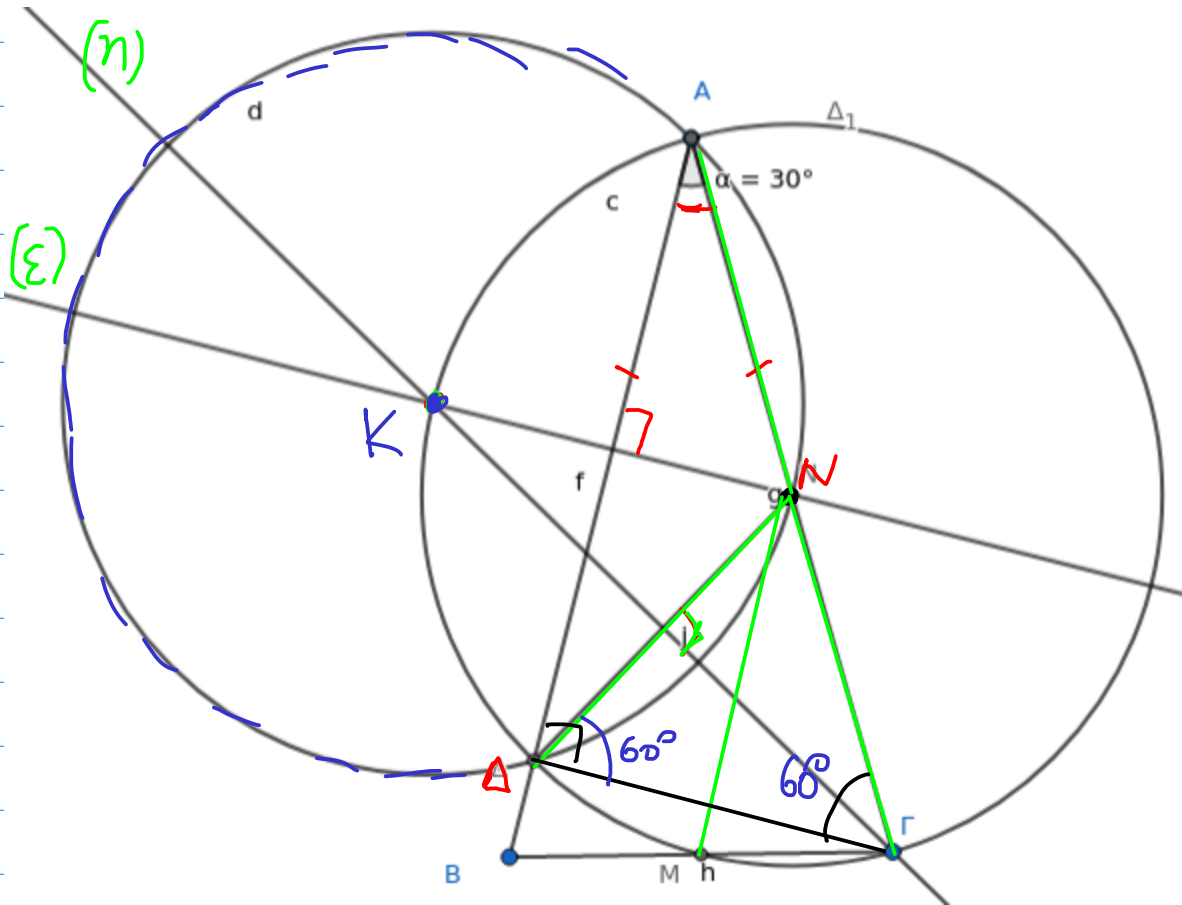
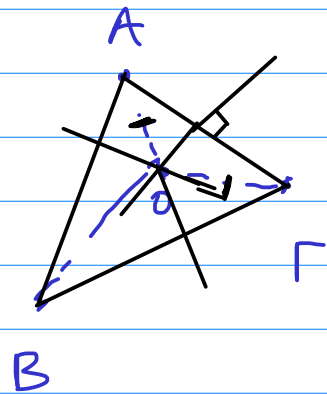


Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 30^\circ$ και έστω M, N τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A\Gamma M$ ($C_{A\Gamma M}$) τέμνει τη πλευρά AB στο σημείο D . Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο N προς την πλευρά AB και η κάθετη από σημείο Γ προς την ΔN τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{A\Gamma M}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $A\Delta N$. (Σημείωση: Για ένα τρίγωνο XYZ , ο περιγεγραμμένος κύκλος είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του X, Y, Z . Αν O είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε $OX=OY=OZ$)



μεσοκάθετος
Σ.Τ.
Ιδιότητα
κάθε σημείο
ισοπέχει
από κορυφές



$A\Gamma D \in C_{A\Gamma M}$ και $A\Gamma$ διχομερούς άρα $\hat{A} = 90^\circ$

άρα $\hat{A\Gamma D} = 60^\circ$ άρα $\hat{D\Gamma A} = 60^\circ$

ισοσκελές $\triangle N\Gamma D$ ($N\Gamma = ND$) άρα ισονόητος
 $NA = N\Gamma = \Gamma D$

$\Gamma K \perp ND$ (λόγω ισον.) θα είναι μεσοκάθετος
οπότε διέρχεται από το κέντρο $C_{A\Delta N}$

Ομοίως $(\varepsilon) \perp AD$ και $AN = ND$ άρα
(ε) μεσοκάθετος του $\triangle A\Delta N$

