Τα Μαθηματικά είναι η Βασίλισσα των επιστημών
και η αριθμητική η Βασίλισσα των Μαθηματικών.
- Karl Friedrich Gauss

Ιστορικά στοιχεία

Εισαγωγή

Ένας από τους ιδιαίτερα ενδιαφέροντες κλάδους των μαθηματικών είναι η θεωρία αριθμών. Σε αυτό συμβάλει ουσιαστικά το γεγονός ότι αν και πολλά από τα προβλήματα με τα οποία ασχολείται μπορούν να γίνουν κατανοητά ακόμα και από έναν μαθητή του Δημοτικού, παρόλα αυτά ολόκληρες γενιές σπουδαίων μαθηματικών δεν έχουν καταφέρει να τα επιλύσουν ή να τα αποδείξουν.

Διαιρετότητα

Αριθμοί με...ιστορία

Τέλειοι αριθμοί λέγονται εκείνοι, οι οποίοι είναι ίσοι με το άθροισμα των διαιρετών τους.

Για παράδειγμα 6 = 1 + 2 +3.

Ο Fermat ανακάλυψε το γνωστό θεώρημα, ασχολούμενος με αυτούς. Άλλοι αριθμοί τέλειοι κατά σειρά είναι οι 6, 28, 496, 8128. Ο Ευκλείδης στο 9ο βιβλίο των στοιχείων απέδειξε ότι *αν ο* 2^p-1 *είναι πρώτος τότε ο* $2^{p-1}(2^p-1)$ *είναι τέλειος*. Μάλιστα ο αριθμός 2^p-1 όταν είναι πρώτος καλείται **πρώτος του Mersenne**. Για παράδειγμα οι για $p=2,3,5,7$ οι αριθμοί 2^p-1 είναι πρώτοι και κατά συνέπεια ο $2^{p-1}(2^p-1)$ είναι τέλειος.

Πράγματι, $1+2+2^2+\ldots+2^\nu$

Αν και ο τύπος του Ευκλείδη οδηγεί σε τέλειους αριθμούς δεν ήταν βέβαιος ή τουλάχιστον δεν είχε δηλώσει αν αυτός ο τύπος έδινε όλους τους τέλειους αριθμούς ή όχι. Ο L. Euler απέδειξε ότι *«κάθε άρτιος τέλειος αριθμός είναι της μορφής που καθόρισε ο Ευκλείδης»*. Και αυτό το ερώτημα όμως δεν λύνει πλήρως το πρόβλημα, αφού είναι άγνωστο τι συμβαίνει με τους περιττούς τέλειους αριθμούς· για τους οποίους μάλιστα δεν γνωρίζουμε καθόλου αν υπάρχουν ή όχι.

Φίλοι λέγονται δύο αριθμοί για τους οποίους ο καθένας είναι ίσος με το άθροισμα των διαιρετών του άλλου. Το μικρότερο ζεύγος, το οποίο είναι γνωστό ήδη από τους Πυθαγόρειους, είναι οι: 220 και 284. Ο Paganini το 1866, σε ηλικία 16 ετών, βρήκε το ζεύγος 1184, 1210. Ο L. Euler κατασκεύασε έναν κατάλογο με 62 ζεύγη φίλων αριθμών.

Πρώτοι αριθμοί

Δίδυμοι πρώτοι

Ένα από τα χαρακτηριστικότερα προβλήματα που είναι εύκολο να γίνουν κατανοητά είναι εκείνο των «δίδυμων πρώτων», οι οποίοι είναι πρώτοι αριθμοί οι οποίοι διαφέρουν κατά 2 μονάδες. Για παράδειγμα ο 3 με τον 5 ή οι 11 και 13. Ένα σημαντικό σχετικό ερώτημα που παραμένει αναπάντητο είναι αν το πλήθος των δίδυμων πρώτων είναι πεπερασμένο. Αν και, όπως όλοι οι πρώτοι αριθμοί, απαντώνται διαρκώς αραιότερα δεν υπάρχει μία βέβαιη απάντηση. Παρόλο, λοιπόν, που η γνώση μας για το θέμα είναι μεγαλύτερη από εκείνη που είχε ο Ευκλείδης για αυτό το πρόβλημα, δεν έχει ξεκαθαρίσει καθόλου την κατάσταση για μία απάντηση σε αυτό.

Η εικασία του Goldbach

Ένα άλλο πρόβλημα της θεωρίας αριθμών που παραμένει άλυτο στις μέρες μας είναι και η λεγόμενη εικασία του Goldbach· αυτήν την διατύπωση ως ερώτηση προς διερεύνηση ο Christian Goldbach σε μία επιστολή του προς τον L. Euler το 1742 και αναφέρει ότι: «*κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 4 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων*». Αυτή, όπως και πολλά άλλα «εύκολα» προβλήματα της θεωρίας αριθμών μπορεί να διατυπωθεί και να γίνει κατανοητή από τον καθένα εύκολα, μπορεί να ελεγχθεί για μικρούς ακέραιους εύκολα, αλλά δεν έχει καταφέρει ακόμα η μαθηματική κοινότητα να την διαψεύσει ή να την επιβεβαιώσει. Για παράδειγμα 4= 2+2, 6 = 3+3, 8 = 5+3, 10 = 5+5, 12 = 7+5, 14 = 7+7, 16 = 5 + 11, 18 = 11 + 7, κ.ο.κ.

Πρώτοι και τέλεια τετράγωνα

Ο P. Fermat διατύπωσε πολλούς αναπόδεικτους ισχυρισμούς στη θεωρία αριθμών, λιγότερο γνωστούς από το «*Τελευταίο θεώρημα του Fermat* ». Είναι μία εύκολη άσκηση να αποδειχθεί ότι *Κάθε περιττός αριθμός διαιρούμενος με το 4 αφήνει υπόλοιπο 1 ή 3.* Δηλαδή, κάθε περιττός αριθμός γράφεται στη μορφή $4k+1$ ή στη μορφή $4k+3$. Ο Fermat και οι αναπόδεικτοι ισχυρισμοί του έγιναν γνωστοί στον Euler μέσω της επίμονης αλληλογραφίας που είχε με τον C. Goldbach. Ουσιαστικά, αυτός ήταν και ο λόγος που ο Euler ασχολήθηκε και με τη θεωρία αριθμών σε μία εποχή που ο Απειροστικός λογισμός και η Ανάλυση υπήρξαν το κέντρο του ενδιαφέροντος στα μαθηματικά. Το 1640 ο Fermat διατύπωσε την υπόθεση ότι οι πρώτοι της μορφής $4k+1$ μπορούν να γραφούν ως άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων κατά μοναδικό τρόπο, ενώ εκείνοι της μορφής $4k+3$ δεν μπορούν να γραφούν ως άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων κατά κανέναν τρόπο. Για παράδειγμα: $5=4\cdot 1+1=2^2+1^2$, $13=4\cdot 3+1=2^2+3^2$, κ.ο.κ. Την αλήθεια της υπόθεσης αυτής την απέδειξε ο L. Euler το 1747.

Διοφαντικές εξισώσεις

Διόφαντος

Ο Διόφαντος για του οποίου τη ζωή δεν γνωρίζουμε πολλά το πιθανότερο είναι ότι έζησε μεταξύ 210μ.Χ. και 290μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια· θεωρείται ο *«πατέρας της άλγεβρας»* και είναι γνωστός από το βιβλίο του *«Αριθμητικά»*, στο οποίο καταπιάνεται με τη θεωρία αριθμών και τις αλγεβρικές εξισώσεις. Η περίοδος αυτή στην Αλεξάνδρεια θεωρείται ως ο *Αργυρός Αιώνας*, ως η επόμενη σημαντικότερη εποχή μετά το Χρυσό αιώνα του Περικλή στην αρχαία Αθήνα. Υπήρξε μία εποχή, όπου οι μαθηματικοί ανακάλυψαν πολλές από τις ιδέες, οι οποίες βοήθησαν στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών. Για παράδειγμα ο Διόφαντος ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε σύμβολα στην Ελληνική Άλγεβρα, όπως για τους αγνώστους στις εξισώσεις και τις πράξεις μεταξύ των αριθμών. Στο έργο του αριθμητικά αποδεικνύει πολλές προτάσεις της θεωρίας αριθμών, όπως για παράδειγμα ότι: *«κανένας αριθμός της μορφής 8ν+7 δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα τριών τετραγώνων φυσικών αριθμών»*. Στο ίδιο έργο δίνει λύση σε 150 περίπου προβλήματα. Από τα 13 βιβλία που περιείχε το έργο του διασώζονται μόνο τα έξι. Τα άλλα, όπως και πολλά άλλα έργα, πιστεύεται ότι καταστράφηκαν σε κάποια από τις καταστροφές της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας.

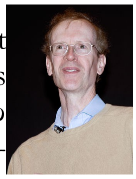
Η βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας

Κατά την Ελληνιστική εποχή οι διάδοχοι του Μ.Αλεξάνδρου κυριάρχησαν και στην Αίγυπτο. Μέσω αυτής της κυριαρχίας προωθήθηκε ο εξελληνισμός της Ανατολής με τη διάδοση των γραμμάτων και της επιστημονικής έρευνας. Σε αυτό το πλαίσιο ιδρύθηκε από τον Πτολεμαίο Α΄(322 – 285 π.Χ.) το Μουσείο και από τον Πτολεμαίο Β΄ (285 – 246 π.Χ.) η βιβλιοθήκη. Η βιβλιοθήκη στεγαζόταν σε δύο μέρη: α) στο Μουσείο, όπου δεν ήταν ελεύθερη η πρόσβαση για όλους παρά μόνο για τους αξιωματούχους των Πτολεμαίων και β) στο Σεράπειο, που αποτελούσε μέρος του ναού του θεού Σεράπιος και βρισκόταν στον τομέα της πόλης που κατοικούσαν κυρίως Αιγύπτιοι.

Σύμφωνα με ιστορικές πηγές η βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας υπέστη τουλάχιστον τέσσερις διαδοχικές καταστροφές. Η πρώτη από αυτές θεωρείται ότι έγινε το 48 π.Χ., την οποία αναφέρουν 6 ιστορικοί, κατά τη διαμάχη μεταξύ του Ιουλίου Καίσαρα και του Πτολεμαίου. Λέγεται ότι η συγκεκριμένη καταστροφή δεν έγινε στο κεντρικό κτήριο, αλλά σε κάποια από τις αποθήκες της. Σύμφωνα, με τον Σενέκα το νεότερο (1ος αι. μ.Χ.), καταστράφηκαν περίπου 40.000 αντίτυπα, δηλαδή ένα μικρό μέρος από τα πλέον 500.000 αντίτυπα που υπήρχαν στη βιβλιοθήκη. Μία ακόμα καταστροφή συνέβη με την εισβολή του αυτοκράτορα Αυρηλιανού, το 273 μ.Χ., όταν υπήρξε επίσης φωτιά σε ένα μεγάλο τμήμα της πόλης. Μάλιστα, θεωρείται ότι σε αυτήν ένα μεγάλο μέρος της βιβλιοθήκης λεηλατήθηκε και μεταφέρθηκε στην Κωνσταντινούπολη, η οποία θα ήταν η νέα πρωτεύουσα της Αυτοκρατορίας. Η τρίτη καταστροφή της βιβλιοθήκης θεωρείται ότι έγινε μετά το 391 μ.Χ., μετά από διάταγμα του αυτοκράτορα Θεοδοσίου για την ερήμωση και καταστροφή όλων των παγανιστικών ναών. Τέλος, το υπόλοιπο της βιβλιοθήκης κατεστράφη το 642 με την αραβική κατάκτηση της Αιγύπτου και σε αυτήν θεωρείται ότι οφείλεται η τελική καταστροφή της Αλεξανδρινής Βιβλιοθήκης. Νεώτεροι ερευνητές υποστηρίζουν ότι με την οριστική καταστροφή της βιβλιοθήκης αυτής, χάθηκαν τα 4/5 της Αρχαίας Ελληνικής Γραμματείας. Οι καταστροφές και οι λεηλασίες λοιπόν της βιβλιοθήκης οδήγησαν αρκετά από τα αντίτυπα σε Χριστιανικά μοναστήρια και ιδιωτικές συλλογές αράβων, μέσω αντιγραφών και μεταφράσεων των οποίων διασώθηκαν κάποια από τα έργα της Αρχαίας Ελληνικής Γραμματείας.

Διοφαντικές Εξισώσεις

Διοφαντική εξίσωση λέγεται μία εξίσωση στην οποία υπάρχουν δύο ή περισσότεροι άγνωστοι και για την οποία αναζητούμε τις ακέραιες τιμές των αγνώστων που την ικανοποιούν. Σε μία διοφαντική εξίσωση ενδιαφερόμαστε για το αν έχει λύσεις, πιο είναι το πλήθος των λύσεών της και αν μπορούμε φυσικά να τις βρούμε. Υπάρχουν εξισώσεις που δεν έχουν καθόλου ακέραιες λύσεις όπως η $3x+6y=2$ άλλες για τις οποίες γνωρίζουμε πώς ακριβώς να τις λύσουμε $x^2+y^2=z^2$ που μας δίνει τις πυθαγόρειες τριάδες ή οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις της μορφής $ax+by=c \ \ \mu\varepsilon \ \ a,b,c\in\mathbb{Z}$ και άλλες που μόλις πρόσφατα αποδείχθηκε ότι δεν έχουν ακέραιες λύσεις όπως η εξίσωση του Fermat $x^n+y^n=z^n, \ \ \gamma\iota\alpha \ \ n\geq 3$.


