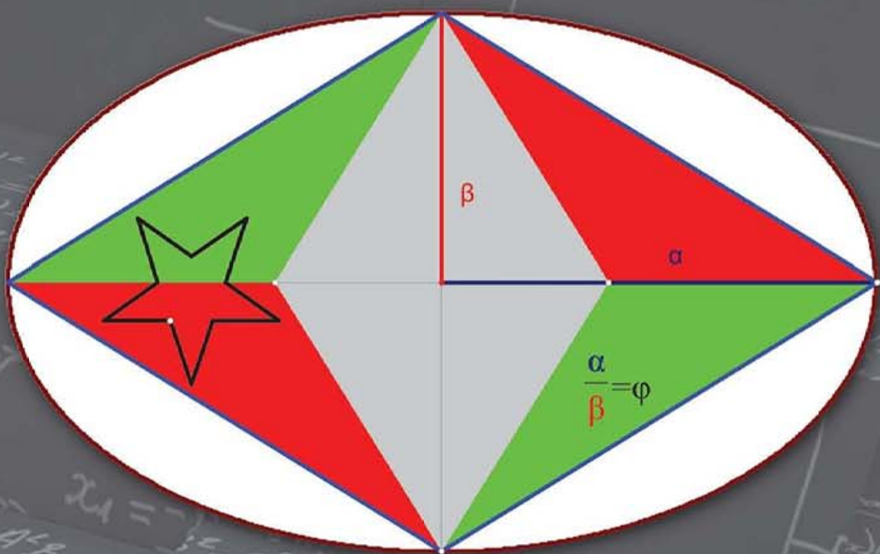
Υπεύθυνος καθηγητής
Σωκράτης Ντριάνκος

Άρρητα ρήματα

Διερεύνηση της αρρητότητας από μαθητές του Πειραματικού Λυκείου Ρεθύμνου



Τάξη Β΄

Σχολικό έτος 2014-2015

εξώφυλλο

Αγαπητοί συνάδελφοι,

Θα γνωρίζετε ότι η «μέθοδος project» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην Ευρώπη(1920, Βιέννη) σε ένα σχολείο που ίδρυσε η Anna Freud (οι ιδέες είναι του αμερικανού φιλοσόφου John Dewey…*η μόνη ελευθερία που παρουσιάζει διαρκές ενδιαφέρον είναι η ελευθερία της διανόησης*…, εμπειρία και εκπαίδευση, σελ.47, Γλάρος,1980). Τίτλος… «the world of the Eskimos»…*All subjects were then related to Eskimo life-geography, history,science, math and of course, reading and writing…*

Οι ιδέες εξελίχθηκαν …και το κορυφαίο project («Άρρητα ρήματα») αναπτύχθηκε κατά το σχ. έτος 2014-2015 στο Πειραματικό Λύκειο Ρεθύμνου.

Στην «τελετή λήξης» οι μαθητές ένοιωσαν «άρρητη ευχαρίστηση» με το δώρο-βιβλίο (το προϊόν του project, ένα αντίτυπο-βραβείο για την προσπάθεια σε κάθε μαθητή) και απόλαυσαν «άρρητες συζητήσεις»(οπότε…δεν μπορούν να ειπωθούν), χυμούς και γλυκά.

ΡΕΘΥΜΝΟ, Απρίλιος 2016

Σωκράτης Ντριάνκος

Άρρητα ρήματα

ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΣ ΑΡΧΗ

Το μάθημα (του μεταπτυχιακού ΕΚΠΑ):

Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών

Στοιχεία Ευκλείδη

Καθηγητής κ. Στυλιανός Νεγρεπόντης

Η μη μαθηματική αρρητότητα είναι συνέπεια των «άρρητων» συζητήσεων με τον **κ. Στυλιανό Φραγκούλη** (Phd θεολογικής ΕΚΠΑ) .

Ευχαριστώ επίσης τον **κ. Χατζηδημητρίου Δημήτριο**, ιστορικό(MSc)-θεολόγο(Msc), για την υπομονή του στις συζητήσεις «ρητοποίησης!» της αρρητότητας.

Η σπίθα υπάρχει μέσα σε κάθε άνθρωπο…

Άνεμος είναι ο δάσκαλος.

Συγγραφείς:

Η άρρητη ομάδα της Β΄τάξης:

Μάρα Β, Μαρία Β,

Βαγγέλης Γ, Αγάπη Γ

Αργυρώ Δ, Μαρία Δ

Μαρίνα Ζ, Δέσποινα Ζ

Ξένια Κ, Λευτέρη Κ,

Αλέξανδρος Κ, Δημήτρης Κ

Φοίβος Μ, Νικόλαος Μ

Στέφανος Π, Ελευθερία Π,

Λευτέρης Σ, Δημήτρης Σ

Διογένης Τ, Νεκτάριος Φ

Υπεύθυνος καθηγητής: **Σωκράτης Ντριάνκος**

Σεβόμαστε την επιθυμία του χρηματοδότη του βιβλίου,

ζήτησε «αρρητότητα».

Στο άρρητο νεανικό πνεύμα

Όταν μετά από εντατική διανοητική δραστηριότητα φτάνω σε ένα όμορφο αποτέλεσμα που με ενθουσιάζει, παρατηρώ μια σιωπή ή μια απώλεια. Αυτό είναι το πιο ενδιαφέρον στην δημιουργία, το να φτάσει κανείς σε αυτόν τον βαθμό σιωπής, μιας τόσο εκκωφαντικής σιωπής, και όχι στη μάζα των λέξεων... Κάποιες απαντήσεις δεν μπορούν να ειπωθούν…»

Thomas Schutte (1954 -): Από την Συλλογη Πορταλάκη, 2010.

.

Φ: Φανή-Μαρία Τσιγκάκου **Γ:** Γιάννης Μόραλης

Φ. -Κύριε Μόραλη, έχετε σπουδάσει αρχιτεκτονική;

Γ.-Όχι.

Φ.-Στο σχολείο ήσασταν καλός στα μαθηματικά;

Γ.- Έτσι και έτσι.

Φ.-Σας ρωτώ γιατί, όπως καταλαβαίνετε, απορώ πως έχετε σχεδιάσει τόσο άψογες αρχιτεκτονικές συνθέσεις.

Γ.-Απλούστατα, με την αίσθηση!

Ο διάλογος πραγματοποιήθηκε τον Φεβρουάριο του 2009 στο Μουσείο Μπενάκη, βλ. στη σελ. 10 του: Τσιγκάκου, Φ., επιμέλεια, (2011). *Γιάννης Μόραλης «Αρχιτεκτονικές συνθέσεις»*. Αθήνα: Μουσείο Μπενάκη.

I never came upon any of my discoveries
through the process of rational thinking

Albert Einstein

Περιεχόμενα

0.Εισαγωγή:Σωκράτης Ντριάνκος

Τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολο και δυσνόητο αντικείμενο. Ίσως εξ αιτίας της αφηρημένης φύσης των μαθηματικών αντικειμένων και επινοημάτων, τα οποία δεν βλέπουμε, δεν ακούμε, δεν γευόμαστε, δεν πιάνουμε και δεν μυρίζουμε (Παντελίδης, 1998:v).Ίσως εξ αιτίας των απαιτήσεων για αποδείξεις μόνο με τη χρήση της λογικής και όχι παραδοσιακών «πειστικών» διαδικασιών. Ίσως εξαιτίας του βασικού χαρακτηριστικού που τα διακρίνει από όλες τις άλλες επιστήμες: «*τα μαθηματικά δεν περιορίζονται πλέον στο να βάζουν τάξη σε μια υπάρχουσα εμπειρία και διαίσθηση, αλλά, ερχόμενα σε σύγκρουση με την κοινή εμπειρία και διαίσθηση, υπερισχύουν»* (Νεγρεπόντης, 2009:14). Η διαφοροποίηση από τις παρατηρησιακές επιστήμες είναι εμφανής: δεν εξηγούμε φαινόμενα, αποδεικνύουμε ότι κάποια είναι αδύνατα.

Στην επιστήμη των μαθηματικών συλλαμβάνονται νέες δυναμικότερες ιδέες και επινοούνται μέθοδοι για άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα. Οι μέθοδοι προϋποθέτουν τις ιδέες και οι ιδέες προϋποθέτουν κάποιο εύρος εμπειρίας και κάποιο βάθος πνευματικής καλλιέργειας. Αυτά, δηλαδή το εύρος εμπειρίας και το βάθος της πνευματικής καλλιέργειας, είναι αδύνατον να αναχθούν στο μηδέν, ως βασικές προϋποθέσεις. Είναι αδύνατον να κατακτηθούν οι γνώσεις με μηδενική προσπάθεια και κάθε τέτοια προσπάθεια πρέπει να είναι ουσιαστική και όχι βεβιασμένη ή εικονική. «*Εκείνος ο οποίος θα περιπλανηθεί εις τον Μαθηματικόν τόπον, θα συναντήση εις τους σκολιούς, δυσκόλους δρόμους, μεγάλας, πολλάκις ανυπερβλήτους, δυσχερείας*» (Βαρόπουλος, 1949:153).

Άρρητα ρήματα

Τιμούμε και σεβόμαστε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται. «*Μια δυσκολία είναι ένα φως. Μια ανυπέρβλητη δυσκολία είναι ένας ήλιος*» (Βαλερύ, 1996:27). Οι απαιτήσεις για την μελέτη των Μαθηματικών είναι γνωστές (Ευκλείδης προς Πτολεμαίο: μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν): μολύβι, χαρτί, αρκετή υπομονή και πολύ απλά, φως, καρέκλα, τραπέζι, ξενύχτι.

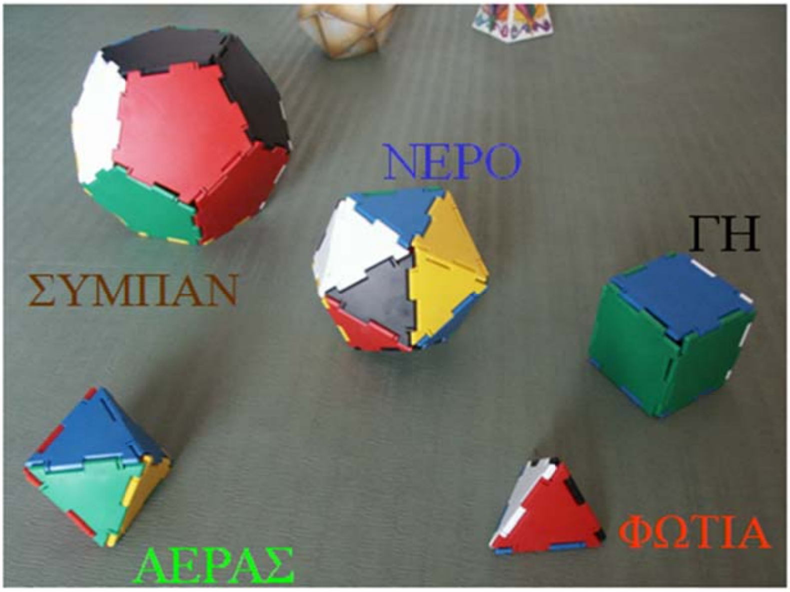
Αμοιβή η μέγιστη : «*τα μαθηματικά προσφέρουν την ευκαιρίαν της δοκιμασίας και την δοκιμήν της ικανότητος, διότι χαρίζουν την λογικήν ως αίσθημα, την στερεότητα ως χάριτα, την λιτότητα ως αφθονίαν»* (Καζαντζίδης, 1972:β).

Η δυνατότητα κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου με χρήση αριθμών είναι σύλληψη του Πυθαγόρα και της σχολής του. Εκεί οι αριθμοί μελετήθηκαν θεωρητικά και τέθηκαν οι βάσεις της επιστημονικής θέασης των πραγμάτων. Όμως, η συσσώρευση γνώσης και αποτελεσμάτων προκάλεσε την πρώτη καταγεγραμμένη κρίση στην ιστορία της επιστήμης που σχετίζεται με την διαπίστωση της ύπαρξης «αρρήτων» μεγεθών.

Ο Πυθαγόρας (περίπου 550 π.Χ.) ήταν Μαθηματικός και φιλόσοφος. Κείμενα του Πυθαγόρα δεν έχουμε, αλλά υπάρχουν πηγές από τη σχολή των Πυθαγορείων. Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν τους νόμους της αρμονίας, ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με την αριθμοθεωρία, το περίφημο Πυθαγόρειο Θεώρημα, ανακάλυψαν την ασυμμετρία και την θεωρία των κανονικών πολυέδρων (ο Πρόκλος γράφει για τον Πυθαγόρα:… *ος δή και την των αλόγων πραγματείαν και την των κανονικών πολυέδρων σύστασιν ανεύρεν*).Τα 5 Πλατωνικά στερεά δεν είναι άσχετα με την ασυμμετρία (βλ.ενότητα 6.4, κανονικό πεντάγωνο).

Στερεά και σύμβολα κατά Πλάτωνα (400π.Χ.):

τα τέσσερα: κύβος, τετράεδρο, οκτάεδρο, εικοσάεδρο, τα σχηματοποίησε ο Θεός χρησιμοποιώντας τις Ιδέες και τους Αριθμούς, το δωδεκάεδρο-έδρες κανονικά πεντάγωνα- το μεταχειρίστηκε για να κατασκευάσει το Σύμπαν (TLG, Plato:Timaeus).



Ο Ευκλείδης έχει την θεωρία των κανονικών πολυέδρων στο 13ο βιβλίο, το οποίο πιστεύουμε ότι οφείλεται στον Θεαίτητο, όπως επίσης και το 10ο βιβλίο, «Περί Ασυμμέτρων». Ο **Θεαίτητος** απέδειξε το εκπληκτικό γεγονός της ύπαρξης και μοναδικότητας των πέντε κανονικών πολυέδρων και επίσης ότι αυτά εγγράφονται σε σφαίρα.

Οι Πυθαγόρειοι διαιρούσαν τα μαθηματικά σε 4 κλάδους: Αριθμητική (αριθμοί σε ακινησία), Γεωμετρία (μεγέθη σε ακινησία), Μουσική (αριθμοί σε κίνηση), Αστρονομία (μεγέθη σε κίνηση).

Οι κλάδοι αυτοί παρέμειναν στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα πολλών χωρών της Ευρώπης μέχρι το Μεσαίωνα. Οι Λατίνοι ονόμαζαν τους 4 αυτούς κλάδους «quadrivium». Η σχολή των Πυθαγορείων ήταν μυστικιστική σχολή. Την δημοσιοποίηση των ευρημάτων τους πιστεύεται ότι έκανε ο Ίππασος. Τη δημοσιοποίηση αυτή εκμεταλλεύτηκαν αργότερα ο Ιπποκράτης ο Χίος και ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος(430π.Χ.), ο δάσκαλος του Θεαίτητου (αναφέρεται από τον Ιάμβλιχο, 300μ.Χ.). Στους Πυθαγόρειους αποδίδεται το δεύτερο μισό του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων, προτάσεις 27 έως 48, όπως επίσης και το 2^{ο} βιβλίο. Πυθαγόρεια μαθηματικά περιέχει επίσης και το 7^{ο} βιβλίο των Στοιχείων (τα Στοιχεία γράφτηκαν περίπου το 300π.Χ., 13 βιβλία, τα 7-8-9 είναι αριθμοθεωρητικά)

Πολλές πληροφορίες για την φιλοσοφία των Πυθαγορείων έχουμε από τον Αριστοτέλη (εκτενώς στα *Μεταφυσικά*, συνοπτικά στα *Φυσικά*) και από τον Φιλόλαο. Η εικόνα για την φιλοσοφία διαμορφώνεται από τον Αριστοτέλη (350π.Χ.) και επιβεβαιώνεται από τον Φιλόλαο.

Ένα από τα πιο φημισμένα χωρία του Αριστοτέλη είναι το [985b23-986a26] από τα Μεταφυσικά.

Ἐν δ τούτοις καὶ πρὸ **τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι** **985b, 23**
τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ

ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν ε ιναι **πάντων**.

ἐπεὶ δ τούτων οἱ ἀριθμοὶ **φύσει πρῶτοι**, ἐν δ τούτοις ἐδόκουν θεωρεῖν ὁμοιώματα πολλὰ τοῖς οὖσι καὶ γιγνομένοις, μᾶλλον ἢ ἐν πυρὶ καὶ γῇ καὶ ὕδατι, ὅτι τὸ μ ν τοιονδὶ τῶν ἀριθμῶν πάθος δικαιοσύνη τὸ δ τοιονδὶ ψυχή τε καὶ νοῦς ἕτερον δ καιρὸς καὶ τῶν ἄλλων ὡς εἰπεῖν ἕκαστον ὁμοίως, ἔτι δ τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους, –ἐπεὶ δὴ τὰ μ ν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιῶσθαι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι, τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον ε ναι, καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἁρμονίαν ε ναι καὶ ἀριθμόν· καὶ ὅσα ε χον ὁμολογούμενα ἔν τε τοῖς ἀριθμοῖς καὶ ταῖς ἁρμονίαις πρὸς τὰ τοῦ οὐρανοῦ πάθη καὶ μέρη καὶ πρὸς τὴν ὅλην διακόσμησιν, ταῦτα συνάγοντες ἐφήρμοττον. κἂν εἴ τί που διέλειπε, προσεγλίχοντο τοῦ συνειρομένην πᾶσαν αὐτοῖς ε ναι τὴν πραγματείαν· λέγω δ' οἶον, ἐπειδὴ τέλειον ἡ δεκὰς ε ναι δοκεῖ καὶ πᾶσαν περιειληφέναι τὴν τῶν ἀριθμῶν φύσιν, καὶ τὰ φερόμενα κατὰ τὸν οὐρανὸν δέκα μ ν ε ναί φασιν, ὄντων δ ἐννέα μόνον τῶν φανερῶν διὰ τοῦτο δεκάτην τὴν ἀντίχθονα ποιοῦσιν. διώρισται δ περὶ τούτων ἐν ἑτέροις ἡμῖν ἀκριβέστερον. ἀλλ' οὗ δὴ χάριν ἐπερχόμεθα, τοῦτό ἐστιν ὅπως λάβωμεν καὶ παρὰ τούτων τίνας ε ναι τιθέασι τὰς ἀρχὰς καὶ πῶς εἰς τὰς εἰρημένας ἐμπίπτουσιν αἰτίας. φαί - νονται δὴ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν ε ναι καὶ ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἕξεις, τοῦ δ ἀριθμοῦ στοιχεῖα τό τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν, **τούτων δ τὸ μ ν πε-**

περασμένον τὸ δ ἄπειρον, τὸ δ' εν ἐξ ἀμφοτέρων ει ναι τούτων (καὶ γὰρ ἄρτιον ε ναι καὶ περιττόν), τὸν δ' ἀριθμὸν ἐκ τοῦ ἑνός, ἀριθμοὺς δέ, καθάπερ εἴρηται, τὸν ὅλον οὐρανόν. –

ἕτεροι δ τῶν αὐτῶν τούτων ...

τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν ε ιναι τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας, πέρας [καὶ] ἄπειρον, περιττὸν [καὶ] ἄρτιον, εν [καὶ] πλῆθος, δεξιὸν [καὶ] ἀριστερόν, ἄρρεν [καὶ] θῆλυ, ἠρεμοῦν [καὶ] κινούμενον, εὐθὺ [καὶ] καμπύλον, φῶς [καὶ] σκότος, ἀγαθὸν [καὶ] κακόν, τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες· 989a, 26

Aristoteles: metaphysica

Στο χωρίο αυτό, ο Αριστοτέλης αναλύει την άποψη των Πυθαγορείων για τους αριθμούς. Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που υποστήριξαν ότι τα πάντα είναι αριθμοί. Οι πιο βασικοί αριθμοί είναι οι πρώτοι (θετικοί ακέραιοι με ακριβώς δυο διαιρέτες, π.χ. 2,3,5,7,11,13,17,19, 23,… , κάθε θετικός ακέραιος είναι πρώτος ή γινόμενο πρώτων) ενώ πίστευαν πως ό,τι βρίσκεται στη φύση αποτελεί μίμηση των αριθμών. Στις παραπάνω γραμμές, φαίνεται καθαρά η άποψη των Πυθαγορείων να στηρίξουν τον κόσμο σε βάσεις αριθμών και ισχυρίζονταν πως όλο το σύμπαν στηρίζεται σε 10 αρχές, οι οποίες έχουν την μορφή δίπολου (πέρας-άπειρον, περιττόν -άρτιον κλπ).

Θεμελιώδεις αρχές: το Άπειρο και το Πέρας. Με την μείξη αυτών των δύο προκύπτει το «Εν».

Το Εν αποτελεί συνδυασμό πέρατος και απείρου.

Από το Εν προκύπτουν οι αριθμοί.

Από τους αριθμούς προκύπτουν όλα τα Όντα της φύσεως (από αυτό προέρχεται και η φημισμένη φράση των Πυθαγορείων «Τα πάντα είναι αριθμοί ή μιμήσεις αριθμών»).

Περίπου το 300π.Χ., ο Ευκλείδης (Στοιχεία, βιβλίο VII, όροι) καταγράφει αυτή τη φιλοσοφική αντίληψη:

[α΄] Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἑν λέγεται

[β΄] ᾿Αριθμὸς δε τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Η μονάδα …δεν είναι αριθμός. Αριθμός είναι πλήθος μονάδων. Η μονάδα είναι μια οντότητα από την οποία παράγονται οι αριθμοί.

Αριθμός είναι μια οντότητα που μετρά πλήθος μονάδων, που μετρά πολλά, όχι ένα, το πλήθος και η μονάδα είναι αντίθετες οντότητες. Ο Ευκλείδης προσέχει και διαχωρίζει τις προτάσεις που έχουν μονάδα, από εκείνες που έχουν αριθμούς, π.χ διατυπώνει και αποδεικνύει ξεχωριστά τις προτάσεις VII.1, VII.2 που αφορούν το μέγιστο κοινό μέτρο δυο αριθμών. Στην VII.1 εξετάζει την περίπτωση της μονάδας, ενώ στην VII.2 την περίπτωση κοινού μέτρου μεγαλύτερου της μονάδας, δηλ. αριθμού κατά Πυθαγόρα-Ευκλείδη. Αυτές οι δυο προτάσεις είναι και το βασικό εργαλείο για το έβδομο βιβλίο, και φυσικά όλο το βιβλίο είναι καθοριστικό για την ανάπτυξη της θεωρίας αριθμών.

Οι προτάσεις αυτές είναι:

[VII.1] Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δε ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

[VII.2] Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν μια βασική μέθοδο, που ο Ευκλείδης την ονομάζει Ανθυφαίρεση.Η αρχαιότερη ονομασία της είναι ανταναίρεση- βρίσκεται στον Αριστοτέλη:

ἔστι δ᾽ ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ᾧ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις· αὐτὸς δ᾽ τὴν ἀνθυφαίρεσιν ἀνταναίρεσιν εἴρηκε.

Alexander: In Aristotelis topicorum libros octo commentaria, 545,15-545,17

Σήμερα ονομάζεται Ευκλείδειος αλγόριθμος (για αριθμούς, ο πρώτος και διασημότερος αλγόριθμος, Knuth, D. (2010): *Η τέχνη του προγραμματισμού*) για την εύρεση του μεγίστου κοινού διαιρέτη (ΜΚΔ) δυο αριθμών, οι αρχαίοι έλεγαν κοινό μέτρο, όχι κοινός διαιρέτης.

Όλοι οι αριθμοί έχουν κοινό μέτρο την μονάδα. Το όνομα του αριθμού είναι οι μονάδες που χρειάζονται για να συγκροτηθεί ο αριθμός, π.χ. δέκα πέντε, 15, συγκροτείται από 15 μονάδες. Δηλ. η μονάδα μετρά όλους τους αριθμούς. Επίσης τους π.χ. 15 και 35 μετρά φυσικά η μονάδα, αλλά τους μετρά και ο αριθμός 5, δυο αριθμοί μπορεί να είναι δυνατόν να μετρηθούν και από ένα πλήθος μονάδων.

Εξηγούμε τη μέθοδο και την ονομασία «ανθυφαίρεση» με ένα παράδειγμα:

Ας πάρουμε τους αριθμούς 32 και 7. Τότε:

Αφαιρούμε τον μικρότερο από τον μεγαλύτερο, μέχρι να βρούμε υπόλοιπο μικρότερο από τον μικρότερο αριθμό, δηλ. εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της διαίρεσης στους 32 και 7.

32-7=25…1^{η} αφαίρεση, 25-7=18…, 18-7=11…, 11-7=4

[σ' αυτο το βήμα προκύπτει 4<7 και για να συνεχίσουμε κάνουμε τον 7 από διαιρέτη, διαιρούμενο,

το πλήθος των μέχρι τώρα αφαιρέσεων (4) είναι το πηλίκο της διαίρεσης 32:7, η διαίρεση είναι πράξη διαδοχικών αφαιρέσεων]

Με σύμβολα, σ'αυτό το βήμα θα έχουμε: $α=κ_1β+γ_1$,…[32=**4***7+4]

Αν $γ_1=0$, τότε ο β μετρά ακριβώς τον α, και η διαδικασία σταματά, βρήκαμε κοινό μέτρο των α, β.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν το $γ_1$ δεν είναι μηδέν , τότε ισχύει $0<γ_1<β$.

Για να συνεχίσουμε…

Αντιστρέφουμε το ρόλο του 7, … αντι-αφαιρώ, αντι-αφαιρεση, ανταναίρεση…ανθυφαίρεση.

Εφαρμόζουμε τον αλγοριθμο της διαιρεσης στους 7 και 4.

7-4=3 *σ'αυτο το βήμα προκύπτει 3<4 και για να συνεχίσουμε κανουμε τον 4 από διαιρέτη, διαιρούμενο

Με συμβολα, σ'αυτο το βήμα θα έχουμε: $β=κ_2γ_1+γ_2$,…[7=**1***4+3],

Συνεχίζουμε…

4-3=1 , συμβολικά: $γ_1=κ_3γ_2+γ_3$,…[4=**1***3+1],

Και τελικά…[3=**3***1], $γ_2=κ_4γ_3$

Αν υποθέσουμε ότι η διαδικασία σταματά σαυτο το βήμα, ισχυρίζομαστε ότι $γ_3$=ΜΚΔ(α,β)

Διότι: Ο $γ_3$ είναι κοινός διαιρέτης των α, β, όπως καταλαβαίνουμε αν δούμε τις ισότητες …ανάποδα

$\mathbf{γ_2=κ_4γ_3}$**,** $\mathbf{γ_1=κ_3γ_2+γ_3}$**,** $\mathbf{β=κ_2γ_1+γ_2}$**,** $\mathbf{α=κ_1β+γ_1}$ **.**Δηλ. ο $γ_3$ μετρά τον $γ_2$, τον $γ_1$,τον β, αρα και τον α, και επομένως είναι κοινός διαιρέτης των α, β.

Επίσης, αν δ κοινός διαιρέτης των α,β, προχωρώντας από πάνω προς τα κάτω, θα έχουμε ότι

$\boldsymbol{\alpha=\kappa_1\beta+\gamma_1, \beta=\kappa_2\gamma_1+\gamma_2, \gamma_1=\kappa_3\gamma_2+\gamma_3, \gamma_2=\kappa_4\gamma_3}$,

δηλ**.** ο δ θα μετρά διαδοχικά τους γ_1, γ_2, γ_3 άρα θα είναι $\gamma_3=\Lambda*\delta$, με $\Lambda=1$, ή $\Lambda>1$.Δηλ. τυχαίος κοινός διαιρέτης των α,β διαιρεί και τον γ_3 και θα είναι είτε ίσος είτε μικρότερος από αυτόν. Αρα γ_3=ΜΚΔ(α,β).

Αν $\gamma_3=1$, **τότε** οι αριθμοί α, β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους (σχετικώς πρώτοι).Συμβολικά γράφουμε Ανθ(32,7)=[4,1,1,3]

υπολ	4	3	1	0	
32	7	4	3	1	ΜΚΔ(32,7)=1
πηλ	4	1	1	3	

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η διαδικασία σε κάποιο βήμα σταματά, η ακολουθία των υπολοίπων είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία φυσικών (επιστημονικά: κάθοδος) και επομένως τερματίζεται, με ελάχιστο στοιχείο (κάθε μη κενό σύνολο φυσικών έχει ελάχιστο) τον ΜΚΔ των α,β.

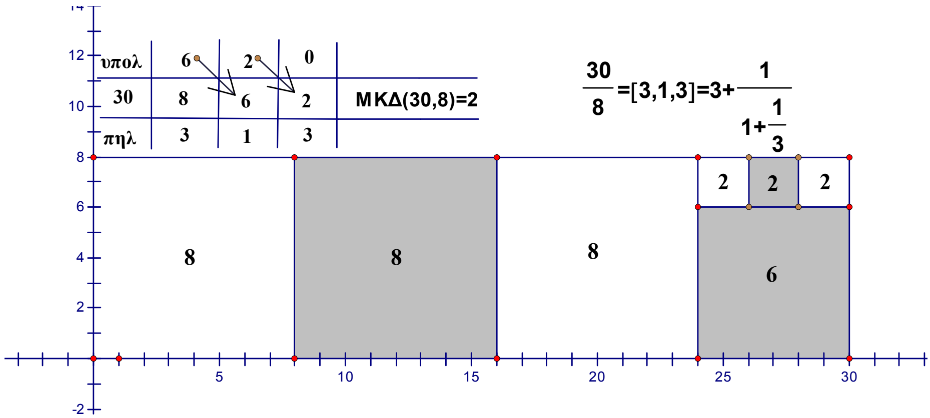
Ο Γάλλος μαθηματικός Gabriel Lame, 1795-1870, απέδειξε ότι για τους φυσικούς, το πλήθος των βημάτων στον Ευκλείδειο αλγόριθμο είναι το πολύ πενταπλάσιο από το πλήθος των ψηφίων του μικρότερου αριθμού (Burton,1997: 28).

Ας δουμε ένα ακομα αριθμητικό παραδειγμα…σχηματικά

Προσπαθούμε να «μετρήσουμε» τον αριθμό 30 με τον αριθμό 8. Σχεδίασαμε ορθογώνιο 30 επι 8 και αφαιρούμε τετράγωνα για καλύτερη αναπαράσταση.

Στην γραμμή «πηλ» είναι τα μερικά πηλίκα της διαίρεσης 30:8, στην γραμμή «υπολ» τα μερικά υπόλοιπα. Αφαιρούνται τρία οκτάρια, πρώτο μερικό υπόλοιπο το 6.

Στην προσπάθεια μέτρησης του 8 με τον 6, μια αφαίρεση, δεύτερο μερικό υπόλοιπο 2, τρίτη προσπάθεια, μέτρηση του 6 με τον 2, ακριβώς 3.



Τους 30 και 8 μετρά φυσικά η μονάδα, αλλά και ο αριθμός 2, ο ΜΚΔ των 30 και 8. Το σχήμα [3,1,3] έχει συμπυκνωμένη την προσπάθεια μέτρησης του 30 με τον 8, είναι το

πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα $3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$.

Οι αριθμοί 3,1,3, τα μερικά πηλίκα, είναι οι όροι του συνεχούς κλάσματος.

Άρρητα ρήματα

Ο Ευκλείδης επανέρχεται στην ανθυφαίρεση στο βιβλίο X, με την πρόταση X.2 (βιβλίο 10^{ο}, πρόταση 2^{η}) όπου από ανθυφαίρεση δύο άνισων αριθμών, πηγαίνει σε ανθυφαίρεση δυο άνισων μεγεθών (μεγέθη είναι ευθ. τμήματα, επιφάνειες ή όγκοι). Όμως, ενώ στους φυσικούς αριθμούς η διαδικασία σταματά (δυο αριθμοί μετρώνται οπωσδήποτε από την μονάδα, αλλά, πιθανόν να έχουν και άλλο κοινό μέτρο), για τα μεγέθη υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Αν η διαδικασία σταματά, έχουμε βρει κοινό μέτρο των μεγεθών, τα μεγέθη αυτά είναι σύμμετρα, ενώ
- Αν δεν σταματά, αν είναι άπειρη, δεν υπάρχει κοινό μέτρο αυτών των δυο μεγεθών και τα μεγέθη αυτά είναι ασύμμετρα. Δηλ. η ανθυφαίρεση αν είναι άπειρη, αποτελεί ένα **κριτήριο ασυμμετρίας** .

Η πρόταση X2 είναι η εξής:

[X.2] Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει δεν μετρά το προηγούμενο του, τότε τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

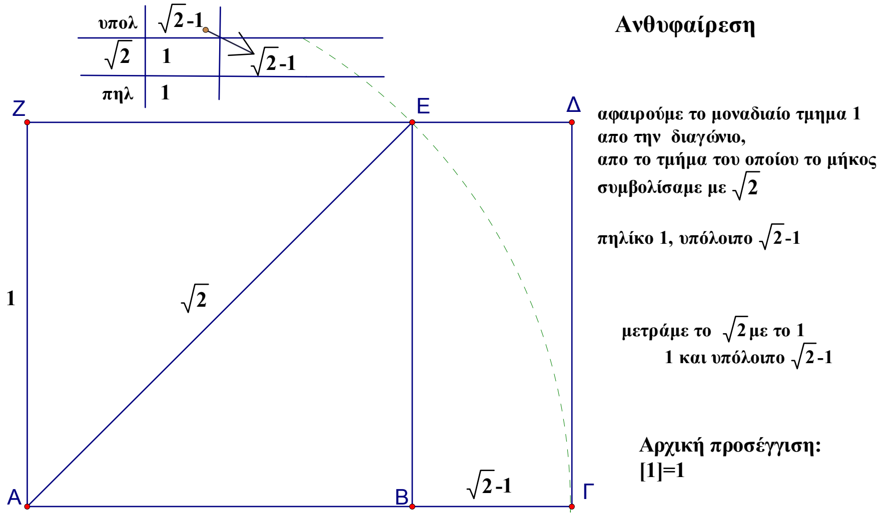
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα γνωρίζουμε ότι η υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με μήκος καθέτων πλευρών ίσο με τη μονάδα μέτρησης, είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν δύο τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.). Η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.μ., ονομάζεται τετραγωνική ρίζα του 2 και το σύμβολο που επιλέχτηκε (μετά το 1525) για να εκφράσει την οντότητα που λέγεται «μήκος» της (γιατί θέλουμε να έχει κάποιο μήκος) είναι το $\sqrt{2}$. Οι Πυθαγόρειοι (πιθανόν ο μαθηματικός Ίππασος) απέδειξαν ότι η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο, δηλαδή ο (σημερινός) $\sqrt{2}$ δεν είναι ίσος με κάποιο λόγο φυσικών, δεν είναι ρητός.

Πρόκειται περί ενός ιδανικού αριθμού, που μπορούμε να τον πλησιάσουμε σε απειροελάχιστη απόσταση, αλλά είναι αδύνατον να τον συλλάβουμε ολόκληρο. Οι αρχαίοι Έλληνες, τον ονόμασαν «άρρητο» (και δεν ήθελαν να τον εντάξουν στους αριθμούς) σε αντιδιαστολή με τους ακεραίους και κλασματικούς, που τους έλεγαν «ρητούς». Ρητός λοιπόν θα πει εκφρασμένος αλλά και προσδιορισμένος (επεκράτησε ο όρος «rational», γιατί οι ρητοί είναι λόγοι, ratios, ακεραίων). Άρρητος σημαίνει μη εκφρασμένος (δεν διέπεται από τη λογική) και μη επαρκώς προσδιορισμένος (δεν εκφράζεται ως λόγος ακεραίων, «irrational»).

Για τον $\sqrt{2}$

Θα προσπαθήσουμε να μετρήσουμε την διαγώνιο με μονάδα την πλευρά. Στο σχήμα έχουμε μεγαλώσει αρκετά τη μονάδα. Οι ιδέες μας ενδιαφέρουν.

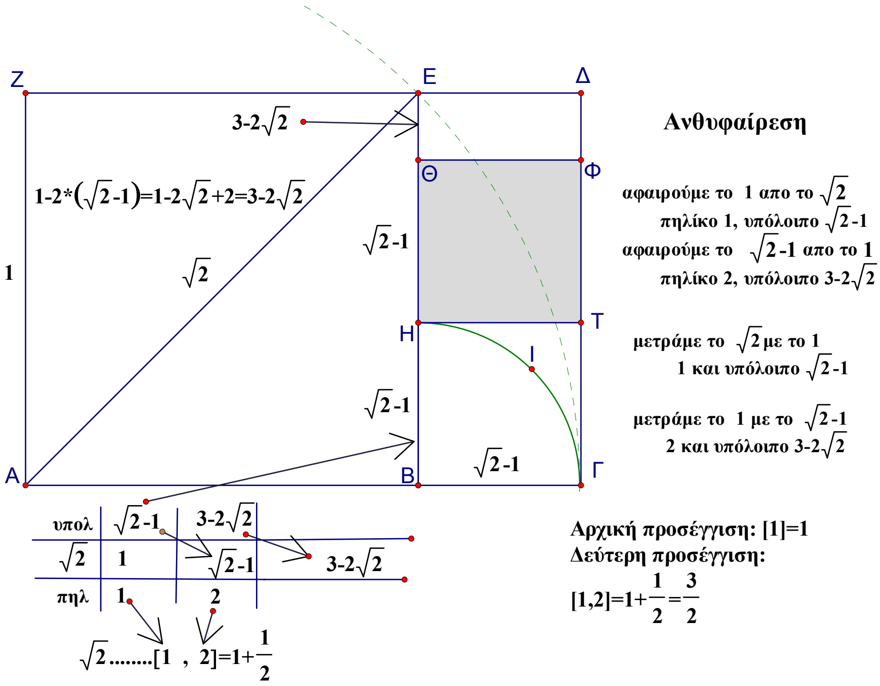
Το ορθογώνιο ΑΖΔΓ είναι $\sqrt{2}$ επί 1.



Αφαιρούμε το μοναδιαίο ΑΒ από το τμήμα μήκους $\sqrt{2}$, από το ΑΓ, βρίσκουμε $\sqrt{2}$-1, είναι το μήκος του ΒΓ.

ΒΓ είναι το «υπόλοιπο» της πρώτης μέτρησης.

Το δεύτερο βήμα είναι η προσπάθεια μέτρησης του μοναδιαίου τμήματος ΒΕ, με το ΒΓ (το υπόλοιπο της μέτρησης του $\sqrt{2}$ με το μοναδιαίο).



Με τη βοήθεια του διαβήτη, διαπιστώνουμε ότι αφαιρούνται δυο τμήματα ΒΓ από το μοναδιαίο ΒΕ, δυο τμήματα με μήκος $\sqrt{2}$-1, από το τμήμα με μήκος τη μονάδα: ΒΕ-ΒΗ-ΗΘ. Υπόλοιπο ΕΘ.

