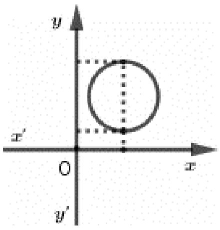
# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Κάθε καμπύλη f η οποία τέμνεται σε δύο ή περισσότερα σημεία από μία κατακόρυφη ευθεία δεν είναι συνάρτηση ».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α με την βοήθεια παραδείγματος αν είναι αληθής αντιπαραδείγματος αν είναι ψευδής.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής.

**β)** Μια διαδικασία f είναι συνάρτηση όταν κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Αν κατασκευάσουμε έναν κύκλο και φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα x΄x που διέρχεται από το κέντρο του, διαπιστώνουμε ότι η ευθεία αυτή τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία, οπότε υπάρχουν δύο σημεία με την ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη, δηλαδή σε ένα x αντιστοιχίζονται δύο y.




**2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Αν $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha = \beta$ είναι $f(\alpha) = f(\beta)$ ».**
**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ είναι $0 = 0$ όμως το $f(0)$ δεν ορίζεται.

**Παρατήρηση:** Αν $\alpha, \beta \in A$ τότε προφανώς ισχύει από τον ορισμό της συνάρτησης.

**Askisopolis**

**3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Αν $f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τότε για κάθε $\alpha, \beta \in A$ με $\alpha \neq \beta$ είναι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ ».**
**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $-1 \neq 1$ και $f(-1) = f(1) = 1$.

**Παρατήρηση:** Ισχύει μόνο αν η f είναι συνάρτηση 1-1.

**4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = x + |x|$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x - |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(x)g(x) = (x + |x|)(x - |x|) = x^2 - |x|^2 = x^2 - x^2 = 0$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f, g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f^2(x)=g^2(x)$ αν και μόνο αν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le 1 \\ -2, & x>1 \end{cases}$ και $g(x)=2,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε οι f,g δεν είναι ίσες ούτε αντίθετες για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όμως $f^2(x)=g^2(x)=4,\ x\in\mathbb{R}$.

**Παρατήρηση:** Αντί για $f^2(x)=g^2(x)$, αν ισχύει $|f(x)|=|g(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το αντιπαράδειγμα είναι ίδιο.

**6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν $f,g$ είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε $f\circ g=g\circ f$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+1$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

Είναι φανερό ότι $f\circ g\neq g\circ f$.

**Askisopolis**

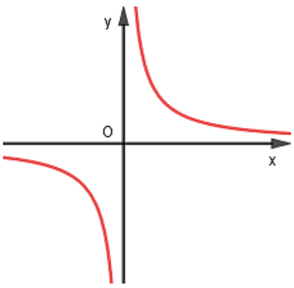
**7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1,\Delta_2\subseteq A$, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα και στο σύνολο $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, όμως δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}^*$ αφού για $x_1<0<x_2$ είναι $f(x_1)<0<f(x_2)$.

**8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Μια άρτια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι άρτια αν για κάθε $x\in A$ είναι $-x\in A$ και $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in A$.

Έστω $x>0$, τότε $-x<0$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε $f(-x)<f(x)$ που είναι άτοπο, ενώ αν η f

είναι γνησίως φθίνουσα τότε $f(-x) > f(x)$ που είναι και πάλι άτοπο. Άρα η f δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

**9. Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ . Αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2$ που ανήκουν σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq A$ ισχύει ότι:**

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

**τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < f(x_2)$ είναι $x_1 < x_2$.

Όμως αν θωρήσουμε $x_1 < x_2 < 1$ είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ και η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**10.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, αυτό θα ισχύει σε μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $f(x) = ημx$ παρουσιάζει μέγιστο, το y = 1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ + π/2, $κ \in \mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το y = −1, σε καθένα από τα σημεία 2κπ − π/2, $κ \in \mathbb{Z}$ , αφού $-1 \leq ημx \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**11.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Οι συναρτήσεις $f(x) = x,\ g(x) = x^3$ δεν έχουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

**Askisopolis**

**12.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν για μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το m».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι $f(x) \geq -2$ και γενικά από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό στη θέση του – 2, όμως το -2 δεν είναι ελάχιστο της f γιατί δεν υπάρχει σημείο της $C_f$ με αυτή την τεταγμένη ( δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = m$ )

**13.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

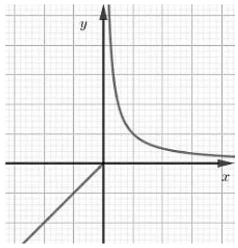
**« Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε είναι και γνησίως μονότονη.»**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής




**β)** Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.

**14.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ είναι ίσες».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Είναι $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ για κάθε $x \in A$ και $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ για κάθε $x \in f(A)$ .

