Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Εξάσκηση Μαθηματικών Πέμπτη 5 Μαρτίου 2020

Α.Τζελέπης - Σ.Χασάπης

Τμήμα:......... Ονοματεπώνυμο:.......................................

Θέμα 1. Α. *Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ), αναγράφοντας την απάντηση στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό κάθε ερώτησης. Για κάθε πρόταση που θεωρείτε ότι είναι λανθασμένη να δώσετε αντιπαράδειγμα.*

α. *Αν μία συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ *και παραγωγίσιμη στο* $[b,c]$, *με* $a<b<c$, *τότε θα είναι παραγωγίσιμη και στο* $[a,c]$.

β. *Αν μία συνάρτηση* f *είναι συνεχής στο* $D_f=[a,b]$ *και παραγωγίσιμη στο* (a,b) *με* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in(a,b)$, *τότε η* f *είναι 1-1.*

γ. *Δεν υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση που να έχει πλάγια ασύμπτωτη.*

δ. *Δεν υπάρχει συνάρτηση που να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, η οποία να τέμνει τη γραφική της παράσταση.*

Μονάδες 4Χ3 = 12

Β. *Δίνεται η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *η οποία ικανοποιεί τη σχέση:*

$$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+8 \tag{1}$$

Βα. *Να αποδειχθεί ότι η* f *είναι συνεχής στο* $\mathbb{R}$.

Ββ. *Να αποδειχθεί ότι η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbb{R}$.

Βγ. *Να μελετηθεί η* f *ως προς τα ακρότατα και τη μονοτονία.*

Μονάδες 5+5+3 = 13

Θέμα 2. *Δίνεται η συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *τέτοια, ώστε:*

- *η συνάρτηση* f *είναι παραγωγίσιμη ,*
- *η* C_f *δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα* $x'x$,
- *επιπλέον, δίνονται τα παρακάτω όρια:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-xf(1)}{x-1}=2 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3.$$

Να αποδειχθεί ότι:

α) $f(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

β) $f'(1)-f(1)-2=0$.

γ) αν επιπλέον η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ *τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της* C_f *στο σημείο* $A(x_0,f(x_0))$ *να διέρχεται από την αρχή των αξόνων* $O(0,0)$.

Μονάδες 7+9+9 = 25

Θέμα 3. *Δίνεται η συνάρτηση:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{2}$$

α. Να αποδειχθεί ότι η f έχει τοπικά ελάχιστη τιμή 2.

β. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ. Να αποδειχθεί ότι C_f έχει μοναδική ασύμπτωτη με την ιδιότητα να την τέμνει σε μοναδικό σημείο.

δ. Να αποδειχθεί ότι η ασύμπτωτη του προηγούμενου ερωτήματος αποτελεί άξονα συμμετρίας της C_f.

Μονάδες 6+8+5+6 = 25

ΘΕΜΑ 4. ***α.*** *Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση* $x^2 + y^2 = 36$. *Καθώς διέρχεται από το σημείο* $N\left(3, 3\sqrt{3}\right)$, *η τεταγμένη του* y *ελαττώνεται με ρυθμό* $3\mu/s$. *Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του* x, *τη χρονική στιγμή* t_0, *που το κινητό διέρχεται από το* N.

β.1 *Έστω συνάρτηση* $f : [-6, 6] \to \mathbb{R}$, *η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα στο διάστημα* $[-6, 0]$ *και τέτοια, ώστε κάθε σημείο* $M(x, f(x))$ *της γραφικής της παράστασης, να απέχει από την αρχή των αξόνων* $O(0, 0)$ *απόσταση ίση με 6 μονάδες. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης* f *και να σχεδιασθεί η γραφική της παράσταση.*

β.2 *Θεωρούμε τα σημεία* $A(-6, 0), B(6, 0)$ *και* $K(0, 6)$ *της* C_f. *Ένα σημείο* M *κινείται επάνω στην καμπύλη ΚΒ, από το* K *προς το* B, *έτσι ώστε η γωνία* $\widehat{MAB} = \theta$ *να ελαττώνεται με ρυθμό* $\frac{\pi}{6} rad/s$. *Να βρεθούν:*

i. *ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του* M *από το ευθύγραμμο τμήμα* AB *τη χρονική στιγμή* t_1, *κατά την οποία* $\theta = \frac{\pi}{12}$.

ii. *ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου* MAB *τη χρονική στιγμή* $t_2 = 1s$.

Μονάδες 5+8+6+6= 25

ΘΕΜΑ 5. *Δίνεται η συνάρτηση* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *ώστε* $f'(x)\, e^{x+f(x)} = 2x - x^2$ *και η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο* $A(1, -1)$.

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.

β) να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης και οι ασύμπτωτές της.

γ) να λυθεί η εξίσωση:

$$2\ln\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 8} = x^2 - 9, \text{ για } x > 2$$

δ) να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

ε) να βρείτε σημείο της C_f *το οποίο απέχει ελάχιστη απόσταση από την ευθεία με εξίσωση* $y = x$, *καθώς και την ελάχιστη απόσταση.*

ζ) Δίνεται συνάρτηση g *παραγωγίσιμη σε διάστημα* $[a, \beta]$, *με* $0 < a < \beta$, *με τιμές θετικές και* $\xi \in (\alpha, \beta)$ *είναι η τετμημένη του σημείου στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) των* C_f *και* C_g *παίρνει την ελάχιστη τιμή. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των* C_f *και* C_g *στα σημεία* $A(\xi, f(\xi))$ *και* $B(\xi, f(\xi))$ *αντίστοιχα, είναι παράλληλες.*

Μονάδες 4+5+4+4+4+4= 25

Καλή επιτυχία.