Majorized Proof of Weighted Arithmetic-geometric Means Inequality

1 author:

Huan-nan Shi
Beijing Union University

2011 年 12 月
第 25 卷第 4 期总 86 期
北京联合大学学报(自然科学版)
Journal of Beijing Union University(Natural Sciences)
Dec. 2011
Vol. 25 No. 4 Sum No. 86

加权算术——几何平均值不等式的控制证明

张　鉴，石焕南
北京联合大学师范学院 电气信息系，北京　100011

[摘　要]　众所周知，算术——几何平均值不等式是最基本、最重要的不等式，寻求它的不同证法，一直是人们研究的热点，至今已有上百种不同的证明方法。本文利用控制不等式的方法，并结合分析技巧给出加权算术——几何平均值不等式的一个新的证明。

[关键词]　加权算术——几何平均值不等式; 控制; Schur-凹; 初等对称函数
[中图分类号]　O 178　　[文献标志码]　A　　[文章编号]　1005-0310(2011)04-0046-02

Majorized Proof of Weighted Arithmetic-geometric Means Inequality

ZHANG Jian, SHI Huan-nan
(Department of Electric information, Teachers' College of Beijing Union University, Beijing　100011, China)

Abstract: As we all know, arithmetic -geometric mean inequalities are the most basic and important inequalities. To seek different method to prove them has been one of the study focuses and they have been proven by more than a hundred ways. By using methods based on the theory of majorization and combined with the analysis techniques, the weighted arithmetic-geometric means inequality is proved in a new way.

Key words: Weighted arithmetic-geometric means inequality; Majorization; Schur-concave; Elementary symmetric function

0　引言

本文中，R^n 表示实数域上 n 维行向量的集合，并记为：

$$R_+^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, n\},$$

$$R_{++}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid x_i > 0,\ i = 1, \cdots, n\},$$

并记 $R^1 = R$，$R_+^1 = R_+$ 和 $R_{++}^1 = R_{++}$。

n 维向量 x 的第 k 个初等对称函数为：

$$E_k(x) = s_k(x_1, \cdots, x_n) := \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j},\quad k = 1, \cdots, n,$$

$$E_n(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i,\ E_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i。$$

当 $k > n$ 时，规定 $E_k(x) = 0$，并规定 $E_0(x) = 1$。

文献[1]利用凸函数的性质及 Jensen 不等式：

$$-\ln\left(\frac{a_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \cdot \frac{x_j}{a_j}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \cdot \ln \frac{x_j}{a_j},$$

得到以下结论：

定理 1　设 $x \in R_{++}^n$，$a \in R_{++}^n$，则：

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}。\tag{1}$$

实际上，式(1)是加权算术——几何平均值不等式的变形，若以 $a_i x_i$ 置换 a_i，$i = 1, \cdots, n$，则式(1)就化为：

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}} \leqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i。\tag{2}$$

[收稿日期]　2011-04-01
[基金项目]　2010 年度北京市教育委员会科技计划面上项目(KM201011417013)。
[作者简介]　张鉴(1964—)，男，北京人，北京联合大学师范学院讲师，研究方向为解析不等式; 石焕南(1948—)，男，湖南祁东人，北京联合大学师范学院教授，研究方向为解析不等式。

文献 [2] 利用拉格朗日数乘法给出式(1)的另一证明。本文结合初等对称函数的 Schur 凹性与一个简单的受控关系给出式(1)，即加权算术——几何平均值不等式(2)的控制(majorization)证明。等权算术——几何平均值不等式两种不同的控制证明请参见文献 [3] 和文献 [4]。

1　定理和定义

对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，将 x 的分量排成递减的次序后，记作 $x_{[1]}\geqslant\cdots\geqslant x_{[n]}$。

定义 1[4-5]　设 $x,y\in R^n$ 满足:

1) $\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]}$，　$k=1,2,\cdots,n-1$;

2) $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$。

则称 x 被 y 所控制，记作 $x\prec y$。

定义 2[4-5]　设 $\Omega\subset R^n$，$\varphi:\Omega\to R$，若在 Ω 上 $x\prec y\Rightarrow\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$，则称 φ 为 Ω 上的 Schur 凸函数(简称 S-凸函数)；若 $-\varphi$ 是 Ω 上 S-凸函数，则称 φ 为 Ω 上 S-凹函数。