Επειδή τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ δεν είναι πάντα ίσα, είναι $f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$**.**
Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ . Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

— έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

— έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και

— αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0,+\infty)$ στο μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\alpha^x = y$ . Επειδή όμως

$$\alpha^x = y \Leftrightarrow x = \log_\alpha y$$

θα είναι $f^{-1}(y) = \log_\alpha y$ . Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$ . Συνεπώς $\log_\alpha \alpha^x = x,\ x \in \mathbb{R}$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x,\ x \in (0,+\infty)$

**Askisopolis**

**15.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν δύο συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι 1-1».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = 1 - x,\ x \in \mathbb{R}$ .

Οι f, g είναι 1-1, όμως το άθροισμά τους είναι $(f+g)(x) = x + 1 - x = 1$ που δεν είναι 1-1 συνάρτηση.

**16.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε και η αντίστροφή της είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα f(Δ) »**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ με $y_1 < y_2$ είναι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Έστω ότι $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ και $f^{-1} \nearrow f(\Delta)$.

**17.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν δύο συναρτήσεις $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 και ορίζεται στο $B \subseteq A$ η $f \circ g$, τότε είναι και αυτή 1-1».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Για κάθε $x_1, x_2 \in B$ με $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$, είναι:

$f\left(g(x_1)\right) = f\left(g(x_2)\right) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x_1) = g(x_2) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$, άρα η $f \circ g$ είναι 1-1.

**18.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Για κάθε συνάρτηση f που είναι 1-1 ισχύει ότι $f(x) \neq f^{-1}(x)$.**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1 και έχει αντίστροφή την $f^{-1}(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f^{-1}(x) = f(x)$.

**Askisopolis**

**19.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Τα κοινά σημεία δύο αντίστροφων συναρτήσεων βρίσκονται πάντα πάνω στην ευθεία $y = x$ ».**

**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $f(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1 και έχει αντίστροφή την $f^{-1}(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f^{-1}(x) = f(x)$ και το μοναδικό κοινό σημείο με την $y = x$ είναι το μηδέν.

**20.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Υπάρχει περιοδική συνάρτηση που είναι αντιστρέψιμη».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A είναι περιοδική με περίοδο T, όταν $x - T, x + T \in A$ και $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$. Επομένως υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$, οπότε οι περιοδικές συναρτήσεις δεν είναι 1-1 και δεν αντιστρέφονται.

# Όριο –Συνέχεια Συνάρτησης

**21.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει μόνον αν $x_0 \in A$ ».**

**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής
**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$ , $x \neq 1$ . Τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1$ άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ .

**22.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

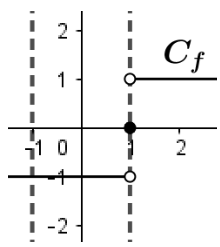
**«Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων $(\alpha,x_0)$ και $(x_0,\beta)$ στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f » .**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής.

**β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ .Για να βρούμε το όριο της στο $x_0=0$ περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x)=-\dfrac{x-1}{x-1}=-1$ .Το όριο της είναι ίσο με -1 και δεν εξαρτάται από τα άκρα -1,1.




**Askisopolis**

**23.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ . Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής
**β)** Έστω $f(x)=x,\ g(x)=\eta\mu x,\ x\in(-1,0)\cup(0,1)$ .
Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ όμως οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $(-1,0)\cup(0,1)$.

**24.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν για κάθε x κοντά στο $x_0$ είναι $f(x)>0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής
**β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|,\ x\neq 0$ . Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ , όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ .

**25.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο $x_0$ και ισχύει $f(x)<g(x)$ σε μια περιοχή του $x_0$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=-x^2,\ x\neq 0$ και $g(x)=x^2,\ x\neq 0$ .

