Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

'Ομιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

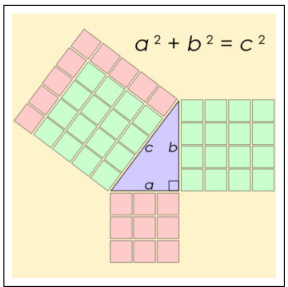
25 Φεβρουαρίου 2021 | Φύλλο 18α | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

Καθηγητής:Σωτήριος Χασάπης, www.arithmoi.gr

Πυθαγόρειες τριάδες και ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

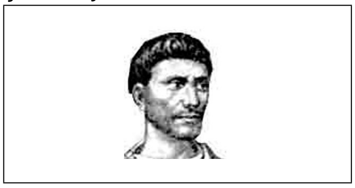
1 Ιστορική αναδρομή

Η ισχύς του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τον 6ο αι. π.Χ. οδήγησε σε λύσεις για την κατασκευή κάθετων ευθυγράμμων τμημάτων ως πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με κατάλληλα ακέραια μήκη πλευρών. Η σχέση $a^2+b^2=c^2$ που αποδίδεται στον Πυθαγόρα μάλλον ήταν ήδη γνωστή στους Βαβυλώνιους από την εποχή του Χαμουραμπί (18ος π.Χ. αι.). Το «γνωστότερο» ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών τους θετικούς ακέραιους αριθμούς (3,4,5) είναι πιθανό να χρησιμοποιήθηκε ακόμα και για την κατασκευή κάθετων πλευρών σε διάφορες κατασκευές.



Τρίγωνο με πλευρές 3,4,5

Η αναζήτηση ακέραιων λύσεων σε εξισώσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές δίνει εξισώσεις που καλούνται **Διοφαντικές** προς τιμήν του Έλληνα Μαθηματικού **Διόφαντου** από την Αλεξάνδρεια του 3ου αι. μ.Χ. Η διοφαντική ανάλυση αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων διοφαντικών εξισώσεων και συνήθως αναζητά απαντήσεις σε ερωτήματα όπως : Υπάρχουν λύσεις; Υπάρχουν λύσεις πέρα από τις προφανείς που ενδεχομένως μπορούμε να βρούμε με απλή παρατήρηση; Υπάρχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος λύσεων; Μπορούν να βρεθούν όλες θεωρητικά ή να υπολογιστούν πρακτικά;



Διόφαντος, 3ος αι. π.Χ.

Ειδικότερα, η λύση της Διοφαντικής εξίσωσης:

$$x^2+y^2=z^2$$

είναι ισοδύναμη με την εύρεση ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές x,y,z, όπως στην πρώτη εικόνα. Ήδη ο Πυθαγόρας είχε βρει έναν τύπο για την κατασκευή άπειρων τέτοιων τριγώνων:

$$x=2n+1,\ y=2n^2+2n,\ z=2n^2+2n+1, \qquad n\in\mathbb{N}$$

Εκτός λοιπόν από την προφανή μηδενική λύση της εξίσωσης, αλλά και τις λύσεις στις οποίες κάποιος από τους x,y είναι μηδέν και ο άλλος ίσος με z, στις οποίες φυσικά δεν αντιστοιχούν ορθογώνια τρίγωνα, ο παραπάνω τύπος του Πυθαγόρα δίνει άπειρες ακόμα λύσεις της εξίσωσης. Είναι όμως όλες;

2 Πυθαγόρειες Τριάδες

Ορισμός 2.1. *Μία **Πυθαγόρεια Τριάδα** είναι τρεις ακέραιοι αριθμοί x,y,z, ώστε: $x^2+y^2=z^2$ και θα λέγεται **πρωταρχική(Primitive)**, αν ισχύει ότι: Μ.Κ.Δ.$(x,y,z)=1$*

Παράδειγμα 2.1. *Παραδείγματα Πυθαγορείων τριάδων αποτελούν οι: $(3,4,5),(5,12,13),(12,35,37),(9,40,41)$ αλλά και οι $(6,8,10),(9,12,15),\ldots$*

Άσκηση 1. *Αν (x,y,z) πρωταρχική Πυθαγόρεια τριάδα, τότε κάθε πολλαπλάσιό της: $(kx,ky,kz),k\in\mathbb{Z}$ είναι επίσης Πυθαγόρεια τριάδα.*

Δηλαδή, οι πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες παράγουν όλες τις υπόλοιπες, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο μη μηδενικό ακέραιο.

