alpha_1^{\mu_1}\beta_1^{\mu_2}\ldots x_1^{\mu_\kappa}+\alpha_2^{\mu_1}\beta_2^{\mu_2}\ldots x_2^{\mu_\kappa}+\ldots+\alpha_\nu^{\mu_1}\beta_\nu^{\mu_2}\ldots x_\nu^{\mu_\kappa},$$

με $\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\kappa=1$ (οι $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\kappa$ είναι γενικά θετικοί αριθμοί).

Η ισότητα ισχύει όταν οι ν-άδες $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu)$, …, $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ είναι ανάλογες.

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu},\ \ldots,\ \frac{\alpha_1}{x_1}=\frac{\alpha_2}{x_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{x_\nu}\right)$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ξεφεύγει από τον σκοπό του βιβλίου αυτού.

3.21 Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι $32(\alpha^6+\beta^6)\geq(\alpha+\beta)^6$.

Λύση

Είναι $32=2^5$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder (δεύτερη μορφή). Επειδή $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1$, παίρνουμε:

$$\left(1^{\frac{6}{5}}+1^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}}(\alpha^6+\beta^6)^{\frac{1}{6}}\geq 1\cdot\alpha+1\cdot\beta \Leftrightarrow \left[2^5(\alpha^6+\beta^6)\right]^{\frac{1}{6}}\geq\alpha+\beta \Leftrightarrow 32(\alpha^6+\beta^6)\geq(\alpha+\beta)^6$$

Η ισότητα ισχύει αν $\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow\alpha=\beta$.

3.22 Αν $\alpha, \beta, x, y>0$, να αποδειχθεί ότι $(\alpha+\beta)^2\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)\geq(x+y)^3$.

Λύση

Από την ανισότητα Hölder (τρίτη μορφή, (α)) παίρνουμε:

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}\geq\alpha^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^3}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y^3}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\alpha+\beta)^2\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}\geq\alpha^{\frac{2}{3}}\frac{(x^3)^{\frac{1}{3}}}{\alpha^{\frac{2}{3}}}+\beta^{\frac{2}{3}}\frac{(y^3)^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\left(\frac{x^3}{\alpha^2}+\frac{y^3}{\beta^2}\right)\geq(x+y)^3$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\alpha}{\frac{x^3}{\alpha^2}}=\frac{\beta}{\frac{y^3}{\beta^2}}\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{x^3}=\frac{\beta^3}{y^3}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$$

3.23 Αν (α, β, γ), (κ, λ, μ) και (x, y, ω) είναι τριάδες θετικών αριθμών, να αποδειχθεί ότι

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)(x^3+y^3+\omega^3)\geq(\alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu\omega)^3.$$

Λύση

Από την ανισότητα Hölder (πρώτη μορφή, (β)) παίρνουμε:

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)^{\frac{1}{3}}(x^3+y^3+\omega^3)^{\frac{1}{3}}\geq \alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\kappa^3+\lambda^3+\mu^3)(x^3+y^3+\omega^3)\geq(\alpha\kappa x+\beta\lambda y+\gamma\mu\omega)^3$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\alpha}{\kappa}=\frac{\beta}{\lambda}=\frac{\gamma}{\mu} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}$$

3.24 Αν α, β, γ και x, y, ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{\omega}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{3(x+y+\omega)}$$

(Λευκορωσία - 2000)

Λύση

Από την ανισότητα του Hölder παίρνουμε:

$$\left(\frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}}(1+1+1)^{\frac{1}{3}}(x+y+\omega)^{\frac{1}{3}}\geq$$

$$\geq\left(\frac{\alpha^3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1\cdot x^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{\beta^3}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1\cdot y^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{\gamma^3}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 1\cdot \omega^{\frac{1}{3}}=\alpha+\beta+\gamma$$

Υψώνουμε στον κύβο και τελικά προκύπτει:

$$3\left(\frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{\omega}\right)(x+y+\omega)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^3 \Leftrightarrow \frac{\alpha^3}{x}+\frac{\beta^3}{y}+\frac{\gamma^3}{\omega}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^3}{3(x+y+\omega)}$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\left(\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{\omega} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\frac{\alpha^3}{x}}=\frac{1}{\frac{\beta^3}{y}}=\frac{1}{\frac{\gamma^3}{\omega}}\right) \Leftrightarrow (x=y=\omega \text{ και } \alpha=\beta=\gamma)$$

3.25 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2\geq(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3$$

Λύση

Σύμφωνα με την ανισότητα Hölder παίρνουμε:

$$(1^3+1^3+1^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}\geq 1\cdot\alpha\cdot\alpha+1\cdot\beta\cdot\beta+1\cdot\gamma\cdot\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2\right]^{\frac{1}{3}}\geq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow 3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2\geq(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

3.26 Αν $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2(x^3+y^3+\omega^3) \ge (\alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2\omega)^3$$

Λύση

Από την ανισότητα Hölder προκύπτει ότι:

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{2}{3}}(x^3+y^3+\omega^3)^{\frac{1}{3}} \ge (\alpha^3)^{\frac{2}{3}}(x^3)^{\frac{1}{3}}+(\beta^3)^{\frac{2}{3}}(y^3)^{\frac{1}{3}}+(\gamma^3)^{\frac{2}{3}}(\omega^3)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2(x^3+y^3+\omega^3)\right]^{\frac{1}{3}} \ge \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2(x^3+y^3+\omega^3) \ge (\alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2\omega)^3$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\alpha^3}{x^3}=\frac{\beta^3}{y^3}=\frac{\gamma^3}{\omega^3} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}$$

δηλαδή όταν οι αριθμοί α, β και γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς x, y και ω.

3.27 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, να αποδειχθεί ότι $9(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) \ge (\alpha+\beta+\gamma)^3$.

Λύση

Από την ανισότητα Hölder [τρίτη μορφή, (γ)] παίρνουμε:

$$(1^3+1^3+1^3)^{\frac{1}{3}}(1^3+1^3+1^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}} \ge (1^3\cdot 1^3\cdot\alpha^3)^{\frac{1}{3}}+(1^3\cdot 1^3\cdot\beta^3)^{\frac{1}{3}}+(1^3\cdot 1^3\cdot\gamma^3)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}} \ge \alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow 9(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) \ge (\alpha+\beta+\gamma)^3$$

αφού $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$. Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$$

Θα μπορούσαμε όμως να χρησιμοποιήσουμε και την πρώτη μορφή, (β).

3.28 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) \ge \left(1+\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right)^3$$

Λύση

Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε:

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{3}}(1+\beta)^{\frac{1}{3}}(1+\gamma)^{\frac{1}{3}} \ge 1^{\frac{1}{3}}\cdot 1^{\frac{1}{3}}\cdot 1^{\frac{1}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\beta^{\frac{1}{3}}\cdot\gamma^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \left[(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)\right]^{\frac{1}{3}} \ge 1+(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) \ge \left(1+\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right)^3$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$$

Άλλος τρόπος

Η ανισότητα γράφεται:

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = 1 + (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma \geq$$

$$\geq 1 + 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} + 3\sqrt[3]{(\alpha\beta\gamma)^2} + \left(\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right)^3 = \left(1+\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\right)^3$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$.

3.29 Αν α, β, γ και x, y, ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(x^3+y^3+\omega^3) \geq (\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^3$$

Λύση

Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε:

$$(1^3+1^3+1^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(x^3+y^3+\omega^3)^{\frac{1}{3}} \geq 1\cdot\alpha\cdot x+1\cdot\beta\cdot y+1\cdot\gamma\cdot\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(x^3+y^3+\omega^3)\right]^{\frac{1}{3}} \geq \alpha x+\beta y+\gamma\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(x^3+y^3+\omega^3) \geq (\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^3$$

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma \quad \text{και} \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{\omega} \Leftrightarrow x=y=\omega$$

Ο συμβολισμός Σ για το άθροισμα

Σε περιπτώσεις που ένα άθροισμα έχει πολλούς όρους δεν είναι πρακτική η επεξεργασία του με τον συνήθη τρόπο. Για τον λόγο αυτόν έχουμε διεθνώς καθιερώσει ένα σύμβολο, το οποίο μας επιτρέπει να παρουσιάζουμε τέτοια αθροίσματα με ευκολία και συντομία.

Α. Αν λοιπόν έχουμε το άθροισμα των ν αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, δηλαδή:

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$$

τότε γράφουμε $S = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i$. Επομένως:

$$\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω συμβολισμό μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_{i=1}^{\nu}(\alpha_i+\beta_i) = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i + \sum_{i=1}^{\nu}\beta_i, \quad \sum_{i=1}^{\nu}\lambda\alpha_i = \lambda\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i, \quad \sum_{i=1}^{\nu}\alpha = \nu\alpha$$

όπου λ και α είναι αριθμοί. Επομένως:

$$\sum_{i=1}^{\nu}(\lambda\alpha_i+\mu\beta_i+\rho)=\lambda\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i+\mu\sum_{i=1}^{\nu}\beta_i+\nu\rho$$

Ισχύει ακόμα ότι:

$$\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i(\beta_i+\gamma_i)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\beta_i+\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\gamma_i \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i+\sum_{i=\kappa+1}^{\nu}\alpha_i$$

διότι:

$$\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa)+(\alpha_{\kappa+1}+\alpha_{\kappa+2}+\ldots+\alpha_\nu)=\sum_{i=1}^{\kappa}\alpha_i+\sum_{i=\kappa+1}^{\nu}\alpha_i$$

Β. Το σύμβολο Σ το χρησιμοποιούμε ακόμα και για να δηλώσουμε συμμετρικές (ή κυκλικές παραστάσεις). Έτσι:

α) Για τρεις αριθμούς α, β και γ γράφουμε:

i) $\alpha+\beta+\gamma=\sum\alpha$ ή $\alpha+\beta+\gamma=\sum\beta$ ή $\alpha+\beta+\gamma=\sum\gamma$

ii) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\sum\alpha\beta$ ή $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\sum\beta\gamma$ ή $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\sum\gamma\alpha$

β) Για τους αριθμούς α, β, γ και δ γράφουμε:

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha=\sum_{\text{κυκλικά}}\alpha\beta \quad \text{ή} \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha=\sum_{\text{cyclic}}\alpha\beta$$

και

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\sum_{\text{συμμ}}\alpha\beta \quad \text{ή} \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=\sum_{\text{symmetric}}\alpha\beta=\sum_{\text{sym}}\alpha\beta$$

Επισημαίνουμε ότι η κυκλική παράσταση είναι τελείως διαφορετική από τη συμμετρική, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να συμπίπτει, αφού μια παράσταση, όπως η $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ είναι συγχρόνως και κυκλική και συμμετρική. Για παράδειγμα, μπορούμε να γράψουμε:

- $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha=\sum_{\text{cyclic}}\alpha^2\beta$ ή ακόμα για συντομία $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha=\sum\alpha^2\beta$
- $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2=\sum_{\text{symmetric}}\alpha^2\beta$ (υποχρεωτικά) ή
- $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2+\beta\gamma^2+\gamma\alpha^2=\sum\alpha\beta(\alpha+\beta)=\sum\alpha^2(\beta+\gamma)$

Όταν το Σ δηλώνει συμμετρικό άθροισμα, κάτι όμως που θα το αναγράφουμε στη βάση του Σ , τότε το πλήθος των προσθετέων είναι όσες οι κυκλικές μεταθέσεις του πλήθους των μεταβλητών. Επομένως $\sum_{\text{sym}}\alpha=2(\alpha+\beta+\gamma)$, ενώ $\sum_{\text{cyc}}\alpha=\alpha+\beta+\gamma$.Ο τρόπος που χρησιμοποιούμε το παραπάνω σύμβολο θα φανεί στη λύση ορισμένων προτεινόμενων ασκήσεων στις ενότητες που ακολουθούν .