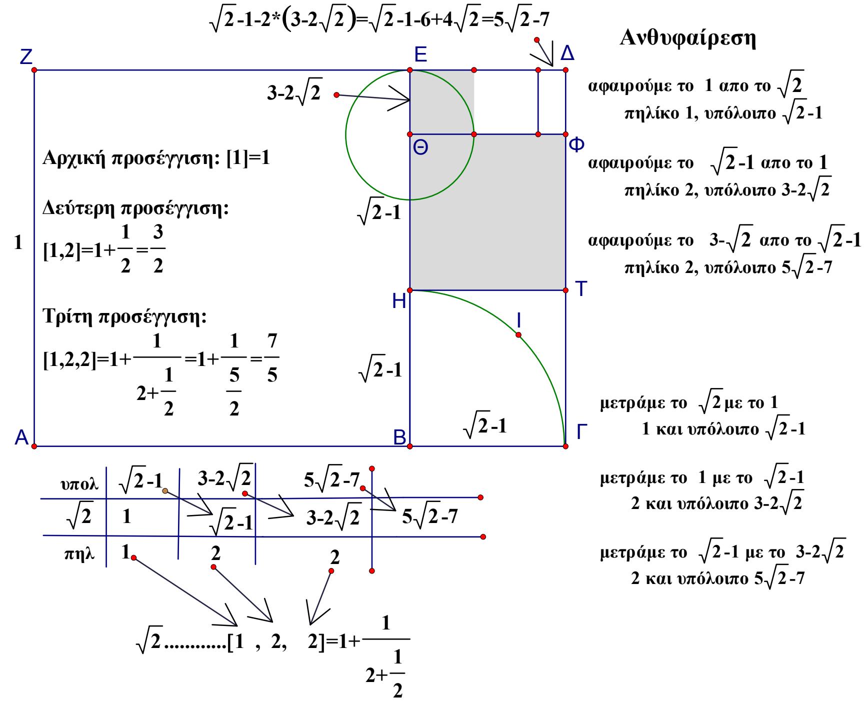
Συμβολικά:

$$1-2\left(\sqrt{2}-1\right)=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2}\,.$$

Το κλάσμα $1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ δίνει τη δεύτερη προσέγγιση.

Ο 1 μικρότερος, ο 3/2 μεγαλύτερος, ο «1,5» του δεκαδικού συστήματος.

Με το νέο υπόλοιπο ΕΘ, προσπαθούμε να μετρήσουμε το προηγούμενο, το ΘΦ=ΒΓ=$\sqrt{2}$-1. Παρατηρούμε, εργασία με τον διαβήτη, ότι και πάλι τοποθετούνται 2 τμήματα μήκους ΕΘ, αλλά και κάτι μένει.



Αν π.χ. το ΕΘ μετρά ακριβώς το ΘΦ, **δεν ισχύει**, αλλά, υποθέτουμε, **ΑΝ,** π.χ. ΒΓ= ΒΗ=ΗΘ=ΘΦ=κΕΘ, κ τοποθετήσεις του ΕΘ, **τότε**, αντιστρέφοντας τη διαδικασία θα είχαμε: ΒΕ=ΒΗ+ΗΘ+ΘΕ= κΕΘ+ κΕΘ+ΕΘ και για το τμήμα ΑΓ: ΑΓ=$\sqrt{2}$=ΑΒ+ΒΓ=ΒΕ+ΒΓ= κΕΘ+ κΕΘ+ΕΘ + κΕΘ. Το τμήμα μήκους ΕΘ **θα** μετρούσε ακριβώς και την πλευρά ΒΕ=ΑΒ και την διαγώνιο ΑΕ=ΑΓ. Τα μεγέθη πλευρά και διαγώνιος **θα** είχαν κοινό μετρο το μήκος του τμήματος ΕΘ, **θα** ήταν «σύμμετρα»

Μπορούμε τώρα να χαράξουμε τον κύκλο (Η, ΗΦ).

Παρατηρούμε ότι θα «περάσει» από το Ε.

$$\mathrm{H\Phi} = \sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = 2-\sqrt{2} = 1-\left(\sqrt{2}-1\right) = \mathrm{HE} = \mathrm{BE}-\mathrm{BH}$$

Τα τμήματα ΒΗ και ΗΕ είναι πάλι η πλευρά και η διαγώνιος ενός «μικρότερου» τετραγωνου, η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως το πρώτο βήμα, τα «2» άπειρα, τα τμήματα ΑΓ και ΑΒ ασύμμετρα, ο $\sqrt{2}$ άρρητος.

Για τις ρητές προσεγγίσεις, παίρνουμε όσα «2» θέλουμε από το **συνεχές κλασμα**. Για τη μετατροπή σε σύνηθες είναι απαραίτητες κάποιες πράξεις: π.χ. $[1,2,2] = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}} = 1+\dfrac{1}{\dfrac{5}{2}} = 1+\dfrac{2}{5} = \dfrac{7}{5}$, ο «1,4»

$$[1,2,2,2] = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{2}{5}} = 1+\cfrac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{17}{12},\ \text{ο «}1,41\overline{6}\text{»}$$

Οι τέσσερις πρώτες προσεγγίσεις: 1, $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{7}{5}$, $\dfrac{17}{12}$.

Τεχνική: $\dfrac{1}{1}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{17}{12}, \dfrac{41}{29}, \dfrac{99}{70}, \dfrac{239}{169}, \ldots, \dfrac{m}{n} \to \dfrac{m+2n}{m+n}$.

Το **συνεχές κλάσμα** είναι περιοδικό, αλλά δεν είμαστε στο δεκαδικό σύστημα. Π.χ . $\dfrac{11}{9} = \dfrac{9}{9}+\dfrac{2}{9} = 1+\dfrac{2}{9}$...μετάφραση, $1,2222\ldots = 1,\overline{2}$

Εδώ $[1,2,2,2,\ldots] = \left[1,\overline{2}\right]$...μετάφραση, $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ldots}}}$

Κλεινουμε αυτή την μικρή εισαγωγή με ένα απόσπασμα από τα εκπληκτικά σχόλια του Πρόκλου:

…

*ἦλθον δ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν **οἱ Πυθαγόρειοι** πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως. κοινοῦ γὰρ ἁπάντων ὄντος μέτρου τῆς μονάδος καὶ **ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν**. αἴτιον δ τὸ πάντα μ ν καὶ ὁποιονοῦν ἀριθμὸν καθ' ὁποιασοῦν τομὰς διαιρούμενον μόριόν τι καταλιμπάνειν ἐλάχιστον καὶ τομῆς ἀνεπίδεκτον, **πᾶν δ μέγεθος ἐπ' ἄπειρον διαιρούμενον μὴ καταλιμπάνειν μόριον, ὃ διὰ τὸ ε ναι ἐλάχιστον τομὴν οὐκ ἐπιδέξεται, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐπ' ἄπειρον τεμνόμενον ποιεῖν ἄπειρα μόρια, ὧν ἕκαστον ἐπ' ἄπειρον τμηθήσεται, καὶ ἁπλῶς τὸ μ ν μέγεθος κατὰ μ ν τὸ μερίζεσθαι μετέχειν τῆς τοῦ ἀπείρου ἀρχῆς**, κατὰ δ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ πέρατος, τὸν δ ἀριθμὸν κατὰ μ ν τὸ μερίζεσθαι τῆς τοῦ πέρατος, κατὰ δ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ ἀπείρου. ἐπεὶ οὖν τὰ μέτρα τῶν μετρουμένων ἐλάττονα ε ναι προσήκει, μετρεῖται δ πᾶς ἀριθμός, ἀνάγκη πάντων ἔλαττόν τι ε ναι τὸ μέτρον. ὥστε καὶ τῶν μεγεθῶν, εἰ πάντα μετρεῖται κοινῷ μέτρῳ, ἀνάγκη ε ναί τι ἐλάχιστον. ἀλλ' ἐπὶ μ ν τῶν ἀριθμῶν ἔστιν· πεπέρασται γάρ, ὡς προείρηται· **ἐπὶ δ τῶν μεγεθῶν οὐκέτι. οὐκ ἄρα κοινὸν πάντων τι μεγεθῶν μέτρον.***

Scholia In Euclidem: Scholia in Euclidis elementa, 10,1,21-10,1,41

Πρώτοι οι Πυθαγόρειοι βρήκαν την αρχή της συμμετρίας από την κατανόηση των αριθμών. Γιατί όλοι οι αριθμοί έχουν κοινό μέτρο την μονάδα, αλλά για τα μεγέθη δεν είναι δυνατόν να βρεθεί κοινό μέτρο. Η αιτία είναι ότι οποιοσδήποτε αριθμός, όσες φορές και αν διαιρεθεί αφήνει στο τέλος ένα ελάχιστο μέρος που δεν μπορεί να διαιρεθεί άλλο.Δεν ισχύει το ίδιο για τα μεγέθη.Κάθε μέγεθος όταν διαιρείται επ' άπειρον δεν αφήνει κάποιο ελάχιστο μέρος το οποίο δεν επιδέχεται διαίρεση, αλλά και αυτό το μόριο διαιρείται επ' άπειρον, και απλά το μέγεθος όταν διαιρείται μετέχει στην αρχή του Απείρου, ενώ ως σύνολο μετέχει στην αρχή του Πέρατος.

Ο αριθμός όταν διαιρείται μετέχει στην αρχή του Πέρατος, ενώ ως ολότητα στην αρχή του Απείρου. Επειδή λοιπόν τα μέτρα πρέπει να είναι μικρότερα από αυτά που μετρούνται, κάθε αριθμός μετρείται. Είναι αναγκαίο το μέτρο να είναι κάτι μικρότερο. Και στα μεγέθη, αν όλα μετρούνται με κοινό μέτρο, είναι αναγκαίο αυτό το μέτρο να είναι κάτι μικρότερο. Αλλά στους αριθμούς υπάρχει κάτι ελάχιστο, γιατί οι αριθμοί έχουν πέρας, όπως είπαμε προηγουμένως. Επειδή στα μεγέθη δεν υπάρχει κάτι ελάχιστο, άρα δεν υπάρχει κοινό μέτρο όλων των μεγεθών.

………………………………………………………………………………………

Εργασία σε ομάδες που δημιούργησαν οι μαθητές. Κάθε ομάδα επέλεξε ένα θέμα για διερεύνηση, από αρκετά προτεινόμενα. Οι εργασίες «ενισχύθηκαν» στην κατεύθυνση που οδήγησαν οι μαθητές. Ο καθηγητής συνερευνητής. Προβλήματα ομαδοσυνεργατικής τα συνήθη (Κυνηγός, 2006). Γνώση είναι η αντιπαράθεση με το άγνωστο. **Ευχαριστώ τους μαθητές για την διάνοιξη του δρόμου. Ευχαριστώ επίσης τον συνάδελφο Κώστα Σταματόπουλο για την βοήθειά του στην λύση των «ηλεκτρονικών προβλημάτων».**

<u>Βιβλιογραφία Εισαγωγής</u>

1. Βαρόπουλος, Θ. (1949). *Γενικά Μαθηματικά*. Αθήνα: Εστία.
2. Βαλερύ, Π. (1996). *Στοχασμοί*, μτφρ.Χαρά Καραγκούνη. Στιγμή.
3. Burton, D. (1997). Elementary number theory. McGraw-Hill.
4. Collins internet-linked dictionary of Mathematics, Glasgow.
5. Heath T., L. (1908). T*he thirteen books of euclid's elements.*Cambridge.
6. Fowler, D. (2003). *The Mathematics of Plato's Academy*. A New Reconstruction. Oxford University Press.

7. Καζαντζίδης, Γ.(1972). *Βασική Γραμμική Άλγεβρα*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
8. Knuth, D. (2010). *Η τέχνη του προγραμματισμού. Τόμος Γ΄. Ταξινόμηση και Αναζήτηση*, μτφρ. Σταύρος Σουραβλάς. Θεσσαλονίκη: Τζιόλας
9. Κυνηγός Χ. (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών, Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Ελληνικά Γράμματα.
10. Morrow G. R. (1970). *PROCLUS: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton: Princeton University Press.
11. Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2009). Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες (άρθρο, ανακτήθηκε στις 21/03/2009 από: www.mathsforyou.gr/arthra/Negrepontis.doc*)*.
12. Ντριάνκος, Σ.(2014).*Συντεταγμένες*. Ρέθυμνο: Γραφοτεχνική.
13. Ντριάνκος, Σ.(2015). *Αριθμός, αυτός ο άγνωστος*. Γραφοτεχνική.
14. Παντελίδης, Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα ΑΝΑΛΥΣΗ της Γ΄Λυκείου.* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
15. Rozenblum, G., Kurlyandchik, L. Απειρη κάθοδος, Άρθρο στο Quantum, εκδ. Κάτοπτρο, Σεπτ.-Οκτ.1996, τόμος 3, τεύχος 5.
16. TLG (Thesaurus Linguae Graecae-Θησαυρός Ελληνικής Γλώσσας). [Artistoteles: Topica, Philolaus: Fragmenta, 6,1-6,31, Plato:Timaeus, Proclus: In primum Euclidis elementorum libris commentarii, Scholia In Euclidem: Scholia in Euclidis elementa, 10,1,21-10,1,41].
17. Waerden B., (2003). *Η αφυπνιση της επιστημης.* Ηράκλειο: Π.Ε.Κ.

Ρέθυμνο, Απρίλιος 2016

1.Αρρητότητα λογοτεχνική: Β. Μαρία

Λογοτεχνική προσέγγιση για την αρρητότητα μέσα από το έργο Θέρος –ἔρος του Αλέξανδρου Παπαδιαμάντη

Ο Αλέξανδρος Παπαδιαμάντης γεννήθηκε το 1851 στην Σκιάθο.Ήταν γιος φτωχού ιερέα.Στη Σκιάθο έμαθε τα πρώτα του γράμματα,έπειτα φοίτησε,με διακοπές,σε γυμνάσια της Χαλκίδας,του Πειραιά και της Αθήνας.Τελείωσε την Μέση Εκπαίδευση το 1874,σε ηλικία 23 ετών,και την ίδια χρονιά γράφτηκε στη Φιλοσοφική Σχολή του Πανεπιστημίου.

Παράλληλα μελετούσε μόνος του ξένες γλώσσες. Οι οικονομικές του δυσκολίες τον ανάγκασαν να διακόψει τις σπουδές του.Εργάστηκε κυρίως ως μεταφραστής (από τα αγγλικά και γαλλικά) σεεφημερίδες.Έζησε με πολλές στερήσεις και πέθανε στη Σκιάθο.

Ήταν άνθρωπος βαθύτατα θρησκευόμενος,ταπεινός και μοναχικός.Θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους Νεοέλληνες πεζογράφους και ο κυριότερος εκπρόσωπος του ηθογραφικού διηγήματος.

Το γνήσιο αφηγηματικό υλικό του Παπαδιαμάντη,η αίσθηση της φύσης,η χριστιανική ευλάβεια κι ένα αίσθημα νοσταλγίας που διατρέχει την αφήγησή του, συνθέτουν ένα κλίμα ιδιότυπης γοητείας,που είναι από τα κύρια χαρακτηριστικά της πεζογραφίας του.Γλώσσα του είναι η καθαρεύουσα με στοιχεία από εκκλησιαστικά βιβλία και με λέξεις της δημοτικής.Δεν μπόρεσε να εκδώσει κάποιο βιβλίοόσο ζούσε.

Είναι ένας από τους σημαντικότερους Έλληνες λογοτέχνες γνωστός και ως «ο άγιος των ελληνικών γραμμάτων».

Ο Καβάφης γράφει γι' αυτόν: «η κορυφή των κορυφών».

Ο ίδιος σε ένα σύντομο αυτοβιογραφικό σημείωμα ιστορεί τη ζωή του:

Ἐγεννήθην ἐν Σκιάθῳ, τῇ 4 Μαρτίου 1851. Ἐβγήκα ἀπὸ τὸ Ἑλληνικὸν Σχολεῖον εἰς τὰ 1863, ἀλλὰ μόνον τῷ 1867 ἐστάλην εἰς τὸ Γυμνάσιον Χαλκίδος, ὅπου ἤκουσα τὴν Α΄ καὶ Β΄ τάξιν. Τὴν Γ΄ ἐμαθήτευσα εἰς Πειραιᾶ, εἶτα διέκοψα τὰς σπουδάς μου καὶ ἔμεινα εἰς τὴν πατρίδα. Κατὰ Ἰούλιον τοῦ 1872 ὑπῆγα εἰς τὸ Ἅγιον Ὄρος χάριν προσκυνήσεως, ὅπου ἔμεινα ὀλίγους μῆνας. Τῷ 1873 ἦλθα εἰς Ἀθήνας καί ἐφοίτησα εἰς τὴν Δ΄ τοῦ Βαρβακείου. Τῷ 1874 ἐνεγράφην εἰς τὴν Φιλοσοφικὴν Σχολήν, ὅπου ἤκουα κατ' ἐκλογὴν ὀλίγα μαθήματα φιλολογικά, κατ' ἰδίαν δὲ ἠσχολούμην εἰς τὰς ξένας γλώσσας. Μικρὸς ἐζωγράφιζα Ἁγίους, εἶτα ἔγραφα στίχους, καί ἐδοκίμαζα να συντάξω κωμῳδίας. Τῷ 1868 ἐπεχείρησα νὰ γράψω μυθιστόρημα. Τῷ 1879 ἐδημοσιεύθη Ἡ Μετανάστις, ἔργον μου εἰς τὸ περιοδικὸν Σωτήρα. Τῷ 1882 ἐδημοσιεύθη Οἱ ἔμποροι τῶν Ἐθνῶν εἰς τὸ Μὴ χάνεσαι. Ἀργότερα ἔγραψα περὶ τὰ ἑκατὸν διηγήματα, δημοσιευθέντα εἰς διάφορα περιοδικὰ καί ἐφημερίδας.

Τα διηγήματα του είναι περιγραφικά, φυσιολατρικά, με έντονο χρωματισμό στα εκφραστικά μέσα, με ειδυλλιακή ατμόσφαιρα, υποταγμένα σε κανόνες και σχέδιο.

Ένα από αυτά είναι και το Θέρος-έρος που γράφτηκε το 1891.

Οι πληροφορίες για την ζωή του Παπαδιαμάντη αντλήθηκαν από το βιβλίο της Νεοελληνικής Γλώσσας της Β΄ Λυκείου σε συνδυασμό με το διαδίκτυο.

Κύρια πηγή άντλησης πληροφοριών για το περιεχόμενο του έργου Θέρος – ἔρος ήταν το ίδιο το βιβλίο του Α. Παπαδιαμάντη. Μέσα από την ανάγνωσή του επιχειρήθηκε η ερμηνεία και στη συνέχεια ο σχολιασμός της "αρρητότητας", που εκφράζεται από τον συγγραφέα στο «Θέρος – ἔρος»

Θέρος-Ἔρος …Εἰδύλλιον της Πρωτομαγιᾶς(1891)

Το έργο αυτό έχει ως κύρια ιδέα τον έρωτα ενός άνδρα, του Κωστή προς την Ματή, κόρη του καπετάν Λιμπέρτη. Η Ματή, μια νεαρή και ευαίσθητη καλλονή οδηγήθηκε στην εξοχή «την ημέρα της Ανθούς» συνοδευόμενη από την γραία Φωτεινή, η οποία ήταν βοηθός της οικογένειας της νεαρής κοπέλας, και από μισή ντουζίνα ζωηρά μικρά παιδιά. Στον δρόμο τους συνάντησαν έναν 24χρονο ψηλό άνδρα, τον Κωστή, ο οποίος σε αντίθεση με όλους, αντί να πηγαίνει στην εξοχή, φαινόταν να γυρίζει από εκεί. Αφού χαιρέτησε τις δύο γυναίκες δείχνοντας ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς την νεαρή κοπέλα, απομακρύνθηκε. Οι δυο γυναίκες συνέχισαν το δρόμο τους με πολλές παύσεις λόγω της επιθυμίας των παιδιών για παιχνίδι.