Andrew Wiles

Την μη ύπαρξη μη τετριμμένων ακέραιων λύσεων αυτής της εξίσωσης την είχε εικάσει ο Fermat το 1637 και την απέδειξε ο A.Wiles μόλις το 1995 σε ένα άρθρο του 109 σελίδων στο Annals of Mathematics, μετά από πολυετή ενασχόληση μόνο με το συγκεκριμένο πρόβλημα και αφού χρησιμοποίησε ιδέες και εργασίες πολλών άλλων μαθηματικών ακόμα , μερικοί από τους οποίους είναι: Tunnell, Eichler, Shimura, Deligne, Carayol, Serre, Hida, Mazur, Dirichlet, Birch, Swinnerton-Dyer, Iwasawa, Poitou, Tate, Faltings, Frey, Boston, Ramakrishna, Kunz, Rubin, Kolyvagin, Coates, Schmidt, Flach, de Shalit, R.Taylor, N. Katz, Illusie, Bloch, Kato, Raynaud, Schlessinger, Nakayama, Diamond, Kuyk, Lenstra, Boston, Rapoport, Dickson, Fontaine, Hellegouarch, Linve, Schoof, Wintenberger, καθώς επίσης και μία σύγχρονη θεωρία των μαθηματικών, αυτήν των ελλειπτικών καμπυλών. Αποτελεί ένα παράδειγμα της αναγκαιότητας για υπομονή, επιμονή και συνεργασία στη μαθηματική έρευνα. Επίσης, υπάρχουν και άλλες διοφαντικές εξισώσεις για τις οποίες μπορούμε να βρίσκουμε άπειρες λύσεις, αλλά όχι όλες, όπως η $x^3+y^3+z^3=2$ για την οποία οι τριάδες $(x,y,z)=(1+6n^3, 1-6n^3, -6n^2), \ n\in\mathbb{N}$ αποτελούν λύσεις. Γενικότερα, η επίλυση διοφαντικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του 2ου αποτελεί ένα ανοικτό μαθηματικό πρόβλημα, καθώς δεν έχουν βρεθεί γενικοί τύποι επίλυσης. Μάλιστα υπήρξε και ένα από τα βασικά προβλήματα που διατύπωσε ο D. Hilbert το 1900, η αναζήτηση ενός αλγόριθμου επίλυσης μιας διοφαντικής εξίσωσης με οποιοδήποτε αριθμό αγνώστων, μέχρι να αποδειχθεί το 1970 ότι δεν υπάρχει τέτοιος αλγόριθμος.

Με τις διοφαντικές εξισώσεις γενικότερα ασχολήθηκαν πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί, όπως οι Fermat, Euler, Gauss και άλλοι. Στο παρόν παρακάτω αναλύονται οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις.

Επίλογος

Τελικά, είναι η θεωρία αριθμών ενδιαφέρουσα μόνο επειδή μπορεί να βρει κανείς προτάσεις και υποθέσεις εύκολα κατανοητές με αποδείξεις ή μη αποδείξεις που προκαλούν δέος; Στην πραγματικότητα αποτελεί στις μέρες μας έναν από τους κλάδους με πολύ σημαντικές εφαρμογές στην καθημερινότητά μας. Η ασφάλεια δεδομένων και η κρυπτογραφία που βρίσκουν εφαρμογή σήμερα στηρίζονται στις πιο διαδεδομένες περιπτώσεις στη θεωρία αριθμών. Ένας από τους περισσότερο διαδεδομένους αλγορίθμους κρυπτογράφησης που χρησιμοποιούνται, ο **RSA** (**R**ivest, **S**hamir, **A**dleman) στηρίζεται στην δυσκολία που παρουσιάζει η παραγοντοποίηση ενός μεγάλου σύνθετου αριθμού σε πρώτους αριθμούς, για την οποία αν και διαθέτουμε ταχύτατους αλγορίθμους παραγοντοποίησης, δεν είναι πάντα εφικτή η δράση τους σε σύντομο χρονικό διάστημα, όταν ο σύνθετος αριθμός μεγαλώνει αρκετά (πχ έχει μήκος περισσότερο από 256 δυαδικά ψηφία). Έτσι, για άλλη μία φορά, ένα απλό αποτέλεσμα της θεωρίας αριθμών οδηγεί σε ένα επαρκώς δύσκολα επιλύσιμο σε πραγματικό χρόνο πρόβλημα, που όμως αυτήν τη φορά είναι και το επιθυμητό. Στην ανάλυση της θεωρίας και τις ασκήσεις που ακολουθούν ευχόμαστε να ζήσετε ένα παρόμοιο ταξίδι με αυτό που η θεωρία αριθμών έχει προσφέρει στους μαθηματικούς – και όχι μόνο – στο πέρασμα των αιώνων.

Θεωρία

Αναλύοντας και λύνοντας ένα πρόβλημα

Η επίλυση ενός προβλήματος είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα διαδικασία και απαιτεί συνδυασμό πολλών δεξιοτήτων, όπως επιμονή, υπομονή, ευελιξία στη σκέψη, οργάνωση.

Ας δούμε ένα παράδειγμα ανάλυσης και επίλυσης ενός προβλήματος από τη θεωρία αριθμών.

Πρόβλημα: Να βρεθεί το πλήθος των φυσικών αριθμών, οι οποίοι είναι μικρότεροι του 150 και στη διαίρεσή τους με το 7 αφήνουν υπόλοιπο 3, ενώ στη διαίρεσή τους με το 5 αφήνουν υπόλοιπο 4.

Για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε ένα πρόβλημα πρέπει καταρχάς να προσδιορίσουμε σε ποια γνωστική ενότητα ανήκει και πώς ενδεχομένως θα μας φανούν χρήσιμες οι γνώσεις μας που έχουμε σε αυτήν την ενότητα, πώς θα τις προσαρμόσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση και πώς ενδεχομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γνώσεις και από άλλη γνωστική ενότητα.

Βήμα 1: Μελετούμε το πρόβλημα προσεκτικά και προσδιορίζουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενά του. Δηλαδή το καταλαβαίνουμε.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ζητούνται φυσικοί αριθμοί με τις εξής ιδιότητες (δεδομένα) να τις έχουν ταυτόχρονα:

α) Φυσικοί αριθμοί μικρότεροι από το 100,

β) Φυσικοί αριθμοί που όταν διαιρούνται με το 7 αφήνουν υπόλοιπο 3,

γ) Φυσικοί αριθμοί που όταν διαιρούνται με το 5 αφήνουν υπόλοιπο 4.

Βήμα 2: Ανάκληση σχετικών με τα δεδομένα και τα ζητούμενα γνώσεων.

Δηλαδή, στη συγκεκριμένη περίπτωση πάλι αναζητούμε φυσικούς αριθμούς μικρότερους του 150, άρα κάποιους από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99. Με λίγα λόγια ανακαλούμε τι ακριβώς σημαίνει το ζητούμενο **φυσικοί αριθμοί** και **μικρότεροι του 100.** Στη συνέχεια αναλύουμε και ανακαλούμε γνώσεις που έχουμε για τα δεδομένα. Εδώ οι ιδιότητες β) και γ), που είναι δεδομένες, αναφέρονται στη διαίρεση ενός αριθμού με το 7 και το 5, καθώς επίσης και το υπόλοιπο που προκύπτει σε κάθε περίπτωση. Είναι λογικό λοιπόν να σκεφτούμε, αν έχουμε κάποιες γνώσεις για τη **διαίρεση φυσικών αριθμών**, το **υπόλοιπο της διαίρεσης με 7 και 5** και το **πηλίκο της διαίρεσης.** Ανακαλούμε λοιπόν την ταυτότητα της διαίρεσης για φυσικούς αριθμούς:

Ταυτότητα διαίρεσης των φυσικών αριθμών: Αν δίνονται οι αριθμοί Δ και δ φυσικοί, που ονομάζονται Διαιρεταίος και διαιρέτης αντίστοιχα, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, οι οποίοι καλούνται πηλίκο και υπόλοιπο της διαίρεσης αντίστοιχα, ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\Delta=\pi\cdot\delta+\upsilon \quad \text{και} \quad 0\leq\upsilon<\delta .$$

Βήμα 3: Προσαρμογή των γενικότερων ιδεών στο πρόβλημα.

Μεταφέροντας αυτήν την ιδέα στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να γράψουμε ότι οι ζητούμενοι φυσικοί αριθμοί ικανοποιούν τις σχέσεις:

$\Delta=7\cdot\pi+3,\ \pi\in\mathbb{N}$ και $\Delta=\rho\ \cdot 5+4,\ \rho\in\mathbb{N}$

Από αυτές τις δύο σχέσεις εξισώνοντας τα δύο μέλη έχουμε: $7\pi+3=5\rho+4\Rightarrow 7\pi-5\rho=1$ τώρα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η προηγούμενη σχέση ικανοποιείται για τα ζεύγη π και ρ, ώστε: $(\pi,\rho)=(3,4),(8,11),(13,18)$ που δίνουν αντίστοιχα τους αριθμούς $\Delta=7\cdot3+3=24, \Delta=7\cdot8+3=59,\ \Delta=7\cdot13+3=94, \Delta=7\cdot18+3=129$ με την τελευταία να απορρίπτεται αφού είναι μεγαλύτερη του 100.

Μία άλλη μέθοδος αντιμετώπισης, αφού το πρόβλημα αναφέρεται σε μόλις 100 αριθμούς, μπορεί να είναι η πλήρης « εξάντληση » των περιπτώσεων (σε άλλες περιπτώσεις και του λύτη του προβλήματος), αφού μπορούμε να βάλουμε στη σειρά όλους τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4, ..., 100 και να κρατήσουμε εκείνα τα πολλαπλάσια του 7 που αφήνουν υπόλοιπο 3 και τα οποία είναι τα εξής στη συγκεκριμένη περίπτωση: 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73, 80, 87, 94. Στη συνέχεια από αυτούς τους αριθμούς θα βρούμε εκείνους που στη διαίρεση με 5 αφήνουν υπόλοιπο 4 και είναι οι εξής: $24=4\cdot5+4,\ 59=5\cdot11+4, 94=5\cdot18+4$. Φυσικά, η αντιμετώπιση του προβλήματος με αυτόν τον τρόπο δε θα ήταν εφικτή, αν ο αριθμοί που αναζητούσαμε εκτείνονταν σε μεγαλύτερο εύρος για παράδειγμα μέχρι το 1000 ή το 10000. Παρόλα αυτά, αν αναμοχλεύσουμε λίγο περισσότερο τις γνώσεις μας στη διαιρετότητα μπορούμε να σκεφτούμε το εξής: Αν ένας αριθμός διαιρείται από το 5 και το 7 τότε θα διαιρείται και από το γινόμενό τους το 35, το οποίο προκύπτει ως εφαρμογή της πρότασης « *Αν δύο αριθμοί* p, q *είναι πρώτοι μεταξύ τους και διαιρούν έναν αριθμό* α *τότε θα και το γινόμενό τους* $p\cdot q$ *θα διαιρεί τον* α. ». Βέβαια στην συγκεκριμένη περίπτωση οι ζητούμενοι αριθμοί δε διαιρούνται με το 5, ούτε με το 7, οπότε θα γράφονται στη μορφή $\Delta=35\kappa+\upsilon$ και εφόσον διαιρούμενοι με το 7 αφήνουν υπόλοιπο 3 θα είναι της μορφής: $35\kappa+3,\ 35\kappa+10,\ 35\kappa+17,\ 35\kappa+24,\ 35\kappa+31$ ενώ κάθε επόμενος ανήκει σε μία από τις προηγούμενες κατηγορίες. Συνεπώς, εξετάζοντας ποιο από τους παραπάνω αφήνουν υπόλοιπο 4 διαιρούμενοι με το 5 θα προκύψουν οι ζητούμενοι. Πράγματι, ο $35\kappa+3$ αφήνει υπόλοιπο 3, ο $35\kappa+10$ διαιρείται ακριβώς από το 5, ο $35\kappa+17$ αφήνει υπόλοιπο 2 με το 5, ενώ ο $35\kappa+24$ αφήνει υπόλοιπο 4 διαιρούμενος με το 5 και τέλος ο $35\kappa+31$ αφήνει υπόλοιπο 1. Συνεπώς, οι αριθμοί της μορφής $35\kappa+24$ είναι οι ζητούμενοι, όπου αντικαθιστώντας το κ με τις τιμές κ = 0, 1, 2 παίρνουμε τους αριθμούς: 24, 59, 94, όπως βρήκαμε και στις προηγούμενες λύσεις.

Δεκαδική αναπαράσταση ενός αριθμού.

Κάθε αριθμός στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα πολλαπλασίων δυνάμεων του 10. Συγκεκριμένα, ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για μία τέτοια ανάλυση είναι $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0}=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots+a_3\cdot10^3+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10^1+a_0\cdot10^0$. Δηλαδή το τελευταίο ψηφίο δεξιά είναι το ψηφίο των μονάδων, το δεύτερο από δεξιά είναι εκείνο των δεκάδων, το τρίτο από δεξιά είναι εκείνο των εκατοντάδων κ.ό.κ. Έτσι για παράδειγμα στον αριθμό 132 έχουμε $\alpha_0=2, \alpha_1=3, \alpha_2=1$ και ο αριθμός γράφεται: $132=1\cdot10^2+3\cdot10^1+2\cdot10^0=1\cdot100+3\cdot10+2\cdot1$. Θα γίνει εμφανές στα επόμενα ότι η δεκαδική αναπαράσταση ενός αριθμού μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε διάφορες περιπτώσεις.