3.30 Αν $\alpha, \beta, \gamma, x, y$ και ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^4\left(\frac{x^5}{\alpha^4}+\frac{y^5}{\beta^4}+\frac{\omega^5}{\gamma^4}\right)\geq(x+y+\omega)^5$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε με κατάλληλο τρόπο την ανισότητα Hölder. Είναι:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x^5}{\alpha^4}+\frac{y^5}{\beta^4}+\frac{\omega^5}{\gamma^4}\right)^{\frac{1}{5}}\geq\alpha^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x^5}{\alpha^4}\right)^{\frac{1}{5}}+\beta^{\frac{4}{5}}\left(\frac{y^5}{\beta^4}\right)^{\frac{1}{5}}+\gamma^{\frac{4}{5}}\left(\frac{\omega^5}{\gamma^4}\right)^{\frac{1}{5}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[(\alpha+\beta+\gamma)^4\left(\frac{x^5}{\alpha^4}+\frac{y^5}{\beta^4}+\frac{\omega^5}{\gamma^4}\right)\right]^{\frac{1}{5}}\geq x+y+\omega\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta+\gamma)^4\left(\frac{x^5}{\alpha^4}+\frac{y^5}{\beta^4}+\frac{\omega^5}{\gamma^4}\right)\geq(x+y+\omega)^5$$

διότι $\alpha^{\frac{4}{5}}\left(\frac{x^5}{\alpha^4}\right)^{\frac{1}{5}}=\alpha^{\frac{4}{5}}\frac{(x^5)^{\frac{1}{5}}}{(\alpha^4)^{\frac{1}{5}}}=\alpha^{\frac{4}{5}}\frac{x}{\alpha^{\frac{4}{5}}}=x$ κ.λπ. Η ισότητα ισχύει όταν:

$$\frac{\alpha}{\frac{x^5}{\alpha^4}}=\frac{\beta}{\frac{y^5}{\beta^4}}=\frac{\gamma}{\frac{\omega^5}{\gamma^4}}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{\omega}$$

δηλαδή όταν οι αριθμοί α, β και γ είναι ανάλογοι με τους x, y και ω.

Θεώρημα 11ο (Weighted Means)

Έστω α, β, γ θετικοί αριθμοί και $\kappa, \lambda, \mu>0$. Ισχύει τότε ότι:

α) αν $\kappa+\lambda=1$, τότε $\kappa\alpha+\lambda\beta\geq\alpha^\kappa\beta^\lambda$

β) αν $\kappa+\lambda+\mu=1$, τότε $\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma\geq\alpha^\kappa\beta^\lambda\gamma^\mu$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta$ ή $\alpha=\beta=\gamma$ αντίστοιχα.

(Ανισότητα των βαρών ή Σταθμισμένων Μέσων ή Σταθμισμένη ανισότητα)

Σχόλια

♦ Αν $\kappa=\lambda=\frac{1}{2}$, τότε η ανισότητα (α) γίνεται:

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\geq\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$$

♦ Αν $\kappa=\lambda=\mu=\frac{1}{3}$, τότε η ανισότητα (β) γίνεται:

$$\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\geq\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}\gamma^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

η οποία είναι η γνωστή ανισότητα του Cauchy (ή ανισότητα του Αριθμητικού – Γεωμετρικού μέσου, που συμβολίζεται και με AM - GM).

Γενίκευση

Η ανισότητα των βαρών ισχύει και για μεγαλύτερο πλήθος αριθμών. Έτσι:

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$ και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu > 0$ με $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = 1$, τότε:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_\nu\alpha_\nu \geq \alpha_1^{x_1} \cdot \alpha_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu^{x_\nu}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu$.

3.31 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

α) $\frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{\alpha}{\beta}$

β) $\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4+1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Σύμφωνα λοιπόν με την ανισότητα των βαρών παίρνουμε:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{\alpha^{\frac{4}{3}}}{\beta^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{\beta^{\frac{2}{6}}}{\gamma^{\frac{2}{6}}} \cdot \frac{\gamma^{\frac{2}{6}}}{\alpha^{\frac{2}{6}}} = \alpha^{\frac{4}{3}-\frac{2}{6}} \cdot \beta^{\frac{2}{6}-\frac{4}{3}} \cdot \gamma^{\frac{2}{6}-\frac{2}{6}} = \alpha\beta^{-1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Επομένως:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{\alpha}{\beta}$$

Η ισότητα ισχύει αν:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow (\beta^2 = \alpha\gamma \text{ και } \alpha^2 = \beta\gamma)$$

Αυτές με διαίρεση δίνουν:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = \beta^3 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Αλλά με $\alpha = \beta$ παίρνουμε ότι $\beta = \gamma$. Έτσι η ισότητα στη δοσμένη ανισότητα ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$.

β) Εφαρμόζουμε κυκλικά το ερώτημα (α) και τις τρεις ανισότητες που προκύπτουν τις προσθέτουμε κατά μέλη. Προκύπτει έτσι η ζητούμενη. Η ισότητα ισχύει αν $\alpha = \beta = \gamma$.

3.32 Έστω α, β και γ θετικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι:

α) $4\cdot\dfrac{\alpha^2}{\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}+2\cdot\dfrac{\gamma^2}{\beta}\geq 7\alpha$ β) $3\cdot\dfrac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta^3}{\gamma\alpha}\geq 4\cdot\dfrac{\alpha^2}{\gamma}$

γ) $\alpha+\beta+\gamma\leq\dfrac{\alpha^2}{\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\beta}\leq\dfrac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\dfrac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma^3}{\alpha\beta}$

Λύση

α) Η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{1}{7}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{2}{7}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta}\geq\alpha$$

Όμως $\frac{4}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=1$. Έτσι η ανισότητα των βαρών δίνει:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{1}{7}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{2}{7}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta}\geq\left(\frac{\alpha^2}{\gamma}\right)^{\frac{4}{7}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{7}}\left(\frac{\gamma^2}{\beta}\right)^{\frac{2}{7}}=\alpha^{\frac{8}{7}-\frac{1}{7}}\cdot\beta^{\frac{2}{7}-\frac{2}{7}}\cdot\gamma^{\frac{4}{7}-\frac{4}{7}}=\alpha$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

β) Όπως και στο ερώτημα (α) και επειδή $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$, η ανισότητα των βαρών δίνει:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}\geq\left(\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\Leftrightarrow 3\cdot\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}\geq 4\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}$$

αφού:

$$\left(\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{\alpha^{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}}\beta^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}}{\gamma^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}}=\frac{\alpha^2}{\gamma}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν:

$$\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}=\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}\Leftrightarrow\frac{\alpha^3}{\beta}=\frac{\beta^3}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha^4=\beta^4\Leftrightarrow\alpha=\beta$$

γ) Από το ερώτημα (α) προκύπτουν κυκλικά οι σχέσεις:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{1}{7}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{2}{7}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta}\geq\alpha\quad\frac{4}{7}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{1}{7}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{2}{7}\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}\geq\beta\quad\frac{4}{7}\cdot\frac{\gamma^2}{\beta}+\frac{1}{7}\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{2}{7}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\geq\gamma$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\gamma^2}{\beta}\geq\alpha+\beta+\gamma$$

Έτσι αποδείχτηκε το α΄ σκέλος της δοσμένης ανισότητας. Η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta=\gamma$. Από το ερώτημα (β) προκύπτουν επίσης κυκλικά οι ανισότητες:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}\geq\frac{\alpha^2}{\gamma},\quad\frac{3}{4}\cdot\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\geq\frac{\beta^2}{\alpha}\quad\text{και}\quad\frac{3}{4}\cdot\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}\geq\frac{\gamma^3}{\beta}$$

Οι ανισότητες αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$\frac{\alpha^3}{\beta\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha\beta}\geq\frac{\alpha^2}{\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\gamma^2}{\beta}$$

Έτσι αποδείχθηκε και το β΄ σκέλος της προς απόδειξη ανισότητας. Η ισότητα ισχύει και εδώ αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλια

i) Για να ισχύει η ισότητα στο ερώτημα (α) πρέπει:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma}=\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\gamma^2}{\beta}\Leftrightarrow\alpha^3=\beta^2\gamma\quad(1)\qquad\text{και}\qquad\beta^3=\gamma^2\alpha\quad(2)$$

Η σχέση (2) δίνει:

$$(\beta^3)^3=(\gamma^2\alpha)^3\Leftrightarrow\beta^9=\gamma^6\alpha^3\overset{(1)}{*,}\quad\beta^9=\gamma^6\beta^2\gamma\Leftrightarrow\beta^7=\gamma^7\Leftrightarrow\beta=\gamma$$

Με $\beta=\gamma$ η σχέση (1) δίνει:

$$\alpha^3=\beta^3\Leftrightarrow\alpha=\beta$$

Επομένως η ισότητα στο ερώτημα (α) ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$.

ii) Μια άλλη απόδειξη του ερωτήματος (γ) αποτελεί το θέμα 3.17.

3.33 Αν $\alpha,\beta,\gamma>0,$ να αποδειχθεί ότι $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha.$

Λύση

Αξίζει να προσεχθεί ιδιαίτερα ο τρόπος αντιμετώπισης της άσκησης αυτής.

Έστω $x, y, \omega>0$ με $x+y+\omega=1.$ Τότε από την ανισότητα των βαρών παίρνουμε:

$$x\alpha^3+y\beta^3+\omega\gamma^3\geq(\alpha^3)^x(\beta^3)^y(\gamma^3)^\omega=\alpha^{3x}\beta^{3y}\gamma^{3\omega}$$

Εξετάζουμε αν υπάρχουν τιμές των x, y και ω, ώστε $\alpha^{3x}\beta^{3y}\gamma^{3\omega}=\alpha^2\beta.$ Για να ισχύει όμως η τελευταία, αρκεί να πάρουμε:

$$(3x=2,\ 3y=1\ \text{και}\ 3\omega=0)\Leftrightarrow\left(x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}\ \text{και}\ \omega=0\right)$$

Επειδή $x+y+\omega=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+0=1,$ οι τιμές αυτές είναι δεκτές. Ισχύουν επομένως οι σχέσεις:

$$\frac{2}{3}\alpha^3+\frac{1}{3}\beta^3\geq\alpha^2\beta,\quad\frac{2}{3}\beta^3+\frac{1}{3}\gamma^3\geq\beta^2\gamma\quad\text{και}\quad\frac{2}{3}\gamma^3+\frac{1}{3}\alpha^3\geq\gamma^2\alpha$$

Οι τρεις αυτές σχέσεις με πρόσθεση δίνουν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\geq\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha.$ Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλια

i) Η ανισότητα $\frac{2}{3}\alpha^3+\frac{1}{3}\beta^3 \geq \alpha^2\beta,$ δηλαδή η $2\alpha^3+\beta^3 \geq 3\alpha^2\beta,$ αποδεικνύεται και με τη βοήθεια της ανισότητας του Cauchy (AM – GM).

Είναι:

$$2\alpha^3+\beta^3=\alpha^3+\alpha^3+\beta^3 \geq 3\alpha\alpha\beta=3\alpha^2\beta$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta$.

ii) Την ανισότητα $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 \geq \alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha$ αποδείξαμε με άλλον τρόπο στο θέμα 3.15.