Μόλις έφτασαν στον προορισμό τους, δηλαδή στο μεγάλο κτήμα της οικογένειας της Ματής, τα παιδιά διασκορπίστηκαν προς όλες τις κατευθύνσεις για να κόψουν λουλούδια και καρπούς, ενώ η ίδια η Ματή κατευθύνθηκε προς το εξοχικό της καλύβι. Πριν φτάσει όμως, ο Σταθάκης, ένα από τα αγόρια που πήγε να κόψει καρπούς βρήκε ένα γράμμα ανάμεσα στα φυτά και αμέσως έτρεξε να το δώσει στην αδελφή του.

Η Ματή μόλις το έλαβε απαγόρευσε στο μικρό της αδελφό να πει το παραμικρό στην γραία Φωτεινή. Όπως αποδείχτηκε το γράμμα ήταν ένα ερωτικό σημείωμα από τον νεαρό που είχαν συναντήσει προηγουμένως. Ο νεαρός Κωστής αποκάλυπτε στην Ματούλα τα συναισθήματά του γι' αυτήν, δηλαδή ότι την αγαπά, χωρίς ταυτόχρονα να ελπίζει πως θα την απολαύσει ποτέ του και της αφιερώνει ένα ποίημα στο οποίο κάνει λόγο για τα παραπάνω. Ο λόγος που τον οδήγησε να της γράψει αυτό το γράμμα, είναι, επειδή μια μάγισσα του είπε την προηγούμενη ημέρα, πως η Ματή διατρέχει θανάσιμο κίνδυνο και αποφάσισε να την παρακολουθεί.

Την στιγμή εκείνη μπήκε η γραία Φωτεινή στο καλύβι και ειδοποίησε την νεαρή κοπέλα πως πριν λίγο αντίκρισε από το παράθυρο το πρόσωπο του νεαρού άνδρα που συνάντησαν το πρωί στο δρόμο τους. Η κοπέλα αν και παραξενεύτηκε με την είδηση δεν έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον μπροστά στη γραία μόνο και μόνο για να μην προδοθεί και η ίδια για τα συναισθήματά της. Μόλις όμως η γριά βγήκε από το καλύβι για να πάει με τα παιδιά στην κορυφή του λόφου, η ίδια πήγε στο παράθυρο για να σιγουρευτεί αλλά δεν αντίκρισε κανέναν.

Κάποια στιγμή άκουσε έναν θόρυβο και όταν γύρισε να δει, διέκρινε μια μορφή δίπλα στην πόρτα της καλύβας. Δεν ήταν ούτε η γριά, ούτε κανένα από τα παιδιά, ούτε καν ο Κωστής.

Η μορφή ανήκε σε έναν ξένο, άγριο και άσχημο άνδρα, που έκανε την Ματούλα να κραυγάσει.

Ο άνδρας αυτός επιτέθηκε στην νεαρή κοπέλα και προσπάθησε να την αγγίξει παρά την αντίστασή της. Η νεαρή πρόλαβε μόνο να βγάλει μια δεύτερη κραυγή.

Ο άνθρωπος αυτός έκανε νόημα στην κοπέλα να σωπάσει, ενώ εκείνη τον ρώτησε τι θέλει και για ποιο λόγο ήρθε σ' αυτήν. Ο αλλόκοτος αυτός άνδρας το μόνο που ήθελε από την κοπέλα ήταν να τον ακολουθήσει και να πάει μαζί του στο καλύβι του. Τότε η Ματούλα θυμήθηκε πως άκουσε πολλές φορές την Φωτεινή να διηγείται για έναν λυκάνθρωπο, τον λεγόμενο Αγρίμη, που έμενε πίσω από τον λόφο της Δραγασιάς. Έμενε μόνος, κατέβαινε σπάνια στην πόλη και οι άνθρωποι δεν τον έβλεπαν συχνά.Ήταν σχεδόν βουβός και οι γυναίκες τον φοβούνταν επειδή είχε επιχειρήσει πολλές φορές να τις πειράξει. Υποπτεύθηκε τότε πως δεν άντεξε την μοναξιά του και τον λυπήθηκε, γιατί κατάλαβε πως αυτή ήταν η αιτία της επίθεσής του. Ο Αγρίμης επανέλαβε στην νεαρή κοπέλα να τον ακολουθήσει στο καλύβι του, ενώ εκείνη αρνούμενη την πρότασή του, δέχτηκε και πάλι την βίαιη επίθεσή του. Η Ματή άρχισε να αντιστέκεται και να φωνάζει, όμως οι φωνές της άργησαν να φτάσουν στο σημείο όπου βρίσκονταν τα παιδιά και η γριά, λόγω της απόστασης.

Μόλις εκείνοι αντιλήφθηκαν πως η Ματή ζητούσε την βοήθειά τους έτρεξαν απευθείας προς το καλύβι. Όταν έφτασαν αντίκρισαν την Ματή αναίσθητη να κείτεται στο έδαφος και τον Κωστή να στέκεται από πάνω της κρατώντας ένα σίδερο. Η γριά Ματή αρχικά νόμισε πως υπεύθυνος για το κακό ήταν ο Κωστής, αλλά μόλις είδε τον αναίσθητο Αγρίμη πεσμένο στο έδαφος με ματωμένο το κεφάλι κατάλαβε τι είχε προηγηθεί. Αμέσως όλοι ασχολήθηκαν με την περίθαλψη της Ματής, η οποία μόλις συνήλθε κοίταξε με ευγνωμοσύνη τον Κωστή. Στο μεταξύ ο Αγρίμης πρόλαβε να ξυπνήσει κι αυτός και απευθείας βγήκε από το καλύβι, φοβερίζοντας τον Κωστή πως θα πληρώσει γι' αυτό που έκανε.

Άρρητα ρήματα

Μετά από τρεις μήνες πραγματοποιήθηκε ο γάμος της πανέμορφης Ματής με τον γενναίο Κωστή.

Στο κείμενο αυτό γίνεται λόγος για την αρρητότητα και πιο συγκεκριμένα :

Ἔβλεπεν ἐκεῖ κάτω εἰς τὸν ὁρίζοντα, ὑπὸ τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἡλίου διαγραφόμενον τὸ ραδινὸν ἀνάστημα καὶ τὴν λευκὴν ἐσθῆτα τῆς Ματούλας, **καὶ ἠσθάνετο ἡδονὴν ἄρρητον**, ὡς νὰ ἔβλεπέ τι ἐγγύθεν.

Η λέξη «**άρρητος**» έχει δυο σημασίες :

1. αυτός που δεν μπορεί να λεχθεί ή να ειπωθεί, που δεν είναι δυνατόν να τον εκφράσει ή να τον περιγράψει κανείς
2. (*μαθηματικά*) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών που δεν μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους και παρονομαστή διάφορο του μηδενός.

Στο απόσπασμα αυτό ο συγγραφέας χρησιμοποιεί αυτόν τον όρο με την πρώτη σημασία που δόθηκε παραπάνω. Με αυτόν τον τρόπο επιχειρεί να δώσει στον αναγνώστη να καταλάβει, πως η τέρψη που αισθάνεται ο Κωστής την ώρα που αντικρίζει την αγαπημένη του Ματή, είναι αδύνατον να εκφραστεί. Αυτή η ευχαρίστηση που λαμβάνει ο νεαρός και μόνο από την εικόνα της δεν γίνεται να περιγραφεί, είναι άρρητη.

Πηγές

- *Παπαδιαμάντης Αλέξανδρος, Να είχεν ο έρωτας σαΐτες, Επιμέλεια Κώστας Ακρίβος, Εκδόσεις Μεταίχμιο, Οκτώβριος 2010*
- *Βικιπαιδεια, η ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια.*
- *Νεοελληνική Γλώσσα της Β΄ Λυκείου.*

2.Αρρητότητα θεολογική

2.1.Κείμενο από την ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ

Απόστολος Παύλος, Προς Κορινθίους Β, 12, 1-5

Καυχᾶσθαι δη· οὐ συμφέρει μοι, ἐλεύσομαι γαρ
εἰς ὀπτασίας καὶ ἀποκαλύψεις κυρίου.
οιδα ἄνθρωπον
ἐν Χριστῷ πρὸ ἐτῶν δεκατεσσάρων–εἴτε ἐν σώματι
οὐκ οιδα, εἴτε ἐκτὸς τοῦ σώματος οὐκ οιδα, ὁ θεὸς
οιδεν–ἁρπαγέντα τὸν τοιοῦτον ἕως τρίτου οὐρανοῦ.
καὶ οιδα τὸν τοιοῦτον ἄνθρωπον–εἴτε ἐν σώματι
εἴτε χωρὶς τοῦ σώματος οὐκ οιδα, ὁ θεὸς ο δεν–
ὅτι ἡρπάγη εἰς τὸν παράδεισον καὶ **ἤκουσεν ἄρρητα
ῥήματα ἃ οὐκ ἐξὸν ἀνθρώπῳ λαλῆσαι.**
ὑπερ τοῦ τοιούτου καυχήσομαι, ὑπερ δε ἐμαυτοῦ οὐ
καυχήσομαι εἰ μὴ ἐν ταῖς ἀσθενείαις μου…
…………………………………………………

2.2.Η πρόταση της μαθήτριας του Γ1 Μαρίας Β

Δε με συμφέρει βέβαια να καυχηθώ˙ θα το κάνω όμως, γιατί πρόκειται για οράματα κι αποκαλύψεις που μου χάρισε ο Κύριος. Ξέρω έναν άνθρωπο πιστό, ο οποίος πριν από δεκατέσσερα χρόνια ανυψώθηκε μέχρι τον τρίτο ουρανό-δεν ξέρω αν ήταν με το σώμα του ή χωρίς το σώμα, ο Θεός το ξέρει. Ξέρω ότι αυτός ο άνθρωπος-ή ήταν με το σώμα ή χωρίς το σώμα δεν το ξέρω, ο Θεός το ξέρει-μεταφέρθηκε ξαφνικά στον παράδεισο κι άκουσε λόγια που δεν μπορεί ούτε επιτρέπεται να τα πει άνθρωπος. Γι αυτόν τον άνθρωπο θα καυχηθώ˙ για τον εαυτό μου όμως δε θα καυχηθώ, παρά μόνο για τις ταλαιπωρίες μου.

<u>Πηγή</u>

Η ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ, ΙΕΡΑ ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΣ ΡΕΘΥΜΝΗΣ ΚΑΙ ΑΥΛΟΠΟΤΑΜΟΥ, 2014, σελ.422 (εκτυπ. Ελληνική Βιβλική Εταιρία).

3.Αρρητότητα Σοφοκλή

3.1.Κείμενο από τον «Θησαυρό Ελληνικής Γλώσσας»

TLG -Thesaurus Linguae Graecae- Βάση δεδομένων Musaios.

ΟΙΔΙΠΟΥΣ ΤΥΡΑΝΝΟΣ

ΟΙΔΙΠΟΥΣ
῏Ω τέκνα, Κάδμου τοῦ πάλαι νέα τροφή,
τίνας ποθ᾽ ἕδρας τάσδε μοι θοάζετε
ἱκτηρίοις κλάδοισιν ἐξεστεμμένοι;

Πόλις δ᾽ ὁμοῦ μ ν θυμιαμάτων γέμει,
ὁμοῦ δ παιάνων τε καὶ στεναγμάτων·
ἁγὼ δικαιῶν μὴ παρ᾽ ἀγγέλων, τέκνα,
ἄλλων ἀκούειν αὐτὸς ὧδ᾽ ἐλήλυθα,
ὁ πᾶσι κλεινὸς Οἰδίπους καλούμενος.

᾽Αλλ᾽, ὦ γεραιέ, φράζ᾽, ἐπεὶ πρέπων ἔφυς
πρὸ τῶνδε φωνεῖν· τίνι τρόπῳ καθέστατε,
δείσαντες ἢ στέρξαντες; ὡς θέλοντος ἂν
ἐμοῦ προσαρκεῖν πᾶν· δυσάλγητος γὰρ ἂν
εἴην τοιάνδε μὴ οὐ κατοικτίρων ἕδραν.

ΙΕΡΕΥΣ
᾽Αλλ᾽, ὦ κρατύνων Οἰδίπους χώρας ἐμῆς,
ὁρᾷς μ ν ἡμᾶς ἡλίκοι προσήμεθα
βωμοῖσι τοῖς σοῖς, οἱ μ ν οὐδέπω μακρὰν
πτέσθαι σθένοντες, οἱ δ σὺν γήρᾳ βαρεῖς,
ἱερεύς, ἐγὼ μ ν Ζηνός, οἵδε τ᾽ ᾐθέων
λεκτοί· τὸ δ᾽ ἄλλο φῦλον ἐξεστεμμένον

[1-19]

....

…………[283-309]

ΟΙ. Εἰ καὶ τρίτ᾽ ἔστι, μὴ παρῇς τὸ μὴ οὐ φράσαι.
ΧΟ. Ἄνακτ᾽ ἄνακτι ταὔθ᾽ ὁρῶντ᾽ ἐπίσταμαι
μάλιστα Φοίβῳ Τειρεσίαν, παρ᾽ οὗ τις ἂν
σκοπῶν τάδ', ὦναξ, ἐκμάθοι σαφέστατα.

ΟΙ. Ἀλλ᾽ οὐκ ἐν ἀργοῖς οὐδ τοῦτ᾽ ἐπραξάμην·
ἔπεμψα γὰρ Κρέοντος εἰπόντος διπλοῦς
πομπούς· πάλαι δ μὴ παρὼν θαυμάζεται.

ΧΟ. Καὶ μὴν τά γ᾽ ἄλλα κωφὰ καὶ παλαί᾽ ἔπη.

ΟΙ. Τὰ ποῖα ταῦτα; πάντα γὰρ σκοπῶ λόγον.
ΧΟ. Θανεῖν ἐλέχθη πρός τινων ὁδοιπόρων.

ΟΙ. Ἤκουσα κἀγώ· τὸν δ᾽ ἰδόντ᾽ οὐδεὶς ὁρᾷ.

ΧΟ. Ἀλλ᾽ εἴ τι μ ν δὴ δείματός γ᾽ ἔχει μέρος,
τὰς σὰς ἀκούων οὐ μενεῖ τοιάσδ᾽ ἀράς.

ΟΙ. Ὧι μή 'στι δρῶντι τάρβος, οὐδ᾽ ἔπος φοβεῖ.

ΧΟ. Ἀλλ᾽ οὑξελέγξων αὐτὸν ἔστιν· οἵδε γὰρ
τὸν θεῖον ἤδη μάντιν ὧδ᾽ ἄγουσιν, ᾧ
τἀληθ ς ἐμπέφυκεν ἀνθρώπων μόνῳ.

ΟΙ. **Ὦ πάντα νωμῶν Τειρεσία, διδακτά τε**
ἄρρητά τ᾽ οὐράνιά τε καὶ χθονοστιβῆ,
πόλιν μέν, εἰ καὶ μὴ βλέπεις, φρονεῖς δ᾽ ὅμως
οἵᾳ νόσῳ σύνεστιν· ἧς σ προστάτην
σωτῆρά τ', ὦναξ, μοῦνον ἐξευρίσκομεν.
Φοῖβος γάρ, εἴ τι μὴ κλύεις τῶν ἀγγέλων,
πέμψασιν ἡμῖν ἀντέπεμψεν, ἔκλυσιν
μόνην ἂν ἐλθεῖν τοῦδε τοῦ νοσήματος,
εἰ τοὺς κτανόντας Λά□ον μαθόντες εὖ
κτείναιμεν ἢ γῆς φυγάδας ἐκπεμψαίμεθα.

………………..

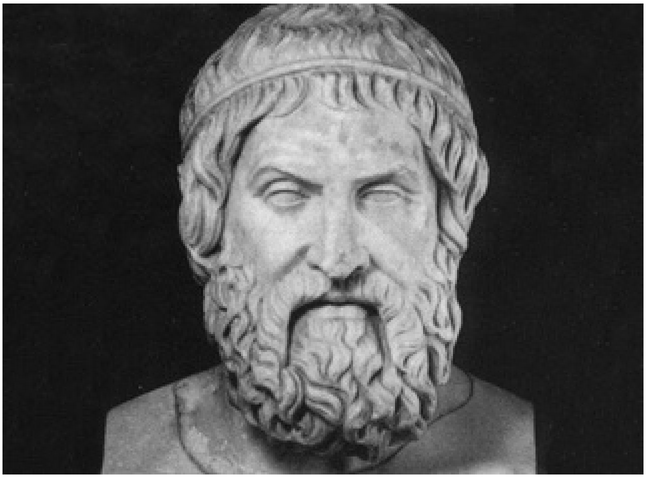
3.2.Η πρόταση της ομάδας Γ.-Κ.-Τ.

Αρρητότητα Σοφοκλή στο έργο του «Οιδίπους Τύραννος»

Βαγγέλης Γ., Λευτέρης Κ., Διογένης Τ.

Τρόπος άντλησης πληροφοριών:

Έγινε μελέτη των αποσπασμάτων του αρχαίου κειμένου(στίχοι1-18 και 283-308) στο εργαστήριο της πληροφορικής. Στη συνέχεια, μέσω διαδικτύου, συζητήσαμε και αναλύσαμε τη φράση που ζητήθηκε [στίχοι 300-301(ὦ πάντα νωμῶν Τειρεσία, διδακτά τε ἄρρητά τ᾽, οὐράνιά τε καὶ χθονοστιβῆ)]. Για την ανάλυση χρησιμοποιήσαμε τη μετάφραση του κειμένου καθώς και διάφορες ερμηνευτικές προσεγγίσεις , που αντλήσαμε από το διαδίκτυο.



Σοφοκλής (496 π.Χ.- 406 π.Χ)

Μετάφραση αποσπασμάτων

ΟΙΔΙΠΟΥΣ

Παιδιά μου, βλαστοί
της παλαιάς σποράς του Κάδμου,
γιατί στων ανακτόρων το βωμό
τριγύρω συναχτήκατε
με κλάδους ικεσίας στα χέρια......................................
και στέφανα στην κεφαλή;
Η πόλη μας πλημμύρισε θυμίαμα
κι ακούγονται παντού θρήνοι και μοιρολόγια.
Δεν καταδέχομαι να με πληροφορούν μεσάζοντες
γι' αυτό κι ήρθα μονάχος μου ν' ακούσω,....................
εγώ ο λαοπρόβλητος κι ονομαστός Οιδίπους.
Μίλησε, γέροντα.
Το κύρος σου εκπροσωπεί το σύνολο.
Ο λόγος ποιος της σύναξης;
Φοβάστε κάτι; Ποθείτε κάτι;...................................
Επιθυμώ παντού και πάντα
να σπεύδω στην ανάγκη σας.
Ανάλγητος δεν είμαι
γι' αυτό και μου ταράζει την ψυχή
η λιτανεία της ικεσίας..

ΙΕΡΕΥΣ

Ω παντοκράτορα της χώρας μου Οιδίπου,
θωρείς τριγύρω στους βωμούς σου
τις ηλικίες όλες πεσμένες στα γόνατα·
νεοσσοί που δεν μπορούν
ν' ανοίξουν τα φτερά τους......................................
και να πετάξουν μακριά,
βαρείς από τα χρόνια γέροντες,
ιερείς, όπως εγώ, λειτουργοί του Διός
και παλικάρια διαλεχτά.