Συνεπώς οι $(\varepsilon), (n)$ τέμνουν στο
κεντρο K του C_{ADN} ✓

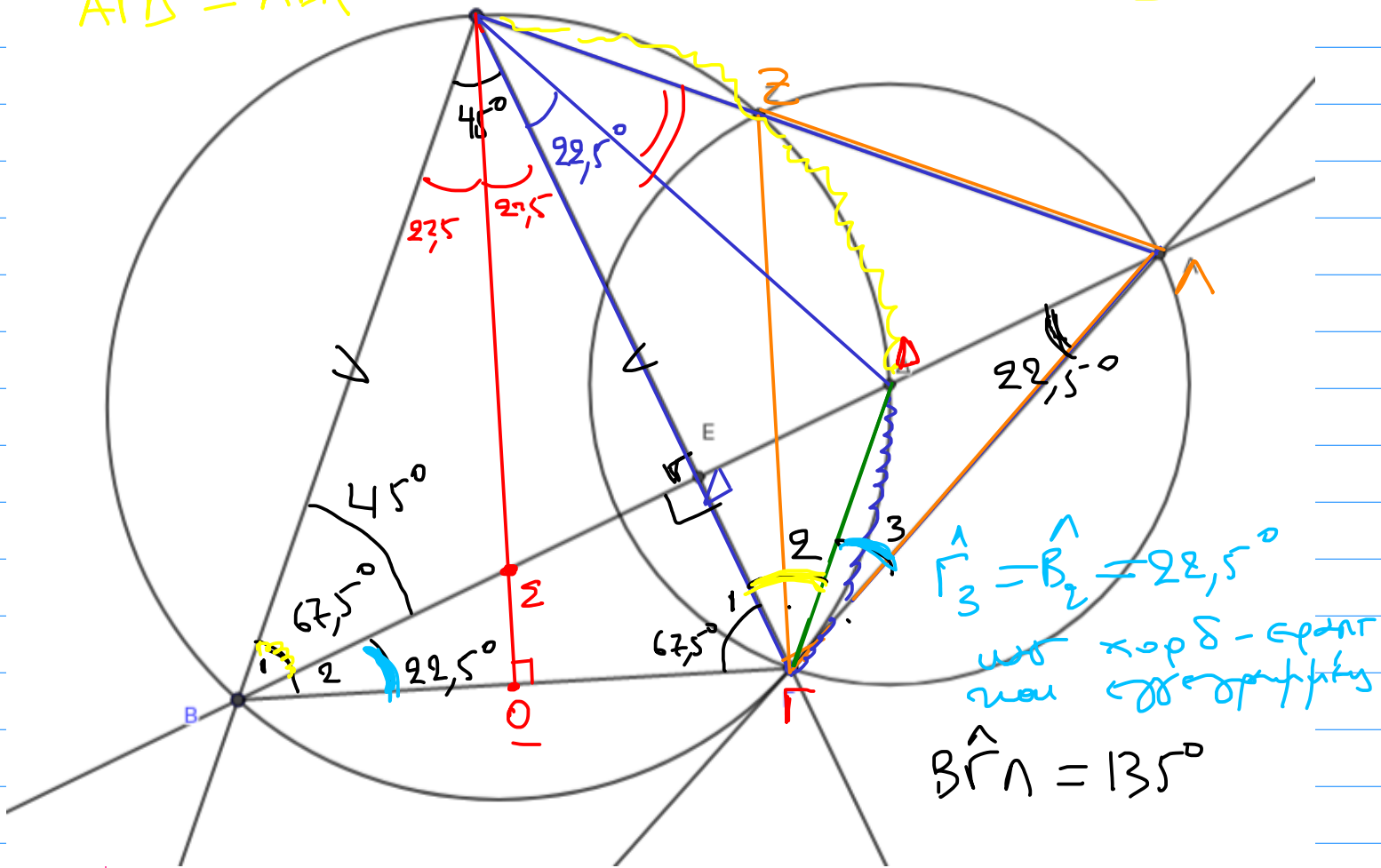


Αρα $KN = N\Delta$ οπότε
 $K \in C_{ARM}^A$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 45^\circ$. Θεωρούμε το ύψος BE του τριγώνου $AB\Gamma$, του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω $C_{AB\Gamma}$, στο σημείο Δ . Η προέκταση του ύψους BE τέμνει επίσης στο σημείο Λ την εφαπτόμενη του κύκλου $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο του Γ . Η $A\Lambda$ τέμνει τον κύκλο $C_{AB\Gamma}$ στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το ορθόκentro του τριγώνου $A\Gamma\Lambda$ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $Z\Gamma\Lambda$.

$\hat{\Delta A\Gamma} = \hat{\Gamma\Lambda\Delta} = 22,5^\circ$ εως βαίνου στο ίδιο Δ
 $\hat{A\Gamma\Delta} = \hat{A\Gamma\Lambda} = 45^\circ$ εως βαίνου στο $A\Gamma\Delta$