3.34 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha^3\beta+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha \geq \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

Λύση

Η ανισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\alpha^3\beta+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha \geq \alpha^2\beta\gamma+\beta^2\gamma\alpha+\gamma^2\alpha\beta$$

Έστω $x, y, \omega>0$ με $x+y+\omega=1$. Τότε η ανισότητα των βαρών δίνει:

$$x\alpha^3\beta+y\beta^3\gamma+\omega\gamma^3\alpha \geq (\alpha^{3x}\beta^x)(\beta^{3y}\gamma^y)(\gamma^{3\omega}\alpha^\omega)=\alpha^{3x+\omega}\beta^{3y+x}\gamma^{3\omega+y}$$

Εξετάζουμε μήπως υπάρχουν τιμές των x, y και ω, ώστε:

$$\alpha^{3x+\omega}\beta^{3y+x}\gamma^{3\omega+y}=\alpha^2\beta\gamma$$

Αρκεί να πάρουμε:

$$(3x+\omega=2,\quad 3y+x=1,\quad 3\omega+y=1)$$

Είναι:

$$3y+x=1 \overset{y=1-3\omega}{\Longleftrightarrow} 3-9\omega+x=1 \Leftrightarrow x=9\omega-2$$

Αλλά τότε:

$$\begin{cases} x=9\omega-2 \\ 3x+\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9\omega-2 \\ 27\omega-6+\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x=\frac{4}{7},\ \omega=\frac{2}{7}\right)$$

Από τη σχέση $3\omega+y=1$ για $\omega=\frac{2}{7}$ παίρνουμε $y=\frac{1}{7}$. Άρα:

$$\frac{4}{7}\alpha^3\beta+\frac{1}{7}\beta^3\gamma+\frac{2}{7}\gamma^3\alpha \geq \alpha^2\beta\gamma,\quad \frac{4}{7}\beta^3\gamma+\frac{1}{7}\gamma^3\alpha+\frac{2}{7}\alpha^3\beta \geq \beta^2\gamma\alpha,\quad \frac{4}{7}\gamma^3\alpha+\frac{1}{7}\alpha^3\beta+\frac{2}{7}\beta^3\gamma \geq \gamma^2\alpha\beta$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν:

$$\alpha^3\beta+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha \geq \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλιο

Η ανισότητα αποδεικνύεται και διαφορετικά, αφού τελικά είναι ισοδύναμη με την:

$$\alpha\beta(\alpha-\gamma)^2+\beta\gamma(\beta-\alpha)^2+\gamma\alpha(\gamma-\beta)^2\geq 0$$

η οποία προφανώς ισχύει.

Θεώρημα 12ο (The Power Means Inequality)

Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, τότε:

α) $\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\geq\dfrac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}$ β) $\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}}\geq\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$

γ) $\sqrt[3]{\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}}\geq\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}}$

δ) $\sqrt[\kappa]{\dfrac{\alpha_1^\kappa+\alpha_2^\kappa+...+\alpha_\nu^\kappa}{\nu}}\geq\sqrt[\mu]{\dfrac{\alpha_1^\mu+\alpha_2^\mu+...+\alpha_\nu^\mu}{\nu}}$, όπου $\kappa\geq\mu$ και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu>0$

Η ισότητα, σε όλες τις περιπτώσεις, ισχύει μόνο αν οι αριθμοί είναι ίσοι.

(Ανισότητα των δυνάμεων)

Απόδειξη

α) Για το α΄ σκέλος της ανισότητας έχουμε:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}\right)^2\geq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\Leftrightarrow\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\geq\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq 0$$

η οποία ισχύει. Η ισότητα ισχύει προφανώς αν $\alpha=\beta$.

Το β΄ σκέλος έχει αποδειχθεί ήδη σε προηγούμενο θεώρημα. Υπενθυμίζουμε:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\alpha\beta}\Leftrightarrow\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\geq\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\geq 4\alpha\beta\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq 0$$

η οποία ισχύει. Η ισότητα ισχύει και εδώ αν $\alpha=\beta$ και μόνο.

β) Είναι:

- $$\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}}\geq\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\Leftrightarrow\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

η οποία ισχύει ως θεμελιώδης ανισότητα.

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\geq 0$$

η οποία ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

- $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$, που ισχύει διότι αποτελεί το α΄ σκέλος της θεμελιώδους ανισότητας του Cauchy (AM – GM).

γ) Είναι επίσης:

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}} \geq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}} \Leftrightarrow \frac{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2}{9} \geq \frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3}{27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2 \geq (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3$$

Αλλά αυτή προκύπτει από την ανισότητα Hölder:

$$(1^3+1^3+1^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^{\frac{1}{3}} \geq 1\cdot\alpha\cdot\alpha+1\cdot\beta\cdot\beta+1\cdot\gamma\cdot\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)^2 \geq (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma$.

δ) Η απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια του παρόντος βιβλίου.

Σχόλια

i) Η ανισότητα των δυνάμεων έχει και την παρακάτω γενική μορφή:

Αν $\kappa \geq \mu$, τότε:

$$\left(\frac{\alpha_1^\kappa+\alpha_2^\kappa+\ldots+\alpha_\nu^\kappa}{\nu}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \geq \left(\frac{\alpha_1^\mu+\alpha_2^\mu+\ldots+\alpha_\nu^\mu}{\nu}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu$.

(Ανισότητα των δυνάμεων)

Στην περίπτωση που οι κ και μ είναι φυσικοί αριθμοί είναι:

$$x^{\frac{1}{\kappa}}=\sqrt[\kappa]{x} \quad \text{και} \quad x^{\frac{1}{\mu}}=\sqrt[\mu]{x}$$

Έτσι η ανισότητα των δυνάμεων παίρνει τη μορφή:

$$\sqrt[\kappa]{\frac{\alpha_1^\kappa+\alpha_2^\kappa+\ldots+\alpha_\nu^\kappa}{\nu}} \geq \sqrt[\mu]{\frac{\alpha_1^\mu+\alpha_2^\mu+\ldots+\alpha_\nu^\mu}{\nu}},\ \mu\varepsilon\ \kappa \geq \mu$$

Επειδή $x^{\frac{\lambda}{\rho}}=\sqrt[\rho]{x^\lambda}$, όπου $\lambda, \rho \in \mathbb{N}^*$, ανάλογη μορφή παίρνουμε και στην περίπτωση που οι κ, μ είναι ρητοί αριθμοί, δηλαδή αριθμοί της μορφής $\frac{\lambda}{\rho}$ με $\lambda, \rho \in \mathbb{Z}$, $\rho \neq 0$.

ii) Ισχύει επίσης ότι:

Αν $\kappa > 0 > \mu$, τότε:

$$\left(\frac{\alpha_1^\kappa+\alpha_2^\kappa+\ldots+\alpha_\nu^\kappa}{\nu}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu} \geq \left(\frac{\alpha_1^\mu+\alpha_2^\mu+\ldots+\alpha_\nu^\mu}{\nu}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

με ισότητα μόνο για $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu$.

3.35 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq \alpha + \beta + \gamma$$

Λύση

Αν ονομάσουμε $A = \sqrt[3]{\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}}$ και $B = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$, τότε από την ανισότητα των δυνάμεων παίρνουμε:

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}} \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \Leftrightarrow A \geq B \qquad (1)$$

Είναι όμως $\dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3} \geq \alpha\beta\gamma = 1$ και έτσι $A \geq 1$ ή ακόμη $A^2 \geq 1$. Από τις σχέσεις $A^2 \geq 1$ και $A \geq B$ με πολλαπλασιασμό παίρνουμε:

$$A^3 \geq B \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3}}\right)^3 \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \Leftrightarrow \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{3} \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq \alpha + \beta + \gamma$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

3.36 Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}} \leq \sqrt[3]{2(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Τσεχία, Σλοβακία - 2000)

Λύση

Επειδή $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2}$, η ανισότητα των δυνάμεων δίνει:

$$\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^3}{8} \leq \frac{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^3 \leq 2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2 \qquad (1)$$

με ισότητα για $\alpha = \beta$. Όμως:

- $\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right)^2 = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} + 2 \qquad (2)$

και επιπλέον:

- $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=2+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\overset{(2)}{=\!=}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^3\le 2(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}\le\sqrt[3]{2(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha=\beta,$ δηλαδή αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι μεταξύ τους.

Άλλος τρόπος

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\sqrt[3]{\alpha\beta}$ και η ανισότητα γίνεται:

$$\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\beta^2}\le\sqrt[3]{2(\alpha+\beta)^2}\qquad(1)$$

Θέτουμε $\sqrt[3]{\alpha}=x,\ \sqrt[3]{\beta}=y$ και η σχέση (1) παίρνει τη μορφή:

$$x^2+y^2\le\sqrt[3]{2(x^3+y^3)^2}\Leftrightarrow(x^2+y^2)^3\le 2(x^3+y^3)^2\Leftrightarrow\frac{(x^3+y^3)^2}{4}\ge\frac{(x^2+y^2)^3}{8}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2\ge\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3\Leftrightarrow\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}}\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\qquad(2)$$

Αλλά η σχέση (2) ισχύει, διότι προκύπτει από την ανισότητα των δυνάμεων (για εκθέτες 3 και 2). Επομένως ισχύει η (1) και συνεπώς και η αρχική ανισότητα. Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=y,$ δηλαδή αν $\alpha=\beta.$

Παρατήρηση

Η ανισότητα $(x^2+y^2)^3\le 2(x^3+y^3)^2$ αποδεικνύεται και ως εξής:

$$(x^2+y^2)^3\le 2(x^3+y^3)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^6+2x^3y^3+y^6)\ge x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^6+4x^3y^3+y^6\ge 3x^4y^2+3x^2y^4$$

Αυτή όμως προκύπτει από την ανισότητα του Cauchy, αφού:

- $x^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3\sqrt[3]{x^6x^3y^3x^3y^3}=3x^4y^2$
- $y^6+x^3y^3+x^3y^3\ge 3\sqrt[3]{y^6x^3y^3x^3y^3}=3y^4x^2$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις με πρόσθεση δίνουν τη ζητούμενη.

Η ισότητα ισχύει αν:

$$\left(x^6=x^3y^3\Leftrightarrow x^3=y^3\Leftrightarrow x=y\right)\ \text{και}\ \left(y^6=x^3y^3\Leftrightarrow y=x\right)$$

δηλαδή αν $x=y.$

Θεώρημα 13ο (Η ανισότητα του Schur)

Μια ανισότητα με σημαντικές εφαρμογές είναι και η ανισότητα του Schur (Σιούρ). Η ανισότητα Schur αφορά μια οικογένεια (ομάδα) ανισοτήτων και για τον λόγο αυτόν μπορεί κανείς να τη συναντήσει σε ανυποψίαστες στιγμές. Ισχύουν λοιπόν τα εξής:

Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, τότε:

- $\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\beta(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \geq 0$
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma \geq \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$
- $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \geq \alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\beta\gamma(\beta^2+\gamma^2)+\gamma\alpha(\gamma^2+\alpha^2)$
- $\alpha^\lambda(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+\beta^\lambda(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+\gamma^\lambda(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \geq 0$ για κάθε $\lambda > 0$

Η ισότητα ισχύει όταν:

- οι αριθμοί είναι ίσοι ή
- δύο τουλάχιστον από τους α, β και γ είναι ίσοι και ο άλλος είναι ίσος με μηδέν.

Εφαρμογή

Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+5\alpha\beta\gamma \geq (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

Απόδειξη

Επειδή:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$$

η ανισότητα γίνεται:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+5\alpha\beta\gamma \geq \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma \geq \alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$$

η οποία ισχύει, αφού είναι η ανισότητα Schur.