ΟΙΔ. Και τρίτη αν έχεις λέγε,………………………………
μη διστάζεις.
ΧΟΡ. Ξέρω καλά πως όσα βλέπει ο μέγας Φοίβος
τα ίδια βλέπει κι ο μέγας Τειρεσίας.
Αν κάποιος τον εξέταζε
μπορούσε να φωτίσει, βασιλιά μου, την υπόθεση……
ΟΙΔ. Χωρίς χρονοτριβή το φρόντισα κι αυτό.
Ιδέα του Κρέοντος κι έστειλα δυο
για να τον συνοδεύσουν.
Αργοπορεί και με προβληματίζει.
ΧΟΡ. Όσο για τις παλιές και κούφιες φήμες………………..
ΟΙΔ. Για τι μιλάς;
Τα πάντα ξεψαχνίζω.
ΧΟΡ. Είπαν πως τον σκότωσαν οδοιπόροι.
ΟΙΔ. Πήρε το αυτί μου κάτι. Όμως κανείς
δε μολογάει τον αυτόπτη…………………………….
ΧΟΡ. Αν τον κρατάει ο φόβος,
θ' ακούσει τις κατάρες σου
και θα πειστεί.
ΟΙΔ. Όποιος δεν τρόμαξε την πράξη,
πώς θες να φοβηθεί τα λόγια………………………
ΧΟΡ. Ελπίδες αποκάλυψης υπάρχουν.
Ιδού τον ένθεο τον μάντη
τον οδηγούν εδώ.
Είναι θνητός μοναδικός·
του δόθηκεν η χάρη της αλήθειας…………………..
ΟΙΔ. **Ω παντεπόπτη Τειρεσία**
που τα ρητά διαβάζεις και τ' απόρρητα,
τα μυστικά της γης και τ' ουρανού,
τη νόσο που την πόλη δυναστεύει.
Ο μόνος είσαι πια προστάτης και σωτήρας μας……
Ο Φοίβος, αν δεν άκουσες απ' τους απεσταλμένους,
στις ερωτήσεις που του θέσαμε μας μήνυσε,
πως από τη νόσο ο μόνος τρόπος να γλυτώσουμε
είναι να βρούμε του Λαΐου τους φονιάδες
και να τους θανατώσουμε………………………….
ή να τους στείλουμε εξορία.

Μην αρνηθείς να μας μιλήσεις
είτε των οιωνών τη γλώσσα διάβασες
είτε μιας άλλης μαντικής
τα μονοπάτια πήρες……………………………….
Σώσε τον εαυτό σου, σώσε την πόλη,
σώσε και μένα·
σώσε μας από το μίασμα του σκοτωμένου.
Σ' εσένα τις ελπίδες αποθέτουμε.
Αν κάποιος έχει έλεος και το προσφέρει,…………
με τη χαρά της προσφοράς αγάλλεται.

Τα συγκεκριμένα αποσπάσματα αναφέρονται στο λοιμό που ξέσπασε στην πόλη όπου βασίλευε ο Οιδίποδας, τη Θήβα, ο οποίος αποδόθηκε στο Θεό Απόλλωνα. Ο Οιδίποδας πληροφορείται για το γεγονός από τον ιερέα, αφού αντιλήφθηκε ότι ο λαός του κάνει ικεσία στους Θεούς. Στο δεύτερο απόσπασμα ο Οιδίποδας ζητά τη βοήθεια του μάντη Τειρεσία για την αιτία αυτού του θεόσταλτου κακού. Ο Οιδίποδας, ζητώντας τη βοήθεια του Τειρεσία, απευθύνεται σ’ αυτόν λέγοντας :«Τειρεσία , εσύ που όλα τα γνωρίζεις και όσα μπορούν να διδαχτούν και τα αφανέρωτα και τα ουράνια και τα επίγεια ξέρεις…»

Σύμφωνα με την προσφώνηση του Οιδίποδα, ο Τειρεσίας έχοντας τη Θεία Χάρη ως μάντης, είναι κάτοχος της αλήθειας και της γνώσης, άρα και γι’ αυτό το λόγο σεβαστός απ’ όλους. Μπορεί να είναι τυφλός (επομένως δεν λειτουργεί η σωματική όραση), όμως «βλέπει» τα πάντα, γιατί έχει την πνευματική όραση – γνώση…. **Τι είναι αυτό που γνωρίζει;**

Από τη μια μεριά εκείνα που αφορούν τον κόσμο των ανθρώπων είναι όσα έχουν φανερωθεί στους ανθρώπους , είναι η γνώση και η αλήθεια που μπορεί να διδαχθεί, αλλά ίσως είναι και όση αλήθεια μπορεί να αντιληφθεί ο άνθρωπος μέσα στα «πεπερασμένα» όρια των αισθήσεών του.

Από την άλλη, υπάρχει ένας ολόκληρος κόσμος έξω από τα ανθρώπινα. Ο «άρρητος» που δεν έχει φανερωθεί στον άνθρωπο, ο κόσμος που σχετίζεται με τη Θεϊκή βούληση και με δυνάμεις έξω από τα ανθρώπινα όρια, όπως η Μοίρα, που καθόρισε το πεπρωμένο του Οιδίποδα**.**

Η αρρητότητα αυτή σχετίζεται με την περιορισμένη δυνατότητα του ανθρώπινου νου. Επομένως έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει πράγματα που οι κοινοί θνητοί δεν μπορούν να συλλάβουν με το μυαλό τους. Είναι, όμως, ταυτόχρονα η αληθινή γνώση, που γίνεται αντιληπτή από τους λίγους που έχουν την «ευλογία» να γίνονται αποδέκτες αυτής της αλήθειας του σύμπαντος, μέρος της οποίας μόνο μπορούν να αποκαλύψουν στους άλλους. **Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της είναι ότι δεν μπορεί να εξηγηθεί με λόγια.** Τα λόγια είναι στοιχείο της ανθρώπινης φύσης , η οποία δεν είναι δυνατό να καταλάβει τη θεία φύση.

Ο μάντης Τειρεσίας αποκαλύπτοντας τη Θεϊκή βούληση, προβάλλεται ως μεσολαβητής ανάμεσα στο υπερφυσικό και στο ανθρώπινο, ανάμεσα στην υπερκόσμια και την επίγεια δύναμη, ανάμεσα στην αληθινή γνώση και την παραπλάνηση ή την άγνοια.

Πηγές

Ανάκτηση πληροφοριών από το δίκτυο: Φωτογραφία προτομής του Σοφοκλή (http://www.sansimera.gr/quotes/authors/26)

Βιβλίο Β΄ Γενικού Λυκείου: Σοφοκλέους τραγωδίαι:«Οιδίπους τύραννος» και «Αίας» (http://ebooks.edu.gr/new/ebooks.php?course=DSGL-B123)

Ανάλυση του Οιδίποδα Τυρράνου από τον Ιωάννη Κωνσταντάκο (http://www.academia.edu/1744336/Teaching_Notes_for_Sophocles_Oedipus_Rex_in_Greek_)

3.3.Η πρόταση της μαθήτριας του Γ1 Μαρίας Β

ΟΙ. ῟Ωι μή 'στι δρῶντι τάρβος, οὐδ᾽ ἔπος φοβεῖ.

ΧΟ. ᾿Αλλ᾽ οὑξελέγξων αὐτὸν ἔστιν· οἵδε γὰρ
τὸν θεῖον ἤδη μάντιν ὧδ᾽ ἄγουσιν, ᾧ
τἀληθ ς ἐμπέφυκεν ἀνθρώπων μόνῳ.

ΟΙ. **῟Ω πάντα νωμῶν Τειρεσία, διδακτά τε**
ἄρρητά τ᾽ οὐράνιά τε καὶ χθονοστιβῆ,
πόλιν μέν, εἰ καὶ μὴ βλέπεις, φρονεῖς δ᾽ ὅμως
οἵᾳ νόσῳ σύνεστιν· ἧς σ προστάτην
σωτῆρά τ', ὦναξ, μοῦνον ἐξευρίσκομεν.
Φοῖβος γάρ, εἴ τι μὴ κλύεις τῶν ἀγγέλων,
πέμψασιν ἡμῖν ἀντέπεμψεν, ἔκλυσιν
μόνην ἂν ἐλθεῖν τοῦδε τοῦ νοσήματος,
εἰ τοὺς κτανόντας Λά□ον μαθόντες εὖ
κτείναιμεν ἢ γῆς φυγάδας ἐκπεμψαίμεθα.

ΟΙ. Όποιος δεν φοβήθηκε την πράξη,
πώς να φοβηθεί τα λόγια;

ΧΟ. Υπάρχουν ελπίδες αποκάλυψης
Ιδού τον ένθεο τον μάντη τον οδηγούν εδώ
Είναι θνητός μοναδικός

ΟΙ. Ω! παντεπόπτη Τειρεσία που τα ρητά
διαβάζεις και τα απόρρητα (τα άρρητα),
τα μυστικά του ουρανού και της γης,
τη νόσο που την πόλη δυναστεύει
Είσαι πια ο μόνος προστάτης και σωτήρας μας

4.Αρρητότητα Ομηρική

4.1.Κείμενο από τον «Θησαυρό Ελληνικής Γλώσσας»

TLG -Thesaurus Linguae Graecae- Βάση δεδομένων Musaios.

Homerus Odyssea[book14, line 462-486]

....

εὐξάμενός τι ἔπος ἐρέω· ο νος γὰρ ἀνώγει,
ἠλεός, ὅς τ' ἐφέηκε πολύφρονά περ μάλ' ἀεῖσαι
καί θ' ἁπαλὸν γελάσαι καί τ' ὀρχήσασθαι ἀνῆκε,
καί τι ἔπος προέηκεν, **ὅ πέρ τ' ἄρρητον ἄμεινον**.

ἀλλ' ἐπεὶ οὖν τὸ πρῶτον ἀνέκραγον, οὐκ ἐπικεύσω.
εἴθ' ὣς ἡβώοιμι βίη τέ μοι ἔμπεδος εἴη,
ὡς ὅθ' ὑπὸ Τροίην λόχον ἤγομεν ἀρτύναντες.
ἡγείσθην δ' Ὀδυσεύς τε καὶ Ἀτρε δης Μενέλαος,
τοῖσι δ' ἅμα τρίτος ἦρχον ἐγών· αὐτοὶ γὰρ ἄνωγον.

ἀλλ' ὅτε δή ῥ' ἱκόμεσθα ποτὶ πτόλιν αἰπύ τε τεῖχος,
ἡμεῖς μ ν περὶ ἄστυ κατὰ ῥωπή□α πυκνά,
ἂν δόνακας καὶ ἕλος, ὑπὸ τεύχεσι πεπτηῶτες
κείμεθα, νὺξ δ' ἄρ' ἐπῆλθε κακὴ βορέαο πεσόντος,
πηγυλίς· αὐτὰρ ὕπερθε χιὼν γένετ' ἠΰτε πάχνη,
ψυχρή, καὶ σακέεσσι περιτρέφετο κρύσταλλος.
ἔνθ' ἄλλοι πάντες χλαίνας ἔχον ἠδ χιτῶνας,
εὗδον δ' εὔκηλοι, σάκεσιν εἰλυμένοι ὤμους·
αὐτὰρ ἐγὼ χλαῖναν μ ν ἰὼν ἑτάροισιν ἔλειπον
ἀφραδέως, ἐπεὶ οὐκ ἐφάμην ῥιγωσέμεν ἔμπης,
ἀλλ' ἑπόμην σάκος ο ον ἔχων καὶ ζῶμα φαεινόν.
ἀλλ' ὅτε δὴ τρίχα νυκτὸς ἔην, μετὰ δ' ἄστρα βεβήκει,
καὶ τότ' ἐγὼν Ὀδυσῆα προσηύδων ἐγγὺς ἐόντα
ἀγκῶνι νύξας· ὁ δ' ἄρ' ἐμμαπέως ὑπάκουσε·
'διογεν ς Λαερτιάδη, πολυμήχαν' Ὀδυσσεῦ,
οὔ τοι ἔτι ζωοῖσι μετέσσομαι, ἀλλά με χεῖμα

....

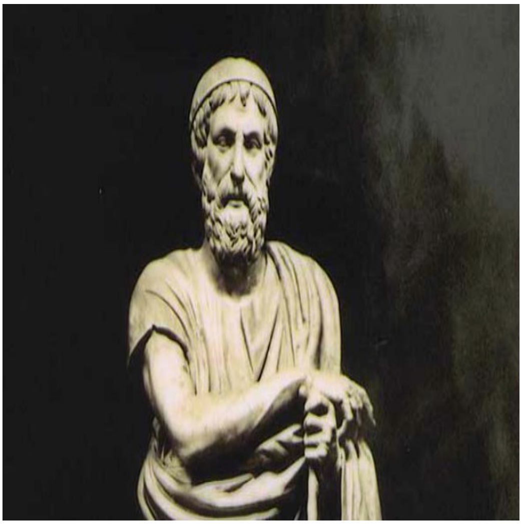
4.2.Η πρόταση της ομάδας Δ.- Ζ.- Ζ.

Αρρητότητα Ομηρική στην « Οδύσσεια»

Μαρία Δ., Μαρίνα Ζ., Δέσποινα Ζ.

Ο **Όμηρος**φέρεται ως ο συγγραφέας των ποιητικών κειμένων της Ιλιάδας και της Οδύσσειας, από τα πρώτα κείμενα της Ιστορικής περιόδου της αρχαίας Ελλάδας, γνωστά ως «Ομηρικά Έπη».

Διαθέτουμε επτά βίους του Ομήρου που προέρχονται από την αρχαιότητα. Η καταγωγή του φαίνεται πως ήταν από την Ιωνία και θρυλείται ότι επτά πόλεις ερίζουν για την καταγωγή του, με επικρατέστερες τη Σμύρνη και τη Χίο. Ως γονείς του αναφέρονται ο Μαίων και η Κριθηίδα και λέγεται ότι το πραγματικό του όνομα ήταν Μελησιγένης, επειδή γεννήθηκε κοντά στον ποταμό Μέλητα της Σμύρνης και ότι πήρε αργότερα το όνομα «Όμηρος», είτε επειδή ήταν τυφλός, είτε επειδή ήταν όμηρος των Κολοφωνίων στον πόλεμο με τη Σμύρνη.



Σύμφωνα με τους βίους του, περιόδευσε απαγγέλλοντας τα έργα του στις ελληνικές πόλεις, απέκτησε μεγάλη φήμη, αλλά σε ένα διαγωνισμό με τον Ησίοδο στη Χαλκίδα δεν πήρε βραβείο, επειδή προτιμήθηκε ο Ησίοδος ως ποιητής που εξυμνούσε την ειρήνη.

Πιθανός τόπος θανάτου του είναι η Ίος.

Η σύγχρονη έρευνα, και ειδικότερα όσοι δέχονται ότι ο Όμηρος μπορεί να θεωρηθεί πραγματικό πρόσωπο, τοποθετεί τη ζωή του στον 8ο αι. π.Χ. και θεωρεί πιθανό ότι ήταν Ίωνας αοιδός, συνεχιστής μιας μακραίωνης παράδοσης προφορικών ηρωικών αφηγήσεων, που συνέθεσε την *Ιλιάδα* γύρω στο 750 π.Χ. και την *Οδύσσεια* (αν όντως συνέθεσε και τα δύο έργα) γύρω στα 710 π.Χ

Ο Όμηρος στο έργο του « Οδύσσεια» και συγκεκριμένα στην ραψωδία «ξ» και στον στίχο 466, αναφέρει τον όρο **ἄρρητον.** Ετυμολογικά αυτή η λέξη έχει δύο σημασίες :

1. (λόγ.) που δε λέγεται, που δεν εκφράζεται, απερίγραπτος

Άρρητες επιθυμίες / επιδιώξεις.

2. (μαθημ.) *άρρητοι αριθμοί,* που δεν είναι ούτε ακέραιοι ούτε κλάσματα, αλλά στη δεκαδική μορφή τους έχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία. Στο στίχο αυτό αποδίδεται η πρώτη σημασία, καθώς η πρόταση στην οποία εμπεριέχεται μεταφράζεται με τον εξής τρόπο: «καὶ νὰ λὲν ὅσα ἤτανε καλὸ νὰ μὴ λεχτοῦνε».

Άρρητα ρήματα

Ειδικότερα η ραψωδία αυτή αναφέρεται στον ερχομό του Οδυσσέα στον Εύμαιο που τον φιλοξενεί εγκάρδια και θρηνεί για τον αφέντη του που χάθηκε πια και για τις προσβολές του οίκου του από τους μνηστήρες. Ο ζητιάνος-Οδυσσέας του λέει πως είναι Κρητικός και διηγείται φανταστικές του περιπέτειες καταλήγοντας ότι ο Οδυσσέας έρχεται πίσω του. Ο Εύμαιος δεν πείθεται αλλά ο Οδυσσέας βεβαιώνεται για την αφοσίωσή του.

Πηγές

- http://www.mikrosapoplous.gr/homer/odm14.htm
- http://www.greek-language.gr/greekLang/modern_greek/tools/lexica/triantafyllides/search.html?lq=%22%CE%AC%CF%81%CF%81%CE%B7%CF%84%CE%BF%CF%82+-%CE%B7+-%CE%BF%22&dq=
- http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%8C%CE%BC%CE%B7%CF%81%CE%BF%CF%82

5.Αποδείξεις αρρητοτήτων από τα σχολικά βιβλία

Ομάδα: Κ., Μ., Μ., Π.

Αλέξανδρος Κ., Φοίβος Μ.

Νικόλαος Μ., Στέφανος Π.

5.1.Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οποιονδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και στο ΓΔ.

Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθηση τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές.

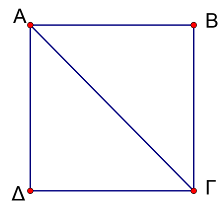
Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ στην γεωμετρία στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγώνιου προς την πλευρά του τετραγώνου, ή κατά την μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στην θεωρία της μουσικής στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγουπου το τετράγωνό του είναι ίσο με δύο.

Άρρητα ρήματα

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα <<Αναλυτικά Ύστερα>> του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί <<αν υποτεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό>>.

«῞Οτι μεν οὖν οἱ δεικτικοὶ περαίνονται διὰ τῶν προειρημένων σχημάτων, φανερόν· ὅτι δ καὶ οἱ εἰς τὸ ἀδύνατον, δῆλον ἔσται διὰ τούτων. πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μ ν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης. τὸ μεν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ' ἀσύμμετρον ειναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν», Aristoteles :Analytica priora et posteriora, 41α,21-41α,32.

Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:



Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σύμμετρη προς τη δια γώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακέραιων αριθμών, δηλαδή ΑΒ/ΑΓ =α/β όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι (μπορούμε πάντα να απλοποιήσουμε και να έχουμε το ισοδύναμο «ανάγωγο» κλάσμα). Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2 =2\ ΑΒ^2$. Επομένως, $ΑΒ^2 / ΑΓ^2 =α^2 /β^2 =1/2$ ή $β^2 = 2α^2$.Αυτό σημαίνει ότι ο $β^2$ είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος, δηλ.β=2λ.

Τότε ο α πρέπει να είναι περιττός, αφού το α/β είναι ανάγωγο κλάσμα. Από την $β^2 = 2α^2$ παίρνουμε: $(2λ)^2 = 2α^2$, η $4λ^2 = 2α^2$, η $2λ^2 = α^2$ κι επομένως ο $α^2$ είναι άρτιος, οπότε και ο α είναι άρτιος που είναι άτοπο (υποθέσαμε το α/β ανάγωγο, αν οι ακέραιοι α και β είναι και οι δύο άρτιοι τότε έχουν κοινό παράγοντα τον αριθμό 2).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιττού που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.

[1]Αν ο κ είναι άρτιος, κ=2λ,

τότε: $κ^2=4λ^2=2(2λ^2)$, δηλ. και ο $κ^2$ είναι άρτιος.

Άρτιοι είναι τα πολλαπλάσια του 2, οι ακέραιοι της μορφής «2λ».

