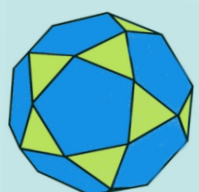
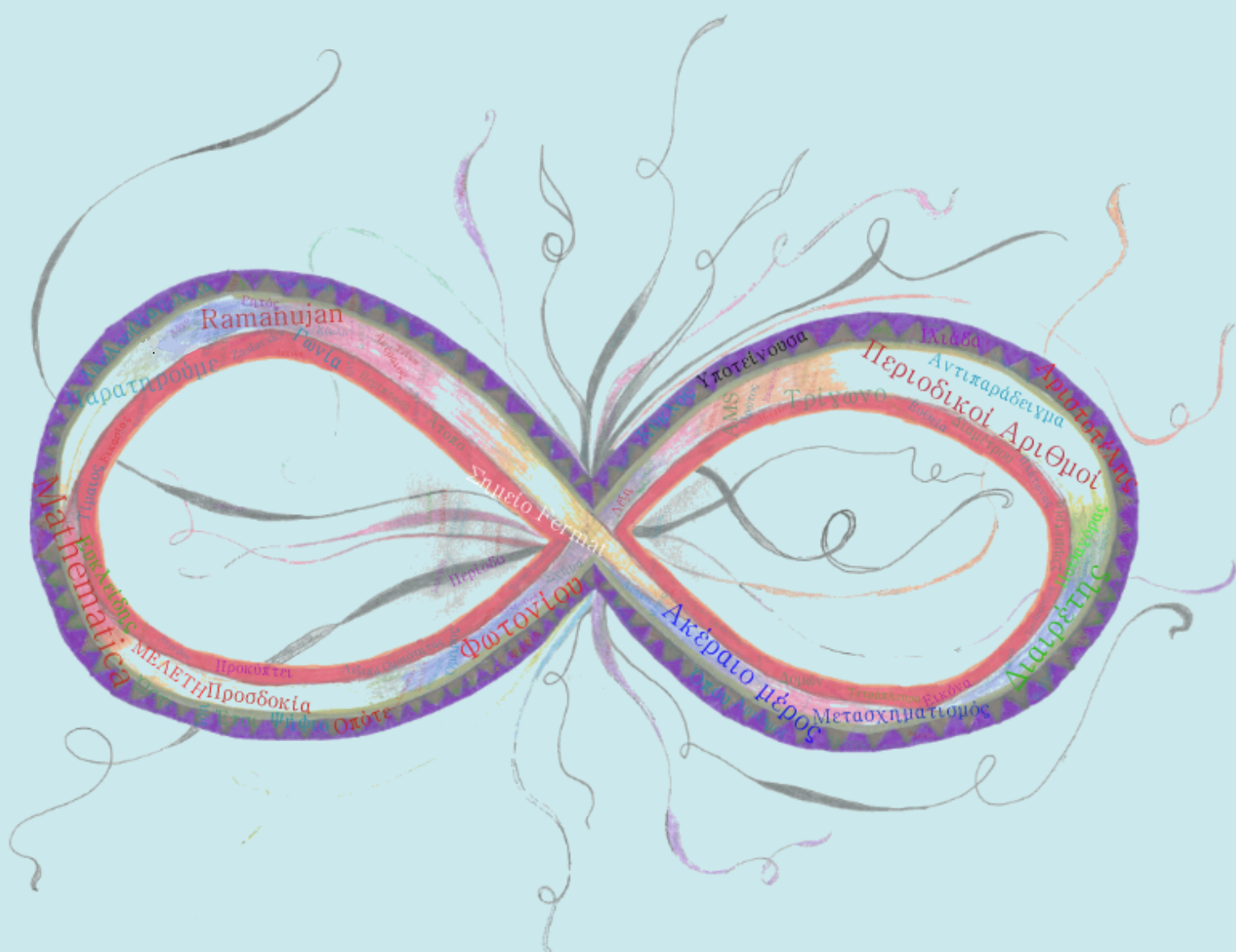