Η ισότητα ισχύει αν:

$$\alpha=\beta=\gamma \;\; \text{ή} \;\; (\alpha=\beta \text{ και } \gamma=0) \;\; \text{ή} \;\; (\beta=\gamma \text{ και } \alpha=0) \;\; \text{ή} \;\; (\gamma=\alpha \text{ και } \beta=0)$$

Γενικά λυμένα θέματα

Προχωράμε τώρα στην παρουσίαση ορισμένων χαρακτηριστικών θεμάτων, τα περισσότερα από τα οποία έχουν προταθεί σε διάφορους διαγωνισμούς, τοπικού ή εθνικού επιπέδου. Στη λύση των θεμάτων, που δεν είναι και η μοναδική, καταδεικνύεται η αξία και ο τρόπος χρήσης των βασικών ανισώσεων που περιγράψαμε στα προηγούμενα θεωρήματα. Είμαστε σίγουροι ότι μετά τη μελέτη τους, οι μαθητές θα αισθάνονται ιδιαίτερα ασφαλείς όταν λύνουν ανισότητες και θα ασχοληθούν με περισσότερο πείσμα με το σχετικό αντι- κείμενο, αφού πια θα έχουν στα χέρια ισχυρά όπλα.

3.37 Αν $x, y, \omega > 0$ και $xy\omega = 1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1}+\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}+\frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le 1$$

(Ελλάδα, Διαγωνισμοί ΕΜΕ)

Λύση

Από την ανισότητα του Cauchy $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\ge 3\alpha\beta\gamma)$ παίρνουμε:

$$x^3+y^3+1^3\ge 3xy\cdot 1 \Leftrightarrow x^3+y^3+1\ge 3xy \Leftrightarrow \frac{1}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{3xy} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{x^3+y^3+1}\le\frac{xy}{3xy} \Leftrightarrow \frac{xy}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{3} \qquad (1)$$

Όμοια:

$$\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}\le\frac{1}{3} \quad (2) \quad \text{και} \quad \frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le\frac{1}{3} \quad (3)$$

Οι σχέσεις (1), (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1}+\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}+\frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le 1$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x=y=\omega=1$.

Άλλος τρόπος

Επειδή $x^3+y^3\ge xy(x+y)$ (βασική ανισότητα), παίρνουμε:

$$x^3+y^3+1\ge xy(x+y)+1=xy(x+y)+xy\omega=xy(x+y+\omega)$$

Έτσι:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1}\le\frac{1}{x+y+\omega}$$

Όμοια:

$$\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}\le\frac{1}{x+y+\omega} \quad \text{και} \quad \frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le\frac{1}{x+y+\omega}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{xy}{x^3+y^3+1}+\frac{y\omega}{y^3+\omega^3+1}+\frac{\omega x}{\omega^3+x^3+1}\le\frac{3}{x+y+\omega}$$

Αρκεί:

$$\frac{3}{x+y+\omega}\le 1 \Leftrightarrow x+y+\omega\ge 3$$

που ισχύει, διότι:

$$x+y+\omega\ge 3\sqrt[3]{xy\omega}=3\cdot 1=3$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x=y=\omega=1$.

Πρόκληση

Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=12$, να αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\le 27$$

Λύση

Από την ανισότητα $3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge(\alpha+\beta+\gamma)^2$ παίρνουμε:

$$3\cdot 12\ge(\alpha+\beta+\gamma)^2 \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma\le 6 \qquad (1)$$

με ισότητα αν $\alpha=\beta=\gamma=2$. Επίσης από την ανισότητα AM - GM προκύπτει:

$$\frac{(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)}{3}\ge\sqrt[3]{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}\le$$

$$\le\frac{(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}\le\frac{(\alpha+\beta+\gamma)+3}{3} \qquad (2)$$

Λόγω όμως της (1) θα είναι:

$$\frac{(\alpha+\beta+\gamma)+3}{3}\le\frac{6+3}{3}=3 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$\sqrt[3]{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}\le 3 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\le 27$$

Η ισότητα, όπως προκύπτει από την αποδεικτική πορεία, ισχύει μόνο αν

$$\alpha=\beta=\gamma=2.$$

3.38 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί και $\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}=1$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}$$

Λύση

Θα επιχειρήσουμε ορισμένα αλγεβρικά τεχνάσματα.

Είναι:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}=\frac{(\alpha^2+\alpha\beta)-\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\alpha-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\geq\alpha-\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}=\alpha-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}$$

διότι:

- $\alpha+\beta\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$
- $\frac{1}{\alpha+\beta}\leq\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \Leftrightarrow -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\geq-\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}} \Leftrightarrow \alpha-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\geq\alpha-\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}$
- $\frac{\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2}{2\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}$

Είναι λοιπόν:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}\geq\alpha-\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2},\quad \frac{\beta^2}{\beta+\gamma}\geq\beta-\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{2}\quad \text{και}\quad \frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}\geq\gamma-\frac{\sqrt{\gamma\alpha}}{2}$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma-\frac{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}}{2}=\alpha+\beta+\gamma-\frac{1}{2}$$

Όμως:

$$\alpha+\beta+\gamma=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt{\beta}\right)^2+\left(\sqrt{\gamma}\right)^2\geq\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\gamma}+\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\alpha}= =\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}=1$$

Επομένως $A\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, δηλαδή η ελάχιστη τιμή της παράστασης A είναι $\frac{1}{2}$. Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$.

Άλλος τρόπος

Η ανισότητα Andreescu δίνει:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\geq\frac{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}}{2}=\frac{1}{2}$$

με ισότητα για $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$. Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα:

$$\alpha+\beta+\gamma=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\sqrt{\beta}\right)^2+\left(\sqrt{\gamma}\right)^2\geq\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}$$

(αφού γενικά ισχύει ότι $x^2+y^2+\omega^2\geq xy+y\omega+\omega x$ για κάθε $x, y, \omega\in R$).

Πρόκληση

Αν $\alpha, \beta, \gamma>0$ και $\alpha+\beta+\gamma=3$, να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}}+\sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+1}}+\sqrt{\frac{\gamma+\alpha}{\beta+1}}\geq 3$$

Απόδειξη

Από την ανισότητα του Γεωμετρικού – Αρμονικού μέσου (GM – HM) παίρνουμε:

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}}=\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}\cdot 1}\geq\frac{2}{\dfrac{1}{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}}+1}=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+1}$$

με ισότητα αν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=\gamma+1 \Leftrightarrow 3-\gamma=\gamma+1 \Leftrightarrow \gamma=1$$

Επομένως:

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}}\geq\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+1},\quad \sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+1}}\geq\frac{2(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma+1}\quad \text{και}\quad \sqrt{\frac{\gamma+\alpha}{\beta+1}}\geq\frac{2(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma+1}$$

με ισότητα αν $\gamma=1$, $\alpha=1$ και $\beta=1$ αντίστοιχα. Οι παραπάνω ανισότητες με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+1}}+\sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\alpha+1}}+\sqrt{\frac{\gamma+\alpha}{\beta+1}}\geq\ \geq\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma+1}+\frac{2(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma+1}+\frac{2(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma+1}=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma+1}=3$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma=1$.

3.39 Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\dfrac{1}{1+\alpha}+\dfrac{1}{1+\beta}+\dfrac{1}{1+\gamma}=1$, να αποδειχθεί ότι $\alpha\beta\gamma\geq 8$.

Λύση

Θέτουμε $\dfrac{1}{1+\alpha}=x$, $\dfrac{1}{1+\beta}=y$ και $\dfrac{1}{1+\gamma}=\omega$, οπότε:

$$\alpha=\frac{1-x}{x},\quad \beta=\frac{1-y}{y}\quad \text{και}\quad \gamma=\frac{1-\omega}{\omega}\qquad (1)$$

Τότε:

$$x+y+\omega=\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{1+\gamma}=1$$

Είναι τώρα $1-x=y+\omega\geq 2\sqrt{y\omega}$ και όμοια:

$$1-y=\omega+x\geq 2\sqrt{\omega x}\quad \text{και}\quad 1-\omega=x+y\geq 2\sqrt{xy}$$

Αυτές με πολλαπλασιασμό κατά μέλη δίνουν:

$$(1-x)(1-y)(1-\omega)\geq 8\sqrt{y\omega\cdot\omega x\cdot xy} \Leftrightarrow (1-x)(1-y)(1-\omega)\geq 8xy\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-\omega}{\omega}\geq 8 \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \alpha\beta\gamma\geq 8$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma=2$.

Σχόλιο

Η ανισότητα γενικεύεται για τυχαίο πλήθος αριθμών.

3.40 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{\alpha}{\beta^3}+\dfrac{\beta}{\gamma^3}+\dfrac{\gamma}{\alpha^3} \geq \dfrac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$.

Λύση

Από την ανισότητα $x+y+\omega \geq 3\sqrt[3]{xy\omega}$ παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta^3}+\frac{\beta}{\gamma^3}+\frac{\gamma}{\alpha^3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}} = 3\cdot\frac{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}{\alpha\beta\gamma}$$

Όμως:

$$\frac{3}{\alpha\beta\gamma}\cdot\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \geq \frac{3}{\alpha\beta\gamma}\cdot\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}} = \frac{9}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{9}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \geq \frac{27}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

που ισχύει. Άρα ισχύει και η δοσμένη ανισότητα.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Πρόκληση

Έστω x, y και z θετικοί αριθμοί με $x^2+y^2+z^2=3$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $S=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$.

Λύση

Θα βασιστούμε στη θεμελιώδη ανισότητα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

Έχουμε λοιπόν:

$$S^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2(x^2+y^2+z^2) \geq$$

$$\geq \frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}+\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}+2(x^2+y^2+z^2) \geq$$

$$\geq (y^2+z^2+x^2)+2(x^2+y^2+z^2) = 3+6 = 9$$

Επομένως $S^2 \geq 9$, οπότε $S \geq 3$. Επειδή για $x=y=z=1$ έχουμε ισότητα, δηλαδή $S=3$, συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης S είναι ίση με 3.

3.41 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδειχθεί ότι $1+\dfrac{3}{\alpha+\beta+\gamma} \geq \dfrac{6}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$.