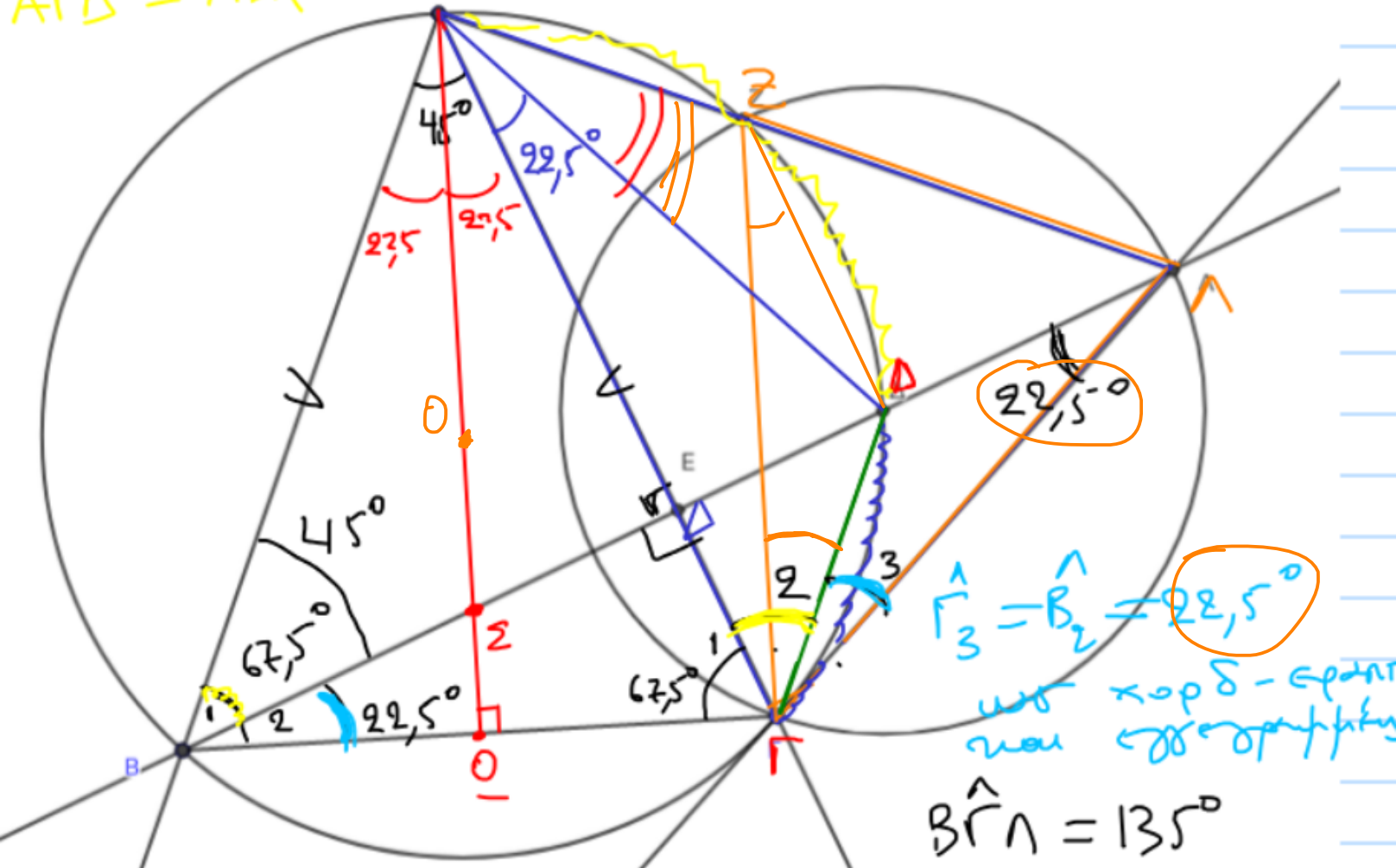
Στο $B\hat{\Gamma}\Lambda$ $B_2 = 22,5^\circ$ $B\hat{\Gamma}\Lambda = 135^\circ$ αρ $B\hat{\Lambda}\Gamma = 22,5^\circ$

$\begin{cases} \text{όμοι} & \Gamma B_2 = \Gamma \Lambda \\ A\hat{B}_2\Gamma = A\hat{\Gamma}\Lambda & \text{διότι} \\ B\Gamma = \Gamma\Lambda & \\ A\Gamma = A\Gamma & \text{κοινή} \\ A\hat{\Gamma}\Lambda = A\hat{\Gamma}B & \end{cases} \rightarrow \text{απ} \ \Pi\Gamma\Lambda \ \text{ΟΚ.}$

$\hat{\Delta A\Lambda} = 22,5^\circ$ από ίδομα τριγώνων προκύπτει

Συνολικά $\Delta = A\Delta \cup \Delta E$ ομοτίο ζεύγη
 οπότε ορθό κεντρο
 ύψη

ορόσηφο ορόδο κεντρο

[illegible]

Αρκεί να $\Gamma D = \Delta \Lambda = \Delta Z$
 $\Gamma \hat{A} \Lambda$ ωοβκελές δίδει $\Gamma_3 = \hat{\Lambda} = 22,5^\circ$ $\Delta \Lambda = \Delta \Gamma$
 $\Gamma \hat{Z} D = 22,5^\circ$ δίδει βάλων $\Delta \Gamma$ ίση με $\Gamma_3 = 22,5^\circ$
 $Z \hat{A} D = Z \hat{A} \Delta = 22,5^\circ$ δίδει βάλων στο $Z \hat{A} D$
 αφού $Z \hat{A} \Gamma$ ωοβκελές $Z D = \Delta \Gamma$ να οκ.