Οι περιττοί διαιρούμενοι δια 2 αφήνουν υπόλοιπο 1(τα δυνατά υπόλοιπα σε μια διαίρεση με διαιρέτη 2 είναι ακριβώς 2, το 0 και το 1). Οι περιττοί είναι της μορφής 2μ+1.Διαιρετέος=διαιρέτης επί πηλίκο+υπόλοιπο.

[2]Αν ο ν είναι περιττός, ν=2μ**+1**, τότε και το τετράγωνό του

$ν^2=(2μ+1)^2=4μ^2+4μ+1=2(2μ^2+2μ)\mathbf{+1}$**,** είναι περιττός.

Ένας ακέραιος θα είναι είτε άρτιος, είτε περιττός, οι περιπτώσεις [1] και [2] είναι «εξαντλητικές», οπότε ισχύουν και οι αντίστροφες προτάσεις:

[3]Αν ο $κ^2$ είναι άρτιος, τότε και ο κ είναι άρτιος,

[4]Αν ο $κ^2$ είναι περιττός, τότε και ο κ είναι περιττός.

Οι αποδείξεις των αντίστροφων προτάσεων γίνονται με την «εις άτοπον απαγωγή», αποδεικτική μέθοδο που αναπτυχθηκε στη σχολή του Πυθαγόρα. Π.χ. για την [3], αν ο κ δεν είναι άρτιος, τότε θα είναι περιττός, αφού δεν υπάρχει άλλη περίπτωση, αλλά τοτε και το τετράγωνό του θα έπρεπε να είναι περιττό, ενώ από την υπόθεση είναι άρτιο.

5.2.Η τετραγωνική ρίζα του 2, ίσως ο πρώτος άρρητος.

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$,

οπου κ και λ είναι φυσικοί αριθμοί και κ/λ ανάγωγο κλάσμα (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις).

Έχουμε διαδοχικά:

$\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$, $2=\frac{\kappa^2}{\lambda^2}$, $\kappa^2=2\lambda^2$, που σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής κ=2μ.

Οπότε: $\kappa^2=(2\mu)^2$, $(2\mu)^2=2\lambda^2$, $4\mu^2=2\lambda^2$, $\lambda^2=2\mu^2$, που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα κ/λ δεν είναι ανάγωγο(άτοπο).

Η «εις άτοπον απαγωγή» είναι η αποδεικτική μέθοδος που κυριαρχεί στις αποδείξεις αρρητοτήτων. Η μέθοδος αναπτύχθηκε στη σχολή του Πυθαγόρα. Η ιδέα πίσω από την ευφυή αυτή μέθοδο είναι ότι αποδεικνύουμε μια πρόταση δείχνοντας την αναλήθεια της αντίθετης. Ένα θεώρημα ή μια πρόταση είτε είναι αληθινή είτε είναι λανθασμένη: π.χ. «*αυτή τη στιγμή είτε διαβάζετε αυτή τη σελίδα είτε δεν τη διαβάζετε*» (Livio, 2005: 62). Οι Μαθηματικοί δεν δέχονται ότι τη «μισοδιαβάζετε» (αν και υπάρχει και η «ασαφής λογική» με ποσοστά διαβάσματος). «*Όταν έχεις εξαλείψει το αδύνατο, οτιδήποτε μένει, όσο απίθανο κι αν φαίνεται, πρέπει να είναι η αλήθεια*» (Humphrey, 1997).

Μετά την $\sqrt{2}$ το ρεύμα της αρρητότητας ακολούθησαν οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών 3,5,6,7,10,11,12,13,14,15(αποδείξεις από τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο). Επίσης ο Θεαίτητος απέδειξε ότι **αν** το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό Ν που δεν είναι τετράγωνος, **τότε** η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα. Με σύγχρονη ορολογία, αν $N \neq \alpha^2$, τότε ο $\sqrt{N}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{M+N}$, $\sqrt{M}+\sqrt{N}$, $\sqrt{\sqrt{M}+\sqrt{N}}$. Πιστεύετε ότι το 10^{o} βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη (Περί Ασυμμέτρων) είναι του Θεαίτητου.

5.3.Θεαίτητος

Πλάτων, *Θεαίτητος* [147d3-d9]

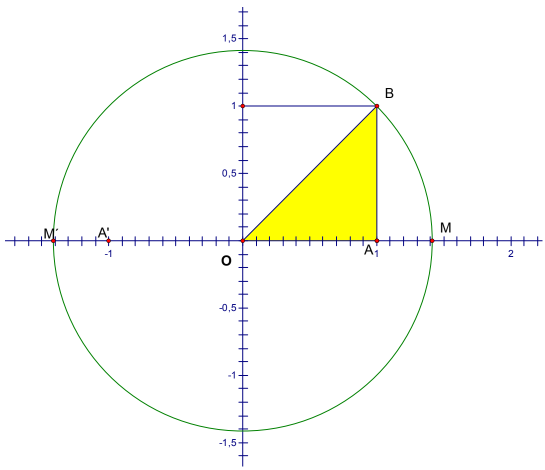
ΘΕΑΙ. *Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.*

Στο παραπάνω χωρίο ο Θεαίτητος αναφέρει ότι ο Θεόδωρος μιλούσε για την ασυμμετρία των $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$ και παραλείπει την ασυμμετρία του $\sqrt{2}$. Από αυτό το απόσπασμα προκύπτει με έμμεσο τρόπο ότι η ασυμμετρία του $\sqrt{2}$ ήταν ήδη γνωστή πριν την εποχή του Θεόδωρου και η γνώση της ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$ ανάγεται στην εποχή των Πυθαγορείων.

***Θεόδωρος ο Κυρηναίος** (περίπου 430 π.Χ.). Μαθηματικός, γνωστός Γεωμέτρης, συνομήλικος του Σωκράτη, δάσκαλος του Θεαίτητου. Τον αναφέρει ο Πλάτωνας στο έργο του "Θεαίτητος" το οποίο του το αφιέρωσε, όταν ο Θεαίτητος σκοτώθηκε σε μάχη στην Κόρινθο. Ο Θεόδωρος απέδειξε γεωμετρικά ότι οι ρίζες των αριθμών 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12,13,14,17 είναι ασύμμετροι και επίσης δίδαξε στον νεαρό Θεαίτητο τις αποδείξεις (η αρρητότητα της ρίζας του 2 ήταν ήδη γνωστή).

5.4.Τοποθέτηση των αρρήτων στην αριθμοευθεία

Στο σημείο Α του πραγματικού άξονα (του χ΄χ) που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1.



Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$.

Στη συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ= $\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Μ και Μ΄ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως. Στο σχήμα φαίνεται η τοποθέτηση των σημείων $\left(\sqrt{2},0\right)$, $\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\left(0,\sqrt{2}\right)$ και $\left(0,-\sqrt{2}\right)$.

5.5.Η προσέγγιση του «π» από τον Αρχιμήδη(250 π.Χ.)

᾿Ανάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ϛτλϛ (6336) πρὸς βιζ δ ($2017\frac{1}{4}$), ἅπερ τῶν βιζ δ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα ($\frac{233}{71}$) ·

Archimedes: Dimensio circuli, 1,143,13-1,143,15

Προσέγγιση του λόγου $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = \frac{25344}{8069}$ με τον λόγο $\frac{233}{71}$, μικρότερος

$$\frac{233}{71} < \frac{25344}{8069}$$

Αρχιμήδους, *Κύκλου Μέτρησις* (χρυσορυχείο υπολογισμών κατά Fowler), Πρόταση 3(γ)

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μ ν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Archimedes: Dimensio circuli, 1,140,9-1,140,11

καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϙϛ γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ δχογ πρὸς Μ 10α δχπη. Καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ , ἅπερ τῶν δχογ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

Archimedes: Dimensio circuli, 1,143,13-1,143,15

Ο λόγος $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = \frac{29376}{9347}$ προσεγγίζεται από τον $\frac{22}{7}$, μεγαλύτερος.

$$3{,}14084507... = \frac{223}{71} = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}$$

*Προσέγγιση του μήκους και του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα, Β΄Λυκείου, Κεφ.11

5.6.Αριστοτέλης(350 π.Χ.)

Κλείνουμε με ένα σχόλιο του Αριστοτέλη (Metaphysica 983 α 13-21) σύμφωνα με το οποίο όλοι αρχίζουν με απορία όταν ακούν για την ασυμμετρία της πλευράς και της διαγωνίου, όμως με κατάλληλη διδασκαλία, οι ιδέες γίνονται κατανοητές και ο «γεωμετρικά εκπαιδευθείς νους» τελικά δεν απορεί.

…–δεῖ μέντοι πως καταστῆναι τὴν κτῆσιν αὐτῆς εἰς τοὐναντίον ἡμῖν τῶν ἐξ ἀρχῆς ζητήσεων. ἄρχονται μ ν γάρ, ὥσπερ εἴπομεν, ἀπὸ τοῦ θαυμάζειν πάντες εἰ οὕτως ἔχει, καθάπερ ⟨περὶ⟩ τῶν θαυμάτων ταὐτόματα [τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν] ἢ περὶ τὰς τοῦ ἡλίου τροπὰς ἢ τὴν τῆς διαμέτρου ἀσυμμετρίαν (θαυμαστὸν γὰρ ει ναι δοκεῖ πᾶσι ⟨τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν⟩ εἴ τι τῷ ἐλαχίστῳ μὴ μετρεῖται)·δεῖ δ εἰς τοὐναντίον καὶ τὸ ἄμεινον κατὰ τὴν παροιμίαν ἀποτελευτῆσαι, καθάπερ καὶ ἐν τούτοις ὅταν μάθωσιν· οὐθ ν γὰρ ἂν οὕτως θαυμάσειεν ἀνὴρ γεωμετρικὸς ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητή.

<u>Πηγές</u>

Βιβλίο Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου κεφ. 9, κεφ.11.

Βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου κεφ. 2.

Livio, M. (2005). *Ο Χρυσός Λόγος*, μτφρ. Μαρ. Σταυροπούλου : Ενάλιος.

Humphrey, N. (1997). Μια άλλη ματιά. *Quantum*, 4(5): 2-3. Κάτοπτρο.

TLG (Thesaurus Linguae Graecae-Θησαυρός Ελληνικής Γλώσσας).

Fowler, D. (2003). *The Mathematics of Plato's Academy*.A New Reconstruction. Oxford University Press.

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82_%CF%80

6.ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ

Ομάδα Σ.- Φ.
Δημήτρης Σ.-Νεκτάριος Φ.

6.1.Χρυσές Κατασκευές

Ακολουθία «Χρυσών» ορθογωνίων

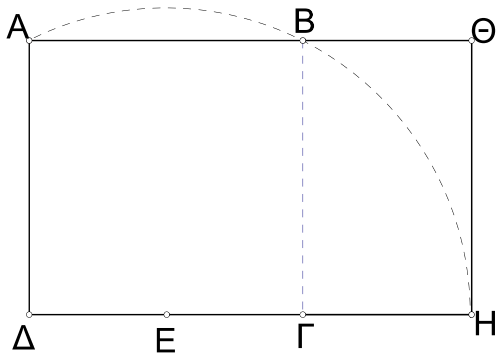
Α.Χρυσό ορθογώνιο είναι εκείνο που οι πλευρές του έχουν λόγο φ

1.Τετράγωνο ΑΒΓΔ, πλευράς «α». 2.Ε το μέσον της ΓΔ. 3.Κυκλος (Ε,ΕΒ)

4. «Η» είναι η τομή της προέκτασης της ΔΓ με τον κύκλο

Το ορθογώνιο ΔΗΘΑ είναι

χρυσό, δηλ. $\frac{ΔΗ}{ΗΘ} = φ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$



Απόδειξη.

Υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου ΕΒ

Υπολογίζουμε το ΔΗ

Υπολογίζουμε τον λόγο ΔΗ/ΗΘ

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε:

$$ΕΓ^2 + ΒΓ^2 = ΕΒ^2$$

Και επειδή ΕΓ= α/2 και ΒΓ= α , το ΕΒ= $(\sqrt{5}α)/2$

ΔΗ= ΕΗ +ΔΕ = $(α \sqrt{5})/2 + α/2 = α (\sqrt{5}+1)/2$

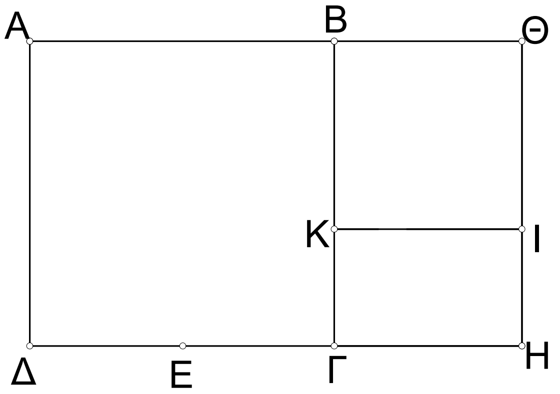
ΔΗ/ΗΘ= $α(\sqrt{5}+1)/2 : α = (\sqrt{5} + 1)/2$

Β. Το ορθογώνιο ΒΘΗΓ είναι χρυσό:

ΓΗ = ΔΗ – ΔΓ = α ($\sqrt{5}$ +1)/2 –α = ($\sqrt{5}$ – 1) α/2

ΘΗ/ΓΗ = α : ($\sqrt{5}$ -1)/2 = 2 ($\sqrt{5}$ +1)/4 = ($\sqrt{5}$ +1)/2

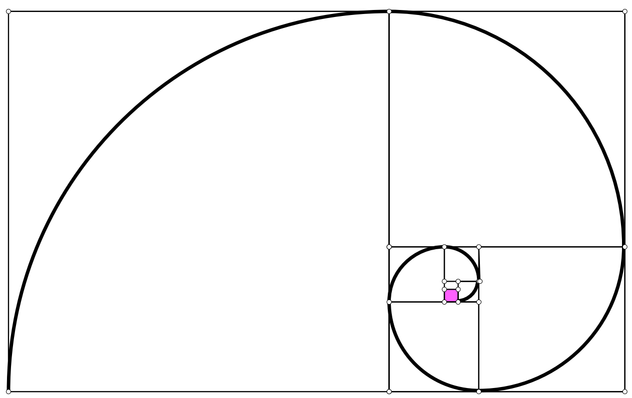
Γ. Αφαιρούμε το τετράγωνο ΒΘΙΚ… το ορθογώνιο ΚΙΗΓ είναι χρυσό.



ΙΗ = ΘΗ – ΘΙ = α –ΓΗ = α – ($\sqrt{5}$-1)α/2=α(-$\sqrt{5}$+3)/2

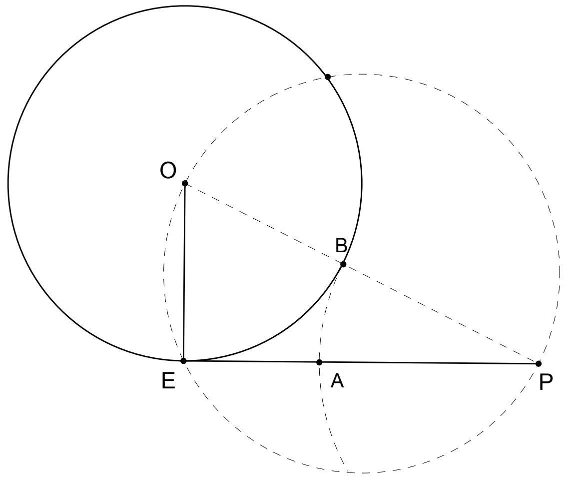
Άρα ΓΗ/ΙΗ=$(\sqrt{5}+1)/2$

Δ.Για την σπείρα κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλια, (Γ,ΓΔ),(Κ,ΚΒ)…



6.2.Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (χρυσή τομή)

Το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο στον κύκλο (O, OE = PE/2)



Αν PE=α, τότε:

α^2=PB(PB+α)…

EP^2=PB(PB+2OB)

Αφού PE=α, PB=χ

και 2OB=α, εχουμε

α^2=χ(χ+α).

Μεταφέρουμε το PB στο PE, PA=PB. Για ευκολία θετουμε PB=PA=χ και θα αποδείξουμε ότι $\chi = \alpha\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Από την προηγούμενη απόδειξη ισχύει: χ^2+αχ-α^2=0…

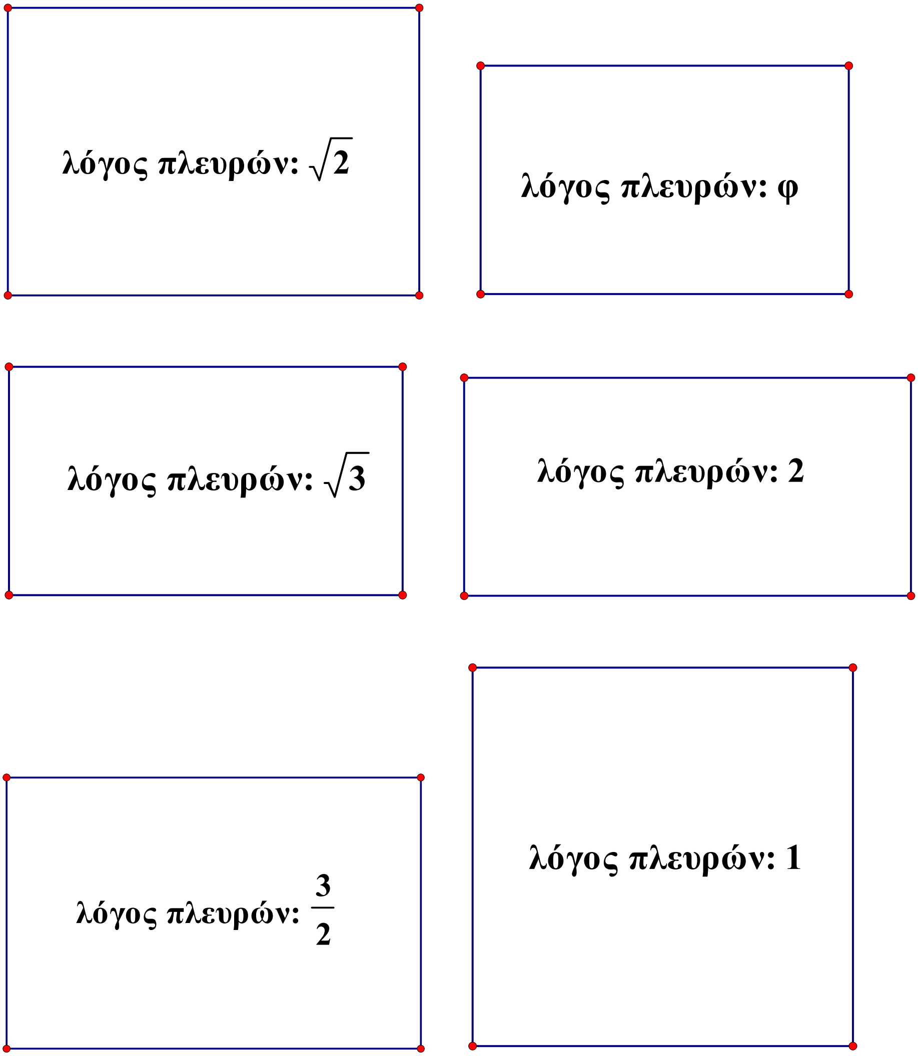
Διακρίνουσα 5*α^2, ρίζες $\frac{-\alpha \pm \alpha\sqrt{5}}{2}$. Για την θετική ρίζα χ=($\sqrt{5}$-1)α/2,

έχουμε: $\frac{\alpha}{\chi} = \varphi$ [α/χ=α:(($\sqrt{5}$-1) α)/2) = $(\sqrt{5}+1)/2$].