Εφαρμογή 1. (Θαλής 2002) Να βρεθούν οι διψήφιοι αριθμοί οι οποίοι είναι ίσοι με το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένων κατά 2 το καθένα.

Έστω $\overline{\alpha\beta}$ οι ζητούμενοι αριθμοί στη δεκαδική τους αναπαράσταση. Τότε από τα δεδομένα ισχύει ότι: $\overline{\alpha\beta}=(\alpha+2)(\beta+2)\Leftrightarrow 10\alpha+\beta=\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4\Leftrightarrow 8\alpha-\alpha\beta=\beta+4\Leftrightarrow \alpha(8-\beta)=\beta+4,\ \mu\varepsilon\ \ 0<\alpha\leq9$.

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση τις δυνατές τιμές του α βρίσκουμε αποδεκτούς αριθμούς τους: $12, 24, 35, 56$.

Άσκηση 1. (Ευκλείδης Γ Γυμνασίου 2008) Έστω ο αριθμός $A=\overline{\alpha\beta\gamma}, \alpha\neq0$. Εναλλάσσοντας το 1ο με το 3ο ψηφίο προκύπτει ο ακέραιος Β, μικρότερος του ακεραίου Α κατά 396. Αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που είναι ίσος με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρεθεί ο Α.

Αναπαράσταση ενός αριθμού σε οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης.

Με τον ίδιο τρόπο που μπορούμε να γράφουμε έναν αριθμό ως άθροισμα πολλαπλασίων δυνάμεων του 10 μπορούμε να το κάνουμε και με οποιαδήποτε βάση δυνάμεων φυσικού ενός φυσικού αριθμού κ. Για παράδειγμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως βάση δυνάμεων τον αριθμό 2 και τότε τα πολλαπλάσια των δυνάμεων του 2 που θα προκύψουν θα μας δώσουν τον αριθμό στη δυαδική αναπαράστασή του, η οποία χρησιμοποιείται και στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Έτσι ο αριθμός 16 στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης γράφεται: $1\cdot10+6\cdot1$ και στο δυαδικό σύστημα, όπου τα ψηφία μπορούν να είναι το 0 και το 1 μόνο, μεταφέρεται: $1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0=(10000)_2$ όπου ο δείκτης 2 στο τέλος δείχνει τη βάση αρίθμησης που χρησιμοποιείται.

Από την Ευκλείδια διαίρεση...

Μία διαίρεση λέγεται **τέλεια**, αν το υπόλοιπό της $\upsilon=0$. Τότε ο διαιρεταίος γράφεται: $\Delta=\pi\cdot\delta$ και λέμε ότι ο δ **διαιρεί τον Δ**, ή ο δ είναι **παράγοντας** του Δ ή ακόμα ότι ο Δ **διαιρείται από τον δ.** Επίσης ο Δ λέγεται **πολλαπλάσιο του δ**.

Διαίρεση με το 2

Η ταυτότητα της διαίρεσης με το 2 γράφεται: $\Delta=2\cdot\pi+\upsilon,\ \upsilon=0\ \acute{\eta}\ 1$, με $\Delta,\delta,\upsilon,\pi$ ακέραιους. Κάθε αριθμός που στη διαίρεσή του με το 2 αφήνει υπόλοιπο 1 λέγεται **περιττός**, οπότε γράφεται στη μορφή $\Delta=2\cdot\pi+1$. Ενώ κάθε αριθμός που αφήνει υπόλοιπο 0 στη διαίρεσή του με το 2 λέγεται **άρτιος** και γράφεται στη μορφή $\Delta=2\cdot\pi$.

Κάθε αριθμός ο οποίος έχει ως τελικό ψηφίο 0, 2, 4, 6, 8 διαιρείται με το 2.

Πράγματι, για τους μονοψήφιους αριθμούς μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι γράφονται ως πολλαπλάσια του 2. Κάθε άλλος αριθμός γράφεται σε μία από τις μορφές: $10\cdot\kappa+2,\ 10\cdot\kappa+4,\ 10\cdot\kappa+6,\ 10\cdot\kappa+8,\ 10\cdot\kappa+0$, οι οποίες ισοδύναμα μπορούν να γραφούν ως πολλαπλάσια του 2: $2(5\cdot\kappa+1),\ 2(5\cdot\kappa+2),\ 2(5\cdot\kappa+3),\ 2(5\cdot\kappa+4),\ 2(5\cdot\kappa+0)$ άρα διαιρούνται με 2.

Εφαρμογή 2. Να αποδειχθούν τα εξής:

α)Το άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος. β) Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος.

Απόδειξη: Έστω δύο άρτιοι αριθμοί α, β. Τότε αυτοί θα γράφονται α = 2κ και β = 2λ, όπου κ, λ ακέραιοι.

Οπότε το άθροισμά τους θα είναι α+ β = 2κ + 2λ = 2 (κ+λ). Όμως το άθροισμα δύο ακεραίων είναι ακέραιος οπότε ο κ+λ ακέραιος· συνεπώς ο 2(κ+λ) άρτιος, δηλαδή και ο α+β άρτιος.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το άθροισμα δύο περιττών είναι περιττός.

Εφαρμογή 3. Να βρεθεί αν είναι σωστός ο παρακάτω συλλογισμός.

Κάθε ακέραιος αριθμός α είναι άρτιος, διότι μπορεί να γραφεί: $\alpha=2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)$

Άσκηση 2. Να αποδειχθεί ότι αν α άρτιος τότε και ο α^{ν} είναι άρτιος για κάθε ν φυσικό, ν>1.

Άσκηση 3. Να αποδειχθεί ότι αν ο α^{ν} είναι άρτιος, τότε και ο α είναι άρτιος.

Άσκηση 4. Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.

Άσκηση 5. Αν ο ακέραιος α δε διαιρείται από το 5 και ο $\alpha^2+2\alpha+3$ είναι άρτιος, τότε να αποδειχθεί ότι ο α μπορεί να λήγει σε 1, 3, 7 ή 9 μόνο.

Εφαρμογή 4. Αν α περιττός, τότε $\alpha^2=\pi o\lambda 8+1$.

Απόδειξη: Έστω α περιττός, τότε υπάρχει κ ακέραιος ώστε $\alpha=2\kappa+1\Rightarrow a^2=(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=$ $=4(\kappa^2+\kappa)+1=4\kappa(\kappa+1)+1$. Όμως ο κ(κ+1) είναι άρτιος άρα γράφεται στη μορφή κ(κ+1) = 2λ. Συνεπώς, τελικά $\alpha=4\cdot2\lambda+1=8\lambda+1$.

Διαίρεση με το 3

Ένας αριθμός διαιρείται με το 3, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

Κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή δεκαδικού αναπτύγματος: $\alpha_0+\alpha_1\cdot10+a_2\cdot10^2+a_3\cdot10^3+\ldots+a_n\cdot10^n$, όπου οι αριθμοί $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον τριψήφιο 261. Αυτός γράφεται: $261=2\cdot100+6\cdot10+1$. Αν στη συνέχεια διαχωρίσουμε τις δυνάμεις του 10 σε πολλαπλάσια του 3 συν ό,τι περισσεύει έχουμε: $2\cdot100+6\cdot10+1=2\cdot(99+1)+6\cdot(9+1)+1=2\cdot99+2+6\cdot9+6+1=(2\cdot33+6\cdot3)\cdot3+2+6+1$. Πα ρατηρούμε ότι « περισσεύει » το άθροισμα των ψηφίων του αρχικού αριθμού: 2 + 6 + 1 το οποίο αν διαιρείται από το 3, τότε μπορεί να εξαχθεί κοινός παράγοντας στην προηγούμενη ισότητα ο αριθμός 3, οπότε ο αρχικός αριθμός διαιρείται με το 3.

Διαίρεση με το 4

Ένας αριθμός διαιρείται με το 4, αν και μόνο αν ο αριθμός που αποτελείται από τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρείται από το 4. Για παράδειγμα ο 1111111111111111111111221328 διαιρείται από το 4. Γιατί όμως συμβαίνει αυτό;

Στη δεκαδική αναπαράσταση κάθε αριθμού μπορούμε να οδηγηθούμε στη μορφή: $\alpha\cdot 100+\beta\cdot 10+\gamma$ όπου οι αριθμοί α, β, γ είναι ακέραιοι, ο α οποιοσδήποτε, ενώ οι β,γ μονοψήφιοι. Ο αριθμός $\beta\cdot 10+\gamma$ είναι ο αριθμός που αποτελείται από τα δύο τελευταία ψηφία του οποιουδήποτε αρχικού αριθμού. Αν αυτός διαιρείται από το 4 τότε θα γράφεται στη μορφή $4\cdot\kappa$. Οπότε θα έχουμε για τον αρχικό αριθμό: $\alpha\cdot 100+\beta\cdot 10+\gamma=4\cdot a\cdot 25+4\cdot\kappa=4\cdot(a\cdot 25+\kappa)$ ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 4.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω κανόνα έχουμε ότι ο 123216 διαιρείται από το 4, διότι ο αριθμός που αποτελείται από τα δύο τελευταία ψηφία του είναι ο 16, ο οποίος διαιρείται από το 4. Επίσης, ο αριθμός μπορεί να γραφεί: $123216=1232\cdot 100+16=4\cdot(1232\cdot 25+4)$ το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 4.

Διαίρεση με το 5

Κάθε αριθμός ο οποίος λήγει σε 0 ή 5 διαιρείται με το 5.

Πράγματι ένας αριθμός που έχει τελευταίο ψηφίο το 0, γράφεται στη μορφή $10\kappa=5\cdot 2\kappa$ άρα διαιρείται με το 5. Ένας αριθμός με τελευταίο ψηφίο το 5 γράφεται στη μορφή: $10\cdot\kappa+5=5\cdot(2\cdot\kappa+1)$ οπότε επίσης διαιρείται από το 5.

Διαίρεση με το 6

Κάθε άρτιος αριθμός που διαιρείται με το 3 θα διαιρείται και με το 6.

Προφανώς μπορεί να γραφεί στη μορφή: $2\kappa=2\cdot 3\lambda=6\cdot\lambda$ δηλαδή διαιρείται με το 6.

Διαίρεση με το 7

Αν διπλασιάσουμε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού, το αφαιρέσουμε από τον υπόλοιπο αριθμό και ότι μένει ως υπόλοιπο διαιρείται με το 7, τότε και ο αρχικός αριθμός διαιρείται με το 7.

Μπορεί να χρειαστεί να επαναλάβουμε περισσότερες από μία φορές τη διαδικασία.

Για παράδειγμα ας ελέγξουμε τον αριθμό: 178136. Έχουμε: $17813-2\cdot 6=17813-12=17801$ και συνεχίζουμε αφού δεν γνωρίζουμε αν διαιρείται ο 17801:

$17801\to 1780-2\cdot 1=1778\to 177-2\cdot 8=177-16=161\to 16-2\cdot 1=14$ το οποίο 14 διαιρείται με το 7, οπότε και όλοι οι προηγούμενοι διαιρούνται με το 7 · συνεπώς και ο 178136 διαιρείται με το 7. Πράγματι γράφεται: $178136=7\cdot 25448$.

Για την απόδειξη της ιδιότητας αυτής θα χρησιμοποιήσουμε τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών. Κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή: $10\alpha+\beta$ διότι από τη δεκαδική αναπαράστασή του και εξάγοντας κοινό παράγοντα από όλους τους προσθεταίους εκτός εκείνου των μονάδων έχουμε:

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2}\dots a_2 a_1 a_0}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\dots+a_3\cdot 10^3+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0=$$
$$10\cdot(a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\dots+a_3\cdot 10^2+a_2\cdot 10+a_1)+a_0\cdot 10^0=10\cdot\beta+\alpha.$$

Πρόταση: Αν ο $\beta-2\alpha$ διαιρείται από το 7, τότε και $10\cdot\beta+\alpha$ διαιρείται από το 7.

Πράγματι, εφόσον ο $\beta-2\alpha$ διαιρείται από το 7 θα γράφεται: $\beta-2\alpha=7\cdot\kappa,\kappa\in\mathbb{N}$. Οπότε έχουμε: $10\beta-20\alpha=70\kappa\Rightarrow 10\beta-20\alpha+\alpha=70\kappa+\alpha\Rightarrow 10\beta+\alpha=70\kappa+21\alpha\Rightarrow 10\beta+\alpha=7\cdot(10\kappa+3\alpha)$. Συνεπώς, ο αρχικός αριθμός διαιρείται με το 7.

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο, το οποίο θα το δούμε ως άσκηση μετά τις ιδιότητες της διαιρετότητας.

Άσκηση 6. Να βρεθεί το πλήθος των αριθμών μεταξύ των 1, 2, 3, ..., 1000 οι οποίοι δε διαιρούνται από το 5 και το 7.

Διαίρεση με το 8

Ένας αριθμός διαιρείται από το 8, αν ο αριθμός που προκύπτει από τα τρία τελευταία ψηφία του διαιρείται από το 8. Αν και δεν πρόκειται για ένα πολύ βολικό κριτήριο, αφού συνήθως δεν είναι απλό να καταλάβει κανείς αν ένας τριψήφιος αριθμός διαιρείται από το 8 · παρόλα αυτά μπορεί να ευρεθεί εύκολα αν ο τριψήφιος διαιρείται από το 8, ελέγχοντας απλά αν διαιρείται από 2 τρεις φορές.

