Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

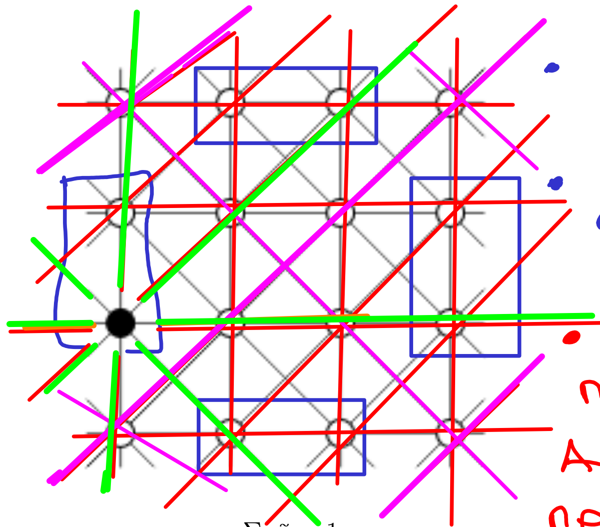
Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή, 11 Δεκεμβρίου 2020.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 7 προβλήματα προς επίλυση...

Θεμα Α΄ (Ωισςονσιν 2012). *Δίνονται 16 σημεία στο επίπεδο τοποθετημένα στις κορυφές ενός πλέγματος 4X4, όπως στο σχήμα. Χρωματίζουμε το πρώτο σημείο της τρίτης γραμμής μαύρο και τα υπόλοιπα 15 λευκά, όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια σε καθένα από τα επόμενα βήματα μπορούμε να επιλέξουμε μία οριζόντια ή μία κάθετη γραμμή ή μία γραμμή παράλληλη σε μία από τις διαγωνίους του πλέγματος και να αλλάξουμε το χρώμα σε όλα τα κομβικά σημεία του πλέγματος που ανήκουν σε αυτήν.*

Να εξεταστεί αν μπορούμε να κάνουμε όλα τα σημεία του πλέγματος λευκά.

Ο αριθμός των μαύρων κουκίδων στα μη ορθογώνια παραμένει περιττός με οποιαδήποτε αλλαγή στην αρχική μαύρη κουκίδα. Οπότε ποτέ δε θα γίνουν όλες λευκές.



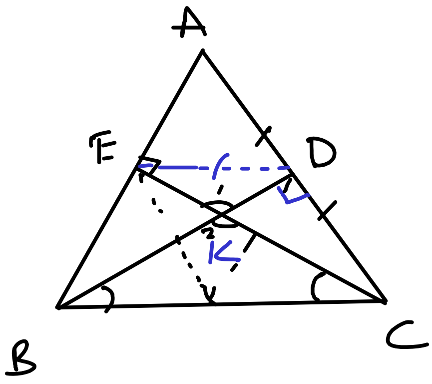
Σχήμα 1

• 2 φορές από ίδια γραμμή = τίποτα

• Οι εναλλαγή γραμμών στην διαδικασία δεν έχει σημασία.

• Υπάρχει κάτι που παραμένει αναλλοίωτο; Αν ναι, τότε το πρόβλημα ίσως δεν οδηγεί στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θέμα Β΄. *Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με διάμεσο BD και ύψος CE, ώστε $BD = CE$ και $\angle DBC = \angle ECB$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.*



$\overset{\triangle}{BCE} = \overset{\triangle}{CBD}$

$\left.\begin{array}{l} \hat{C} = \hat{B} \\ BC = BC \end{array}\right\}$ από ΠΓΠ ο.κ.

$BD = CE$

άρα $BD \perp AC$ ύψος και διάμεσος

οπότε $\boxed{AB = BC}$ $(*)$

ED διάμεσος στο $\overset{\triangle}{ACE}$ άρα

$ED = \frac{AC}{2} = AD = DC$

$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{BKC} \text{ ισοσκελές} \Rightarrow BK = KC \\ EC = BD \end{array}\right\}$ $EK = KD$

Οπότε $\overset{\triangle}{EKD}$ ισοσκελές $\hat{E} = \hat{D}$ και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως και κορυφ.

άρα $\hat{E} = \hat{D} = \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow E$ μέσο AB

CE ύψος και διάμεσος άρα $\boxed{BC = CA}$ $(**)$

$(*) + (**) \Rightarrow AB = BC = CA$ άρα ισόπλευρο ο.κ.

