22/03/2021

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ακρίβεια. Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα :

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

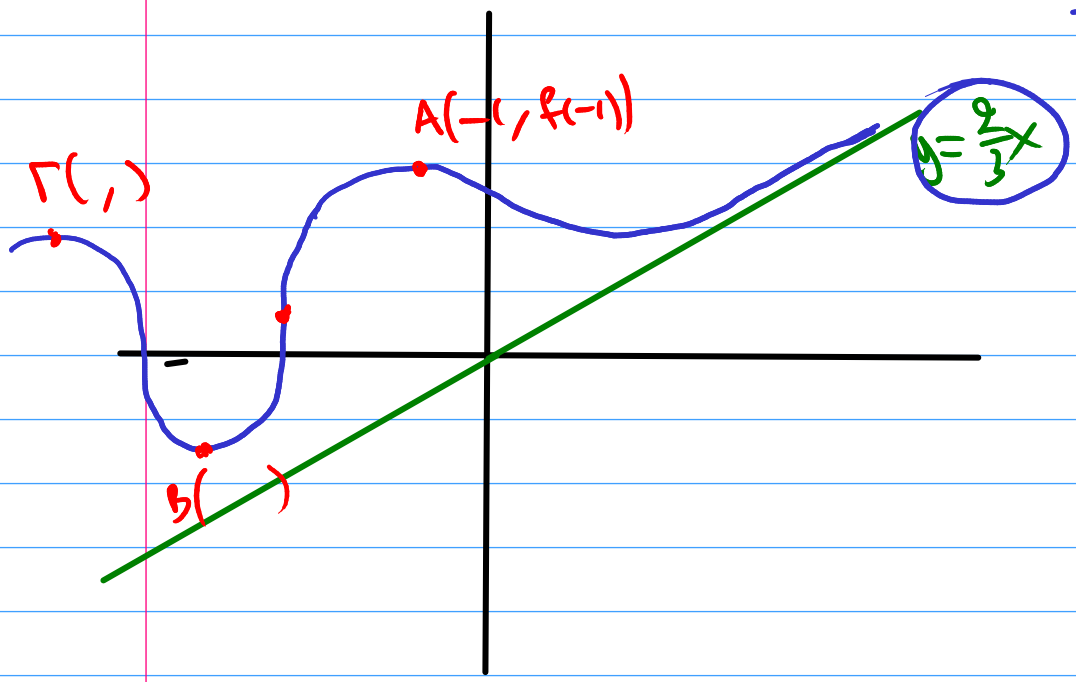
πίνακες προσήμων

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f ′ και f ″ και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f ′ προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f ″ καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών** της f και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f.

6ο Συμμετρίες (άρτια/περιττή/περιοδική)
7ο σημεία τομής με άξονες



Π.Π.Χ

f με πρτ
α) μονοτονία
β) ακρότατα
δ) ασύμπτωτες

1) Να γίνει μελέτη της $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$ συνεχής $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad f''(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ διότι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$

Οπότε $f \nearrow \mathbb{R}$

$f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ άρα f κυρτή $\mathbb{R}$

Δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) \overset{x>0}{=} \lim_{+\infty}\left(1 + \frac{\cancel{x}\sqrt{1+1/x^2}}{\cancel{x}}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 2x) = \lim_{+\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \overset{x>0}{=} \lim_{+\infty} \frac{1}{x(\sqrt{1+1/x^2}+1)} =$$

$$= \lim_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}\right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

άρα $y = 2x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{-\infty}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = \lim_{-\infty} \frac{1}{x - \sqrt{1+x^2}} \overset{x<0}{=} \lim_{-\infty} \frac{1}{x(1+\sqrt{1/x^2+1})}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\sqrt{1/x^2+1}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

άρα $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη $-\infty$

$\boxed{f(0) = 1}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$