Είναι $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\neq 0$ , όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ .

**26.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο $x_0$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ και $g(x)<0$ σε μια περιοχή του $x_0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)g(x)\big)=-\infty$ ».**

**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0$ και $g(x)=-x^2,\ x\neq 0$ .

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$ , όμως $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}x^2\right)=-1$ .

**Askisopolis**

**27.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x>0\\ \dfrac{-1}{x}, x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, x>0\\ \dfrac{2}{x}, x<0\end{cases}$ . Είναι $A_f=\mathbb{R}^*=A_g$ και $A_{f+g}=\mathbb{R}^*$ .

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ .

Έχουμε $(f+g)(x)=\begin{cases}0, x>0\\ \dfrac{1}{x}, x<0\end{cases}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-}(f+g)(x)=0\neq\lim\limits_{x\to 0^+}(f+g)(x)=-\infty$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)$ .

**28.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ ».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ 2, & x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to 0^-} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)=2$, δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x\to 0} g(x)$ .Όμως $f(x)+g(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 0}(x+2)=2$ .

**29.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ ».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 5, & x\le 0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}7, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=5$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} g(x)=0$, $\lim_{x\to 0^+} g(x)=7$ δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x\to 0} g(x)$, όμως $f(x)g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=0$

**Askisopolis**

**30.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)$ ».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ \frac{-1}{x}, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 2x, & x<0\end{cases}$. Είναι

$A_f=\mathbb{R}^*=A_g$ και $A_{f+g}=\mathbb{R}^*$.

Είναι $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty=\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} g(x)=0=\lim_{x\to 0^+} g(x)$, οπότε $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ .

Έχουμε $(f\cdot g)(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -2, & x<0\end{cases}$, οπότε $\lim_{x\to 0^+}(f\cdot g)(x)=1\neq\lim_{x\to 0^-}(f\cdot g)(x)=-2$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

**31.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}-1, & x<x_0\\ 1, & x\ge x_0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ -1, & x\ge x_0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ δεν υπάρχουν στο $x_0\in\mathbb{R}$, όμως $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}-1, & x<x_0\\ -1, & x\ge x_0\end{cases}$, δηλαδή $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x_0\in\mathbb{R}$.

**32.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύει η ισοδυναμία $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm 1$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ -1, & x\ge x_0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ όμως $|f(x)|=1,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$.

**Askisopolis**

**33.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Από τις ιδιότητες απολύτων ισχύει ότι $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

**34.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν $g(x)\le f(x)\le h(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\kappa\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lambda\ne\kappa$ τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $g(x)=x,\ f(x)=x+1$ και $h(x)=x+2$.

Για κάθε $x\in(-2,1)\cup(1,2)$ είναι $g(x)\le f(x)\le h(x)$.

Είναι $\lim_{x\to 1} g(x)=1,\ \lim_{x\to 1} h(x)=3$ και $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ , δηλαδή το όριο της f στο $x=1$ υπάρχει παρά το ότι δεν ισχύει το κριτήριο παρεμβολής.

**35.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν $\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=\ell\in\mathbb{R}$ , $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0\in\mathbb{R}$ και $g(x)\neq u_0$ κοντά στο $x_0$ τότε και $\lim_{u\to u_0} f(u)=\ell$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ .

Είναι $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ και $g(x)\neq 0$ κοντά στο 0.

Επειδή $x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ , είναι $f\left(g(x)\right)=x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to 0} f\left(g(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=1$ , όμως το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει αφού $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$ και $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ .

**36.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν $\lim_{x\to x_0} f^2(x)=0$ τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|\Leftrightarrow -\sqrt{f^2(x)}\leq f(x)\leq\sqrt{f^2(x)}$ .

Είναι $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{0}=0,\ \lim_{x\to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right)=0$ , από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ .

**Askisopolis**

**37.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}},\ \nu\in\mathbb{N}$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Είναι $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$ , ενώ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$ ,οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ .

**38.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ »**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Είναι $\lim_{x\to 0} x=0$, όμως $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**39. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=-\frac{1}{x^4}$. Είναι $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$ όμως

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^4}=-\infty$$

**40. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Γνωρίζουμε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$

**Askisopolis**

**41. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x),Q(x)$ πολυώνυμα, είναι συνεχής».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ με $Q(x_0)\neq 0$ είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0)$.