Μελέτη

Μαθητικό Περιοδικό του www.mathematica.gr



Τεύχος 6, Μάρτιος 2021

Έκδοση 1η - 14/03

www.mathematica.gr

Μελέτη

...ἀριθμόν τε Μούσας ἐνόμισαν εἶναι τρεῖς καὶ ὀνόματα αὐταῖς
ἔθεντο Μελέτην καὶ Μνήμην καὶ Αοιδήν. Πausανίας, 9.29.2

Μαθητικό Ηλεκτρονικό Περιοδικό, έκδοση του www.mathematica.gr
Απευθύνεται σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης
Υπεύθυνος Συντονιστής του mathematica: Θάνος Μάγκος

Κώστας Δόρτσιος, τ.σχολικός σύμβουλος Μαθηματικών Δυτ. Μακεδονίας.
Θάνος Μάγκος, μαθηματικός στο Πειραματικό Γυμνάσιο ΠΑ.ΜΑΚ.
Ειρήνη Περυσινάκη, μαθηματικός στο Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου.
Ανδρέας Πούλος, μαθηματικός στο 1ο Πρότυπο ΓΕ.Λ. Θεσσαλονίκης.
Γιάννης Τσόπελας, μαθηματικός στο 1ο ΓΕ.Λ. Αμαλιάδας.
Σωτήρης Χασάπης, μαθηματικός στο Πρότυπο ΓΕ.Λ. Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης.

Σκοποί, στόχοι του περιοδικού και οδηγίες για τους αρθρογράφους

- Το περιοδικό «Μελέτη» απευθύνεται σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου και έχει ως θέμα τα Μαθηματικά. Ο σκοπός του είναι να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά και να δώσει νέες πρωτότυπες ιδέες και παραδείγματα στους ενδιαφερόμενους μαθητές και στους καθηγητές τους.
 - Τα άρθρα επικεντρώνονται στην εμβάθυνση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, ορισμένες από τις οποίες υπερβαίνουν τα όρια της σχολικής ύλης. Θεωρούμε ότι έτσι διευρύνεται ο γνωστικός ορίζοντας των μαθητών.
 - Το περιοδικό δεν αναφέρεται σε θέματα εξετάσεων, διότι τέτοια θέματα υπάρχουν σε αφθονία στο mathematica.gr και σε διάφορα περιοδικά ή βιβλία ηλεκτρονικά και έντυπα.
 - Τα άρθρα του περιοδικού δεν ακολουθούν τη χρονική σειρά με την οποία διδάσκονται οι μαθηματικές ενότητες στο σχολείο.
 - Η «Μελέτη» είναι ηλεκτρονικό περιοδικό και επιδιώκει να αναδεικνύει τα πλεονεκτήματα και τις δυνατότητες της ψηφιακής τεχνολογίας.
 - Τα άρθρα κρίνονται από όλα τα μέλη της Συντακτικής Επιτροπής. Η απόφαση για τη δημοσίευση των άρθρων λαμβάνεται κατά πλειοψηφία.
 - Τα άρθρα και γενικά οι δημοσιεύσεις πρέπει να αξιοποιούν την ψηφιακή τεχνολογία, τα ελεύθερα λογισμικά και να δίνουν ελκυστικά παραδείγματα για τους μαθητές. Το περιοδικό είναι έγχρωμο και όσο είναι δυνατόν με πλούσια εικονογράφηση.
 - Τα κείμενα γράφονται σε κειμενογράφο Word ή ανάλογο άλλο ή ελεύθερο λογισμικό ή ακόμα και σε LaTeX, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο πρότυπο κειμένου της AMS, ώστε να έχουν τη δυνατότητα να γράφουν όσο γίνεται περισσότεροι συνάδελφοι και μαθητές.
 - Οι μαθηματικές εξισώσεις και τύποι γράφονται μέσω του αντίστοιχου συντάκτη εξισώσεων. Τα κείμενα γράφονται σε γραμματοσειρά Garamond μεγέθους 14. Οι σελίδες είναι μεγέθους A4 με περιθώρια σελίδας 2,5 εκ. πάνω - κάτω και 3 εκ. δεξιά - αριστερά. Όλες οι εικόνες του κειμένου πρέπει να είναι inline text, δηλαδή ως χαρακτήρες στη στοίχιση του κειμένου.
- ΒΑΣΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ:** Μην πιέζετε πάνω από μία φορά κανένα από τα πλήκτρα KENOY(space), ENTER, TAB. Όλες οι επικεφαλίδες πρέπει να είναι σε στυλ επικεφαλίδας, ξεκινώντας από την Επικεφαλίδα 2, 3 κλπ, ώστε να υπάρχει ομοιομορφία.
- Η σαφήνεια, η ορθότητα στα κείμενα και στις μαθηματικές σχέσεις και προτάσεις συμπεριλαμβάνονται στους βασικούς στόχους της «Μελέτης».
 - Κάθε άρθρο έχει μία σήμανση που να δείχνει ποιοι μαθητές (από ένα επίπεδο και πάνω) μπορούν να το διαβάσουν.
 - Το περιοδικό μπορεί να φιλοξενεί και μεταφράσεις, αφού πρώτα έχει εξασφαλιστεί η άδεια από τους συγγραφείς.
 - Δεν υπάρχει περιορισμός στην έκταση των άρθρων, αν και προωθείται ο σύντομος τρόπος γραφής των κειμένων, ώστε να μην είναι κουραστικά στην ανάγνωση.
 - Η υιοθέτηση μόνιμων στηλών με σαφές περιεχόμενο βοηθά τους μελλοντικούς συντάκτες των άρθρων να έχουν ένα πλαίσιο στο οποίο θα κινούνται. Επίσης, οι αναγνώστες θα είναι από πριν ενήμεροι στο τι αναμένουν από κάθε συγκεκριμένη στήλη.
 - Το περιοδικό θα εκδίδεται κάθε τέσσερις ή έξι μήνες.