Γιατί όμως λειτουργεί αυτό το κριτήριο;

Στη δεκαδική αναπαράσταση κάθε αριθμού μπορούμε να οδηγηθούμε στη μορφή: $\alpha\cdot 1000+\beta\cdot 100+\gamma\cdot 10+\delta$ όπου οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι ακέραιοι, ο α οποιοσδήποτε, ενώ οι β,γ μονοψήφιοι. Ο αριθμός $\beta\cdot 100+\gamma\cdot 10+\delta$ είναι ο αριθμός που αποτελείται από τα τρία τελευταία ψηφία του οποιουδήποτε αρχικού αριθμού. Αν αυτός διαιρείται από το 8 τότε θα γράφεται στη μορφή $8\cdot\kappa$. Οπότε θα έχουμε για τον αρχικό αριθμό: $\alpha\cdot 1000+\beta\cdot 100+\gamma\cdot 10+\delta=8\cdot a\cdot 125+8\cdot\kappa=8\cdot(a\cdot 25+\kappa)$ ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 8.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω κανόνα έχουμε ότι ο 122812520 διαιρείται από το 8, διότι ο αριθμός που αποτελείται από τα τρία τελευταία ψηφία του είναι ο $520=2\cdot 2\cdot 2\cdot 65$, ο οποίος διαιρείται από το 8. Επίσης, ο αριθμός μπορεί να γραφεί: $122812520=122812\cdot 1000+520=8\cdot(122812\cdot 125+65)$ το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 8.

Διαίρεση με το 9

Ένας αριθμός διαιρείται με το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

Κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή δεκαδικού αναπτύγματος: $\alpha_0+\alpha_1\cdot 10+a_2\cdot 10^2+a_3\cdot 10^3+\ldots+a_n\cdot 10^n$, όπου οι αριθμοί $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον τριψήφιο 261. Αυτός γράφεται: $261=2\cdot 100+6\cdot 10+1$. Αν στη συνέχεια διαχωρίσουμε τις δυνάμεις του 10 σε πολλαπλάσια του 9 συν ό,τι περισσεύει έχουμε: $2\cdot 100+6\cdot 10+1=2\cdot(99+1)+6\cdot(9+1)+1=2\cdot 99+2+6\cdot 9+6+1=(2\cdot 11+6)\cdot 9+2+6+1$. Παρατηρούμε ότι « περισσεύει » το άθροισμα των ψηφίων του αρχικού αριθμού: 2 + 6 + 1 το οποίο αν διαιρείται από το 9, τότε μπορεί να εξαχθεί κοινός παράγοντας στην προηγούμενη ισότητα ο αριθμός 9, οπότε ο αρχικός αριθμός διαιρείται με το 9.

Διαίρεση με το 10

Εύκολα αποδεικνύεται ότι *με το 10 διαιρούνται όσοι αριθμοί έχουν τελευταίο ψηφίο 0*.

Διαίρεση με το 11

Ένας αριθμός διαιρείται με το 11, αν το εναλλασσόμενο άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται από το 11.

Για παράδειγμα ο αριθμός 12321 δεν διαιρείται από το 11, διότι το εναλλασσόμενο άθροισμα των ψηφίων του είναι: $1-2+3-2+1=1$ ενώ ο αριθμός 16335 διαιρείται, διότι: 1 – 6 + 3 – 3 + 5 = 0. Ομοίως και ο 57729364583 διαιρείται διότι: 5-7+7-2+9-3+6-4+5-8+3 = 11 . Γιατί όμως λειτουργεί αυτό το κριτήριο;

Θεωρούμε την δεκαδική αναπαράσταση του αριθμού: $\alpha_0+\alpha_1\cdot 10+a_2\cdot 10^2+a_3\cdot 10^3+\ldots+a_n\cdot 10^n$. Κάθε δύναμη του 10 μπορεί να γραφεί ως ***πολλαπλάσιο του*** 11 ± 1 όπως για παράδειγμα βλέπουμε παρακάτω:

$$10^0=1=0\cdot 11+1,\ 10=11-1,\ 100=9\cdot 11+1,\ 1000=(11-1)^3=11^3-3\cdot 11^2+3\cdot 1-1=11(121-33+3)-1=$$

$=11\cdot 91-1=1001-1$ και ομοίως οι υπόλοιπες. Οπότε τελικά η δεκαδική αναπαράσταση του αριθμού μετατρέπεται σε άθροισμα πολλαπλασίων του 11 και των ψηφίων του αριθμού.

Το τελευταίο ψηφίο ενός αριθμού

Καταρχάς ας δούμε πώς υπολογίζουμε τις δυνάμεις ενός ψηφίου. Για παράδειγμα για το 2 έχουμε: $2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64,\ldots$ δηλαδή εξαιρουμένης της μηδενικής δύναμης στις υπόλοιπες δυνάμεις ανακυκλώνονται ως τελευταία ψηφία τα $2,4,8,6$. Ομοίως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχους κανόνες και για τα υπόλοιπα ψηφία, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

1	1	1	1	1
2	2	4	8	6
3	3	9	7	1
4	4	6	4	6
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	9	3	1
8	8	4	2	6
9	9	1	9	1
0	0	0	0	0

Έτσι για παράδειγμα ο αριθμός 1524 αν υψωθεί στην 4, αναμένουμε να προκύψει αριθμός που λήγει σε 6. Πράγματι $1524^4=5394359275776$. Λόγω αυτής της «ανακύκλωσης» των αποτελεσμάτων των ψηφίων που εμφανίζονται και της επανάληψής τους ανά τέσσερα για να υπολογίσουμε το τελευταίο ψηφίο της δύναμης ν ενός αριθμού βρίσκουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτού του αριθμού με το 4 και σκεφτόμαστε όπως στον παραπάνω πίνακα. Έτσι $1524^{2014}=1524^{4\cdot 503+2}$ ο οποίος θα έχει τελευταίο ψηφίο ίδιο με τον 4^2 δηλαδή το 6.

Αν τώρα συμβολίσουμε με τ(α) το τελευταίο ψηφίου του αριθμού α, τότε ισχύουν τα εξής:

τ(α+β) = τ(α) + τ(β) και τ(α β) = τ(α) τ(β).

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι στην τρίτη στήλη του παραπάνω πίνακα όπου εμφανίζονται τελευταία ψηφία δυνάμεων αριθμών του 2 (ή υπολοίπων 2) δεν υπάρχουν τα ψηφία 2, 3, 7, 8. Δηλαδή ένας αριθμός ο οποίος έχει ως τελευταίο ψηφίο κάποιο από αυτά δεν μπορεί να είναι αποτέλεσμα ύψωσης κάποιου άλλου φυσικού αριθμού στο τετράγωνο.

Εφαρμογή 5. **Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $1024^{2014}+2022^{2014}$ διαιρείται με το 10.**

Πράγματι, θα έχουμε:

$$\tau(1024^{2014}+2022^{2014})=\tau(1024^{2014})+\tau(2022^{2014})=\tau(1024^{4\cdot 503+2})+\tau(2022^{4\cdot 503+2})=\tau(4^2)+\tau(2^2)=$$
$$=\tau(16)+\tau(4)=\tau(10)=0.$$

Εφαρμογή 6. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός: $\alpha=1^1+2^2+3^3+\ldots+10^{10}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αρκεί το τελευταίο του ψηφίο να είναι ένα από τα 2, 3, 7 και 8. Υπολογίζουμε το τελευταίο του ψηφίο: $\tau(1^1+2^2+3^3+\ldots+10^{10})=\tau(1^1)+\tau(2^2)+\tau(3^3)+\ldots+\tau(10^{10})=$ $=\tau(1+4+7+6+5+6+3+6+9+0)=\tau(47)=7$ το οποίο είναι 7, συνεπώς ο αριθμός α δεν μπορεί να γραφεί ως τετράγωνο άλλου αριθμού.

Άσκηση 7. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha=1^{99}+2^{99}+3^{99}+4^{99}$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

Άσκηση 8. Να εξεταστεί αν ο αριθμός $\alpha=6^{100}+7^{50}$ διαιρείται με το 2 ή το 5.

Άσκηση 9. (Θαλής 2007 Γ' Γυμνασίου) α) Αν $\alpha\in\mathbb{N}$ είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο ψηφίο του α είναι ένα από τα 0, 1, 4, 5, 6, 9.

β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός $A=\overline{\alpha\alpha\alpha\beta\beta}, \alpha \neq 0,$ ώστε να είναι τετράγωνο φυσικού, περιττός και να διαιρείται με το 9.

Άσκηση 10. (Ευκλείδης 2007 Γ' Γυμνασίου) Δίνεται ο αριθμός $A=2^{92}\cdot 5^{90}\cdot 3^{4}\cdot 7^{2}.$ Να βρεθεί σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό του ψηφίο.

Άσκηση 11. Έστω ν φυσικός. Να αποδειχθεί ότι το τελευταίο ψηφίο του ν ισούται με το τελευταίο ψηφίο του ν^5.

Άσκηση 12. Να εξεταστεί αν ο αριθμός $\underbrace{111\ldots 11}_{2014\,\psi\eta\varphi\iota\alpha}$ είναι πρώτος.

Άσκηση 13. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα πέντε διαδοχικών ακεραίων διαιρείται από το 5.

Διαιρετότητα

Βασικές ιδιότητες

Ορισμός 1. Ο ακέραιος $\alpha \in \mathbb{Z}$ **διαιρεί** τον $\beta \in \mathbb{Z}$ και συμβολίζουμε $\alpha | \beta$ αν ισχύει ότι $\alpha = \pi \cdot \beta + 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi o\lambda(\beta)$ δηλαδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του α από τον β είναι μηδέν, τότε ο α λέγεται **πολλαπλάσιο του β** και γράφουμε **α = πολ(β).**

Εύκολα από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτουν οι εξής ιδιότητες για μη μηδενικούς ακέραιους α, β, γ:

Πρόταση 1. Για κάθε ακέραιο αριθμό α ισχύουν: α) $1|\alpha$ β) $\alpha|\alpha$ γ) $\alpha|0$

Πράγματι σε κάθε μία από τις περιπτώσεις ισχύει: α) $\alpha = \alpha \cdot 1$ β) $\alpha = 1 \cdot \alpha$ γ) $0 = 0 \cdot \alpha$

Πρόταση 2. Αν $\beta|\alpha$ τότε $\lambda\beta|\lambda\alpha, \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{Z}^*$.

Ισχύουν $\beta|\alpha \Leftrightarrow \alpha = \pi \cdot \beta \overset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda\alpha = \pi \cdot \lambda\beta \Leftrightarrow \lambda\beta|\lambda\alpha$.

Πρόταση 3. Αν ο β διαιρεί τον α τότε διαιρεί και κάθε πολλαπλάσιό του. Δηλαδή: $\beta|\alpha \Rightarrow \beta|\lambda\alpha, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Η απόδειξη είναι εύκολη άσκηση.

Πρόταση 4. Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\alpha$ τότε $\alpha = \pm\beta$.

Πράγματι έχουμε ότι: $\alpha|\beta \Leftrightarrow \beta = \lambda\,\alpha, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $\beta|\alpha \Leftrightarrow \alpha = \kappa\,\beta, \kappa \in \mathbb{Z}$ Από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι: $\beta = \lambda\kappa\,\beta \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda\kappa = 1 \overset{\lambda,\kappa \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \lambda = \kappa = 1 \text{ ή } \lambda = \kappa = -1$. Συνεπώς α = β ή α = -β.

Πρόταση 5. (Μεταβατική ιδιότητα διαιρετότητας) Αν $\alpha|\beta$ και $\beta|\gamma$ τότε $\alpha|\gamma$.

Πρόταση 6. Αν $\alpha|\beta$ και $\alpha|\gamma$ τότε $\alpha|(\beta+\gamma), \alpha|(\beta-\gamma), \alpha|(\lambda\beta+\mu\gamma), \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$.

Πράγματι, ισχύουν: $\alpha|\beta \Rightarrow \alpha|\lambda\,\beta \Leftrightarrow \lambda\beta = \kappa\alpha$ και $\alpha|\gamma \Rightarrow \alpha|\mu\gamma \Leftrightarrow \mu\gamma = \nu\alpha$ από τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι $\alpha(\kappa+\nu) = \lambda\beta + \mu\gamma \Leftrightarrow \alpha|(\lambda\beta+\mu\gamma)$ το οποίο είναι το ζητούμενο.

Πρόταση 7. Αν $\alpha|\beta, \beta \neq 0$ τότε $|a| \leq |\beta|$.

Ισχύει ότι: $\alpha|\beta \Leftrightarrow b = ka, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{k}\beta, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow |a| = \left|\frac{1}{k}\right||\beta| \Rightarrow |a| \leq |\beta|$.

Εφαρμογή 7. Να αποδειχθεί ότι αν $11|(k+2)$, $11|(35-m)$ τότε $11|(k+m)$.

> Εφόσον, $11|(k+2) \Rightarrow k+2 = 11 \cdot a, a \in \mathbb{Z}$ και ομοίως $11|35-m \Rightarrow 35-m = 11 \cdot b, b \in \mathbb{Z}$. Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις έχουμε $k+m-33 = 11(a-b)$. Η οποία γράφεται $k+m = 11(a-b)+33 = 11 \cdot (a-b+3)$. Συνεπώς $11|(k+m)$.

