

2021031532712

ΜΠΣ0322020(444)69

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(0)=1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{x}{f(x)} + \frac{1}{f'(x)} = 1$

α) ν50 $g(x) = f'(x) - 2xf(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ σταδφ1 $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$
 $(1) \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = f(x)f'(x)$

$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 2(f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x)) \stackrel{1)}{=} 0 \forall x \in \mathbb{R}$
 $\delta\pi\alpha$ g σταδφ1 $g(0) = f'(0) - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 1$ $\delta\pi\alpha$ $g(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$f^2(x) - 2xf(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 1 + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|f(x) - x| = \sqrt{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) - x \text{ ειναι } \geq 0 \text{ και } f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 0 \text{ αδδυνατο } \mathbb{R}$$

αλτφ $f(x) - x > 0$ $f(0) - 0 = 1 > 0$

$$\delta\pi\alpha \quad f(x) - x = \sqrt{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

β) Ν50 $f \nearrow \mathbb{R}$

$$\frac{x}{f(x)} - 1 = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x - f(x)}{f(x)} = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{x - f(x)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{f'(x)(x - f(x)) - f(x)(1 - f'(x))}{(x - f(x))^2} = \frac{x f'(x) - f(x) f'(x) - f(x) + f(x) f'(x)}{(x - f(x))^2} = \\ &= \frac{x f'(x) - f(x)}{(x - f(x))^2} = \frac{x \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} - (x + \sqrt{1+x^2})}{(x - x - \sqrt{1+x^2})^2} = \frac{\frac{x^2 + x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} - x - \sqrt{1+x^2}}{(-\sqrt{1+x^2})^2} = \\ &= \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \delta\pi\alpha \quad f \text{ κυρτφ } \mathbb{R} \end{aligned}$$

γ) Οπφινωα / ν5αγες αλμνωα

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1+x^2}) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x \sqrt{1+1/x^2}) = -\infty + \infty \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x(1 + \sqrt{1+1/x^2})} = \frac{1}{\infty \cdot 1} = 0$$

$\delta\pi\alpha$ $y=0$ οπφινωα σ5 $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{1+x^2} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = 0 \quad y = 2x + 0 \text{ ν5αγ12 } +\infty \end{aligned}$$

δ) ν50 $f'(2x) + f(x) \geq f'(x) + 2x, \forall x \geq 0$

$$0 < x \Rightarrow x + 0 < x + x \Leftrightarrow f'(x) < f'(2x)$$

$$f(x) > 2x \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 2x \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} - x > 0 \text{ ειναι } \nearrow$$

ΓΝΩΚΑ $\nearrow$ $\pi\alpha\alpha\alpha$

Γενικά? f υπέρ $\mathbb{R}$ και $y = ax + b$ ασύμμετρο το
τότε $f(x) > y$.

Προτάση: Αν f υπέρ στο $(a, +\infty)$ και (ε) ασύμμετρο
της Q στο $+\infty$, τότε $\exists$ πάνω από (ε) στο $(a, +\infty)$

f υπέρ από παραγωγή στο $(a, +\infty)$ με $f' \nearrow (+\infty)$

$$\text{Αν } (\varepsilon) \ y = ax + b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Έστω $x_0 \in I = (a, +\infty)$ και $(n): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
η εφαπτομένη της f στο $(x_0, f(x_0))$ τότε

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - (ax + b) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) - (ax + b) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{f(x) - (ax + b) \geq (f'(x_0) - a)x - x_0 f'(x_0) - b + f(x_0)} \quad (1)$$

λογίζου : $\boxed{f'(x_0) - a \leq 0}$ ούτως αν $f'(x_0) > a$ τότε
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x_0) - a)x - x_0 f'(x_0) - b + f(x_0) = +\infty$
άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = +\infty$ άρα

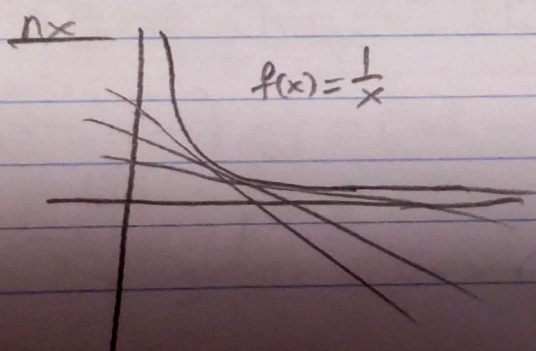
Από $f'(x) \leq a \ \forall x \in I$ και $f' \nearrow$ με κάποια g άρα x κοντά

Από $n \ g(x) = f(x) - (ax + b)$ με $g'(x) = f'(x) - a < 0$
 $\Rightarrow g \searrow \text{I} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

οπότε $g(I) \xrightarrow[\text{ακ.}]{\text{36}}$ $(0, k)$

$$\Rightarrow g(x) > 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f(x) - (ax + b) > 0 \ \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow f(x) > ax + b \ \forall x \in I. \quad \text{Q.E.D.}$$



η υψίστη υακή εφαπτομένη είναι
μικρότερη της ασύμμετρου