(Ρουμανία, Τεστ επιλογής - 2003)

Λύση

Θέτουμε $\alpha = \dfrac{1}{x}$, $\beta = \dfrac{1}{y}$ και $\gamma = \dfrac{1}{\omega}$. Τότε:

$$\alpha\beta\gamma = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{xy\omega} = 1 \Leftrightarrow xy\omega = 1 \qquad (1)$$

Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$1+\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma} \geq \frac{6}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}} \geq \frac{6}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{3xy\omega}{xy+y\omega+\omega x} \geq \frac{6xy\omega}{x+y+\omega} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} 1+\frac{3}{xy+y\omega+\omega x} \geq \frac{6}{x+y+\omega}$$

Επειδή:

$$(x+y+\omega)^2 \geq 3(xy+y\omega+\omega x) \Leftrightarrow xy+y\omega+\omega x \leq \frac{(x+y+\omega)^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{xy+y\omega+\omega x} \geq \frac{3}{(x+y+\omega)^2} \Leftrightarrow \frac{3}{xy+y\omega+\omega x} \geq \frac{9}{(x+y+\omega)^2}$$

παίρνουμε:

$$1+\frac{3}{xy+y\omega+\omega x} \geq 1+\frac{9}{(x+y+\omega)^2}$$

Αρκεί λοιπόν τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$1+\frac{9}{(x+y+\omega)^2} \geq \frac{6}{x+y+\omega} \Leftrightarrow 1-2\cdot\frac{3}{x+y+\omega}+\frac{9}{(x+y+\omega)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left(1-\frac{3}{x+y+\omega}\right)^2 \geq 0,$$ που ισχύει

Η ισότητα ισχύει όταν:

$$1-\frac{3}{x+y+\omega} = 0 \Leftrightarrow x+y+\omega = 3$$

Επειδή $xy\omega = 1$, παίρνουμε:

$$x+y+\omega \geq 3\sqrt[3]{xy\omega} \Leftrightarrow x+y+\omega \geq 3$$

Η ισότητα ισχύει κατά τα γνωστά όταν:

$x = y = \omega$, οπότε τελικά $x = y = \omega = 1$

3.42 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha + \beta + \gamma = 1$ και οι αριθμοί $3\alpha - \beta$, $3\beta - \gamma$ και $3\gamma - \alpha$ είναι επίσης θετικοί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha^3}{3\alpha - \beta} + \frac{\beta^3}{3\beta - \gamma} + \frac{\gamma^3}{3\gamma - \alpha} \geq \frac{1}{6}$$

Λύση

Διαιρούμε τους όρους των κλασμάτων του α΄ μέλους με α, β και γ αντίστοιχα, οπότε:

$$A = \frac{\alpha^3}{3\alpha - \beta} + \frac{\beta^3}{3\beta - \gamma} + \frac{\gamma^3}{3\gamma - \alpha} = \frac{\alpha^2}{3 - \frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\beta^2}{3 - \frac{\gamma}{\beta}} + \frac{\gamma^2}{3 - \frac{\alpha}{\gamma}}$$

Σύμφωνα με τη βασική ανισότητα $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{\omega^2}{\gamma} \geq \frac{(x + y + \omega)^2}{\alpha + \beta + \gamma}$ παίρνουμε:

$$A \geq \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{9 - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\gamma}} \Leftrightarrow A \geq \frac{1}{9 - \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{9 - \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \geq \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6 \geq 9 - \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 3$$

Αυτή όμως ισχύει διότι:

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 3\sqrt[3]{\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}} = 3$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

Σχόλιο

Μια άλλη απόδειξη προκύπτει εύκολα με εφαρμογή της παρατήρησης που βρίσκεται στην επόμενη σελίδα.

Γενίκευση της Ανισότητας Andreescu

Η ανισότητα Andreescu γενικεύεται ως εξής:

Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in R$ και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$, τότε:

- $$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \frac{x_2^2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{x_\nu^2}{\alpha_\nu} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu)^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu} \qquad (A_1)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_\nu}{\alpha_\nu}$.

- $$\frac{x_1^{\mu}}{\alpha_1}+\frac{x_2^{\mu}}{\alpha_2}+\ldots+\frac{x_\nu^{\mu}}{\alpha_\nu}\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^{\mu}}{\nu^{\mu-2}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)} \qquad (A_2)$$

όπου μ φυσικός με $\mu \geq 2$.

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu$ και $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu$.

- $$\frac{x_1^{\mu}}{\alpha_1^{\mu-1}}+\frac{x_2^{\mu}}{\alpha_2^{\mu-1}}+\ldots+\frac{x_\nu^{\mu}}{\alpha_\nu^{\mu-1}}\geq\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)^{\mu}}{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^{\mu-1}} \qquad (A_3)$$

όπου μ φυσικός με $\mu \geq 2$.

Η ισότητα ισχύει αν $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\ldots=\frac{x_\nu}{\alpha_\nu}$.

- $$\frac{\alpha_1^{\mu}}{\beta_1^{\rho}}+\frac{\alpha_2^{\mu}}{\beta_2^{\rho}}+\ldots+\frac{\alpha_\nu^{\mu}}{\beta_\nu^{\rho}}\geq\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)^{\mu}}{\nu^{\mu-\rho-1}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu)^{\rho}}$$ όπου $\mu \geq 1,\ 0 \leq \rho \leq \mu-1$

  και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu > 0$. Η ισότητα ισχύει αν $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$.

Παρατήρηση

Η ανισότητα A_2 για $\nu = 3$ και $\mu = 3$ μας οδηγεί στην ανισότητα:

$$\boldsymbol{\frac{x^3}{\alpha}+\frac{y^3}{\beta}+\frac{\omega^3}{\gamma}\geq\frac{(x+y+\omega)^3}{3(\alpha+\beta+\gamma)}}$$

με ισότητα για $x = y = \omega$ και $\alpha = \beta = \gamma$. Η ανισότητα αυτή θα θεωρείται βασική και θα χρησιμοποιείται χωρίς ιδιαίτερη αναφορά.

Εφαρμογή

Έστω $x, y, z > 0$ με $xyz = 1$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$

Λύση

Σύμφωνα με την ανισότητα:

$$\frac{x^3}{\alpha}+\frac{y^3}{\beta}+\frac{\omega^3}{\gamma}\geq\frac{(x+y+\omega)^3}{3^{3-2}(\alpha+\beta+\gamma)}$$

όπου στη δύναμη 3^{3-2} η βάση 3 αναφέρεται στο πλήθος των όρων του α΄ μέλους και το 3 στον εκθέτη αναφέρεται στον εκθέτη των x^3, y^3 και ω^3, παίρνουμε:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq$$

$$\geq\frac{(x+y+z)^3}{3\left[(1+y)(1+z)+(1+z)(1+x)+(1+x)(1+y)\right]}=\frac{(x+y+z)^3}{3\left[3+2(x+y+z)+xy+yz+zx\right]}$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{(x+y+z)^3}{3+2(x+y+z)+xy+yz+zx}\ge\frac{9}{4}\Leftrightarrow 4(x+y+z)^3\ge 9\left[3+2(x+y+z)+xy+yz+zx\right]$$

Η ανισότητα όμως αυτή διασπάται στις παρακάτω:

- $(x+y+z)^3\ge\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^3=27$ με ισότητα για $x=y=z=1$.
- $2(x+y+z)^3=2(x+y+z)^2(x+y+z)\ge 2\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2(x+y+z)=18(x+y+z)$, με ισότητα για $x=y$ $=z=1$.
- $(x+y+z)^3=(x+y+z)^2(x+y+z)\ge 3\sqrt[3]{xyz}\cdot(x+y+z)^2=3(x+y+z)^2\ge 9(xy+yz+zx)$ με ισότητα για $x=y=z=1$.

Οι παραπάνω τρεις ανισότητες με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν τη ζητούμενη.
Η ισότητα στην αρχική ανισότητα ισχύει επομένως αν $x=y=z=1$.

3.43 Αν $x, y, \omega>0$ και $xy\omega=1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{x+xy}+\frac{1}{y+y\omega}+\frac{1}{\omega+\omega x}\ge\frac{3}{2}$$

(GM - 2000)

Λύση

Θέτουμε $x=\frac{\alpha}{\beta}$, $y=\frac{\beta}{\gamma}$ και $\omega=\frac{\gamma}{\alpha}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma>0$. Έτσι η ανισότητα γράφεται:

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\beta\gamma}}+\frac{1}{\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\gamma\alpha}}+\frac{1}{\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\alpha\beta}}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma+\alpha\beta}+\frac{\gamma\alpha}{\beta\gamma+\beta\alpha}+\frac{\alpha\beta}{\gamma\alpha+\gamma\beta}\ge\frac{3}{2}\qquad(1)$$

Θέτουμε $\kappa=\alpha\beta$, $\lambda=\beta\gamma$, $\mu=\gamma\alpha$ και η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\lambda+\kappa}+\frac{\kappa}{\mu+\lambda}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}\ge\frac{3}{2}\qquad(2)$$

Την ανισότητα αυτή την έχουμε ήδη αποδείξει (δες θέμα 3.16). Μπορούμε όμως να την αποδείξουμε επίσης και με τη βοήθεια της ανισότητας B.C.S. ως εξής:
Πραγματικά η B.C.S. για τις τριάδες:

$$\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda+\mu}},\sqrt{\frac{\lambda}{\mu+\kappa}},\sqrt{\frac{\mu}{\kappa+\lambda}}\right)\text{ και }\left(\sqrt{\kappa(\lambda+\mu)},\sqrt{\lambda(\mu+\kappa)},\sqrt{\mu(\kappa+\lambda)}\right)$$

δίνει:

$$\left[\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda+\mu}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu+\kappa}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\mu}{\kappa+\lambda}}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{\kappa(\lambda+\mu)}\right)^2+\left(\sqrt{\lambda(\mu+\kappa)}\right)^2+\left(\sqrt{\mu(\kappa+\lambda)}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\left[\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda+\mu}}\cdot\sqrt{\kappa(\lambda+\mu)}+\sqrt{\frac{\lambda}{\mu+\kappa}}\cdot\sqrt{\lambda(\mu+\kappa)}+\sqrt{\frac{\mu}{\kappa+\lambda}}\cdot\sqrt{\mu(\kappa+\lambda)}\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}\right)(\kappa\lambda+\kappa\mu+\lambda\mu+\lambda\kappa+\mu\kappa+\mu\lambda)\geq(\kappa+\lambda+\mu)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}\geq\frac{(\kappa+\lambda+\mu)^2}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}$$

Είναι όμως $(\kappa+\lambda+\mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)$ και έτσι:

$$\frac{(\kappa+\lambda+\mu)^2}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}\geq\frac{3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}=\frac{3}{2}$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Η ισότητα ισχύει αν $x=y=\omega=1$.

Παρατήρηση

Σύμφωνα με την ανισότητα Andreescu είναι:

$$\frac{\kappa}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\mu+\kappa}+\frac{\mu}{\kappa+\lambda}=\frac{\kappa^2}{\kappa\lambda+\kappa\mu}+\frac{\lambda^2}{\lambda\mu+\kappa\lambda}+\frac{\mu^2}{\kappa\mu+\lambda\mu}\geq\frac{(\kappa+\lambda+\mu)^2}{2(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)}\geq\frac{3}{2}$$

διότι $(\kappa+\lambda+\mu)^2 \geq 3(\kappa\lambda+\lambda\mu+\mu\kappa)$.

Η ισότητα ισχύει αν $\kappa=\lambda=\mu$, δηλαδή τελικά αν $x=y=\omega=1$.

3.44 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{3}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1}\geq\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Λύση

Έστω Α το α΄ μέλος. Τότε:

$$A=\frac{\alpha^2}{\alpha^3-\alpha\beta\gamma+\alpha}+\frac{\beta^2}{\beta^3-\alpha\beta\gamma+\beta}+\frac{\gamma^2}{\gamma^3-\alpha\beta\gamma+\gamma}\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+1}=$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\frac{1}{3}+1}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{2}{3}}==\frac{\alpha+\beta+\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Άρα:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta\gamma+1}+\frac{\beta}{\beta^2-\gamma\alpha+1}+\frac{\gamma}{\gamma^2-\alpha\beta+1}\geq\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$.