**42. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0$ του πεδίου ορισμού τους, τότε και η $f\circ g$ είναι επίσης συνεχής στο $x_0$».**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$, $x\neq 1$.

Είναι $D_{f\circ g}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}=\left\{x\neq 1 \,/\, \frac{1}{x-1}\geq 0\right\}=\{x\neq 1 \,/\, x-1>0\}=\{x\neq 1 \,/\, x>1\}=(1,+\infty)$.

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0=0$ όμως η $f\circ g$ δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

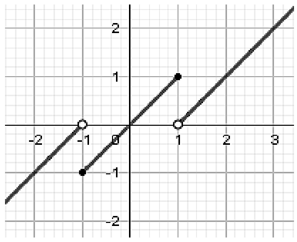
**43.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ , τότε είναι συνεχής στα $x=\alpha$ και $x=\beta$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<-1 \\ x, & -1\leq x\leq 1 \\ x-1, & x>1 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, όμως δεν είναι συνεχής στα $x=-1$ και $x=1$ .

**44.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Για κάθε συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0\in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο $x_0$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η πρόταση ισχύει μόνο αν η f είναι συνεχής στο $x_0$ .

Για παράδειγμα αν $f(x)=\begin{cases} x, x\neq 0 \\ 1, x=0 \end{cases}$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)=1$.

**Askisopolis**

**45.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε και η $|f|$ δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1, & x\leq x_0 \\ -1, & x>x_0 \end{cases}$, $x_0\in\mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ,

οπότε η f δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό, όμως $|f(x)|=1,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1=f(x_0)$ .

**46.Έστω f, g δύο συναρτήσεις και $x_0$ κοινό σημείο του πεδίου ορισμού τους.**

**Αν η g είναι συνεχής στο $x_0$ και η $f-g$ είναι συνεχής στο $x_0$ τότε και η f είναι συνεχής στο $x_0$ .**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β) 1ος τρόπος**

Επειδή οι συναρτήσεις $f-g$ , $g$ είναι συνεχής στο $x_0$ και το άθροισμά τους $f-g+g=f$ είναι συνεχής στο $x_0$ .

**2ος τρόπος**

Επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $x_0$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$

Επειδή η $f-g$ είναι συνεχής στο $x_0$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}(f-g)(x_0)=(f-g)(x_0)=f(x_0)-g(x_0)$

Θέτουμε $(f-g)(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=h(x)+g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(h(x)+g(x))=f(x_0)-\cancel{g(x_0)}+\cancel{g(x_0)}=f(x_0)$ , άρα η f είναι συνεχής στο $x_0$ .

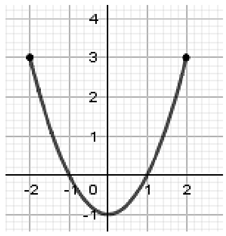
**47.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=x^2-1,\ x\in[-2,2]$ . Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$ ,

η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες τις -1, 1 στο $(-2,2)$ όμως

$f(-2)=3,\ f(2)=3$ και $f(-2)f(2)>0$

**Askisopolis**

**48.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ».**

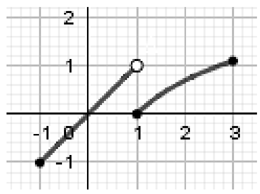
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<1 \\ \ln x, & 1\le x\le 3\end{cases}$ . Για $x\in[-1,1)$ είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ,




ενώ για $x\in[1,3]$ είναι $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$ , δηλαδή η $f(x)=0$

έχει δύο ρίζες και $f(-1)=-1,\ f(3)=\ln 3$ δηλαδή $f(-1)f(3)<0$ ,

όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[-1,3]$ αφού δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$ .

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$

**49.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**μια συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

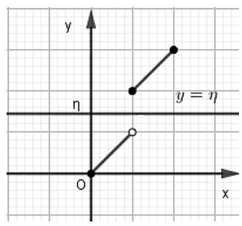
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ x+1, & 1\le x<2\end{cases}$ .

Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, επειδή η f δεν είναι συνεχής, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



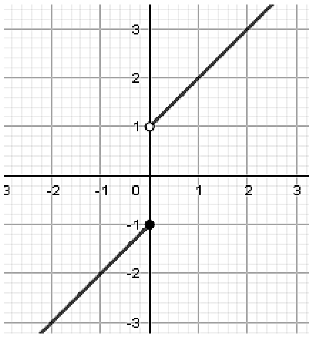
**50. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0\\ x+1, & x>0\end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ όμως για κάθε $x\le 0$ είναι $f(x)=x-1\le -1$ και για κάθε $x>0$ είναι $f(x)=x+1>1$.

**51. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Α ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $A=\mathbb{R}^*$ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, όμως $f(x)<0$ για κάθε $x<0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, δηλαδή η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

**Askisopolis**

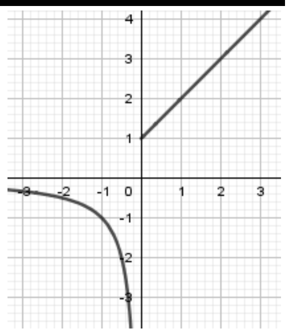
**52. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής

**β)** Η f δεν είναι υποχρεωτικό να διατηρεί πρόσημο στο Δ γιατί δεν είναι συνεχής σ' αυτό.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0\\ x+1, & x\ge 0\end{cases}$. Είναι $f(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όμως δεν διατηρεί το πρόσημό της.

**53. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}^*$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Αν η f ήταν σταθερή τότε το σύνολο τιμών της θα αποτελούνταν από ένα μόνο στοιχείο.

Αν η f δεν είναι σταθερή τότε επειδή είναι συνεχής, η εικόνα του $\mathbb{R}$ θα είναι διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων $\left(\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\right)$.

**54.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση ,η οποία είναι συνεχής συνάρτηση , έχει σύνολο τιμών μονοσύνολο και όχι διάστημα.

**Askisopolis**

**55.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $(\alpha, \beta)$, τότε και το σύνολο τιμών της θα είναι ανοικτό διάστημα».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x,\ x \in (0, 2\pi)$, τότε επειδή $-1 \le \eta\mu x \le 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\frac{3\pi}{2} = -1,\ \eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1, 1]$ και δεν είναι ανοικτό διάστημα.

**56.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ, τότε έχει ελάχιστο και μέγιστο στο διάστημα αυτό».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η πρόταση ισχύει μόνο όταν το Δ είναι κλειστό διάστημα.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \ln x,\ x > 0$, είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

**57.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν μία μη σταθερή συνεχής συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ τότε έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα ».**

**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Από Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (ΘΜΕΤ) παίρνει μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m στο πεδίο ορισμού της και από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (ΘΕΤ) έχει σύνολο τιμών το κλειστό διάστημα $[m, M]$.

## Διαφορικός Λογισμός

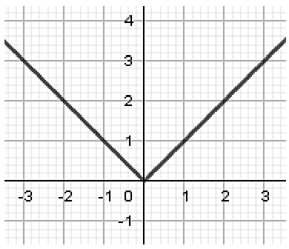
**58.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά (Αντίστοιχα προς τα αριστερά) τότε κοντά στο to ισχύει κατά ανάγκη ότι $u(to) \geq 0$ (Αντίστοιχα $u(to) \leq 0$ ) ».**
**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής.
**β)** Έστω s(t) η συνάρτηση θέσης ενός κινητού. Όταν το κινητό κινείται προς τα δεξιά (Αντίστοιχα προς τα αριστερά) τότε κοντά στο to ισχύει $\frac{s(t)-s(to)}{t-to} > 0$ (Αντίστοιχα $\frac{s(t)-s(to)}{t-to} < 0$ ) οπότε $\lim\limits_{t\to to}\frac{s(t)-s(to)}{t-to} \geq 0$ (Αντίστοιχα $\lim\limits_{t\to to}\frac{s(t)-s(to)}{t-to} \leq 0$) άρα $u(to) \geq 0$ (Αντίστοιχα $u(to) \leq 0$ ) αφού $u(to) = s'(to) = \lim\limits_{t\to to}\frac{s(t)-s(to)}{t-to}$.

**59.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής.
**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$.
Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1$.