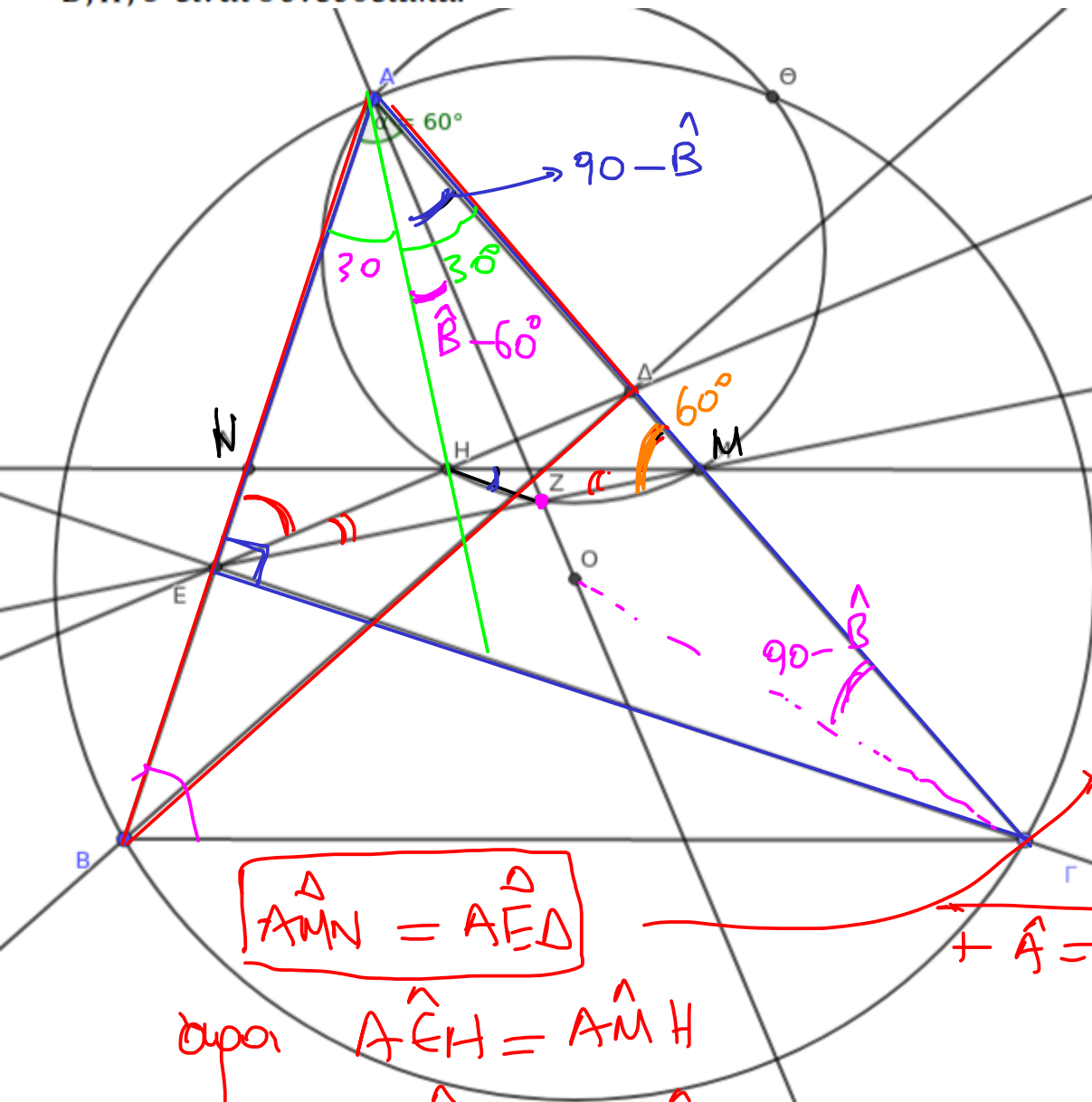
Άλλος τρόπος Σ κλειστή για τη συνθήκη $B^T \eta$:

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο μη ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ με $\hat{A} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα ύψη του $BD, \Gamma E$ καθώς και τα μέσα M, N των πλευρών του $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των OA, EM και H το σημείο τομής των $MN, \Delta E$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, H, Z, M ανήκουν σε κύκλο, έστω c_1 .