Σχεδιασμός εξωφύλλου: Ν.Μαυρογιάννης - Σ.Χασάπης

Στοιχειοθεσία/Επιμέλεια τύχους: Σ.Χασάπης

Τα τεύχη του περιοδικού βρίσκονται αναρτημένα στο www.mathematica.gr



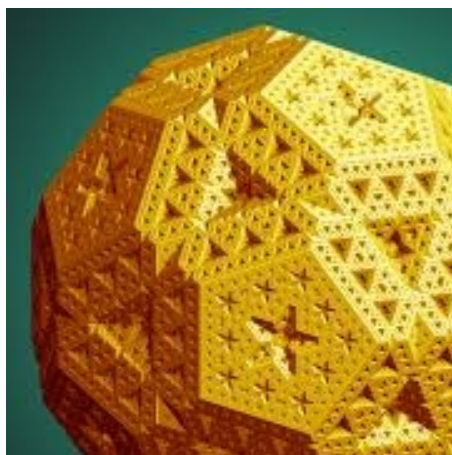
mathematica.gr

Ινστιτούτο
μαθηματικών



Περιεχόμενα

Πέμπτου τεύχους- Οκτώβρης 2019



ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΣΚΟΠΟΙ, ΣΤΟΧΟΙ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΑΡΘΡΟΓΡΑΦΟΥΣ.....2

Περιεχόμενα 3

Εμβαθύνοντας σε έννοιες και προβλήματα των Μαθηματικών 4

Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού 5

Περιοδικοί Αριθμοί Μελέτη αριθμών της μορφής $\frac{1}{\rho}$ ($\rho > 5$ πρώτος) 26

Αξιοποιώντας τα λογισμικά προγράμματα 38

Γεωμετρικές ενασχολήσεις 6 39

Από το προηγούμενο τεύχος 5 56

Χρήση των Μαθηματικών στην Τεχνολογία την καθημερινότητα και τις Επιστήμες 60

Ο τυχαίος περίπατος του φωτονίου 61

Επίλυση και σύνθεση προβλημάτων 71

Για τον ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου και των τάξεων Α', Β' Λυκείου 72