Πρόκληση

Αν α, β, γ και δ είναι θετικοί αριθμοί με γινόμενο 1, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha}+\frac{1+\beta\gamma}{1+\beta}+\frac{1+\gamma\delta}{1+\gamma}+\frac{1+\delta\alpha}{1+\delta}\geq 4$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή $\alpha\beta\gamma\delta=1$, παίρνουμε $\gamma\delta=\frac{1}{\alpha\beta}$ και $\delta\alpha=\frac{1}{\beta\gamma}$. Επίσης από τη σχέση $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ που ισχύει για κάθε $x, y>0$, με ισότητα για $x=y$, έχουμε:

$$\frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha}+\frac{1+\beta\gamma}{1+\beta}+\frac{1+\gamma\delta}{1+\gamma}+\frac{1+\delta\alpha}{1+\delta}= \ =\frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha}+\frac{1+\beta\gamma}{1+\beta}+\frac{\alpha\beta+1}{\alpha\beta+\alpha\beta\gamma}+\frac{\beta\gamma+1}{\beta\gamma+\beta\gamma\delta}=$$

$$=(1+\alpha\beta)\left(\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta+\alpha\beta\gamma}\right)+(1+\beta\gamma)\left(\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{\beta\gamma+\beta\gamma\delta}\right)\geq$$

$$\geq(1+\alpha\beta)\left(\frac{4}{1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma}\right)+(1+\beta\gamma)\left(\frac{4}{1+\beta+\beta\gamma+\beta\gamma\delta}\right)=$$

$$=(1+\alpha\beta)\left(\frac{4}{1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma}\right)+(1+\beta\gamma)\left(\frac{4\alpha}{\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma\delta}\right)=$$

$$=(1+\alpha\beta)\left(\frac{4}{1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma}\right)+(1+\beta\gamma)\left(\frac{4\alpha}{\alpha+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma+1}\right)= \ =4\cdot\frac{1+\alpha\beta+\alpha+\alpha\beta\gamma}{1+\alpha+\alpha\beta+\alpha\gamma\beta}=4$$

Άρα:

$$\frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha}+\frac{1+\beta\gamma}{1+\beta}+\frac{1+\gamma\delta}{1+\gamma}+\frac{1+\delta\alpha}{1+\delta}\geq 4$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει:

$$1+\alpha=\alpha\beta+\alpha\beta\gamma \quad (1) \qquad \text{και} \qquad 1+\beta=\beta\gamma+\beta\gamma\delta \quad (2)$$

Επειδή $\alpha\beta\gamma\delta=1$, η σχέση (1) γράφεται:

$$\alpha\beta\gamma\delta+\alpha=\alpha\beta+\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \beta\gamma\delta+1=\beta+\beta\gamma \qquad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν τελικά $\beta\gamma=1$ και έτσι $\alpha\delta=1$. Αλλά με $\beta\gamma=1$ η σχέση (1) γράφεται:

$$1+\alpha=\alpha\beta+\alpha\cdot 1 \Leftrightarrow \alpha\beta=1$$

και συνεπώς $\gamma\delta=1$.

Άρα $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\alpha = 1$, απ' όπου $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. Εύκολα τώρα διαπιστώνουμε ότι με $\alpha\beta\gamma\delta = 1$, $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$ προκύπτει ότι $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\alpha = 1$. Επομένως η ισότητα ισχύει μόνο αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$.

3.45 Αν $x, y, \omega > -1$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1+x^2}{1+y+\omega^2}+\frac{1+y^2}{1+\omega+x^2}+\frac{1+\omega^2}{1+x+y^2}\geq 2$$

(Βαλκανιάδα Νέων - 2003)

Λύση

Θα ακολουθήσουμε μια σειρά βασικών τεχνασμάτων. Η μόνη μεταβλητή που δεν είναι τετράγωνο στο πρώτο κλάσμα είναι ο y στον παρονομαστή. Όμως:

$$1+y^2 \geq 2y \Leftrightarrow y \leq \frac{1+y^2}{2}$$

Έτσι:

$$1+y+\omega^2 \leq 1+\frac{1+y^2}{2}+\omega^2 \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{1+y+\omega^2} \geq \frac{1+x^2}{1+\omega^2+\frac{1+y^2}{2}} = \frac{2(1+x^2)}{2(1+\omega^2)+(1+y^2)}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{2(1+x^2)}{2(1+\omega^2)+(1+y^2)}+\frac{2(1+y^2)}{2(1+x^2)+(1+\omega^2)}+\frac{2(1+\omega^2)}{2(1+y^2)+(1+x^2)}\geq 2 \qquad (1)$$

Θέτουμε:

$$1+x^2=\alpha,\quad 1+y^2=\beta,\quad 1+\omega^2=\gamma$$

και η σχέση (1) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2\gamma+\beta}+\frac{\beta}{2\alpha+\gamma}+\frac{\gamma}{2\beta+\alpha}\geq 1 \qquad (2)$$

Όμως το α΄ μέλος, έστω Α, γράφεται:

$$A=\frac{\alpha^2}{2\alpha\gamma+\alpha\beta}+\frac{\beta^2}{2\alpha\beta+\beta\gamma}+\frac{\gamma^2}{2\beta\gamma+\alpha\gamma}$$

και από το θεώρημα 6 προκύπτει ότι:

$$A\geq\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3\alpha\beta+3\beta\gamma+3\gamma\alpha}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}\geq\frac{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}=1$$

αφού:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

Ισχύει λοιπόν η σχέση (1), συνεπώς και η δοσμένη ανισότητα. Το ίσον ισχύει μόνο για $\alpha = \beta = \gamma$, δηλαδή για $x = y = \omega$.

Πρόκληση

Αν $x, y, \omega > 0$, να αποδειχθεί ότι $3(x^3 + y^3 + \omega^3) \geq (x + y + \omega)(xy + y\omega + \omega x)$.

Λύση

Πρόκειται για μια απλή, αλλά όμορφη εφαρμογή της ανισότητας Tschebychev.

Επειδή:

$$x^2 + y^2 + \omega^2 \geq xy + y\omega + \omega x$$

και επειδή οι τριάδες (x, y, ω) και (x^2, y^2, ω^2) έχουν την ίδια διάταξη, από την ανισότητα Tschebychev παίρνουμε:

$$\frac{x+y+\omega}{3}\cdot\frac{xy+y\omega+\omega x}{3} \leq \frac{x+y+\omega}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+\omega^2}{3} \leq \frac{x^3+y^3+\omega^3}{3}$$

δηλαδή:

$$3(x^3 + y^3 + \omega^3) \geq (x + y + \omega)(xy + y\omega + \omega x)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = y = \omega$.

Θεώρημα 14ο (Η ανισότητα Huygens)

Έστω α, β, γ και x, y, ω θετικοί αριθμοί και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Τότε:

$$(\alpha + x)^{\lambda_1}(\beta + y)^{\lambda_2}(\gamma + \omega)^{\lambda_3} \geq \alpha^{\lambda_1}\beta^{\lambda_2}\gamma^{\lambda_3} + x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}\omega^{\lambda_3}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{\gamma}{\omega}$.

Παρατηρήσεις

i) Για δύο παράγοντες η ανισότητα Huygens έχει ως εξής:

Αν $\alpha, \beta, x, y > 0$ και $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, τότε ισχύει ότι:

$$(\alpha + x)^{\lambda_1}(\beta + y)^{\lambda_2} \geq \alpha^{\lambda_1}\beta^{\lambda_2} + x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}$$

Η ισότητα ισχύει αν $\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y}$.

ii) Η ανισότητα Huygens γενικεύεται για ν παράγοντες. Επομένως ισχύει ότι:

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu > 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_\nu > 0$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu > 0$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\nu = 1$, τότε:

$$(\alpha_1+x_1)^{\lambda_1}(\alpha_2+x_2)^{\lambda_2}...(\alpha_\nu+x_\nu)^{\lambda_\nu} \geq \alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2}...\alpha_\nu^{\lambda_\nu}+x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_\nu^{\lambda_\nu}$$

Η ισότητα ισχύει αν:

$$\frac{\alpha_1}{x_1}=\frac{\alpha_2}{x_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{x_\nu}$$

iii) Τονίζουμε ότι αν $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$, τότε παίρνουμε:

$$(\alpha+x)^{\frac{1}{2}}(\beta+y)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

δηλαδή ότι:

$$\sqrt{(\alpha+x)(\beta+y)} \geq \sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{xy}$$

η οποία είναι βασική ανισότητα. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν αν:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$$

και συγκεκριμένα:

$$\sqrt[3]{(\alpha+x)(\beta+y)(\gamma+\omega)} \geq \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+\sqrt[3]{xy\omega}$$

iv) Επισημαίνουμε ότι η ανισότητα Huygens είναι η γενικευμένη μορφή της ανισότητας Hölder.

3.46 Αν $x, y, \omega > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{xy\omega}{(1+3x)(x+8y)(y+9\omega)(\omega+6)} \leq \frac{1}{7^4}$$

Λύση

Η ανισότητα γράφεται:

$$(1+3x)\left(1+\frac{8y}{x}\right)\left(1+\frac{9\omega}{y}\right)\left(1+\frac{6}{\omega}\right) \geq 7^4 \Leftrightarrow (1+3x)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{8y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{9\omega}{y}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{6}{\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \geq 7$$

Όμως η ανισότητα Huygens δίνει:

$$(1+3x)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{8y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{9\omega}{y}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{6}{\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \geq 1^{\frac{1}{4}}\cdot 1^{\frac{1}{4}}\cdot 1^{\frac{1}{4}}\cdot 1^{\frac{1}{4}}+(3x)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{8y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{9\omega}{y}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{6}{\omega}\right)^{\frac{1}{4}}=$$

$$=1+(3\cdot 8\cdot 9\cdot 6)^{\frac{1}{4}}=1+(3^4\cdot 2^4)^{\frac{1}{4}}=1+6=7$$

Άρα:

$$(1+3x)\left(1+\frac{8y}{x}\right)\left(1+\frac{9\omega}{y}\right)\left(1+\frac{6}{\omega}\right) \geq 7^4$$

Η ισότητα ισχύει αν $x=2$, $y=\frac{3}{2}$ και $\omega=1$. Πρέπει:

$$\frac{1}{3x} = \frac{x}{8y} = \frac{y}{9\omega} = \frac{\omega}{6} = \lambda \quad \text{κ.λπ.}$$

Πρόκληση

Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta(\alpha+\beta) + \beta\gamma(\beta+\gamma) + \gamma\alpha(\gamma+\alpha)$$

Λύση

Η ανισότητα είναι συμμετρική ως προς α, β και γ με την έννοια ότι αν εναλλάξουμε δύο οποιεσδήποτε μεταβλητές της (για παράδειγμα τις α και β), τότε η ανισότητα παραμένει η ίδια. Η συμμετρία της ανισότητας μάς επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ και αυτό χωρίς να περιορίζεται η γενικότητα. Θα διασπάσουμε τώρα την ανισότητα σε δύο νέες ανισότητες, τις οποίες θα αποδείξουμε ξεχωριστά. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι:

- $\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta(\alpha+\beta) + (\alpha^2+\beta^2)\gamma \qquad (1)$
- $\gamma^3 + \alpha\beta\gamma \geq (\alpha+\beta)\gamma^2 \qquad (2)$

Η σχέση (2) γράφεται:

$$\gamma^2 + \alpha\beta \geq (\alpha+\beta)\gamma \Leftrightarrow \gamma^2 - \alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \gamma(\gamma-\alpha) - \beta(\gamma-\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \geq 0 \qquad (3)$$

η οποία ισχύει διότι $\gamma - \alpha \leq 0$ και $\gamma - \beta \leq 0$ (αφού $\gamma \leq \alpha$ και $\gamma \leq \beta$).

Για τη σχέση (1) ομαδοποιούμε ως εξής:

$$\alpha^3 + \beta^3 + 2\alpha\beta\gamma \geq \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + (\alpha^2+\beta^2)\gamma \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^3 - \alpha^2\beta) + (\beta^3 - \alpha\beta^2) + (2\alpha\beta\gamma - \alpha^2\gamma - \beta^2\gamma) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha-\beta) + \beta^2(\beta-\alpha) - \gamma(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2) - \gamma(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta-\gamma) \geq 0 \qquad (4)$$

η οποία ισχύει διότι $\beta - \gamma \geq 0$ και έτσι $\alpha + \beta - \gamma > 0$.