Μερικές χρήσιμες ακόμα ιδιότητες είναι οι εξής παρακάτω.

Άλλες ιδιότητες

Πρόταση 8. Για κάθε α, β ακέραιους και ν φυσικό ισχύει ότι $\alpha^\nu - \beta^\nu = \pi o\lambda(\alpha-\beta)$.

Από την ταυτότητα $\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$ η οποία αποτελεί γενικότερη μορφή των ταυτοτήτων $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ και $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ έχουμε ότι:

$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}) = (\alpha-\beta) \cdot \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\varsigma$ άρα πράγματι είναι πολλαπλάσιο του $\alpha - \beta$.

Πρόταση 9. Για κάθε α,β ακέραιους και ν φυσικό ισχύει ότι: $(\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \pi o\lambda(\beta) = \beta^\nu + \pi o\lambda(\alpha)$.

Η ανάπτυξη της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^\nu$ γίνεται με τη βοήθεια του διωνυμικού αναπτύγματος:

$$(\alpha+\beta)^\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa} \alpha^\kappa \beta^{\nu-\kappa} = \binom{\nu}{0}\beta^\nu + \binom{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu\beta^0 =$$

$$=\beta^{\nu}+\binom{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1}+\binom{\nu}{2}\alpha^{2}\beta^{\nu-2}+\ldots+\alpha^{\nu}=\beta^{\nu}+\alpha\left[\binom{\nu}{1}\beta^{\nu-1}+\binom{\nu}{2}\alpha\beta^{\nu-2}+\ldots+\alpha^{\nu-1}\right]=$$
$$=\alpha^{\nu}+\beta\left[\beta^{\nu-1}+\binom{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-2}+\binom{\nu}{2}\alpha^{2}\beta^{\nu-3}+\ldots+\alpha^{\nu-1}\right]$$

Εφαρμογή 8. Αν $\alpha=\beta+\gamma$ και ο αριθμός x διαιρεί δύο από τους ακέραιους α,β,γ, τότε θα διαιρεί και τον τρίτο.

Πράγματι, αν $x|\alpha,\ x|\beta \Rightarrow x|(\alpha-\beta)\Rightarrow x|\gamma$. Ομοίως και για τις άλλες περιπτώσεις.

Εφαρμογή 9. Κάθε θετικός ακέραιος κ με περιττό πλήθος διαιρετών είναι τέλειο τετράγωνο.

Έστω ένας διαιρέτης δ του κ, δηλαδή: $\delta|\kappa \Leftrightarrow \kappa=\delta\cdot\pi=\delta\cdot\frac{\kappa}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\kappa}{\delta}|\delta$. Δηλαδή αν ο δ είναι διαιρέτης του κ, τότε έχουμε το ζεύγος διαιρετών $\left(\delta,\frac{\delta}{\kappa}\right)$ και αν το πλήθος των διαιρετών του αριθμού κ είναι περιττό τότε για κάποιο ζεύγος από τα παραπάνω θα ισχύει $\delta=\frac{\kappa}{\delta}\Rightarrow\kappa=\delta^2$. Οπότε ο κ πράγματι είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρώτοι Αριθμοί

Ορισμός 2. Ένας θετικός ακέραιος p (διαφορετικός από το 1) λέγεται **πρώτος** αριθμός, αν διαιρείται από το 1 και τον ίδιο p. Δηλαδή, διαιρείται μόνο από τον εαυτό του και τη μονάδα. Αν ένας θετικός ακέραιος p είναι πρώτος αριθμός, τότε θεωρούμε ότι και -p είναι επίσης πρώτος αριθμός. Ένας αριθμός που δεν είναι πρώτος λέγεται **σύνθετος** αριθμός.

Πρόταση 10. Κάθε σύνθετος αριθμός διαιρείται από κάποιον πρώτο.

Πράγματι, έστω ο αριθμός $\alpha\in\mathbb{N}$ σύνθετος. Τότε θα έχει τουλάχιστον τους εξής διαιρέτες: $1,\beta,\alpha,\ \mu\varepsilon\ 1<\beta<\alpha$. Αν τώρα ο β είναι πρώτος τότε βρέθηκε ένας πρώτος διαιρείτης του α και εδείχθει το ζητούμενο. Αν ο β δεν είναι πρώτος τότε θα είναι σύνθετος, οπότε θα υπάρχουν ακέραιοι $1<\gamma<\beta<\alpha$ με τον γ να διαιρεί τον β και αν ο γ είναι πρώτος τότε θα διαιρεί τον β και συνεπώς και τον α, ενώ αν δεν είναι πρώτος τότε η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί. Όμως, δε γίνεται να υπάρχουν άπειροι σύνθετοι αριθμοί $\beta,\gamma,\delta,\ldots$ ώστε $1<\ldots<\gamma<\beta<\alpha$. Δηλαδή η διαδικασία θα τερματιστεί σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων, οπότε ο σύνθετος θα διαιρείται από κάποιον πρώτο.

Σε αυτήν την πρόταση χρησιμοποιείται η βασική ιδέα του Ευκλείδη ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν μία φθίνουσα ακολουθία θετικών ακέραιων αριθμών μικρότερων του ν θα είναι πεπερασμένη.

Η απειρία των πρώτων αριθμών και ο Ευκλείδης

Ο Ευκλείδης(330 – 270 π.Χ. περίπου) είναι ευρέως γνωστός για το διάσημο έργο του *«Στοιχεία»*. Σε αυτό του το έργο ο Ευκλείδης επιδεικνύει αξιοθαύμαστες μαθηματικές και οργανωτικές δεξιότητες, αφού όπως είναι γνωστό δεν περιέχει κυρίως δικά του αποτελέσματα αυτό το έργο, αλλά αποτελεί ένα μνημείο για την οργάνωση του πρώτου αξιωματικά θεμελιωμένου συστήματος περί την Ευκλείδια Γεωμετρία (και όχι μόνο). Όμως σε αυτό του το έργο δεν ασχολείται αποκλειστικά με την Ευκλείδια Γεωμετρία, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα, αλλά περιλαμβάνει και άλλες γνώσεις που θα εντάσσονταν σε διαφορετικούς επιμέρους τομείς των σύγχρονων μαθηματικών. Έτσι, για παράδειγμα, το πρώτο βιβλίο των Στοιχείων αποτελείται από 48 προτάσεις και περιέχει τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες που θεμελιώνουν το αξιωματικό σύστημα που δημιούργησε ο Ευκλείδης, ενώ οι προτάσεις του αναφέρονται σε τρίγωνα, γεωμετρικές κατασκευές, θεωρία παραλλήλων (που πιστεύεται ότι είναι αποκλειστικό δημιούργημα του Ευκλείδη) και εμβαδα. Το δεύτερο βιβλίο των στοιχείων αναφέρεται στα εμβαδά των παραλληλογράμμων και περιέχει αποδείξεις αλγεβρικών προτάσεων με γεωμετρικό τρόπο (Αλγεβρική Γεωμετρία), όπως για παράδειγμα την απόδειξη της γνωστής ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$. Το τρίτο βιβλίο αναφέρονται στον κύκλο, τα στοιχεία του και τις ιδιότητές τους, ενώ το τέταρτο αφορά σε εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα στον κύκλο σχήματα. Στο πέμπτο βιβλίο αναπτύσσεται η θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου. Στο έκτο βιβλίο περιλαμβάνεται η θεωρία την ομοιότητας, αλλά και αρκετές προτάσεις γεωμετρικής άλγεβρας. Το **έβδομο βιβλίο** των «Στοιχείων» του Ευκλείδη αποτελεί το πρώτο αριθμητικό βιβλίο, περιέχει 23 ορισμούς και 39 προτάσεις της Θεωρίας Αριθμών και της Θεωρίας των ασυμμέτρων μεγεθών. Πολλές από τις αποδείξεις που περιλαμβάνονται σε αυτό χρησιμοποιούνται ακόμα και σήμερα αυτούσιες. Έτσι σε αυτό αποδεικνύεται το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής**, δηλαδή η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων κατά μοναδικό τρόπο. Ακόμα η πρόταση 10 στα προηγούμενα υπάρχει στο έβδομο βιβλίο ως πρόταση 31: *«Κάθε σύνθετος αριθμός μετριέται από κάποιον πρώτο αριθμό»,* ενώ αναλύεται η διαδικασία της εύρεσης του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου και του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη δύο αριθμών. Το όγδοο βιβλίο ασχολείται κυρίως με τη γεωμετρία των αριθμών, δηλαδή τους τετράγωνους, κύβους και μέσους ανάλογους αριθμούς, η συνέχεια της μελέτης των οποίων επεκτείνεται και στο ένατο βιβλίο, στο οποίο όμως βρίσκεται και μία προσέγγιση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αριθμητικής, αλλά κυρίως μία πολύ κομψή απόδειξη για το πλήθος των πρώτων αριθμών, η οποία παραμένει ακόμα και στις μέρες μας ως ένα μνημείο «αποδεικτικής τελειότητας». Μάλιστα περιλαμβάνεται στο βιβλίο *Proofs from the book,*των *M. Aigner, G.Ziegler,* οι οποίοι έγραψαν αυτό το βιβλίο προς τιμή του μαθηματικού Paul Erdös, ο οποίος λέγεται ότι έκανε συχνά αναφορές για *«Το βιβλίο»* στο οποίο ο Θεός κρατούσε τις κομψότερες των μαθηματικών αποδείξεων. Την απόδειξη αυτής της πρότασης βλέπουμε στη συνέχεια. Κλείνοντας αυτήν τη σύντομη περιήγηση στα «Στοιχεία», αναφέρουμε ότι στο δέκατο βιβλίο περιλαμβάνεται γεωμετρικά και αναλυτικά η θεωρία των ασύμμετρων μεγεθών και αποτελεί το εκτενέστερο και δυσκολότερο από τα βιβλία των Στοιχείων. Τέλος τα τελευταία τρία βιβλία των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη αναφέρονται στη Γεωμετρία του Χώρου.

Θεώρημα : (Ευκλείδης). Υπάρχει άπειρο πλήθος πρώτων αριθμών.

Πράγματι, έστω ότι το πλήθος των πρώτων είναι πεπερασμένο, ας υποθέσουμε οι α, β, γ,...δ. Θεωρούμε τον αριθμό $\nu=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdots\delta+1$ ο οποίος είναι μεγαλύτερος από καθέναν από τους α, β, γ, ...δ. Ο ν είτε θα είναι πρώτος, είτε θα είναι σύνθετος.

Αν ο ν είναι πρώτος, τότε εφόσον είναι μεγαλύτερος από τους α, β, γ, ...δ, θα είναι διαφορετικός από αυτούς, οπότε έπεται το ζητούμενο.

Αν ο ν είναι σύνθετος, τότε θα διαιρείται από κάποιον πρώτο, λόγω της προηγούμενης πρότασης, έστω κ . Ο πρώτος αυτός δεν μπορεί να βρίσκεται ανάμεσα στους α, β, γ,...δ, διότι τότε θα διαιρούσε τόσο το γινόμενό τους $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdots\delta$, όσο και τον $\nu=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdots\delta+1$. Οπότε από πρόταση θα διαιρούσε και τη διαφορά τους: $\nu-\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdots\delta=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdots\delta+1-\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdots\delta=1$ το οποίο είναι αδύνατο αφού ο κ είναι πρώτος και άρα μεγαλύτερος της μονάδας. Συνεπώς ο κ είναι πρώτος διαφορετικός από τους α, β, γ,...δ, άρα υπάρχει ένας ακόμα πρώτος σε κάθε περίπτωση.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη και το πλήθος των πρώτων αριθμών

Ένας τρόπος προσδιορισμού των πρώτων είναι η χρήση του «Κόσκινου του Ερατοσθένη». Σε αυτό τοποθετείς τους αριθμούς από το 1 έως και τον ν που θέλεις να ελέγξεις ποιοι πρώτοι περιέχονται και αρχίζεις και διαγράφεις όλα τα πολλαπλάσια των πρώτων που συναντάς. Δες και το σχολικό βιβλίο Α' γυμνασίου σελίδα 29.

Παρότι το πλήθος των πρώτων είναι άπειρο, σύμφωνα με το θεώρημα του Ευκλείδη, εντούτοις η κατανομή τους δεν είναι ομοιόμορφη ανάμεσα στους ακεραίους. Δηλαδή, ενώ στην αρχή οι πρώτοι εμφανίζονται πολύ συχνά, στη συνέχεια «αραιώνουν». Για παράδειγμα στους πρώτους 20 ακεραίους οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, δηλαδή οι 8 από αυτούς είναι πρώτοι. Ενώ, ανάμεσα στους 100 πρώτους ακέραιους οι 23 είναι πρώτοι, δηλαδή ποσοστό μικρότερο από 25%, ενώ στην πρώτη εικοσάδα ακεραίων οι πρώτοι ήταν 40%. Το ποσοστό αυτό διαρκώς μικραίνει καθώς ελέγχουμε όλο και μεγαλύτερο πλήθος πρώτων. Αυτό βέβαια, «διαισθητικά» φαίνεται λογικό καθώς όσο στο πλήθος των ακεραίων εισέρχονται περισσότεροι πρώτοι αριθμοί, οι σύνθετοι που προκύπτουν από αυτούς θα είναι όλο και περισσότεροι, με την έννοια ότι από περισσότερους πρώτους μπορούμε να φτιάξουμε πολύ περισσότερους σύνθετους. Υπάρχει όμως τρόπος να προσδιορίσουμε το πλήθος των πρώτων σε ένα διάστημα; Εκτός από το κόσκινο του Ερατοσθένη ή οποιαδήποτε άλλη μέθοδο εύρεσης αναλυτικά όλων των πρώτων – που φυσικά είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν για οποιοδήποτε μεγάλο ακέραιο – υπάρχει και ένας προσεγγιστικός τρόπος προσδιορισμού του πλήθος τους που περιγράφεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα(πλήθος πρώτων αριθμών) : Το πλήθος των πρώτων στο διάστημα (1, n) το γράφουμε π(n) και ισχύει ότι: $$\pi(n) \simeq \frac{n}{\ln n}$$

όπου $\ln n$ είναι η λογαριθμική συνάρτηση.

Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε ως εικασία από τους Gauss και Chebysvev και αποδείχθηκε μόλις το 1901 από τους Poussin και Hadamard. Πώς όμως ελέγχουμε αν ένας αριθμός είναι ή όχι πρώτος; Εκτός από το κόσκινο του Ερατοσθένη ας δούμε μερικούς ακόμα τρόπους.

Πρόταση 11. Αν ένας φυσικός αριθμός n δε διαιρείται από κανένα πρώτο αριθμό $p \leq \sqrt{n}$ τότε είναι πρώτος αριθμός.

Για παράδειγμα $\sqrt{53} > 7$ και οι πρώτοι 2, 3, 5, 7 δεν διαιρούν το 53, το οποίο επομένως είναι πρώτος αριθμός.

Πρόταση 12. Κάθε πρώτος $p \geq 5$ γράφεται στη μορφή $6\kappa+1$ ή στη μορφή $6\kappa+5$ για κατάλληλο ακέραιο $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Πράγματι, αν p πρώτος μεγαλύτερος του 5, τότε από την ταυτότητα της διαίρεσης με το 6 έχουμε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι k, r ,ώστε: $p = 6 \cdot k + r\,,\ 0 \leq r < 6$

Εξετάζουμε τώρα τις περιπτώσεις για το υπόλοιπο r της διαίρεσης.

Αν $r = 0$ τότε $p = 6 \cdot k$ οποίος διαιρείται από τους 2 και 3, άρα δεν είναι πρώτος.

Αν $r = 2$ ή 4 τότε $p = 6\mathrm{k}+2$ ή $p = 6\mathrm{k}+4$ που διαιρείται από το 2, άρα δεν είναι πρώτος.

Αν $r = 3 \Rightarrow p = 6\mathrm{k}+3 = 3(2\mathrm{k}+1)$ δηλαδή διαιρείται από το 3, άρα δεν είναι πρώτος.

Συνεπώς, απομένουν οι περιπτώσεις $r = 1$ ή $r = 5$ στις οποίες ο p δεν είναι πάντα σύνθετος.

Εφαρμογή 10. Να εξεταστεί αν οι αριθμοί 5, 7, 11, 13, 17, 19, 25 είναι πρώτοι.

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι: $5 = 6 \cdot 0 + 5,\ 7 = 6 \cdot 1 + 1,\ 11 = 6 \cdot 1 + 5,\ 13 = 6 \cdot 2 + 1$ $17 = 6 \cdot 2 + 5,\ 19 = 6 \cdot 3 + 1, 25 = 6 \cdot 4 + 1$ δηλαδή όλοι γράφονται σε μία από τις δύο μορφές της προηγούμενης πρότασης. Όμως ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Δεν είναι όλοι πρώτοι, δηλαδή η προηγούμενη πρόταση μας δίνει όλους τους πρώτους, αλλά μέσα στους αριθμούς που λαμβάνουμε από τις δύο μορφές υπάρχουν και αριθμοί που δεν είναι πρώτοι. Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να αποδειχθούν ως εύκολες ασκήσεις και άλλες μορφές – παρατηρήσεις για τους πρώτους αριθμούς όπως αυτές στις επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 13. Κάθε πρώτος $p \neq 2$ έχει τετράγωνο στη μορφή $p^2 = 8\kappa+1,\ \kappa \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 14. Κάθε πρώτος $p \neq 2$ γράφεται στη μορφή $4\mathrm{k}+1$ ή $4\mathrm{k}+3, k \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 15. Το τετράγωνο κάθε πρώτου $p \neq 3$ γράφεται στη μορφή $p^2 = 3\mathrm{k}+1, k \in \mathbb{N}$.

Παραδείγματα: $5^2 = 25 = 8 \cdot 3 + 1 = 3 \cdot 8 + 1$ ή $7^2 = 49 = 8 \cdot 6 + 1 = 3 \cdot 16 + 1$

***Άσκηση* 14.** Να βρεθεί ο πρώτος αριθμός p αν είναι γνωστό ότι και ο $8\mathrm{p}^2+1$ είναι πρώτος.

Το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής

Θεώρημα: Κάθε φυσικός αριθμός $n > 1$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γινόμενο πρώτων αριθμών, αν δε ληφθεί υπόψη η σειρά των παραγόντων.

Για παράδειγμα ο αριθμός $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$ έχει πρώτους παράγοντες τους αριθμούς 3, 5, 5 και εφόσον αγνοήσουμε τη διαφορετική σειρά με την οποία μπορούμε να τους πολλαπλασιάσουμε, τότε έχουμε μοναδική γραφή του αριθμού αυτού με βάση αυτούς τους πρώτους παράγοντες.

Πρόταση 16. (Πλήθος διαιρετών) Αν $n \in \mathbb{N}$ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 με ανάλυση σε πρώτους: $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ τότε το πλήθος των διαιρετών του είναι: $(k_1+1) \cdot (k_2+1) \cdots (k_m+1)$

Δηλαδή, με χρήση αυτής της πρότασης μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των διαιρετών ενός αριθμού, χωρίς να τους βρούμε. Έτσι για το $75=3\cdot 5^2$ έχουμε πλήθος διαιρετών: $(1+1)\cdot(2+1)=2\cdot 3=6$ Πράγματι, όλοι οι διαιρέτες του είναι οι: $1,3,5,3\cdot 5=15,3\cdot 5^2=75\,,5\cdot 5=25$ που είναι 6 στο πλήθος. Με παρόμοια καταμέτρηση γίνεται και η απόδειξη της πρότασης.

Άσκηση 15. Να βρεθεί το πλήθος των διαιρετών των αριθμών: 100, 500, 1000.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) και Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)

Ορισμός 3. Ένας ακέραιος δ λέγεται **κοινός διαιρέτης** των α, β, όταν είναι διαιρέτης του α και του β. Ο αριθμός 1 είναι πάντα διαιρέτης ενός ακεραίου, άρα αποτελεί πάντα κοινό διαιρέτη οποιωνδήποτε ακεραίων α και β.

Αν ένας τουλάχιστον από τους δύο ακέραιους α, β είναι μη μηδενικός και μεγαλύτερος του 1, τότε θα έχει και διαιρέτες μεγαλύτερες του 1 που σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση θα είναι πεπερασμένοι στο πλήθος. Συνεπώς θα υπάρχει ο μεγαλύτερος από αυτούς.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)

Ορισμός 4. Αν α, β δύο ακέραιοι, όχι και οι δύο μηδέν, τότε ορίζουμε τον **Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη (Μ.Κ.Δ.)** των α, β ως τον μεγαλύτερο από τους θετικούς κοινούς διαιρέτες τους και τον συμβολίζουμε με **(α, β)** .

Εφαρμογή 11. Θεωρούμε τους αριθμούς α=-18 και β = 42, οι οποίοι έχουν θετικούς διαιρέτες:

α = -18 : **1**, **2**, **3**, **6**, 9, 18

β= 42 : **1**, **2**, **3**, **6**, 7, 14, 21, 42

ο μεγαλύτερος από τους κοινούς διαιρέτες τους είναι ο (-18, 42) = 6.

Πρόταση 17. Αν α, β φυσικοί αριθμοί και υ το υπόλοιπο της διαίρεσης του α με τον β, τότε ισχύει ότι:

$$(\alpha, \beta) = (\upsilon, \beta)$$

Πράγματι, αν $\alpha>\beta$, έστω $\alpha=\pi\beta+\upsilon,$ με $0\leq\upsilon<\beta$ και $\delta=(\alpha,\beta),\Delta=(\beta,\upsilon)$. Τότε, εφόσον ο δ κοινός διαιρέτης των α, β έπεται ότι $\delta|\alpha-\pi\beta\Rightarrow\delta|\upsilon$ Δηλαδή ο δ είναι διαιρέτης των β και υ οπότε θα είναι $\delta\leq\Delta$ αφού ο Δ είναι ο μέγιστος από τους κοινούς διαιρέτες των β και υ.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $\Delta\leq\delta$ οπότε τελικά ισχύει ότι $\Delta=\delta$ το οποίο είναι το ζητούμενο.

Η προηγούμενη πρόταση μας δίνει έναν αλγόριθμο υπολογισμού του Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών, ο οποίος στηρίζεται στην Ευκλείδεια διαίρεση και οδηγεί σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων σε αποτέλεσμα. Λέγεται **Ευκλείδειος αλγόριθμος.**

Εφαρμογή 12. Να υπολογιστεί ο Μ.Κ.Δ. των α = 18 και β = 42

Έχουμε διαδοχικά: $\begin{matrix}42=2\cdot 18+6\\ 18=3\cdot 6+0\end{matrix}$ όπου το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι το 6, οπότε (18,42)=6.

Εφαρμογή 13. Να υπολογιστεί ο Μ.Κ.Δ. των α=48, β=120.

Παρομοίως έχουμε: $\begin{matrix}240=1\cdot 144+96\\ 144=1\cdot 96+48\\ 96=2\cdot 48+0\end{matrix}$ όπου το τελευταίο μη μηδνεικό υπόλοιπο είναι το 48, οπότε (240,144)= 48.

Αυτή η διαδικασία εύρεσης του Μ.Κ.Δ. δύο αριθμών περιγράφηκε γενικά από τον Ευκλείδη στα «Στοιχεία» του και λέγεται **μέθοδος της ανθυφαίρεσης**.

Άσκηση 16. Αν $\nu\in\mathbb{N}$ να βρεθεί ο $(\nu,\nu+1)$.

Ορισμός 5. Δύο ακέραιοι αριθμοί α, β λέγονται **σχετικά πρώτοι** ή **πρώτοι προς αλλήλους**, αν έχουν μέγιστον κοινό διαιρέτη τον αριθμό 1. Δηλαδή α, β σχετικά πρώτοι αν και μόνο αν (α, β) = 1.

Εξορισμού του Μ.Κ.Δ. ισχύουν οι ισότητες:

Πρόταση 18. $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)=(\alpha,-\beta)=(-\alpha,\beta)=(-\alpha,-\beta)=(|\alpha|,|\beta|)$

Πρόταση 19. Ισχύει ότι: $(\alpha,\beta)=k\alpha+m\beta$, με $k,m\in\mathbb{Z}$.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $\alpha>\beta$, διαιρώντας με το α με το β, το β με το υπόλοιπο της πρώτης διαίρεσης και συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο θα καταλήξουμε στον (α,β) που θα είναι το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο σε αυτήν τη σειρά διαιρέσεων, αλλά το υπόλοιπο μίας διαίρεσης μπορεί να γραφεί ως άθροισμα πολλαπλασίων του Διαιρέτη και του διαιρετέου και έτσι εφαρμόζοντας προς τα πίσω τη διαδικασία μπορεί ο Μ.Κ.Δ. των α, β να γραφεί κατ'αυτόν τον τρόπο.

Εφαρμογή 14. Να γραφεί ο (240, 144) ως άθροισμα γινομένων των 240 και 144.

Από τον Ευκλείδιο αλγόριθμο έχουμε $\begin{matrix}240=1\cdot 144+96\\ 144=1\cdot 96+48\\ 96=2\cdot 48+0\end{matrix}$ με $(240,144)=48$ όμως από το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο έχουμε: $48=144-1\cdot 96$ και από την πρώτη διαίρεση $96=240-1\cdot 144$ οπότε έχουμε: $48=144-1\cdot(240-1\cdot 144)=144-240+144=2\cdot 144-1\cdot 240$ που είναι το ζητούμενο.

Πρόταση 20. Οι ακέραιοι α, β είναι σχετικά πρώτοι, αν και μόνο αν υπάρχουν ακέραιοι m,n ώστε να ισχύει: $m\cdot a+n\cdot\beta=1$.

Για το ευθύ έχουμε ότι οι α, β είναι σχετικά πρώτοι και θα δείξουμε ότι υπάρχουν ακέραιο m,n ώστε να ισχύει: $m\cdot a+n\cdot\beta=1$. Πράγματι, εφόσον α, β σχετικά πρώτοι ισχύει ότι $(\alpha,\beta)=1$ οπότε από προηγούμενη πρόταση υπάρχουν ακέραιοι m,n ώστε $m\cdot a+n\cdot\beta=(\alpha,\beta)=1$.

Αντίστροφα, αν υπάρχουν ακέραιοι m,n ώστε να ισχύει $m\cdot a+n\cdot\beta=1$ και δ είναι ένας κοινός διαιρέτης των α, β, τότε ο δ θα διαιρεί τους α και β οπότε θα διαιρεί τον $m\cdot a+n\cdot\beta=1$ δηλαδή $\delta|1$ απ' όπου προκύπτει ότι $\delta=\pm 1$. Συνεπώς, οι κοινοί διαιρέτες των α, β είναι οι 1 και -1 οπότε ο μέγιστος από αυτούς είναι ο 1, δηλαδή $(\alpha,\beta)=1$.