Μαθηματικών όρων και συμβόλων «επίσκεψις» 83

Η υποτείνουσα 84

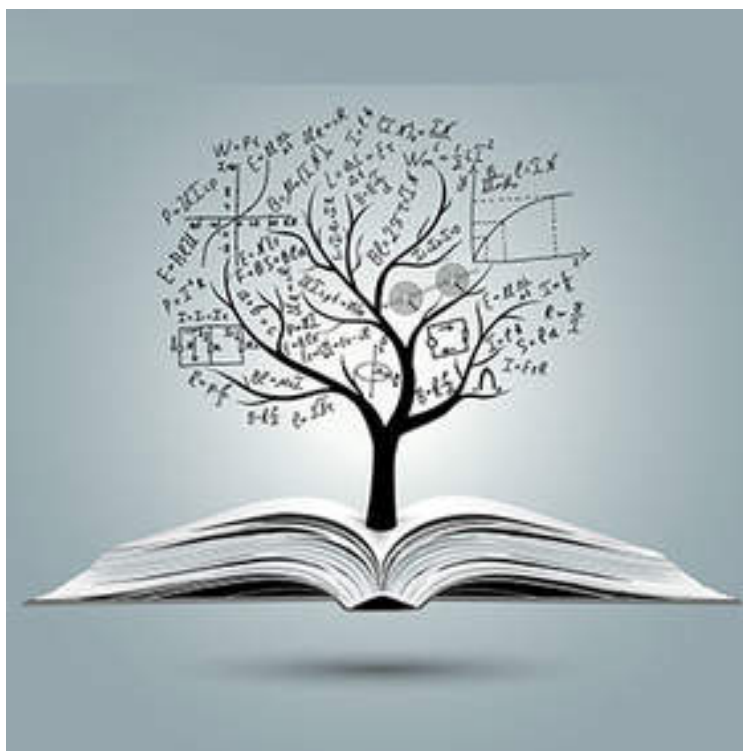
Ιδιότητες των ισόπλευρων τριγώνων 100



Εμβαθύνοντας σε έννοιες και προβλήματα των Μαθηματικών

Αυτή η στήλη σκοπεύει να περιλαμβάνει ό,τι δηλώνει ο τίτλος της.

Ξεκινώντας από ζητήματα, προβλήματα, έννοιες και διαδικασίες που υπάρχουν στα σχολικά μαθηματικά βιβλία, θα τα εμπλουτίζει και θα αναδεικνύει όψεις τις οποίες τα σχολικά εγχειρίδια δεν είναι αναγκαίο να παρουσιάσουν. Στους στόχους της στήλης είναι η σύνδεση θεμάτων που φαινομενικά ανήκουν σε διαφορετικές ενότητες των Μαθηματικών, ώστε να αποκαλυφθούν νέες σχέσεις που λόγω των περιορισμών δεν είναι δυνατόν να μελετηθούν στην τάξη.





Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού

Θάνος Μάγκος

1. Εισαγωγή

Η έννοια του ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού απουσιάζει τελείως από τα σχολικά μαθηματικά εδώ και περίπου τριάντα χρόνια. Ωστόσο, πρόκειται για μια χρήσιμη έννοια, την οποία μάλιστα συναντούμε συχνά σε θέματα διαγωνισμών. Τέτοια θέματα βρίσκονται διάσπαρτα στη διεθνή βιβλιογραφία, αλλά δύσκολα συναντάει κανείς στην ελληνική βιβλιογραφία μια εκτενή μελέτη της έννοιας αυτής. Αυτό το κενό φιλοδοξεί να καλύψει το παρόν άρθρο.

2. Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ας είναι x ένας πραγματικός αριθμός.

Ορισμός: Ονομάζουμε ακέραιο μέρος του x , και το συμβολίζουμε με $[x]$, τον μοναδικό ακέραιο n , για τον οποίο ισχύει $n \leq x < n + 1$.

Για παράδειγμα, είναι:

$$[7,42] = 7, \quad \left[\frac{10}{7}\right] = 1, \quad [\sqrt{5}] = 2, \quad [8] = 8, \quad \left[\frac{1}{3}\right] = 0, \\ [\pi] = 3, \\ [-6,259] = -7, \quad \left[-\frac{23}{6}\right] = -4, \quad [-\sqrt{19}] = -5, \quad \left[-\frac{1}{2}\right] = -1.$$

Το σύμβολο $[\dots]$ χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον K.F.Gauß στο έργο του Disquisitiones Arithmeticae, ωστόσο σήμερα, δεν είναι το μόνο που χρησιμοποιείται για να συμβολίσει το ακέραιο μέρος. Στη βιβλιογραφία συναντάμε συχνά ακόμα το σύμβολο $\{ \dots \}$.