Τώρα οι σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν τη ζητούμενη. Για να ισχύει η ισότητα πρέπει στην μεν (4) να είναι $\alpha = \beta$ στη δε (3) να είναι $\gamma = \alpha$ ή $\gamma = \beta$. Αλλά οι σχέσεις $(\alpha = \beta$ και $\gamma = \alpha)$ ή $(\alpha = \beta$ και $\gamma = \beta)$ δίνουν αποκλειστικά

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

Σημείωση

i) Για την απόδειξη της σχέσης (1) αξίζει να προσέξουμε ότι αν και:

$\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)$ (ως βασική) είναι $2\alpha\beta\gamma \le (\alpha^2+\beta^2)\gamma$ (αφού $2\alpha\beta \le \alpha^2+\beta^2$) και έτσι η σχέση (1) δεν μπορεί να αποδειχθεί με διάσπαση στις παραπάνω δύο ανισότητες.

ii) Επισημαίνουμε ότι το παραπάνω θέμα είναι η απόδειξη της ανισότητας Schur για $\lambda = 1$. Η ανισότητα αυτή θα θεωρείται βασική και θα εφαρμόζεται για τη λύση άλ- λων ασκήσεων χωρίς ιδιαίτερη πλέον αναφορά.

Θέματα για Λύση

3.47 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}} \le \dfrac{1}{\beta+\gamma}$

β) $\dfrac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)$

γ) $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta+\gamma}} \ge \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$

δ) i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha} \ge \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}$

ii) $\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \le \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}$, όπου $x=\beta+\gamma$ και $y=\gamma+\alpha$

ε) $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \ge \dfrac{2\alpha-\beta}{3}$

στ) $\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta\gamma} \le \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$

ζ) $(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \ge (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)$

η) $\sqrt{2\alpha(\beta+\gamma)} \le \dfrac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}$

3.48 α) Αν $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$, να αποδείξετε ότι:

$$(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(2\beta^2+\gamma^2+\alpha^2)(2\gamma^2+\alpha^2+\beta^2) \ge (\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2$$

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha\beta} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

γ) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\frac{\beta^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\frac{\gamma^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2} \ge \ \ge \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

(Kömal – Ουγγαρία, ΕΜΕ – 2001)

δ) Αν $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha(\beta+\gamma)}+\sqrt{\beta(\gamma+\alpha)}+\sqrt{\gamma(\alpha+\beta)} \le \sqrt{2}(\alpha+\beta+\gamma)$$

ε) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $x=\beta+\gamma$, $y=\gamma+\alpha$ και $\omega=\alpha+\beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} \le \frac{xy\omega}{(x+y)(y+\omega)(\omega+x)}$$

στ) Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}}+\frac{\beta}{\sqrt{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}}+\ \ +\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}}\le\frac{3}{2}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Auswahlwettbewerb Deutschland – 2001)

ζ) Αν $x, y, \omega > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+\omega^2)}}+\frac{y}{\sqrt{(y^2+\omega^2)(y^2+x^2)}}+\ \ +\frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2+x^2)(\omega^2+y^2)}}\le\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+\omega}+\frac{1}{\omega+x}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.49 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^4}{16}\le\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}\le\frac{\alpha^4+\beta^4}{2}$$

για κάθε $\alpha, \beta\in R$.

(Χιλή - 2000)

3.50 Αν x και y είναι θετικοί αριθμοί με $xy=1$, να αποδείξετε ότι:

$$x+y+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\ge 3$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(GM - 2002)

3.51 Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{2\nu}{2\nu+1}\right)^2<\frac{\nu}{\nu+1}$ για κάθε θετικό ακέραιο ν,

β) $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2000}{2001}\right)^2<\frac{1}{1001}$.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης - 2001)

3.52 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta+\gamma}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma^2+\alpha^2}\le\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.53 Αν $\alpha, \beta, \gamma\ \ge\ 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)\ge\left(\beta+\sqrt{\alpha\gamma}\right)^2$

β) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\ge\ \ \ge\left(\alpha+\sqrt{\beta\gamma}\right)\left(\beta+\sqrt{\gamma\alpha}\right)\left(\gamma+\sqrt{\alpha\beta}\right)$

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

(GM - 1999)

3.54 Αν α και β είναι θετικοί αριθμοί με αβ = 1

να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha^2 + 2002\alpha + 1)(\beta^2 + 2002\beta + 1) \geq 2004^2$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Ουγγαρία - 2002)

3.55 Αν $x + y + \omega = 2$, να αποδείξετε ότι:

$$x^2 + y^2 + \omega^2 + 4 \geq 4(xy + y\omega + \omega x)$$

(GM - 2002)

3.56 Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha + \beta \geq \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}} + \sqrt{\alpha\beta}$$

(GM - 2002)

3.57 Αν είναι:

$$\alpha = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{8}},$$

να αποδείξετε ότι $\alpha > 1$.

(GM - 2002)

3.58 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}{\alpha\beta\gamma} + \frac{6(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{(\alpha + \beta + \gamma)^2} \geq 8$$

(Crux - 2002)

3.59 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 8$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha^3}{\gamma} + 1\right)\left(\frac{\beta^3}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{\gamma^3}{\beta} + 1\right) \geq 125$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.60 Αν ισχύει $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ με $\alpha\beta = \gamma\delta = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) \geq 12 + + (\alpha\delta + \beta\gamma)(\alpha\gamma + \beta\delta)$$

(GM - 1991)

3.61 Αν $\alpha, \beta, \gamma, x, y$ και ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha x} + \frac{1}{\beta y} + \frac{1}{\gamma\omega} \geq \frac{36}{(\alpha + x)^2 + (\beta + y)^2 + (\gamma + \omega)^2}$$

(Baltic way - 1992)

3.62 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \geq \alpha^2\beta\gamma + \beta^2\gamma\alpha + \gamma^2\alpha\beta$$

(Θέμα διαγωνισμών)

3.63 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^3(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\beta^3(\gamma+\alpha)}+\frac{1}{\gamma^3(\alpha+\beta)} \geq \frac{3}{2}$$

(ΔΜΟ - 1995)

3.64 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha + \beta + \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\gamma+1}+\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha+1}+\frac{(\gamma+\alpha)^2}{\beta+1} \geq 1$$

(GM - 2000)

3.65 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\delta}+\frac{\delta^2}{\delta+\alpha} \geq \frac{1}{2}$$

(Ιρλανδία - 1999)

3.66 Αν $x, y, \omega > 0$ και $\lambda \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(x+y)^2}{x+y+\lambda\omega}+\frac{(y+\omega)^2}{y+\omega+\lambda x}+\frac{(\omega+x)^2}{\omega+x+\lambda y} \geq \frac{4(x+y+\omega)}{\lambda+2}$$

(GM - 2001)

3.67 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha} \geq \frac{9}{2(\alpha+\beta+\gamma)}$$

(Ιρλανδία - 1999)

3.68 Αν $\alpha, \beta > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta-1}+\frac{\beta^2}{\alpha-1} \geq 8$$

(Ρωσία - 1992)

3.69 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1+\alpha\beta}+\frac{1}{1+\beta\gamma}+\frac{1}{1+\gamma\alpha} \geq \frac{3}{2}$$

(Belaruss - 1999)

3.70 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta+2\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+2\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+2\beta} \geq 1$$

(Τσεχία - Σλοβακία - 1999)

3.71 Αν $\nu \geq 2$ και $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}$ είναι θετικοί αριθμοί με άθροισμα 1 και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ είναι τυχαίοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\beta_1^2+\frac{\beta_2^2}{\alpha_1}+\frac{\beta_3^2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{\beta_\nu^2}{\alpha_{\nu-1}} \geq \ \geq 2\beta_1(\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_\nu)$$

(Γιουγκοσλαβία - 2000)

3.72 Αν $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_\nu$, να αποδείξετε ότι:

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{\nu-1}-x_\nu} \geq x_\nu+2\nu$$

(Αγία Πετρούπολη - 1999)

3.73 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\gamma}{\delta+\varepsilon}+\frac{\delta}{\varepsilon+\alpha}+\frac{\varepsilon}{\alpha+\beta} \geq \frac{5}{2}$$

(Διαγωνισμός επιλογής, ΗΠΑ - 2000)

3.74 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$$

(Θέμα διαγωνισμών)

3.75 Έστω $x, y, z > 0$, ώστε $xyz = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$3+\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right) \geq (x+y+z)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

3.76 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, ώστε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1+2\alpha\beta}+\frac{1}{1+2\beta\gamma}+\frac{1}{1+2\gamma\alpha} \geq 1$$

(Τσεχία – 2004)

3.77 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} \geq \ \geq 3+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}$$

3.78 Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha} \leq \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ β) $\dfrac{1}{\alpha+\beta}+\dfrac{1}{\beta+\gamma}+\dfrac{1}{\gamma+\alpha} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)$

$(\alpha\beta\gamma \neq 0)$

(Θέματα διαγωνισμών – 2001)

3.79 Αν α είναι η υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\beta+\gamma \leq \sqrt{2}\cdot\alpha$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.80 Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, τότε ισχύει:

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \alpha) \geq 16\alpha\beta\gamma\delta$$

3.81 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί ή μηδέν, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\beta+\gamma}+\sqrt{\gamma+\alpha}}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}$$

3.82 Αν $x, y, \omega > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^4}{y\omega^3}+\frac{y^4}{\omega x^3}+\frac{\omega^4}{xy^3} \geq 3$$

3.83 Αν x, y και ω είναι θετικοί αριθμοί με $xy\omega(x + y + \omega) = 1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$A = (x + y)(y + \omega)$$

(Μ. Βρετανία – 1991)

3.84 Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2+4\delta^2)\left(\kappa^2+\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{3}\mu^2+\frac{1}{4}\nu^2\right) \geq (\alpha\kappa+\beta\lambda+\gamma\mu+\delta\nu)^2$$

για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda, \mu, \nu \in R$.

3.85 Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+2} \leq \sqrt{2}-1$$

(Αυστρία)

3.86 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y \in R_+$ (μη αρνητικοί αριθμοί) με $\alpha + \beta \leq x$ και $\gamma + \delta \leq y$, να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\alpha\gamma}+\sqrt{\beta\delta} \leq \sqrt{xy}$ β) $\sqrt{\alpha\delta}+\sqrt{\beta\gamma} \leq \sqrt{xy}$

(Πολωνία – 2002)

3.87 Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}\right)^2 \geq 3$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Excalibur – 2003)

3.88 Αν α, β, γ και δ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right) \geq 16$$

3.89 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha + \beta + \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right) \geq 8$$

(Ιαπωνία – 1997)

3.90 Αν κ, λ, μ και ν είναι οι θετικοί αριθμοί α, β, γ και δ γραμμένοι με διαφορετική σειρά, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\kappa}{\alpha}+\frac{\lambda}{\beta}+\frac{\mu}{\gamma}+\frac{\nu}{\delta} \geq 4$$

3.91 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2} \geq \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}$$

3.92 Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

(Γερμανία)

3.93 Αν α, β και γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) = 8$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\gamma \leq 1$.