**Askisopolis**

**60.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

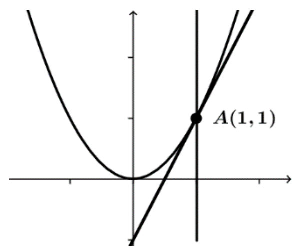
**Απάντηση**

**α)** Αληθής.
**β)** Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $x_0$ τότε βάση του θεωρήματος θα ήταν και συνεχής στο σημείο αυτό που δεν ισχύει.

**61.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Κάθε ευθεία που τέμνει την γραφική παράσταση μία συνάρτησης f σε μοναδικό σημείο είναι εφαπτομένη της ».**
**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής.




**β)** Αν $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα μοναδική εφαπτομένη στο Α(1,1) είναι η ε ενώ η $\zeta: x=1$ δεν είναι εφαπτομένη της f.

**62.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ,τότε και η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία για τα οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $g(x)=x$ και $f(x)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x}, x\geq 0$ ,τότε έχουμε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τύπο $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

**Askisopolis**

**63.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν δύο συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in A$, τότε και η $f+g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=-|x|,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=|x|$ . Οι f,g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{x}=-1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1.$

Είναι $(f+g)(x)=-|x|+|x|=0$ και $(f+g)'(x)=0$ .

**64.Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ ενώ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ .**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=|x|$ και $g(x)=x^2$ , $x\in\mathbb{R}$ .

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(0)=0$ , Όμως $f(g(x))=|x^2|=x^2$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

**65.Αν η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ ενώ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η συνάρτηση $f\circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$.**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω $f(x)=x^2$ και $g(x)=|x|$ , $x\in\mathbb{R}$ .

Η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(0)=0$ , Όμως $f(g(x))=|x|^2=x^2$ και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

**Askisopolis**

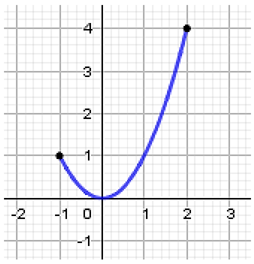
**66.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής

**β)** Στη συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in[-1,2]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,2]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$ με $f'(x)=2x$ , είναι $f'(0)=0$ όμως $f(-1)=1,\ f(2)=4$ δηλαδή $f(-1)\neq f(2)$ .

**67.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Αν ήταν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε λόγω του θεωρήματος Rolle θα υπήρχε $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

ή

Στη συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in[-1,1]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,1]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x)=1\neq 0$ και $f(-1)=-1,\ f(1)=1$ .

**68.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)=f(\beta)$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο $f'(x_0)=0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$».**

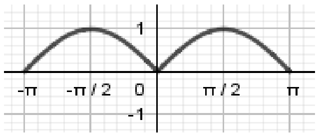
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=|\eta\mu x|,\ x\in[-\pi,\pi]$ .




Η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ , $f(-\pi)=f(\pi)=0$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ , όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ οπότε και στο $(-\pi,\pi)$ αφού

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1 \text{ και } \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\eta\mu x}{x}=-1$$

**Askisopolis**

**69.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

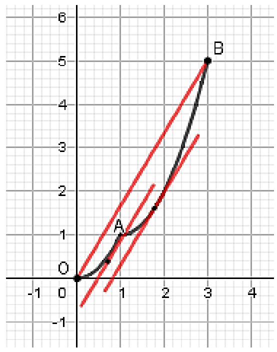
**« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα της μορφής $[\alpha,\beta]\subseteq D_f$ , υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής




**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1\\ x^2-2x+2, & 1<x\le 3\end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ αφού δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$ όμως οι εφαπτομένες της στα $x_1=\frac{5}{6}$ και $x_2=\frac{11}{6}$ είναι παράλληλες στην ΟΑ επειδή

$f'\left(\frac{5}{6}\right)=\lambda_{OA}=\frac{5-0}{3-0}=\frac{5}{3}$ και $f'\left(\frac{11}{6}\right)=\lambda_{OA}=\frac{5}{3}$ .

**70.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α που αποτελείται από ένωση διαστημάτων, είναι παραγωγίσιμη στο Α και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Α, τότε η f είναι σταθερή στο Α».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -1 & , & x<0\\ 1 & , & x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

**71.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)$».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Είναι φανερό ότι αν $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε προφανώς και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$. Αν όμως $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε $f(x)=g(x)+c,\ c\in\mathbb{R}, x\in\Delta$.