Λήμμα 2.1. *Αν (x,y,z) πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα, τότε ένας από τους x,y είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο υποθέτοντας ότι και οι δύο x,y είναι άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. □

Από το προηγούμενο Λήμμα προκύπτει ότι δεν υπάρχει πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα (x,y,z) που να αποτελείται μόνο από πρώτους αριθμούς. Βέβαια, υπάρχουν πυθαγόρειες τριάδες με δύο πρώτους: $(3,4,5),(11,60,61),(19,180,181)$, αλλά είναι άγνωστο αν αυτές είναι άπειρες στο πλήθος. Απαραίτητο επίσης στον καθορισμό όλων των πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων είναι και το επόμενο:

Λήμμα 2.2. *Αν $ab=c^n$ με $(a,b)=1$, τότε οι a,b είναι $n-$οστές δυνάμεις ακεραίων. Δηλαδή, υπάρχουν ακέραιοι k,l, ώστε: $a=k^n,\ b=l^n$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής για τις παραγοντοποιήσεις των a,b,c καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.1. *Κάθε λύση της Πυθαγόρειας εξίσωσης:*

$$x^2+y^2=z^2,$$

ώστε: $(x, y, z) = 1$, x άρτιος και $x, y, z > 0$ δίνεται απο τις σχέσεις:

$$x = 2st, \quad y = s^2 - t^2, \quad z = s^2 + t^2,$$
$$s > t > 0, \quad s, t \in \mathbb{Z}, \quad s \neq t(mod2)$$

Άσκηση 2. *Παρατηρήστε στον παρακάτω πίνακα παραγωγής πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων τους ακεράιους x, y :*

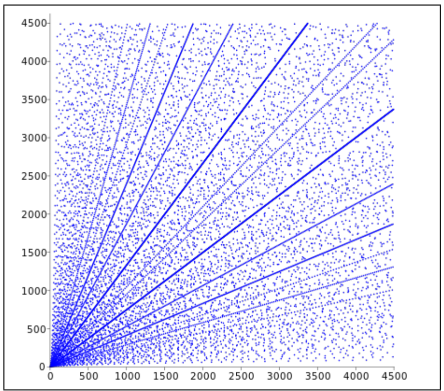
s	t	$x = 2st$	$y = s^2 - t^2$	$s^2 + t^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53

Ορισμός 2.2. ***Πυθαγόρειο τρίγωνο*** *λέγεται κάθε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος κάποιον ακέραιο.*

Άσκηση 3 (Το πρόβλημα του νέου έτους)**.** *Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ενός Πυθαγόρειου τριγώνου είναι πάντα ακέραιος αριθμός.*

Γραφική κατανομή πυθαγόρειων τριάδων

Αν παρασταθούν τα μήκη των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου σε ένα σύστημα αξόνων παίρνουμε ένα γράφημα όπως το διπλανό.



Ακέραια μήκη κάθετων πλευρών

Στην κατανομή στο γράφημα μπορούν να παρατηρηθούν ορισμένες κανονικότητες:
1) Αν (x, y) τα μήκη των κάθετων στο γράφημα στους δύο άξονες, τότε όλα τους τα πολλαπλάσια εμφανίζονται επίσης στο γράφημα. Αποτέλεσμα αυτού είναι να σχηματίζονται ευθείες γραμμές από την αρχή των αξόνων.
2) Επίσης μέσα στο γράφημα εμφανίζονται τμήματα παραβολικών καμπυλών με υψηλή πυκνότητα σημείων, γεγονός που επίσης εξηγείται από τη μορφή των πυθαγόρειων τριάδων. Συγκεκριμένα, όταν ο αριθμός $\frac{x^2}{4n}$ είναι ακέραιος, τότε η τριάδα: $(x, |n - \frac{x^2}{4n}|, n + \frac{x^2}{4n})$ είναι πυθαγόρεια τριάδα, οπότε δημιουργούνται ομάδες παραβολών.