引理 1[4-5]　设 $x=(x_1,\cdots x_n)\in R^n$，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，则:

$$(\underbrace{\bar{x},\cdots,\bar{x}}_{n})\prec(x_1,\cdots,x_n)。$$

引理 2[5]　初等对称函数 $E_k(x)$，$k=1,\cdots,n$ 是 R_+^n 上递增的 S-凹函数。

定理 1 的证明　记 $m=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$s=\sum_{i=1}^{n}x_i$，则式(1)化为:

$$\left(\frac{s}{m}\right)^m\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{a_i}。\quad(3)$$

1) 先考虑 $a_1,\cdots,a_n$ 为正整数 $k_1,\cdots,k_n$ 的情形，由引理 1 得:

$$u=(\underbrace{\frac{s}{m},\cdots,\frac{s}{m}}_{m})\prec$$

$$(\underbrace{\frac{x_1}{k_1},\cdots,\frac{x_1}{k_1}}_{k_1},\underbrace{\frac{x_2}{k_2},\cdots,\frac{x_2}{k_2}}_{k_2},\cdots,\underbrace{\frac{x_n}{k_n},\cdots,\frac{x_n}{k_n}}_{k_n})=v,$$

由引理 2 知 $E_n(x)$ 是 R_{++}^n 上的 S-凹函数，故 $E_n(u)\geqslant E_n(v)$，即式(3)成立。

2) 再考虑 $a_1,\cdots,a_n$ 为正有理数的情形。设 $a_i=p_i/q_i$，p_i，q_i，$i=1,\cdots,n$ 为正整数。不妨设 $a_i=p_i/q$，其中 q 是 $p_1,\cdots,p_n$ 的公分母，则 $m=\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}p_i$，此时:

$$\left(\frac{s}{m}\right)^m\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{a_i}\Leftrightarrow\left(\frac{s}{\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}p_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{p_i/q}\right)^{p_i/q}\Leftrightarrow\left(\frac{qs}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{qx_i}{p_i}\right)^{p_i}\Leftrightarrow\left(\frac{s}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n}p_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{p_i}\right)^{p_i}。$$

注意 p_i，$i=1,\cdots,n$ 为正整数，由式(1)知上面最后一个不等式成立，故 $a_1,\cdots,a_n$ 为有理数时式(3)成立。

3) 最后考虑 $a_1,\cdots,a_n$ 为正无理数的情形。此时存在 n 个正有理数列 $\{r_{i_k}\}$ $k=1,2,\cdots$，且 $r_{i_k}\to a_i$，$(k\to\infty)$。对于有理数 r_{i_k}，$i=1,\cdots,n$，由式(2)得:

$$\left(\frac{s}{\sum_{i=1}^{n}r_{i_k}}\right)^{\sum_{i=1}^{n}r_{i_k}}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{r_{i_k}}\right)^{r_{i_k}},$$

令 $k\to\infty$，即知 $a_1,\cdots,a_n$ 为正无理数时式(3)成立，至此，对于任意正实数 $a_1,\cdots,a_n$，式(3)成立，证毕。

2　结束语

1999 年，Paul 和 Jack Abad 在美国数学协会(MAA)上推荐了“100 个最伟大的定理”(The Hundred Greatest Theorems)，这些定理的排名是基于这样的准则“定理在文献里的地位，有高质量的证明，以及突破性的结果”。算术——几何平均值不等式位列“100 个最伟大的定理”的第 38 位，足见它在数学及其应用中拥有的崇高地位。寻求对算术——几何平均值不等式的不同证法，一直是人们研究的热点，至今已有上百种不同的证明方法。本文利用控制不等式的方法，结合分析技巧所给出的证明独树一帜。

[参考文献]

[1] 钱照平. 一个有趣的不等式 [J]. 高等数学研究，2007，10(2): 33-34.

[2] 赵德勤，殷明. 一个有趣不等式的新证明方法及推论 [J]. 大学数学，2010，26(1): 201-202.

[3] 张小明，褚玉明. 解析不等式新论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社，2009.

[4] Marshall A M，Olkin I. Inequalities: Theory of majorization and its application [M]. New York: Academies Press，1979.

[5] 王伯英. 控制不等式基础 [M]. 北京: 北京师范大学出版社，1990.

(责任编辑　柴智)