**Askisopolis**

**72.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με τη πρώτη τους παράγωγο».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής **β)** $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x,\ c\in\mathbb{R}$.

**Askisopolis**

**73.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

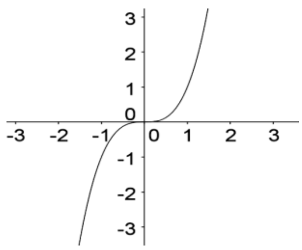
**« Αν μια f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής




**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$.

Είναι $f'(x)=3x^2$, και $f'(0)=0$, Δηλαδή, βλέποντας το σχήμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς να είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**74.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0$ τότε $f'(x_0)=0$ ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ αφού $f(x)\ge 0=f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ , όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και δεν ορίζεται το $f'(0)$.

**75.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0\in\Delta$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x_0)=0$ ».**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $f(x)=x^2,\ x\in[1,2]$ έχει ελάχιστο στο $x=1$, όμως $f'(x)=2x$ και $f'(1)=2\neq 0$

**76.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του Δ.**
**Αν $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0$ ».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής
**β)** Η συνάρτηση $f(x)=x^3,\ x\in\mathbb{R}$ έχει $f'(0)=0$ όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

**77.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Κάθε κρίσιμο σημείο μίας συνάρτησης είναι τοπικό ακρότατό της ».**
**α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

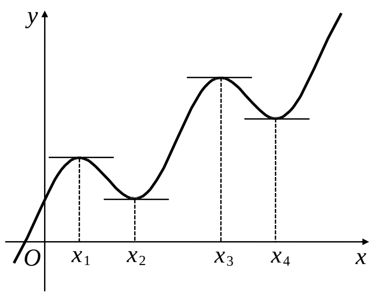
**Απάντηση**

**α)** Ψευδής
**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2, x\in\mathbb{R}$ και $f'(0)=0$ οπότε στο μηδέν έχω κρίσιμο σημείο όμως στο μηδέν δεν παρουσιάζει ακρότατο γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

**Askisopolis**

**78.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης αποτελεί και ολικό μέγιστο της συνάρτησης».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

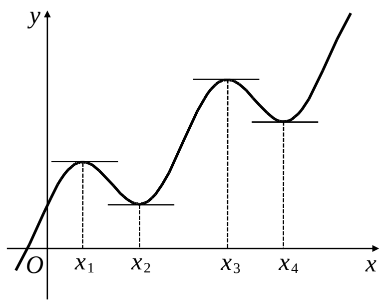
**Απάντηση**




**α)** Ψευδής
**β)** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία έχει τοπικά μέγιστα στα $x_1$, $x_3$ , όμως δεν παρουσιάζει ολικά μέγιστη τιμή.

**79.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**«Ένα τοπικό μέγιστο δεν μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής
**β)** Έστω η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Παρατηρούμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_4$ και το τοπικό μέγιστο είναι μικρότερο από το τοπικό ελάχιστο.

**80.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**
**« Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ. Οι μόνες πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f είναι τα κρίσιμα σημεία της».**
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Αν το διάστημα Δ είναι κλειστό τότε πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι και τα άκρα του διαστήματος. Για παράδειγμα θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2,\ x\in[-1,1]$. Είναι $f'(x)=2x$ και $f'(0)=0$. Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x=0$, όμως ακρότατα έχει στα $x=-1,\ x=0$ και $x=1$.

**Askisopolis**

**81.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Κάθε περιοδική συνάρτηση έχει άπειρα τοπικά ακρότατα ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

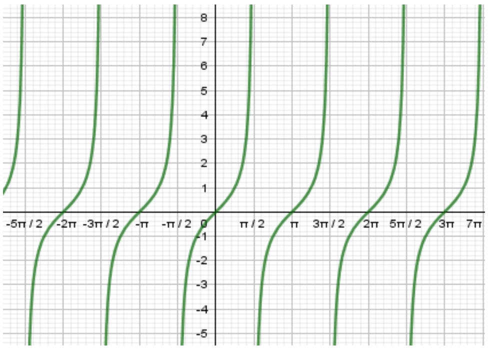
**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

είναι περιοδική με περίοδο π, όμως δεν έχει κανένα τοπικό ακρότατο.