Αποδεικνύουμε ότι και $\frac{PA}{AE} = \frac{\chi}{\alpha-\chi} = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

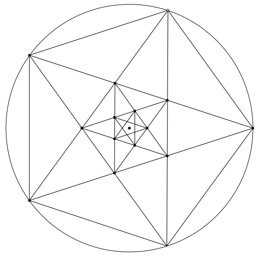
$$\frac{PA}{AE} = \frac{\chi}{\alpha-\chi} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\frac{\alpha}{2}}{\alpha - \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

6.3.Ορθογώνια

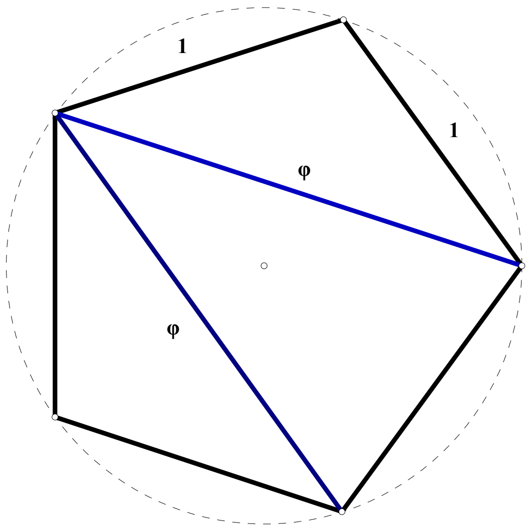


6.4.Κανονικό πεντάγωνο

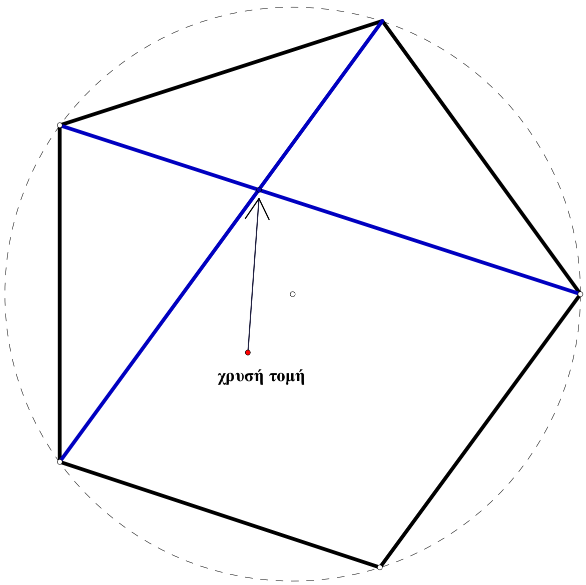
Ποιόν άρρητο ανακάλυψαν πρώτα οι Πυθαγόρειοι; Τον $\sqrt{2}$ ή τον φ;



Γνωρίζουμε το «έμβλημα» της Σχολής. Μερικοί ιστορικοί υποστηρίζουν ότι με την γραμμική κατασκευή του πενταγώνου οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη του άρρητου «χρυσού αριθμού» φ, που αντιστοιχεί στο λόγο της «χρυσής τομής», ή παραδοσιακά, της διαίρεσης ενός ευθ.τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Ο αριθμός αυτός θεωρήθηκε μια «Θεία Αναλογία» στενά συνυφασμένη με την αίσθηση του κάλλους και της αρμονίας.



Από την Γεωμετρία Β΄Λυκείου, ενότητα 11.2, άσκηση 7:



Κάθε διαγώνιος του κανονικού πενταγώνου τέμνεται από μία άλλη στη θέση της χρυσής τομής, δηλ. κάθε διαγώνιος διαιρεί αυτήν που τέμνει και διαιρείται από αυτήν που τέμνεται σε μέσο και άκρο λόγο.

Είναι η πρόταση XIII.8 των Στοιχείων του Ευκλείδη:

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

«Σε κάθε κανονικό πεντάγωνο δύο διαδοχικές διαγώνιοι τέμνονται σε άκρο και μέσο λόγο και τα μεγαλύτερα τμήματα της διαίρεσης είναι το καθένα ίσο με την πλευρά του πενταγώνου».

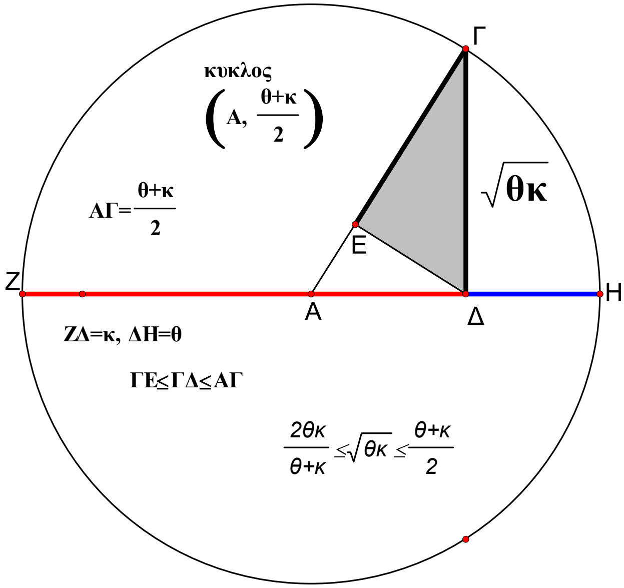
Το κείμενο που ακολουθεί είναι από το βιβλίο «Ιερή Γεωμετρία» του Δ. Ευαγγελόπουλου, σελ.208, εκδ. Αρχέτυπο, Θεσσαλονίκη, 2002.

«Οι αρχαίοι Έλληνες σκέφτηκαν ότι η ομορφιά είναι η σωστή δόση και αναλογία των αντίθετων και ότι η αρμονική διαίρεση δεν σημαίνει αναγκαστικά την ισότητα και τη συμμετρία, δηλ. μια στείρα, στατική διχοτόμηση, αλλά την επίτευξη μιας δυναμικής ισορροπίας μεταξύ δυο αρμονικών άνισων μερών. Μόνο οι φιλόσοφοι και οι μαθηματικοί μπορούσαν να συλλάβουν μια τέτοια ιδέα και να βρουν σε μια ανισότητα την ακριβή θέση μιας τέλειας αρμονίας, να γεφυρώσουν με πραγματική τάξη το χάος ανάμεσα στα δυο άκρα» (Ευαγγελόπουλος Δ., Ιερή Γεωμετρία, 2002 σελ.208, εκδ. Αρχέτυπο, Θεσσαλονίκη).

Η «Θεία Αναλογία» χρησιμοποιήθηκε όχι μόνο στην Αρχαιότητα (κτίρια και αγγεία), αλλά και στις μέρες μας, π.χ. στο κτίριο των Ηνωμένων Εθνών και στο σύστημα Modulor του Le Corbusier (ψευδώνυμο του γνωστού γάλλου αρχιτέκτονα C.E.Jeanneret). Χρησιμοποιήθηκε όχι μόνο στην Αρχιτεκτονική, αλλά και στην Ζωγραφική, και το όνομά της οφείλεται στον Λεονάρντο Ντα Βίντσι, που ήταν ο πρώτος που την ονόμασε Sectio Aurea, δηλ. χρυσή τομή.

Η χρυσή τομή συνδέεται τόσο με τη φανερή όσο και με την κρυμμένη αρμονία μεταξύ δυο μερών ή του μέρους με το όλον.Ο Φειδίας, αρχιτέκτονας του Παρθενώνα, του καλλιμάρμαρου αυτού αριστουργήματος της Ελληνικής Αρχαιότητας,αξιοποίησε στο έπακρο την ιδιότητα της χρυσής τομής και «κληροδότησε» στην ανθρωπότητα το σύμβολο για τον $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$*, το «φ».*

6.5.Ανισότητα αρμονικού-γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου



Αρμονικός μέσος : Mh =2αβ/(α+β), Γεωμετρικός μέσος: Mg $=\sqrt{\alpha\beta}$,

Αριθμητικός μέσος: Ma = (α + β) /2. Ισχύει : Mh≤Mg≤Ma

Η εικόνα δείχνει την γεωμετρική ερμηνεία: Ότι είναι απαραίτητο για την απόδειξη…«ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον» (Αριστοτέλης, Μετεωρολογικά, 375b 18).

Αλγεβρική απόδειξη της ανισότητας γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου: $\sqrt{\theta\kappa} \le \frac{\theta+\kappa}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\theta}-\sqrt{\kappa}\right)^2 \ge 0$.

Αρμονικός είναι ο αντίστροφος του αριθμητικού μέσου των αντιστρόφων. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη για $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\kappa}$.

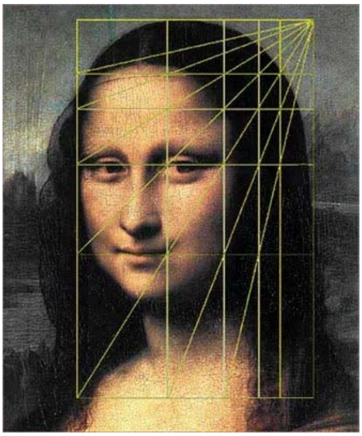
Χρησιμοποιήθηκε από τον Αρχύτα για την προσέγγιση της $\sqrt{2}$.

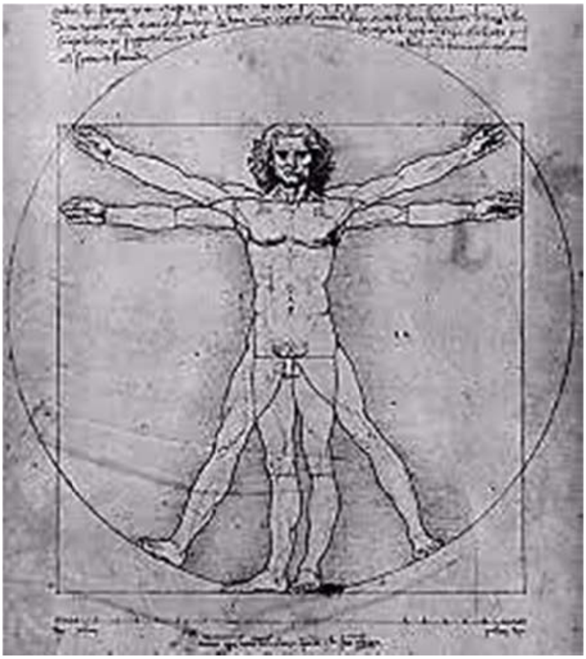
7.Ο αριθμός φ

Ομάδα φ: Β., Κ., Π.

Μάρα Β., Ξένια Κ., Ελευθερία Π.

Ο ΧΡΥΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ Φ





Ένα από τα γνωστότερα έργα του Leonardo Da Vinci,
«Homo Vitruvians».

Ο Da Vinci εικονογραφεί τον κανόνα των ανθρώπινων αναλογιών που διετύπωσε ο Βιτρούβιος.

Η ανθρώπινη φιγούρα τοποθετείται αρχικά μέσα σε έναν κύκλο κι έπειτα σε ένα τετράγωνο, διαδικασία που ακολούθησε ο Leonardo για όλες τις εικονογραφήσεις της πραγματείας του Βιτρούβιου.

Πηγές

Βαζούρα Ελένη: Η Μαθηματική Αναλογία της Χρυσής τομής, Διπλωματική εργασία στο ΠΜΣ: «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Οκτώβριος 2007, ΕΚΠΑ.

http://www.awakengr.com/2012/09/blog-post_5584.html#ixzz3LOJZgNfk

8.Προσεγγίσεις αρρήτων: Κ.-Σ.

Ομάδα: Δημήτρης Κ.-Λευτέρης Σ.

8.1.Αρχύτας

Ο **Αρχύτας** (428 π.Χ. - 347 π.Χ.) γιος του Μνήσαρχου ήταν επιφανής Πυθαγόρειος φιλόσοφος, καταγόμενος από τον Τάραντα της Μεγάλης Ελλάδας. Ανήκει στην δεύτερη γενιά Πυθαγορείων και υπήρξε μαθητής του Φιλολάου του Κροτωνιάτη που ανήκει στην προηγούμενη γενιά Πυθαγορείων. Υπήρξε στρατηγός στην πόλη του επτά φορές, τη στιγμή που ο νόμος απαγόρευε σε όλους τους άλλους να πάρουν τη θέση αυτή για δεύτερη φορά. Ήταν αξιόλογος αστρονόμος, μαθηματικός, μουσικός και πολιτικός. Θεωρείται από τους μεγαλύτερους διανοητές της ελληνικής αρχαιότητας και θαυμαζόταν από όλους για τις αρετές του. Ο Αριστοτέλης έγραψε γι΄ αυτόν ειδική πραγματεία, «Η φιλοσοφία του Αρχύτα», η οποία δεν έχει διασωθεί. Υπήρξε καλός φίλος του Σωκράτη με τον οποίο διατηρούσε στενές σχέσεις. Ο Αρχύτας πιθανολογείται να είναι εκείνος που μύησε τον Πλάτωνα στον Πυθαγορισμό.

Ήταν ο πρώτος που εφάρμοσε μαθηματικές αρχές στη μηχανική, και ο πρώτος που χρησιμοποίησε την *αρχή της αντίδρασης* πάνω στην οποία στηρίζεται η λειτουργία των πυραύλων και των αεριωθούμενων αεροπλάνων. Ακόμα, ο Αρχύτας επινόησε και κατασκεύασε ένα αεριοπροωθούμενο περιστέρι, που αποκλήθηκε «πετομηχανή» ή «περιστερά». Ήταν δεινός γεωμέτρης και είναι ο πρώτος ιστορικά που έλυσε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, γνωστό και ως Δήλιο πρόβλημα που είναι ένα από τα τρία άλυτα γεωμετρικά προβλήματα.

Ο Πλάτωνας έκανε αυστηρή κριτική στην πορεία που έπαιρνε η γεωμετρία με τη χρήση μηχανικών μεθόδων από τον Αρχύτα, θεωρώντας ότι αυτό την απομάκρυνε από τον σκοπό της που είναι να ανάγει τον άνθρωπο στη θέαση των αιώνιων αληθειών.

Άφησε γραπτό έργο του οποίου έχουν διασωθεί μόνο αποσπάσματα. Από πολλούς μελετητές θεωρείται πιθανό ότι ο Πλάτωνας στην «Πολιτεία» του έχει εμπνευστεί ή επηρεαστεί από τα γραπτά του Αρχύτα και τη μεγάλη φιλία που συνέδεε τους δύο άνδρες.

<u>Το θεώρημα του Αρχύτα</u>

Η βασική παρατήρηση είναι ότι οι τέσσερις αριθμοί $\alpha, \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta$ αποτελούν αναλογία: $\dfrac{\alpha}{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = \dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\beta}$. Αν γίνει δυνατόν οι δύο «μέσοι όροι» της αναλογίας να εξισωθούν, τότε βρέθηκε η τετραγωνική ρίζα του γινομένου των άκρων όρων, α και β, της αναλογίας.

Η ανισότητα (α, β θετικοί, α<β) $\alpha \le \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2} \le \beta$ δείχνει την μέθοδο εγκλωβισμού της ρίζας (αυτή είναι μέρος της ανισότητας των πέντε μέσων του Αρχύτα: αρμονικού - γεωμετρικού - αριθμητικού - τετραγωνικού - αντιαρμονικού μέσου, $\alpha \le \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2} \le \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \le \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \le \beta$).

Για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2, δηλ.του αριθμού $\sqrt{2}$, ξεκινάμε με αρχικές τιμές α=1 και β=2 στην $\alpha \le \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le ...\sqrt{\alpha\beta}... \le \frac{\alpha+\beta}{2} \le \beta$. Παίρνουμε αρχικά τους $\frac{4}{3}$ (αρμονικός μέσος) και $\frac{3}{2}$ (αριθμητικός μέσος). Συνεχίζουμε αντικαθιστώντας τα α, β με αυτές τις τιμές και παίρνουμε: $\frac{24}{17}$, $\frac{17}{12}$.Στο τρίτο βήμα, ο μέσος αρμονικός των δύο προηγουμένων είναι ο $\frac{816}{577}$ και ο μέσος αριθμητικός ο $\frac{577}{408}$.

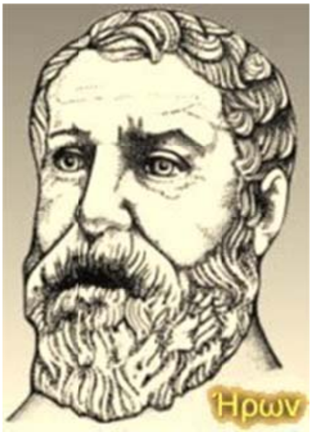
*Δεκαδικές προσεγγίσεις των κλασμάτων

$$\frac{816}{577} = 1.\overline{414211438474870017331022530329289428076256499133448873483535528596 18}\backslash$$
$$\overline{717504332755632582322357019064124783362218370883882149046793760831 8890}\backslash$$
$$\overline{814558058925476603119584055459272097053726169844020797227036395147 3136}\backslash$$
$$\overline{915077989601386481802426343154246100519930675909878682842287694974 0034}\backslash$$
$$\overline{662045060658578856152512998266897746967071057192374350086655112651 6464}\backslash$$
$$\overline{471403812824956672443674176776429809358752166377816291161178509532 0623}\backslash$$
$$\overline{916811091854419410745233968804159445407279029462738301559792027729 6360}\backslash$$
$$\overline{485268630849220103986135181975736568457538994800693240901213171577 1230}\backslash$$
$$\overline{502599653379549393}$$

$$\frac{577}{408} = 1.414\overline{2156862745098039}$$

Παρατήρηση: $\frac{816}{577} = 1.41421...$, $\frac{577}{408} = 1.41421...$

8.2.Ήρων



Ο **Ήρων ο Αλεξανδρεύς** ήταν μηχανικός και γεωμέτρης. Έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου περίπου τον 1ο π.Χ ή 1ο μ.Χ αιώνα. Η πιο διάσημη εφεύρεση του είναι η αιολόσφαιρα ή ατμοστρόβιλος, η πρώτη ατμομηχανή στην ιστορία. Υπήρξε διευθυντής της περίφημης Ανώτατης Τεχνικής Σχολής της Αλεξάνδρειας, το πρώτο πολυτεχνείο που είχε ιδρυθεί στο Μουσείο για μηχανικούς.

Η μέθοδος του Ήρωνα

Ο Ήρωνας παρατήρησε ότι αν α είναι μια προσέγγιση με έλλειψη του $\sqrt{2}$ τότε ο $2/\alpha$ είναι με υπεροχή. Έτσι μπορούμε να προσεγγίσουμε τον $\sqrt{2}$ βρίσκοντας τον αριθμητικό μέσο των α, $2/\alpha$: $\left\{\frac{1}{2} \times (\alpha + 2/\alpha)\right\}$

Π.χ. για α=1 έχουμε τον αριθμό $3/2$. Στη συνέχεια παίρνουμε α=3/2 και καταλήγουμε στον αριθμό 17/12. Μετά από αλλεπάλληλες εφαρμογές καταλήγουμε σε κλάσματα που μας οδηγούν όλο και πιο κοντά στον $\sqrt{2}$.

*Τέταρτη προσέγγιση: $\frac{577}{408}$…γνωριμία με τον Αρχύτα

8.3.Η σύγχρονη μέθοδος

Οι υπολογιστές χρησιμοποιούν την μέθοδο των **Newton-Raphson**, η οποία για την τετραγωνική ρίζα και για αρχική προσέγγιση θετικό ρητό, είναι ίδια με την μέθοδο που πρότεινε ο Ήρωνας.

Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του 2 ακριβώς;

Οι υπολογιστές προσαρμόζουν το «ακριβώς» όχι μόνο στην μέθοδο προσέγγισης, αλλά και στον τρόπο παράστασης των αριθμών στη μνήμη τους και στο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς (οι αριθμομηχανές και στο μέγιστο πλήθος των ψηφίων της οθόνης τους). Για τους αρρήτους το «ακριβώς» υπάρχει μόνο στον κόσμο των Πλατωνικών ιδεών.