Πρόταση 21. Αν ένας ακέραιος διαιρεί το γινόμενο δύο άλλων ακεραίων και δεν διαιρεί τον έναν από αυτούς, τότε θα διαιρεί τον άλλο. Δηλαδή αν $k|m\cdot n$, και $k\nmid m\Rightarrow k|n$.

Πράγματι, εφόσον ο k δεν διαιρεί τον m έπεται ότι k,m πρώτοι μεταξύ τους, οπότε υπάρχουν ακέραιοι α,β, ώστε $\alpha\cdot k+\beta\cdot m=1\Rightarrow a\cdot k\cdot n+\beta\cdot m\cdot n=n$ όμως $k|m\cdot n\Rightarrow k|\beta\cdot m\cdot n$ και $k|\alpha\cdot k\cdot n$ οπότε θα ο k θα διαιρεί και το άθροισμά τους, δηλαδή $k|akn+\beta mn$, δηλαδή $k|n$ που είναι το ζητούμενο.

Πρόταση 22. Αν $(\alpha,\beta)=1$ και $\alpha|k,\beta|k\Rightarrow(a\cdot\beta)|k$. Δηλαδή αν δύο ακέραιοι διαιρούν έναν άλλο ακέραιο, τότε και το γινόμενό τους θα τον διαιρεί.

Πράγματι, εφόσον $\alpha|k\Rightarrow k=a\cdot m$. Όμως $\beta|k\Rightarrow\beta|a\cdot m$ και $(\alpha,\beta)=1$ οπότε $\beta|m\Rightarrow m=\beta n$ οπότε: $k=a\cdot m=a\cdot n\cdot\beta\Rightarrow\alpha\beta|k$ που είναι το ζητούμενο.

Όσα έχουμε γράψει παραπάνω μπορούν να εφαρμοστούν και σε περισσότερους από έναν ακεραίους με την παρακάτω.

Πρόταση 23. Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_\nu$, με $\nu\geq 3$ ακέραιοι τότε ισχύει:

$$\delta=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu)=((\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{\nu-1}),\alpha_\nu).$$

Επιπλέον, υπάρχουν ακέραιοι $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_\nu$ ώστε: $\delta=\kappa_1\alpha_1+\kappa_2\alpha_2+\ldots+\kappa_\nu\alpha_\nu$.

Πρόταση 24. Κάθε διαιρέτης ακεραίων διαιρεί τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη τους.

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)

Αν θεωρήσουμε έναν ακέραιο $\alpha\in\mathbb{Z}$ τότε τα **πολλαπλάσια του** α είναι οι αριθμοί: $\alpha,2\cdot a,3\cdot a,\ldots$ Για παράδειγμα τα πολλαπλάσια του 5: $5,2\ \cdot 5=10,3\ \cdot 5=15,4\ \cdot 5=20,\ldots$ Αν τώρα θεωρήσουμε δύο οι περισσότερους αριθμούς τότε είναι δυνατόν στα πολλαπλάσιά τους να βρούμε έναν ή περισσότερους κοινούς αριθμούς, τα **κοινά πολλαπλάσιά** τους. Για παράδειγμα:

Για το 5: 5, *10* , 15, *20* , 25, *30*, 35, *40*, 45, *50*, 55, ...

Για το 10: *10*, *20* , *30* , *40* , *50*, 60, 70, 80, 90, 100, ...

Από τα κοινά πολλαπλάσια μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα που είναι το μικρότερο από αυτά, το οποίο ονομάζουμε Ελάχιστο.

Ορισμός 6. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{Z}$ ακέραιοι διαφορετικοί από το 0, τότε το μικρότερο από τα θετικά κοινά πολλαπλάσιά τους καλείται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** και γράφουμε $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu]$.

Πρόταση 25. Ισχύει ότι: $[\alpha, \beta]=[|a|,|\beta|]=[-\alpha, \beta]=[\alpha, -\beta]=[-\alpha, -\beta]$.

Πρόταση 26. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbb{Z}$ ακέραιοι διαφορετικοί από το 0 και περισσότεροι από δύο, τότε ισχύει ότι: $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu]=[\alpha_1,[\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu]]$. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε το Ε.Κ.Π. περισσοτέρων από δύο αριθμών μπορούμε να υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. ανά δύο και στη συνέχεια να βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των υπολοίπων με αυτό.

Πρόταση 27. Το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσοτέρων ακεραίων διαιρεί τα πολλαπλάσιά τους.

Πρώτοι, Ε.Κ.Π., Μ.Κ.Δ.

Εφαρμογή 15. Αν α, β ακέραιοι τότε $(\alpha, \beta)\cdot[\alpha, \beta]=\alpha\beta$.

Πράγματι, έστω $\delta=(\alpha, \beta)$. Τότε $\alpha=\alpha'\cdot\delta$ και $\beta=\beta'\cdot\delta$ όπου οι α' και β' σχετικά πρώτοι μεταξύ τους. Αν θεωρήσουμε τώρα ένα θετικό κοινό πολλαπλάσιο των α, β έστω κ τότε $\kappa=\alpha\lambda \Rightarrow \kappa=\lambda\alpha'\delta$ όμως ο β διαιρεί τον κ οπότε $\beta'\delta\,|\lambda\alpha'\delta \Rightarrow \beta'\,|\lambda\alpha'$. Όμως οι α', β' είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους οπότε $\beta'\,|\lambda \Rightarrow \lambda=\zeta\beta$ οπότε: $\kappa=\lambda\alpha=\lambda\alpha'\delta=\zeta\beta\alpha'\delta=\zeta\alpha'\beta'\delta$. Συνεπώς κάθε κοινό πολλαπλάσιο των α,β είναι της μορφής $\zeta\alpha'\beta'\delta, \zeta>0$ και κάθε αριθμός της μορφής $\zeta\alpha'\beta'\delta, \zeta>0$ είναι θετικό πολλαπλάσιο των α, β. Το πολλαπλάσιο γίνεται ελάχιστο για ζ = 1, δηλαδή $[\alpha, \beta]=\alpha'\beta'\delta$. Απ' όπου έχουμε $[\alpha, \beta]=\dfrac{\alpha'\delta\beta'\delta}{\delta}=\dfrac{\alpha\beta}{\delta} \Leftrightarrow [\alpha, \beta]\cdot(\alpha, \beta)=\alpha\beta$.

Πρόταση 28. Αν α | β τότε (α,β) = α και [α,β] = β για α, β θετικούς ακέραιους.

Πρόταση 29. Αν p, q πρώτοι αριθμοί, τότε οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες(δηλαδή, αν ισχύει μία από αυτές ισχύουν και οι υπόλοιπες):

α) $p \neq q$ β) $p \nmid q$ γ) $(p, q)=1$

Πρόταση 30. Αν p πρώτος αριθμός και $p|k\cdot m$ τότε $p|k$ ή $p|m$.

Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από την αντίστοιχη πρόταση για τους ακεραίους.

Εφαρμογή 16. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α, β με (α,β) =18 και [α,β] = 540.

Ισχύει ότι $(\alpha, \beta)\cdot[\alpha, \beta]=\alpha\beta$, οπότε $\alpha\beta=18\cdot 540$. Επιπλέον ισχύει ότι $\alpha=18m$, $\beta=18n$ Οπότε έχουμε ότι $18m18n=18\cdot 540 \Rightarrow m\cdot n=\dfrac{540}{18}=30=2\cdot 3\cdot 5$. Οπότε έχουμε τα ζεύγη $(m, n)=(1,30)$, ή $(2,15)$ ή $(3,10)$ ή $(5,6)$ που οδηγούν στα ζεύγη $(\alpha, \beta)=(18,540)$ ή $(36,270)$ ή $(54,180)$ ή $(90,108)$.

Άσκηση 17. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι α,β με $\alpha+\beta=52$ και Ελάχιστον Κοινό Πολλαπλάσιο $[\alpha, \beta]=120$.

Εφαρμογή 17. (Εύρεση Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. με την ανάλυση σε πρώτους αριθμούς για μικρούς ακέραιους).

Για την εύρεση των ΕΚΠ και ΜΚΔ δύο ή περισσοτέρων μικρών ακεραίων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάλογη μέθοδο με αυτήν της ανάλυσής τους σε πρώτους παράγοντες, όπως στα παρακάτω παραδείγματα.

Εύρεση Ε.Κ.Π. των 1320, 156, 420 Στην τελευταία στήλη γράφουμε κάθε πρώτο που διαιρεί **τουλάχιστον έναν** από τους αριθμούς της σειράς του.			
1320	156	420	2
660	78	210	2
330	39	105	2
165	39	105	3
55	13	35	5
11	13	7	7
11	13	1	11
1	13	1	13
1	1	1	$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$
Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν προκύψουν μονάδες και στις τρεις στήλες των αριθμών.			

Εύρεση Μ.Κ.Δ. των 1320, 156, 420 Στην τελευταία στήλη γράφουμε κάθε πρώτο που διαιρεί **όλους** τους αριθμούς της σειράς του.			
1320	156	420	2
660	78	210	2
330	39	105	3
110	13	35	$2^2\cdot 3=12$
Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν οι αριθμοί που έχουν προκύψει στην τελευταία γραμμή δεν έχουν όλοι κοινούς διαιρέτες .			

***Άσκηση* 18.** Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. των 8190, 4914, 6930.

Γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις

Ορισμός 7. Μία εξίσωση της μορφής $ax+by=c$ όπου οι a,b,c είναι ακέραιοι στην οποία ζητείται να βρεθούν ακέραιοι αριθμοί x,y οι οποίοι να την ικανοποιούν λέγεται γραμμική διοφαντική εξίσωση.

Ο όρος **γραμμική** χρησιμοποιείται διότι, όπως είναι γνωστό, η γραφική παράσταση της εξίσωσης $ax+by=c$, όπου τα a,b δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν είναι ευθεία.

Για παράδειγμα η εξίσωση: $3x+4y=2$ έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=(6,-4)$, αφού ισχύει η ισότητα: $3\cdot 6+4\cdot(-4)=2$. Βέβαια μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι υπάρχουν και άλλα ζεύγη ακεραίων τα οποία ικανοποιούν την παραπάνω διοφαντική εξίσωση, όπως το $(x,y)=(-2,2)$. Προκύπτουν φυσιολογικά λοιπόν τα ερωτήματα: υπάρχουν πάντα λύσεις μίας τέτοιας εξίσωσης; Πώς μπορούμε να γνωρίζουμε το πλήθος των λύσεων μίας τέτοιας εξίσωσης; Υπάρχει τρόπος να τις προσδιορίσουμε;

Πρόταση 31. Η γραμμική Διοφαντική εξίσωση $ax+by=c$ έχει λύση, αν και μόνο αν ο Μ.Κ.Δ. των συντελεστών (a,b) διαιρεί τον ακέραιο c .

Απόδειξη: Πράγματι ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση $ax+by=c$ έχει ένα ζεύγος ακεραίων ως λύση $(x,y)=(k,m)$ δηλαδή ισχύει ότι $a\cdot k+b\cdot m=c$. Τότε αν $d=(a,b)$ ο Μ.Κ.Δ. των a,b θα υπάρχουν ακέραιοι r,s ώστε $a=r\cdot d$, $b=s\cdot d$ οπότε η ισότητα γράφεται $ak+bm=c\Rightarrow d\cdot r\cdot k+d\cdot s\cdot m=c\Rightarrow d(rk+sm)=c$ Συνεπώς ο $d=(a,b)$ διαιρεί τον c.

Αντίστροφα, αν ο $d=(a,b)$ διαιρεί τον c θα βρούμε λύση της εξίσωσης. Ισχύει ότι $c=d\cdot k$ για κάποιον ακέραιο k και εφόσον d μέγιστος κοινός διαιρετης των a,b αποδείξαμε ότι υπάρχουν ακέραιοι r,s ώστε $r\cdot a+s\cdot b=d$ οπότε $k(ra+sb)=d\cdot k=c\Rightarrow a(kr)+b(ks)=c$ δηλαδή η εξίσωση έχει λύση το ζεύγος $(x,y)=(kr,ks)$.

Η προηγούμενη πρόταση λοιπόν αποτελεί ένα <u>κριτήριο ύπαρξης λύσεων</u> για τη γραμμική Διοφαντική εξίσωση και δίνει απάντηση στο πρώτο από τα ερωτήματά μας. Πράγματι, για την εξίσωση που υπάρχει στο προηγούμενο παράδειγμα ισχύει ότι $a=4, b=3$ και $(3,4)=1|2$ δηλαδή ο Μ.Κ.Δ. των 3 και 4 που είναι το 1 διαιρεί τον σταθερό όρο $c=2$ της προηγούμενης εξίσωσης, οπότε η εξίσωση έχει λύσεις.

Πρόταση 32. Αν η Διοφαντική εξίσωση $ax+by=c$ έχει λύση, δηλαδή $d=(a,b)|c$ και το ζεύγος $(x,y)=(k,m)$ είναι μία λύση της, τότε έχει άπειρες λύσεις, τα ζεύγη που δίνονται από τους τύπους:

$$x = k + \frac{b}{d} t \, , \; y = m - \frac{a}{d} t \, , \;\; \acute{o}\pi o \upsilon \;\; t \in \mathbb{Z} .$$

Δεν θα παραθέσουμε απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος, αλλά μπορούμε να προσδιορίσουμε τις λύσεις της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας ουσιαστικά τον αλγόριθμο του Ευκλείδη.