**82.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Αν μια περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει ένα τοπικό ακρότατο τότε θα έχει άπειρα τοπικά ακρότατα του ίδιου είδους ».**

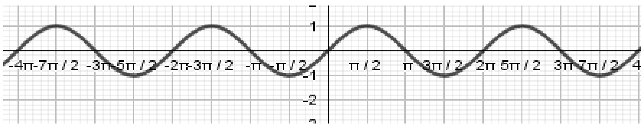
**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής.

**β)** Αν παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο $x_0$ θα παρουσιάζει και ακρότατο σε κάθε σημείο με τετμημένη $kT, k\in\mathbb{Z}$.



Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=\frac{\pi}{2}$

και γενικά σε όλα τα σημεία με τετμημένη $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

**83.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ , και υπάρχει ρίζα ρ της εξίσωσης $g''(x)=0$ ,τότε το σημείο $A(\rho,f(\rho))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f » .**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής

**β)** Η συνάρτηση $g(x)=x^4$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $g''(x)=12x^2$. Η εξίσωση $g''(x)=0$ έχει ρίζα το 0, όμως το σημείο $(0,g(0))$ δεν είναι σημείο καμπής αφού η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

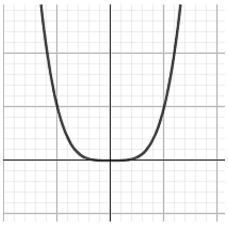
**84. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**



**α)** Ψευδής

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4,\ x \in \mathbb{R}$. Είναι $f''(x) = 12x^2$ και η f είναι κυρτή, όμως δεν είναι αρνητική στο 0 αφού $f''(0) = 0$.

Όμοια « Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη σε ένα διάστημα Δ, τότε $f''(x) < 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ».

**α)** Ψευδής **β)** $f(x) = -x^4$ ………

**Askisopolis**

**85. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ και $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$. Η $f''$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του $-\dfrac{\beta}{3\alpha}$

οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(-\dfrac{\beta}{3\alpha}, f\left(-\dfrac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$.

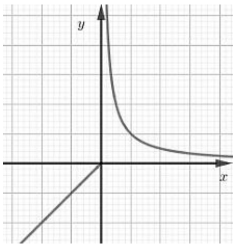
**86. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**




**α)** Ψευδής

**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Η f έχει ασύμπτωτες τους άξονες όμως τους τέμνει στο $(0,0)$.

**87. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

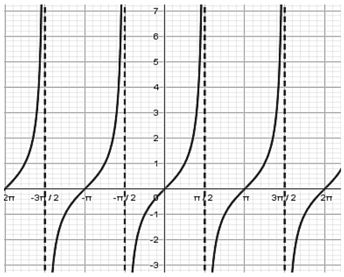
**«Δεν υπάρχει συνάρτηση που να έχει περισσότερες από μία κατακόρυφες ασύμπτωτες».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής



**β)** Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες τις μορφής $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

**88.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**«Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \nu\geq 2$.

Επειδή η P είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=\pm\infty$, η P δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\alpha_\nu x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+...+\alpha_1+\frac{\alpha_0}{x}\right)=\pm\infty$ η P δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

**Askisopolis**

**89.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

**« Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x),Q(x)$ πολυώνυμα με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή $Q(x)$, δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Αληθής

**β)** Έστω $f(x)=\frac{x^4+3}{x+2}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^4+2}{x+2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+2}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ και όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

**90.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:**

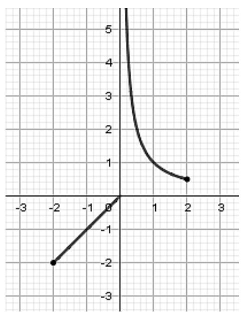
**« Αν μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού διάστημα της μορφής $[\alpha,\beta]$ τότε δεν μπορεί να έχει ασύμπτωτες».**

**α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;**

**β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.**

**Απάντηση**

**α)** Ψευδής



**β)** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x, & -2\leq x\leq 0\\ \frac{1}{x}, & 0<x\leq 2\end{cases}$. Η f έχει ασύμπτωτες τους άξονες και έχει πεδίο ορισμού το $[-2,2]$.