(β) Αν οι κύκλοι c και c_1 τέμνονται στο σημείο Θ , να αποδείξετε ότι τα σημεία B, H, Θ είναι συνευθειακά.



Παρατηρώ
 ότι
 $\triangle AEM$
 ισοσκελές!

$\triangle A\Gamma E$ ορθογ.

$$AE = \frac{A\Gamma}{2}$$

$$AM = \frac{A\Gamma}{2}$$

① $AE = AM$

Ομοίως
 στο $\triangle \Delta D$

$AN = AD$

$\triangle AMN = \triangle AED$

οπότε $\hat{A}\hat{E}H = \hat{A}\hat{M}H$

$\Rightarrow H\hat{E}M = H\hat{M}E \Rightarrow H \in \mu\epsilon\sigma\kappa\alpha\theta\eta\tau\omicron \Gamma M$
 και το $A \in \mu\epsilon\sigma\kappa\alpha\theta\eta\tau\omicron \Gamma M$ ①

ΑΗ $\mu\epsilon\sigma\kappa\alpha\theta\eta\tau\omicron \Gamma M$

$H\hat{A}M = 30^\circ$

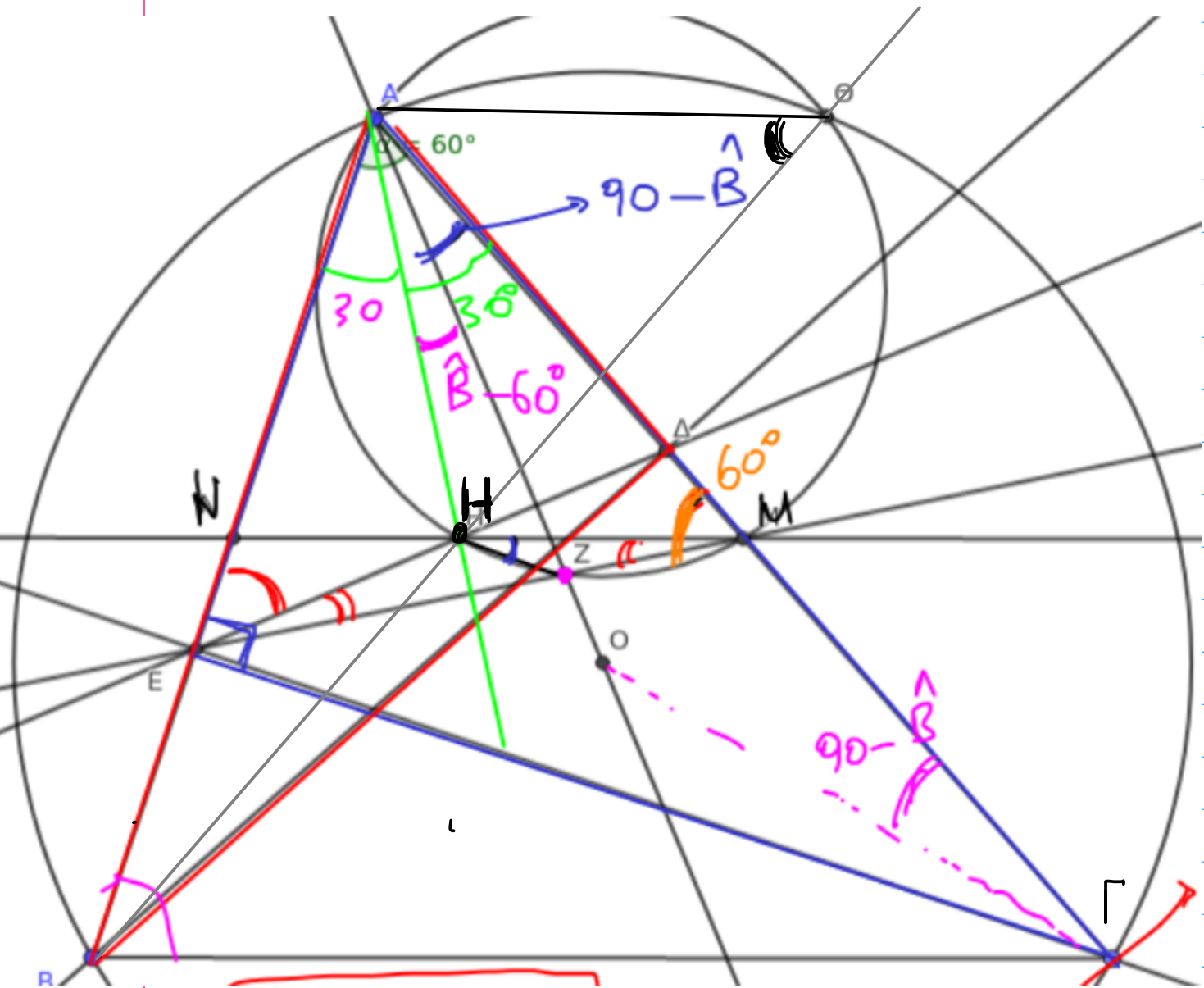
$A\hat{O}B = 2\hat{B} \Rightarrow Z\hat{O}\Gamma = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow H\hat{A}Z = \hat{B} - 60^\circ$