3 Ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

3.1 Αναδρομή

Τι συμβαίνει αν η πυθαγόρεια διοφαντική εξίσωση μετατραπεί σε βαθμού n; Δηλαδή, πότε επαληθεύεται η εξίσωση:

$$x^n + y^n = z^n, \ n \in \mathbb{Z}, \ n > 2$$

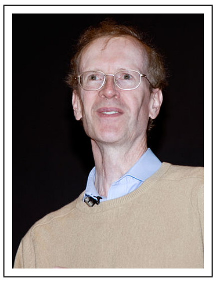
Το ερώτημα αυτό γεννήθηκε από έναν σημαντικό ερασιτέχνη μαθηματικό - δικηγόρο στο επάγγελμα - τον **Pierre de Fermat** τον 17ο αι.(1637), διατυπώθηκε ως εικασία από τον ίδιο και έμεινε αναπόδεικτο έως το 1995. Ο Φερμά έκανε λίγες μαθηματικές δημοσιεύσεις, καθώς προτιμούσε να στέλνει τις ανακαλύψεις του σε επαγγελματίες μαθηματικούς με αλληλογραφία ή απλά τις κρατούσε σε προσωπικές σημειώσεις. Μελετώντας, λοιπόν, ένα αντίγραφο του έργου: *Αριθμητικά* του Διόφαντου που κατείχε σε μετάφραση του Bachet έκανε διάφορες σημειώσεις στα περιθώρια του βιβλίου. Μία από αυτές - γραμμένη το 1637 - έλεγε ότι δεν μπορεί να γραφεί ένας κύβος ως άθροισμα δύο άλλων κύβων ακεραίων με μη τετριμμένο τρόπο και αντίστοιχα κάθε $n-$οστή δύναμη, ως άθροισμα $n-$οστών δυνάμεων.[1].


Pierre de Fermat(1601-1665)

Έμεινε στην ιστορία ως **τελευταίο θεώρημα του Fermat** αν και δεν είχε αποδειχθεί μέχρι πριν λίγα έτη και ουσιαστικά αποτελούσε μία εικασία ακόμα.

3.2 Η εικασία που έγινε θεώρημα

Wiles, Hasse, Weil, Taniyama, Ribet, Galois, Langlands, Tunnell, Eichler, Shimura, Deligne, Carayol, Serre, Hida, Mazur, Dirichlet, Birch, Swinnerton-Dyer, Iwasawa, Poitou, Tate, Faltings, Frey, Boston, Ramakrishna, Kunz, Rubin, Kolyvagin, Coates, Schmidt, Flach, de Shalit, R.Taylor, N. Katz, Illusie, Bloch, Kato, Raynaud, Schlessinger, Nakayama, Diamond, Kuyk, Lenstra, Boston, Rapoport, Dickson, Fontaine, Hellegouarch, Linve, Schoof, Wintenberger, είναι μερικοί μόνο από τους σύγχρονους μαθηματικούς του 20ου αι. κυρίως οι οποίοι συνέβαλλαν στην απόδειξη της εικασίας από τον Andrew Wiles. Η παρουσίαση της απόδειξής του έγινε σε ένα άρθρο 109 σελίδων στο διάσημο **Annals of Mathematics** (`http://annals.math.princeton.edu/`)**, 142, 1995.**


Andrew Wiles(1953 Cambridge)

Θεώρημα 3.1 (Τελευταίο Θεώρημα Fermat)**.** *Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z οι οποίοι να ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$x^n + y^n = z^n, \ n > 2$$

3.3 Επίλογος

Εφόσον παρακολουθήσετε την ιστορία του θεωρήματος Fermat θα διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχουν εύκολοι δρόμοι, χωρίς συνεργασίες. Η επιστήμη κτίζεται πετραδάκι - πετραδάκι.

Άσκηση 4 (Κόκκος 1)**.** *Να αποδειχθεί ότι ο κύβος κάθε ακέραιου αριθμού γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο ακέραιων αριθμών.*

Άσκηση 5 (Κόκκος 2)**.** *Μπορείς να βρεις φυσικούς αριθμούς x, y, z, w, ώστε: $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$;*

[1]Μάλιστα σημείωσε ότι είχε μία θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο ήταν πολύ μικρό για να την χωρέσει. Αυτή η τελευταία φράση της πρότασης μάλλον ήταν αληθής... Σε άλλη του σημείωση στο περιθώριο είχε γράψει ότι για κάθε ακέραιο $n > 1$ υπάρχουν n το πλήθος πυθαγόρεια τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν και διαφορετικές υποτείνουσες.