(Ινδία – 2000)

3.94 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}+\frac{1}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{1}{\gamma+\alpha-\beta} \geq \frac{9}{\alpha+\beta+\gamma}$$

3.95 Αν $x, y, z > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4xyz} \geq \frac{x+y}{x+z}+\frac{x+z}{x+y}$$

3.96 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha} \leq \frac{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{\alpha+\beta+\gamma}$$

3.97 Αν $x, y, z > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}}+\sqrt{\frac{y(z+x)}{3}}+\sqrt{\frac{z(x+y)}{3}} \leq \frac{\sqrt{6}}{3}(x+y+z)$$

3.98 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right) \geq \frac{8}{\alpha\beta\gamma}$$

3.99 Αν $x, y, z \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι:

$$2(xy + yz + zx) \leq 4xyz + x + y + z$$

3.100 Αν α, β, γ και δ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{1}{\alpha+\gamma+\delta}+\ +\frac{1}{\beta+\gamma+\delta} > \frac{4}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

(Γερμανία – 1996)

3.101 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha+\beta+\gamma} \geq \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{3}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

3.102 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β και γ, ώστε $\alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha = 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \sqrt[3]{4}\cdot(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

3.103 Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ και $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta+\gamma \geq \frac{1}{3}$.

3.104 Να αποδείξετε ότι για κάθε x, y και ω ισχύει η ανισότητα:

$$x^4 + y^4 + \omega^4 - 4xy\omega + 1 \geq 0$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Ολυμπιάδα Αλβανίας)

3.105 Αν $x \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$$

(Ιρλανδία – 1998)

3.106 Για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς x, y και ω να αποδείξετε ότι:

$$x^4\left(1+y^4\right)+y^4\left(1+\omega^4\right)+\omega^4\left(1+x^4\right) \geq 6x^2y^2\omega^2$$

(Ρωσία – 1995)

3.107 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{\alpha^3+\beta^3+\delta^3}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{\alpha^3+\gamma^3+\delta^3}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{\beta^3+\gamma^3+\delta^3}{\beta+\gamma+\delta} \geq \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$$

3.108 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \geq \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha$$

(Μ. Βρετανία)

3.109 Αν α, β, γ και δ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{1}{\alpha+\beta+\delta}+\frac{1}{\alpha+\gamma+\delta}+\frac{1}{\beta+\gamma+\delta} \geq \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$$

3.110 Έστω $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ θετικοί αριθμοί και $A = x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{A}{A-x_1}+\frac{A}{A-x_2}+\ldots+\frac{A}{A-x_\nu} \geq \frac{\nu^2}{\nu-1}$$

3.111 Αν $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ και $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le f(\alpha) + f(\beta)$$

(GM – 2002)

3.112 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y και ω με $x + 2y + 3\omega = \alpha$. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $A = x^2 + y^2 + \omega^2$ να είναι 14.

(Ρουμανία – 1997)

3.113 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R_+$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} + \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\delta^2} + \sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\delta^2} + \ + \sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2} \ \ge \ \sqrt{3}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

3.114 Να αποδείξετε ότι:

$$x^2 + y^2 + \omega^2 - xy - y\omega - \omega x \ \ge \ \frac{3}{4}(x-y)^2$$

για κάθε $x, y, \omega \in R$.

3.115 Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$, ώστε: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$.Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \le 8.$$

(GM – 2004)

3.116 Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ και $\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta \ \le \ 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \ge 4\alpha\beta\gamma\delta$$

(Διεθνής διαγωνισμός – 2000)

3.117 Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ και $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί με:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$$

να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1+\beta_1} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_2+\beta_2} + \ldots + \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu+\beta_\nu} \ \ge \ \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{2}$$

(APMO – 1991)

3.118 Αν x, y και ω είναι θετικοί αριθμοί με $x + y + \omega = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{\omega}\right) \ge 64$$

(Κίνα – 2001)

3.119 Αν α, β και γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \le \frac{1}{\alpha+\beta-\gamma} + \frac{1}{\gamma+\alpha-\beta} + \frac{1}{\beta+\gamma-\alpha}$$

(Πολωνία – 1993)

3.120 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha + \beta + \gamma = 6$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{1+\beta} + \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\alpha} \geq 2$.

3.121 Αν α, β και γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \sqrt{3} \cdot \alpha\beta\gamma$.

(Βαλκανιάδα – 2001)

3.122 Αν α, β και γ είναι πλευρές τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2\beta(\alpha - \beta) + \beta^2\gamma(\beta - \gamma) + \gamma^2\alpha(\gamma - \alpha) \geq 0$$

(ΔΜΟ – 1983)

3.123 Αν α, β και γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 8\gamma\alpha}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + 8\alpha\beta}} \geq 1$$

(ΔΜΟ – 2001)

3.124 Αν x, y και ω είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xy\omega} + \frac{1}{y^3 + \omega^3 + xy\omega} + \ + \frac{1}{\omega^3 + x^3 + xy\omega} \leq \frac{1}{xy\omega}$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης – 2003)

3.125 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2} + \frac{\beta^3}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2} + \frac{\gamma^3}{\gamma^2 + \gamma\alpha + \alpha^2} \geq \ \geq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$$

(Ουγγαρία, Kömal - 1997)

3.126 Αν α, β και γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha + \beta + \gamma = 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\sqrt{3\alpha\beta\gamma} \leq 1$$

(Μαθηματική Ολυμπιάδα Πολωνίας - 1999)

3.127 Έστω α, β και γ μήκη πλευρών τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha + \beta - \gamma} + \sqrt{\beta + \gamma - \alpha} + \sqrt{\gamma + \alpha - \beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}$$

Πότε ισχύει το ίσον;

(Asian Pacific Mathematical Olympiad - 1996)

3.128 Αν α, β και γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$3\left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma}\right) \geq 4\left(\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+\gamma} + \frac{1}{\beta+\gamma}\right)^2$$

(Μαθηματική Ολυμπιάδα Αιγύπτου)

3.129 Αν α, β και γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \geq 2\left(1+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}}\right)$$

(10th Asian Pacific Mathematical Olympiad - 1998)

3.130 Για τυχαίους πραγματικούς α, β, γ και δ να αποδείξετε ότι:

$$(1+\alpha\beta)^2 + (1+\gamma\delta)^2 + (\alpha\gamma)^2 + (\beta\delta)^2 \geq 1$$

(Μαθηματική Ολυμπιάδα Ν. Αφρικής - 1999)

3.131 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{\alpha+1}+\frac{\beta^2}{\beta+1}+\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \geq \frac{4}{9}(2\alpha+2\beta+2\gamma-3)$$

(GM – 1999)

3.132 Να βρείτε όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_{1999}$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες ισότητες:

$$1+x_1^2=2x_2,\ \ 1+x_2^2=2x_3,\ \ \ldots,\ \ 1+x_{1998}^2=2x_{1999},\ \ 1+x_{1999}^2=2x_1$$

(Μαθηματική Ολυμπιάδα Μολδαβίας - 1999)

3.133 Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\beta(\alpha+\beta)}+\frac{1}{\gamma(\beta+\gamma)}+\frac{1}{\alpha(\gamma+\alpha)} \geq \frac{27}{2(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β και γ.

(6η ΒΜΟ Νέων - 2002)

3.134 Να αποδείξετε ότι:

α) $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ για κάθε $x, y > 0$ β) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2002 < \left(\frac{2003}{2}\right)^{2002}$

(ΕΜΕ, Αρχιμήδης - 2002)

3.135 Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής - 1995)

3.136 Αν α, β και γ είναι πλευρές τριγώνου, να αποδείξετε ότι $(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2 \leq 4\beta^2\gamma^2$.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής - 1996)

3.137 Αν α, β, x και y είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha\cdot\frac{x}{y}+\beta\right)^2+\left(\alpha\cdot\frac{y}{x}+\beta\right)^2 \geq 8\alpha\beta$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης - 1994)

3.138 Αν $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2 \le 4$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Αρχιμήδης - 1994)

3.139 Αν $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le 0$, να απο- δείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2 \le \gamma^2$.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής - 1996)

3.140 Αν α, β, x και y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}} \le \alpha x+\beta y$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Αρχιμήδης - 2000)

3.141 Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$|x| \ge |y+z|,\ |y| \ge |z+x| \ \text{ και } \ |z| \ge |x+y|$$

Να αποδείξετε ότι $x+y+z=0$.

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής - 1999)

3.142 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, x και y ισχύουν:

$$\alpha \ge 2,\quad 1 \le x \le \alpha \quad \text{και} \quad 1 \le y \le \alpha$$

να αποδείξετε ότι:

$$4 \le (x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \le \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης - 1999)

3.143 Να προσδιορίσετε τον μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό Μ, ο οποίος έχει την εξής ιδιό- τητα: Για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha+\beta=1$ ισχύει ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \ge M$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής - 2001)

3.144 **α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει ότι:

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 < \frac{n}{n+1}$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2000}{2001}\right)^2 < \frac{1}{1001}$$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης - 2001)

3.145 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma}(\alpha-\beta)^2+\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha}(\beta-\gamma)^2+\ +\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta}(\gamma-\alpha)^2\geq 0$$

3.146 Για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}<x+y$

β) $f(x,y,z)=\frac{x^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3}{y^2+yz+z^2}+\ \frac{z^3}{z^2+zx+x^2}<x+y+z$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης - 2001)

3.147 Αν $\alpha,\beta,\gamma>0,$ να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{9\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\geq 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

β) $(\alpha\beta\gamma)^2+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2\geq 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

γ) $(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)\geq 9(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

3.148 Αν α και x είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha\geq 1,$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha-1}}\geq 2$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Ευκλείδης - 2001)

3.149 Αν η εξίσωση $\alpha x^2-4\beta x+4\gamma=0,$ $\alpha>0,$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα $[2,3],$ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\leq\beta\leq\gamma<\alpha+\beta$ β) $\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta}{\beta+\alpha}>\frac{\gamma}{\gamma+\beta}$

(Διαγωνισμός ΕΜΕ, Θαλής - 2002)

3.150 Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+3\geq 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

3.151 Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta\gamma,$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha-1}{\alpha^3}+\frac{\beta-1}{\beta^3}+\frac{\gamma-1}{\gamma^3}\geq\frac{6}{\alpha\beta\gamma}.$$

3.152 Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ και $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,$ να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^3}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^3}{\alpha+\beta}\geq\frac{1}{2}.$

3.153 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2\beta}{\gamma}+\frac{\beta^2\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma^2\alpha}{\beta}\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha.$$

3.154 Αν $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=3,$ να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{\beta^2+1}+\frac{\beta}{\gamma^2+1}+\frac{\gamma}{\alpha^2+1}\geq\frac{3}{2}.$

3.155 Αν α, β και γ είναι θετικοί αριθμοί με γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha-1+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta-1+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\gamma-1+\frac{1}{\alpha}\right)\leq 1$$

(ΔΜΟ - 2000)

3.156 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\beta+\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\beta}\leq\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}$$

3.157 Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ με $\alpha+\beta+\gamma=1$, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2+\beta}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha}{\alpha+\beta}\geq 2.$

Βιβλιογραφία

Μπάμπης Στεργίου – Νίκος Σκομπρής :

Αλγεβρικές Ανισότητες, Εκδόσεις Σαββάλας.

Το παρόν αρχείο είναι περίπου η ενότητα 3η από το παραπάνω βιβλίο .Τις λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων, τη μεθόδευση για τη λύση ανισοτήτων και άλλα ενδιαφέροντα θέματα μπορεί ο αναγνώστης να βρει στον κορμό του βιβλίου.

****** Περιμένουμε τις παρατηρήσεις σας που θα συμβάλουν στη βελτίωση αυτού του αρχείου.***