αρκεί $\widehat{HMZ} = \widehat{B} - 60^\circ$

Ομως $\widehat{HMZ} = 60^\circ - \widehat{\Gamma}$

Ομως $\widehat{B} - 60^\circ = 60^\circ - \widehat{\Gamma} \Leftrightarrow$

$\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 120^\circ$ ✓
 Σύνολο σε $\triangle AB\Gamma$ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$

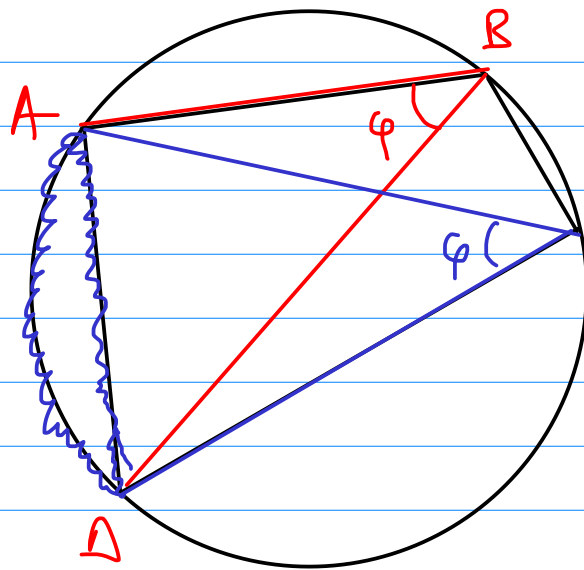


Αρκεί $\widehat{AOB} = \widehat{AOH}$

$\widehat{AOB} = \widehat{AOB} = \widehat{\Gamma}$

$\widehat{AOH} = \widehat{AMH} = \widehat{\Gamma}$

$(\text{επειδή } MN \parallel B\Gamma) \} \text{OK.}$



$ABCD$
 εγγράμμο
 αν
 AD φαίνεται
 από ανώτερη
 κορυφή, υπο
 ίδια γωνία
 (δηλ. οι $\hat{B}, \hat{\Gamma}$
 ως εν δυνάμει
 εγγράμμοι στο ίδιο τόξο
 του ίδιου κύκλου να είναι ίσοι)

Τα σχήματα μπορείτε να τα δείτε σε επεξεργάσιμη μορφή στο Geogebra:

Α λυκείου: <https://www.geogebra.org/calculator/ch4tvrbp>

Β λυκείου: <https://www.geogebra.org/classic/ctckmdzj>

Γ λυκείου: <https://www.geogebra.org/classic/ze3sdavh>