Θέμα Γ′. *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης:*

$$(x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 1) : (x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)$$

Θέμα Δ΄. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι n, ώστε οι n^3 και n^4 περιέχουν στη γραφή τους συνολικά, καθένα από τα ψηφία $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ακριβώς μία φορά.*

$\boxed{\text{πχ} : n^3 = 1024 \quad n^4 = 356789}$

Θεμα Ε΄. *Να βρεθούν άπειροι ακέραιοι $n \in \mathbb{N}$, ώστε $7 \mid 2^n + 27$.*

$27 \equiv 6 (\bmod 7) \equiv (-1) \bmod 7$

$2 \equiv 2 (\bmod 7)$

$2^2 \equiv 4 (\bmod 7)$

$2^3 \equiv 1 (\bmod 7)$

αρα αρκεί $2^n \equiv 1 (\bmod 7)$

αρα για: $n = 3\kappa$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

O.K.

Θέμα Ϙ′. *Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων πέντε διαδοχικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι ίσο με τετράγωνο ακεραίου.*

- Αν $n, n+1, n+2, n+3, n+4$, $n\in\mathbb{Z}$

$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2 =$

$5n^2+20n+30 = 5(n^2+4n+6)$

$= 5(n^2+4n+4+2) = 5\underbrace{[(n+2)^2+2]}_{5k^2}$

Αρκεί $(n+2)^2+2 \neq 5k^2 \quad \forall k\in\mathbb{Z}$

Έστω $(n+2)^2+2 = 5\lambda$, $\lambda\in\mathbb{Z}$

$(n+2)^2 = \underline{5\lambda-2} \equiv 3 \pmod{5}$

$(n+2)^2 \equiv 0,1,2,3,4 \pmod{5}$

με περιπτώσεις έχουμε άτοπο

- Ανάμεσα στους αρχικούς ακεραίους ένας ακριβώς διαιρείται από 5

5λ με $\lambda \not\equiv 0 \pmod{5}$

$5\lambda = a^2 \quad a\in\mathbb{Z}$

$5\nmid\lambda$ άρα 5λ όχι τέλειο τετράγωνο

ή $a-2,\ a-1,\ a,\ a+1,\ a+2 \quad a\in\mathbb{Z}$

$S_{x^2} = 5a^2+10 = 5(a^2+2)$

$a\equiv 0 \pmod{5} \quad a^2\equiv 0 \bmod 5 \Rightarrow a^2+2 \not\equiv 0 \bmod 5$

$\equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow \dots$

$2 \quad \Rightarrow$

$3 \quad \Rightarrow$

$4 \quad \Rightarrow$

Θέμα Ζ'. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός n^2+3n+5 δεν είναι πολλαπλάσιο του 121.* A

Έστω $n^2+3n+5=11\kappa \quad \kappa\in\mathbb{N}$

$$n^2+3n+2+3=11\kappa$$

$$(n+1)(n+2)+3=11\kappa$$

$$(n+1)(n+2)=11\kappa-3\equiv(-3)\bmod 11$$

$$\equiv 8 \pmod{11}$$

$$n+1\equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \pmod{11}$$

$$n+2\equiv \ldots \quad \ldots \quad \ldots \pmod{11}$$

$$(n+1)(n+2)\equiv 8\pmod{11}$$

οπότε θα έχει υπόλοιπο 5.

άρα $n\equiv 4\pmod{11} = 11\lambda+4$

με αντικατάσταση στην αρχική άτοπο

Αν $n=121\kappa+\upsilon \quad \kappa\in\mathbb{Z} \quad 0\le\upsilon\le120$

$$A=(121\kappa+\upsilon)^2+3(121\kappa+\upsilon)+5$$

$$=\text{πολ}121+\upsilon^2+3\upsilon+5$$

$\boxed{(\alpha+\beta)^\nu=\text{πολ}\alpha+\beta^\nu}$ αρκεί $11^2 \mid \upsilon^2+3\upsilon+5$

και πρέπει $11 \mid \upsilon^2+3\upsilon+5$

αν $\upsilon=11m+\alpha \Rightarrow \upsilon^2+3\upsilon+5=\text{πολ}11+\alpha^2+3\alpha+5$

$0\le\alpha\le10$

το $\alpha^2+3\alpha+5=\text{πολ}11$ μόνο για $\boxed{\alpha=4}$

$$16+12+5=33$$

$$\upsilon^2+3\upsilon+5=\text{πολ}11+33=11\lambda+33=$$

$$=11(\lambda+3)$$

$0\le\upsilon=11m+4\le120$ από που προκύπτει ότι όχι πολ121

γ' τρόπος: $n^2+3n+5-121k=0 \quad k\in\mathbb{N}$
τριώνυμο ως προς n

$$\Delta = 9-4(5-121k)=$$
$$=9-20+484k=$$
$$=484k-11=11(44k-1)$$

πρέπει Δ τέλειο τετράγωνο

$$44k-1=\pi o\lambda 11$$
$$44k-1=11m \qquad m\in\mathbb{Z}$$
$$44k-11m=1 \quad \text{άτοπο}$$