Αν αρχίσουμε τον αλγόριθμο Newton-Raphson, $x_{n+1} = 0.5\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, με x_0=1, το πρώτο βήμα εξελίσσεται ομαλά: x_1=1.5. Από το δεύτερο βήμα όμως θα πρέπει να αποφασίσουμε με πόσα δεκαδικά ψηφία θα συνεχίσουμε τους υπολογισμούς και έτσι θα υποχρεωθούμε σε αποκοπές ή στρογγυλεύσεις, γιατί απλά οι μηχανές, δεν συμπαθούν το άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Επιλέγουμε λοιπόν σφάλματα στρογγύλευσης αντί αποκοπής. Αν είμαστε ικανοποιημένοι με ακρίβεια 4 δ.ψ., τότε, διατηρώντας 5 δ.ψ. στους υπολογισμούς, παίρνουμε (στρογγυλοποίηση σε 5 δ.ψ.) : x_2 = 1.41667, x_3 = 1.41422, x_4 = 1.41421 και σταματάμε, γιατί: $|x_3 - x_4| = 0.00001 \leq .5*10^{-4}$.

Λέμε ότι: με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων η $\sqrt{2}$ είναι 1.4142 , ή ότι η x_4 συμπίπτει με την $\sqrt{2}$ σε 4 δ.ψ., και εννοούμε ότι οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις συμπίπτουν σε 4 δ.ψ.

Άρρητα ρήματα

Πως γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές επαναλήψεις προσεγγίζουν κάποιον αριθμό; Πως γνωρίζουμε ότι προσεγγίζουν τον $\sqrt{2}$ και όχι κάποιον άλλον; Πως γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές επαναλήψεις είναι βελτιώσεις της αρχικής επιλογής x_0; Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι αν $x_0>0$ θετικός ρητός, τότε , διαδοχικά: $x_n>0$, $x_{n+1}-\sqrt{2}=0.5\left(\sqrt{x_n}-\sqrt{\frac{2}{x_n}}\right)^2\geq 0$,

$x_n\geq\sqrt{2}$, $x_n-x_{n+1}=0.5\left(\frac{x_n^2-2}{x_n}\right)^2\geq 0$, $x_n\geq x_{n+1}$, η ισότητα δεν είναι δυνατή, γιατί η μέγιστη χαρά των ρητών είναι η χαρά του πλησιάσματος των αρρήτων…και φτάνουμε στο μέγιστο κάτω φράγμα της γνήσια φθίνουσας ακολουθίας x_n .

* Πλήρης μελέτη στο Χατζηδήμος Απ., Αριθμητική Ανάλυση Ι, Κ7: Αριθμητική επίλυση εξισώσεων, σελ.179-220, Ιωάννινα1978.

Με την βοήθεια ισχυρών υπολογιστών και κατάλληλων προγραμμάτων μπορούμε να πάρουμε χιλιάδες ή και εκατομμύρια δεκαδικά ψηφία (όχι μόνο) του $\sqrt{2}$.

Joseph Raphson

O Joseph Raphson γεννήθηκε στο Middlesex της Αγγλίας το 1648 και πέθανε το 1715. Σπούδασε Μαθηματικά στο πανεπιστήμιο του Cambridge. O Raphson έγινε γνωστός για την μέθοδο Newton-Raphson. Το πιο αξιοσημείωτο έργο του Raphson είναι η Analysis Aequationum Universalis, η οποία δημοσιεύθηκε το1690.

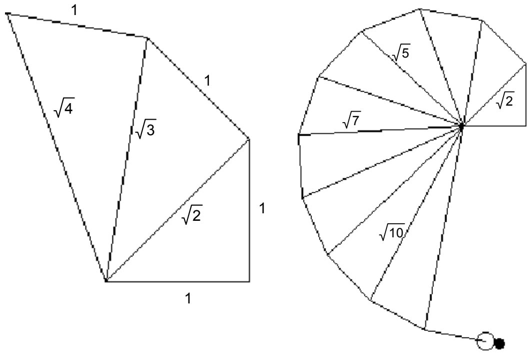
Για τον I.Newton(1642-1727) δεν χρειάζονται ιδιαίτερες αναφορές.

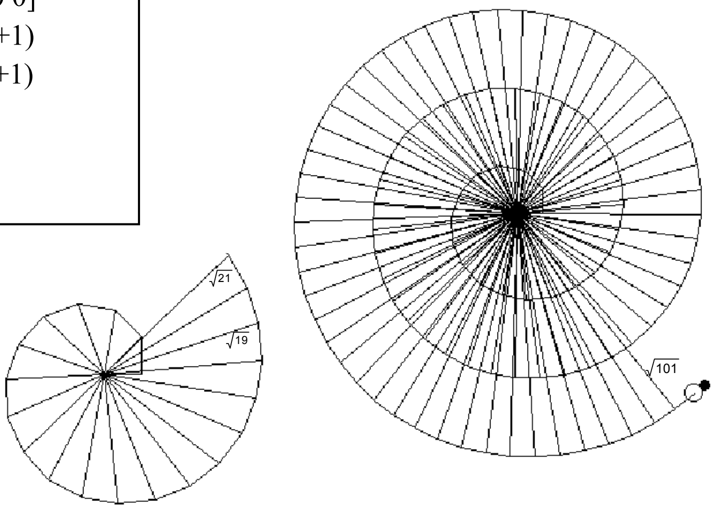
8.4.Κατασκευή ριζών (Logo)

Το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με τη μονάδα. Η τιμή του k είναι τα χελωνοβήματα που παίρνουμε για μονάδα (π.χ.20,30,40,…).Το πλήθος των διαδοχικών ριζών ελέγχεται από την εντολή «αν :x > …», στην διαδικασία «αρρητο :x»

```
για ρίζες
make "k 20
make "x 1
rt 90 fd :k lt 90 fd :k
αρρητο :x
τέλος

για αρρητο :x
αν :x > 100 [σταμάτησε]
seth towards [0 0]
μ :k*SQRT(:x+1)
π :k*SQRT(:x+1)
δ 90 μ :k
αρρητο :x+1
τελος
```





Το λογισμικό «Logo-Χελωνόκοσμος» διατίθεται δωρεάν από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (http://etl.ppp.uoa.gr),

8.5.Άνθρωποι, Μηχανές, Όρια

Δεν δημιουργούν μόνο οι άρρητοι προβλήματα στους υπολογισμούς. Αν δοκιμάσουμε να μετατρέψουμε σε δεκαδικούς π.χ. τους ρητούς $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{109}$, $\frac{1}{61}$, $\frac{360}{109}$, $\frac{1}{98982277}$ κλπ θα διαπιστώσουμε ότι η αρχική χαρά της ακρίβειας μετατρέπεται και πάλι σε χαρά του πλησιάσματος: Η περίοδος του 1/3 αποτελείται από το ψηφίο 3 μόνο, αλλά πόσα «3» θα γράψουμε;

Παρόμοια για τον $\frac{2}{9} = 0.\overline{2}$ ή για τον $\frac{1}{28} = 0.03\overline{571428}$.

Υπάρχουν βέβαια και εξωφρενικές περιπτώσεις, π.χ. η περίοδος του $\frac{1}{1861}$(ο 1861 είναι πρώτος) αποτελείται από 1860 ψηφία, του $\frac{1}{98982277}$ αποτελείται από 16 493 730 ψηφία (ο 98982277 δεν είναι πρώτος, είναι γινόμενο των πρώτων 9931 και 9967).

Αν χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω πρόγραμμα (mathematica) παίρνουμε ρητές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ σε κλασματική και δεκαδική μορφή με οκτώ δ.ψ. ή και περισσότερα, αν αλλάξουμε το «9» στην εντολή N[yn,9]. Ας μην ξεχνάμε ότι τα λογισμικά υπολογίζουν τα σημαντικά (είναι όλα τα ψηφία του αριθμού, εκτός από τυχόν μηδενικά που υπάρχουν στην αρχή του αριθμού) και όχι τα δεκαδικά ψηφία.

Αν θέλουμε περισσότερα ζεύγη (μ,ν)
αλλάζουμε το 10 στην εντολή **{i,1,10}.**

yn=1;…Print ["y1=",N[yn,9]]…Do [y=((yn+2)/(1+yn));…yn=y; Print ["y",i+1,"=", N[yn,9], "=", Rationalize[yn]],{i,1,10}]

Μερικά αποτελέσματα: y2 =1.50000000 =3/2, y3 =1.40000000 =7/5, y4=1.41666667 = 17/12, y5 =1.41379310 =41/29, y6=1.41428571=99/70, y7=1.41420118 = 239/169,y8 =1.41421569 = 577/408, y9 =1.41421320 =1393/985, y10 =1.41421362 = 3363/2378

Κλείνουμε με ένα απόσπασμα από το βιβλίο της Rebecca Golstein: «ΑΙΧΜΑΛΩΤΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»… Κ. Γκέντελ

...Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο του νου που θα είναι μηχανικό, ουσιαστικά δηλαδή «νεκρό», αλλά ο νους ακριβώς επειδή είναι «ζωντανός», θα βρίσκεται πάντα ένα βήμα μπροστά σε σχέση με οποιοδήποτε τυπικό απολιθωμένο, νεκρό σύστημα. Χάρη στο θεώρημα του Γκέντελ, ο νους θα έχει πάντα τον τελευταίο λόγο…

Πηγές

1.Δανιηλόπουλος, Σ. (1980). *Εισαγωγή στην Υπολογιστική, την Επιστήμη των Αυτομάτων Υπολογισμών.* Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

2.Χατζηδήμος, Α. (1978). *Αριθμητική Ανάλυση Ι,ΙΙ.* Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

3.Bunt L., Jones P., Bedient J. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, μτφρ. Άννα Φερεντίνου-Νικολακοπούλου. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.

4.Pluvinage, F. (1988). Η μάθηση των αριθμών στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, μτφρ. Αθανάσιος Γαγάτσης-Μαριάνα Τζεκάκη. *Διάσταση* 2: 48-58.

9.Εξώφυλλο-Οπισθόφυλλο

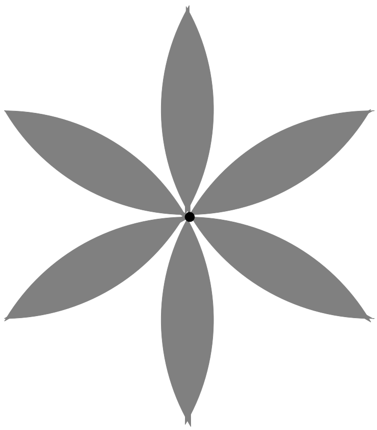
Ομάδα: Αγάπη Γ., Αργυρώ Δ.

Εξώφυλλο:

Χρυσή έλλειψη, ο λόγος του μεγάλου προς τον μικρό άξονα είναι φ.

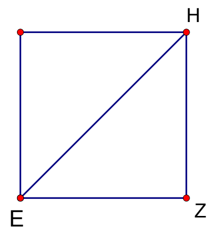
Οπισθόφυλλο:

Ρητοί εναντίων αρρήτων



10.Επίμετρο: Σωκράτης Ντριάνκος

Ο αριθμός $\sqrt{2}$ οφείλει την ύπαρξή του στη διαγώνιο του μοναδιαίου τετραγώνου και στις αναρίθμητες ανεπιτυχείς προσπάθειες εύρεσης κοινής μονάδας μέτρησης με την πλευρά αυτού του τετραγώνου.



Με έναυσμα τον $\sqrt{2}$ μπορεί να εξηγηθεί και η ελληνική ιδέα του «μεγέθους» και το νόημα της ασυμμετρίας μεγεθών: Ας υποθέσουμε ότι ένας (βαθμολογημένος) χάρακας μετρά ακριβώς την πλευρά (ή τη διαγώνιο), οπότε τα σημεία Ε, Ζ (ή τα Ε, Η) συμπίπτουν με δύο «σημάνσεις» του χάρακα.

Τότε, αν ο χάρακας τοποθετηθεί έτσι ώστε ένα σημάδι του να συμπίπτει με το Ε, το άλλο άκρο της διαγωνίου, το Η (ή της πλευράς, το Ζ) θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών σημάνσεων αυτού του χάρακα. Πάντα, για κάθε χάρακα, ανεξάρτητα από το πλήθος των σημάνσεων. Διαφορετικά, για κάποια μονάδα u, θα είχαμε $\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{\mathrm{mu}}{\mathrm{nu}}$ και ο $\sqrt{2}$ θα ήταν ο ρητός $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$.

Συνεχίζουμε όπως στην ενότητα 5.2(σελ.54),…άτοπον!

Αυτή η απόδειξη ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν ανήκει στους ρητούς, δεν προσφέρει κάποια βοήθεια στην κατανόησή του. Όπως παρατηρεί και ο Hardy στην «Απολογία» του, είναι ένα θεώρημα καθαρής αριθμητικής που «*δεν απαιτεί καμία γνώση «αρρήτων αριθμών» ούτε εξαρτάται από οποιαδήποτε θεωρία για τη φύση τους*» (Hardy,1993:70).

Η έννοια του αρρήτου είναι φυσικά δύσκολο να κατανοηθεί.

Άρρητα ρήματα

Στο διάσημο έργο τους «What is mathematics» οι Courant & Robbins(1978: 60) γράφουν ότι δεν υπάρχει κάτι που μπορεί να βοηθήσει τη διαίσθησή μας για να διακρίνουμε τα άρρητα σημεία από τα ρητά.

Δεν δημιουργεί έκπληξη το γεγονός ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας συντάραξε τους Έλληνες φιλοσόφους και μαθηματικούς και ότι αυτή ακολουθείται έως σήμερα από προκλητικές επιδράσεις στους συλλογισμούς. Ας μην ξεχνάμε ότι οι κλασσικοί Έλληνες αρνήθηκαν την έννοια του αριθμού στους αρρήτους (τους θεώρησαν γεωμετρικά μεγέθη και εργάζονταν με μήκη, εμβαδά και όγκους, παρακάμπτοντας τα προβλήματα που δημιουργούσαν ως αριθμοί), αν και ο πραγματικός τους χαρακτήρας εντοπίστηκε πολύ νωρίς από τους Πυθαγόρειους (Kline,1981).

Ο Dedekind στο έργο του «Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί» γράφει: «*Θεωρώ την έννοια του αριθμού ως τελείως ανεξάρτητη από τις εποπτείες του χώρου και του χρόνου. Τη θεωρώ ως άμεσο παράγωγο των νόμων της σκέψης… Οι αριθμοί είναι ελεύθερη δημιουργία του ανθρώπινου νου˙ Μας βοηθούν να κατανοήσουμε ευκολότερα και σαφέστερα τις διαφορές των πραγμάτων. Μόνο με την καθαρά λογική διαδικασία κατασκευής της επιστήμης των αριθμών και με την απόκτηση του συνεχούς πεδίου των αριθμών μπορούμε να προετοιμαστούμε καταλλήλως για να ερευνήσουμε τις έννοιες του χώρου και του χρόνου, συσχετίζοντάς τις με το αριθμητικό πεδίο που κατασκευάσαμε στο νου μας*»(Dedekind,1872).

Ίσως η κατανόηση της φύσης των άρρητων αριθμών περνά μέσα από την άπειρη ανθυφαίρεση και τα συνεχή κλάσματα.

Από το $[1,2,2,2,...]$ μπορούμε να υπολογίσουμε τους όρους της ακολουθίας των ρητών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$: $\alpha_1 = \frac{1}{1}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, $\alpha_3 = \frac{7}{5}$, $\alpha_4 = \frac{17}{12}$,… (βλ.σελ.27). Οι τρείς τελείες δηλώνουν την συνεχή παραγωγή των ρητών προσεγγίσεων και το $[1,2,2,2,...]$ είναι ένας άλλος τρόπος γραφής του $\sqrt{2}$ που θυμίζει και την «απειρία» του.

Το σχήμα $[1,2,2,2,...]$ *περιέχει «συμπυκνωμένη» τη γνώση μας για τον άρρητο* $\sqrt{2}$.

Τα «άρρητα» θέματα είναι κάπως δύσκολα για διδασκαλία, αλλά, …

«*αν και κανείς ποτέ δεν έφτασε στον Πολικό Αστέρα, πολλοί όμως βρήκαν τη σωστή πορεία κοιτώντας τον*» (Polya, 2001: 12).

Βιβλιογραφία

1.Courant, R. and Robbins, H. (1978). *What is mathematics*? Oxford University Press.

2.Dedekind, R. (1988). Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί, *Μαθηματική Επιθεώρηση* 1988 Β (35): 31-41. Αθήνα: ΕΜΕ.

3.Hardy, G. (1993). *Η απολογία ενός Μαθηματικού*, μτφρ.Δ.Καραγιαννάκης - Μ.Λάμπρου. Ηράκλειο:ΠΕΚ.

4.Kline, M. (1981). Λογική εναντίον Παιδαγωγικής, μτφρ.Δημήτρης Χασάπης. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 22: 3-34. Αθήνα: ΕΜΕ.

5.Polya, G. (2001). *Η μαθηματική ανακάλυψη*, *τ. Α΄*, μτφρ. Σπύρος Στεργιάκης-Γιώργος Τσαπακίδης. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε τις απεριόριστες δυνατότητες των παιδιών, το «άρρητο» νεανικό τους πνεύμα, προσπαθούμε να γεμίσουμε με φώς τα αστραφτερά τους μάτια, να απαντήσουμε με σοβαρότητα, άμεσα, στα αλλεπάλληλα «γιατί» τους και να δημιουργήσουμε νέα.

Ο Σωκράτης Ντριάνκος είναι καθηγητής Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Το νόημα και το περιεχόμενο της αρρητότητας,

όχι μόνο στα μαθηματικά,

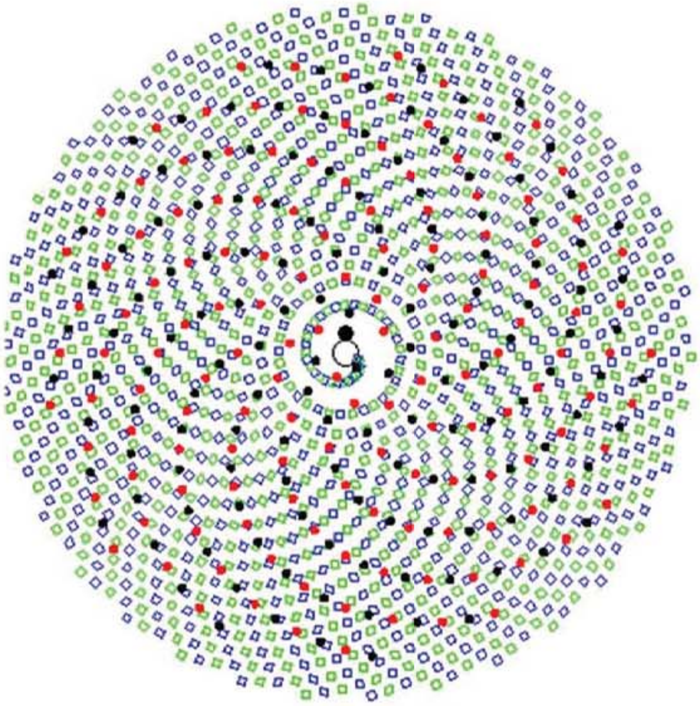
αλλά και σε κείμενα του Ομήρου, του Σοφοκλή,

του Αποστόλου Παύλου και του Παπαδιαμάντη.

Χρυσή τομή και κατασκευές.

Ο αριθμός «φ».

Ρητές προσεγγίσεις αρρήτων.



οπισθόφυλλο