Εφαρμογή 18. Να λυθεί η εξίσωση $25x + 21y = 4$ αν x, y ακέραιοι.

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Ευκλείδη έχουμε:

$$\begin{array}{r} 25 = 1 \cdot 21 + 4 \\ 21 = 5 \cdot 4 + 1 \\ 4 = 4 \cdot 1 \end{array}$$

και εφαρμόζοντας αντίστροφα τη διαδικασία έχουμε:

$$\begin{array}{l} 1 = 21 - 5 \cdot 4 = \\ = 21 - 5 \cdot (25 - 21) = \\ 21 - 5 \cdot 25 + 5 \cdot 21 = 6 \cdot 21 - 5 \cdot 25 \end{array}$$

Δηλαδή: $1 = 25 \cdot (-5) + 21 \cdot 6 \overset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\, 4}{\Rightarrow} 4 = 25 \cdot (-20) + 21 \cdot 24 = 4$. Συνεπώς, το ζεύγος $(x, y) = (-20, 24)$ αποτελεί μία λύση της γραμμικής Διοφαντικής εξίσωσης και όλες της οι λύσεις, σύμφωνα με την πρόταση, δίνονται από τους τύπους: $(x, y) = (-20 + 21t, 24 - 25t), \; t \in \mathbb{Z}$.

Εφαρμογή 19. Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση $6x - 21y = 4$

Ο Μ.Κ.Δ. (6, 21) = 3, το οποίο όμως δεν διαιρεί το 4. Συνεπώς, αυτή η εξίσωση δεν έχει λύση στους ακεραίους.

Παρατήρηση: Στις γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις $ax + by = c$ που έχουν ακέραιες λύσεις ισχύει ότι αν το γινόμενο $ab > 0$ τότε το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων είναι το πολύ πεπερασμένο, ενώ αν $ab < 0$ τότε το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων είναι άπειρο.

Άσκηση 19. Να λυθούν στους ακεραίους οι εξισώσεις: α) $172x + 20y = 1000$ β) $3x + 4y = 12$ γ) $6x + 9y = 11$ *και* δ) $18x - 14y = 32$.

Άσκηση 20. Να γραφούν οι ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι διαιρούμενοι με το 7 αφήνουν υπόλοιπο 3, ενώ διαιρούμενοι με το 5 αφήνουν υπόλοιπο 4.

Άσκηση 21. Να βρεθούν οι διψήφιοι φυσικοί αριθμοί με την ιδιότητα *το διπλάσιο του ψηφίου των δεκάδων είναι ίσο με το τριπλάσιο του ψηφίου των μονάδων αυξημένο κατά 2.*

Άσκηση 22. Ένας ανελκυστήρας, λόγω βλάβης, έχει τη δυνατότητα να ανεβαίνει και να κατεβαίνει στους ορόφους ενός ουρανοξύστη 45 ορόφων ως εξής: Στην άνοδο πηγαίνει ακριβώς 5 ορόφους πάνω μόνο, ενώ στην κάθοδο ακριβώς 8 ορόφους μόνο κάτω, ενώ δεν κινείται αν δεν μπορεί να ανέβει 5 ορόφους ή να κατέβει 8 ορόφους. Να εξεταστεί αν μπορεί κάποιος να επισκεφτεί όλους τους ορόφους με το συγκεκριμένο ανελκυστήρα.

Άσκηση 23. Ένας πελάτης τράπεζας, προκειμένου να εξαργυρώσει μία επιταγή των 1000€ ζητά από τον ταμεία να του δώσει χαρτονομίσματα των 50€ και των 100€. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να το κάνει αυτό ο ταμίας;

Άσκηση 24. Να γραφεί ο αριθμός 100 ως άθροισμα δύο προσθετέων έτσι, ώστε ο ένας να είναι πολλαπλάσιο του 7 και ο άλλος πολλαπλάσιο του 11 (Euler 1770).

Άσκηση 25. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία με ακέραιες συντεταγμένες, της ευθείας $2x + 3y = 4$.

Άσκηση 26. Να βρεθούν δύο κλάσματα με παρονομαστές 9 και 13 και άθροισμα $\frac{25}{117}$.

Άσκηση 27. Ένας μαθητής διαθέτει 30€ το μήνα για να αγοράσει τυρόπιτες που κοστίζουν 2€ καθεμία και σάντουιτς που κοστίζουν 3€ καθένα. Να βρεθεί πόσα από το κάθε είδος μπορεί να αγοράσει, ώστε να εξαντλήσει όλο το ποσό.

Ασκήσεις Θεωρίας Αριθμών

Άσκηση 28. Να συμπληρωθεί το ? Με ένα κατάλληλο ψηφίο στους παρακάτω αριθμούς:

α) $5793?$ ώστε να διαιρείται με το 2.

β) $5?793$ ώστε να διαιρείται με το 9.

γ) $59?73$ ώστε να διαιρείται με το 3.

δ) $634?$ ώστε να διαιρείται με το 5.

Άσκηση 29. Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο των αριθμών: $777^{777}, 2013^{2014}$.

Άσκηση 30. Κάθε αριθμός διαιρούμενος με 4 αφήνει υπόλοιπο 1 ή 3.

Άσκηση 31. Οι πρώτοι αριθμοί $p=4k+1$ γράφονται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων. Οι πρώτοι αριθμοί της μορφής $p=4k+3$ δεν μπορούν να γραφούν ως άθροισμα τετραγώνων κατά κανέναν τρόπο. (Fermat 1640, απόδειξη Euler 1747).

Άσκηση 32. α) Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο 2 διαδοχικών φυσικών διαιρείται από το 2. β) Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο 3 διαδοχικών φυσικών διαιρείται από το 3. γ) Ισχύει ότι το γινόμενο ν διαδοχικών φυσικών αριθμών θα διαιρείται από το ν; δ) Να αποδειχθεί ότι αν ν>1 περιττός ακέραιος, τότε: $24|v(v^2-1)$.

Άσκηση 33. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί που βρίσκονται μεταξύ του 700 και του 750, είναι πολλαπλάσια του 5 και αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρούνται με το 7.

Άσκηση 34. (Αρχιμήδης Μικροί) Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αριθμού ν για τις οποίες ο αριθμός $\alpha=v^3-v^2+v-1$ είναι πρώτος.

Άσκηση 35. Αν το άθροισμα δύο αριθμών είναι 42 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου με τον μικρότερο είναι 9, να βρεθούν όλα τα δυνατά ζεύγη αυτών των δύο αριθμών.

Άσκηση 36. Αν ο αριθμός p είναι πρώτος, τότε να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί $v\in\mathbb{N}$ για τους οποίους ισχύει ότι: $v^2+v+p=2552$.

Άσκηση 37. Να αποδειχθεί ότι αν ένας φυσικός αριθμός υψωθεί στην τετάρτη, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το 5 είναι πάντα μηδέν ή ένα.

Άσκηση 38. Να αποδειχθεί ότι **δεν** υπάρχει φυσικός αριθμός ν, ώστε: $3\nu^{15}+3\nu^{13}=1234567$.

Άσκηση 39. (Θαλής 2009 Γ' Γυμνασίου) Αν ένας περιττός αριθμός $k\in\mathbb{N}$ διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2 να βρεθεί το τελευταίο του ψηφίο.

Άσκηση 40. Δίνονται τρεις περιττοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει περιττος αριθμός διαφορετικός από τους τρεις δοσμένους, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των τεσσάρων αριθμών να είναι τέλειο τετράγωνο.

Άσκηση 41. Να βρεθούν δύο φυσικοί αριθμοί των οποίων το άθροισμα διαιρεί τον αριθμό 20 και ο μικρότερος διαιρεί τον μεγαλύτερο.

Άσκηση 42. Αν α,β ακέραιοι και ισχύουν: $\alpha|(2\beta+1), \alpha|(3\beta-1)$, να βρεθούν οι πιθανές θετικές τιμές του ακεραίου α.

Άσκηση 43. Να αποδειχθεί ότι ο 3 διαιρεί τους ακεραίους α και β, αν και μόνο αν ο 3 διαιρεί το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2$.

Άσκηση 44. Αν η διαφορά δύο ακεραίων είναι άρτιος αριθμός, τότε να αποδειχθεί ότι η διαφορά των τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 4.

Άσκηση 45. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $(k-m)\cdot(m-n)\cdot(n-k)$ είναι άρτιος για οποιουσδήποτε ακέραιους k, m, n.

Άσκηση 46. Να υπολογιστεί το πλήθος των φυσικών αριθμών που δεν ξεπερνούν το 10.000 και διαιρούνται με κάθε φυσικό μονοψήφιο αριθμό.

Άσκηση 47. (Το μαγικό 1089) Θεωρήστε έναν τριψήφιο αριθμό και γράψτε τον αριθμό που προκύπτει να αντιστρέψετε τη σειρά των ψηφίων του. Από τον μεγαλύτερο από τους δύο αυτούς αριθμούς αφαιρέστε τον μικρότερο. Στο αποτέλεσμα που βρήκατε αντιστρέψτε και πάλι τα ψηφία και τώρα προσθέστε τους δύο τελευταίους αριθμούς. «Μαντεύω» ότι...βρήκατε 1089.

Άσκηση 48. Να αποδειχθεί ότι οι ακέραιοι 775, 3875 και 1223 είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Άσκηση 49. Να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ. δ των αριθμών 21, 35, 61 και στη συνέχεια να βρεθούν ακέραιοι α, β, γ ώστε 21 α + 35 β +61 γ = δ.

Άσκηση 50. Να αποδειχθεί ότι οι ακέραιοι 8ν+3 , 5ν + 2 είναι πρώτοι μεταξύ τους για κάθε φυσικό ν.

Άσκηση 51. Τοποθετούμε τους αριθμούς 2001, 2002, ...,2013 τον έναν δίπλα στον άλλο και δημιουργούμε έναν νέο αριθμό τον 200120022003....2013. Να εξεταστεί αν είναι πρώτος.

Άσκηση 52. Να αποδειχθεί ότι αν p πρώτος μεγαλύτερος του 3, τότε ο p^2-1 διαιρείται από το 24.

Άσκηση 53. Να εξεταστεί αν το άθροισμα 5 διαδοχικών φυσικών αριθμών μπορεί να είναι πρώτος αριθμός.

Άσκηση 54. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha=\dfrac{\nu^5-5\nu^3+4\nu}{\nu+2}$ διαιρείται με το 24 για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

Άσκηση 55. Οι αριθμοί 203 και 298 διαιρούμενοι με τον φυσικό αριθμό ν αφήνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του ν.

Άσκηση 56. Να αποδειχθεί ότι ο κύβος κάθε ακεραίου γράφεται ως διαφορά τετραγώνων ακέραιων αριθμών. Για παράδειγμα $3^3=6^2-3^2$ ή $5^3=15^2-10^2$.

Εικασίες στη θεωρία αριθμών

Αναφέρθηκε στην αρχή ότι στη θεωρία αριθμών οι φαινομενικά απλές εικασίες αποτελούν #@$#$@#!$

- **(Εικασία 3n + 1 ή Πρόβλημα Collatz).** Αν θεωρήσουμε τυχόν αριθμό ν και αν είναι άρτιος πάρουμε το μισό του, ενώ αν είναι περιττός πάρουμε το τριπλάσιό του συν 1 και στον αριθμό που προκύπτει επαναλάβουμε τη διαδικασία, τότε κάποια στιγμή θα προκύψει ο αριθμός 1. Ορισμένα παραδείγματα:

$2\rightarrow\frac{2}{2}=1$ τέλος. ή ακόμα

$$3\rightarrow 3\cdot 3+1=10\rightarrow\frac{10}{2}=5\rightarrow 3\cdot 5+1=16\rightarrow\frac{16}{2}=8\rightarrow\frac{8}{2}=4\rightarrow\frac{4}{2}=2\rightarrow\frac{2}{2}=1 \text{ τέλος.}$$

- **(Εικασία του Goldbach).** Κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων. Για παράδειγμα 4 = 2 + 2 , 6 = 3 + 3 , 8 = 3 + 5, 10 = 5+ 5 ,12 = 7 + 5, κ.ο.κ. Η εικασία έχει επιβεβαιωθεί έως τουλάχιστον τον $4\cdot 10^{14}$.

- **(Εικασία Catalan).** Οι μόνες διαδοχικές δυνάμεις πρώτων είναι οι $8=2^3, 9=3^2$.

- **(Τέλειοι αριθμοί).** Δεν υπάρχουν περιττοί τέλειοι αριθμοί.

- **(Αριθμοί Mersenne).** Ο ν-οστός αριθμός Mersenne είναι ο $M_\nu=2^\nu-1$ Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί Mersenne και άπειροι σύνθετοι αριθμοί Mersenne.

- **(Εικασία Δίδυμων Πρώτων).** Δύο πρώτοι λέγονται δίδυμοι αν είναι στη μορφή ν, ν+2. Για παράδειγμα οι αριθμοί: (3,5), (5,7), (11, 13), (17,19), (29,31) είναι δίδυμοι πρώτοι. Εικάζεται ότι υπάρχει άπειρο πλήθος δίδυμων πρώτων αριθμών.