Σχόλιο: Ας παρατηρηθεί ότι η αντίληψη, σύμφωνα με την οποία «το ακέραιο μέρος το βρίσκουμε αν κρατήσουμε το μέρος του αριθμού, το οποίο βρίσκεται πριν την υποδιαστολή» είναι λανθασμένη. Καταρχάς, είναι φανερό από τα προηγούμενα παραδείγματα ότι σίγουρα αυτό δεν ισχύει στους αρνητικούς. Π.χ. είναι $[-2,8] \neq -2$, αλλά $[-2,8] = -3$. Επιπλέον, αν αναλογιστούμε ότι ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί έχουν διπλές δεκαδικές αναπαραστάσεις, σύμφωνα με αυτή την αντίληψη θα λέγαμε $[0, \bar{9}] = 0$, ενώ φυσικά είναι $0, \bar{9} = 1$, οπότε $[0, \bar{9}] = 1$.

Το ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού έχει αρκετές εφαρμογές.



α) Αν a, b ακέραιοι με $0 < b \leq a$, τότε το πλήθος των θετικών πολλαπλασίων του b που δεν ξεπερνούν το a , ισούται με $\left[\frac{a}{b}\right]$. Με άλλα λόγια, αν $a = bq + r$, $0 \leq r \leq b - 1$, είναι $q = \left[\frac{a}{b}\right]$. Για παράδειγμα, υπάρχουν $\left[\frac{3456}{17}\right] = 203$ θετικοί ακέραιοι που δεν ξεπερνούν το 3456 και είναι πολλαπλάσια του 17.

β) Αν $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$, τότε το πλήθος των ακεραίων που βρίσκονται στο διάστημα $(b, a]$ ισούται με $[a] - [b]$. Για παράδειγμα, στο διάστημα $(\sqrt{10}, \frac{100}{3}]$ βρίσκονται $33 - 3 = 30$ ακέραιοι.

γ) Το πλήθος των ψηφίων ενός αριθμού x ισούται με $[\log_{10} x] + 1$. Για παράδειγμα, ο αριθμός 2^{100} έχει $[\log_{10} 2^{100}] + 1 = [100 \cdot \log_{10} 2] + 1 = [100 \cdot 0,30102] + 1 = 31$ ψηφία.

Είναι βολικό, εκτός από το ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού x , να ορίσουμε και το δεκαδικό μέρος του x , το οποίο συμβολίζουμε με $\{x\}$, ως εξής:

$$\{x\} = x - [x].$$

Για παράδειγμα είναι:

$$\{11,2\} = 0,2, \quad \left\{\frac{5}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \{\pi\} = \pi - 3, \quad \{\sqrt{7}\} = \sqrt{7} - 2,$$

$$\left\{-\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}, \quad \{-\sqrt{3}\} = 2 - \sqrt{3}.$$

Άμεση συνέπεια των ορισμών του ακέραιου και του δεκαδικού μέρους είναι η παρακάτω

Πρόταση 1:

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\alpha) [x] \leq x < [x] + 1,$$

$$\beta) x - 1 < [x] \leq x,$$

$$\gamma) 0 \leq \{x\} < 1,$$

$$\delta) [x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z},$$

$$\epsilon) \{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z},$$

$$\sigma\tau) x \geq 0 \Leftrightarrow [x] \geq 0,$$



$$\begin{aligned}
&\zeta) x \geq k \Leftrightarrow [x] \geq k, & \mu) [x + k] = [x] + k, \\
&\eta) x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y], & \{x + k\} = \{x\}, \\
&\theta) [x] < [y] \Rightarrow x < y, & \nu) \\
&\iota) [x] = [y] \Rightarrow |x - y| < 1, & [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{αν } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\kappa) \{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}, & \xi) \{x\} + \{-x\} = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{αν } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\lambda) [[x]] = [x], \{\{x\}\} = \{x\}, \\
&[\{x\}] = \{[x]\} = 0,
\end{aligned}$$

Η ισχύς των α) έως στ) είναι φανερή.

Αποδεικνύουμε την ζ) (η οποία είναι γενίκευση της στ)). Υποθέτουμε ότι $x \geq k$, οπότε από την α) προκύπτει $[x] + 1 > k$, δηλαδή $[x] > k - 1$. Επομένως $[x] \geq k$, αφού οι $[x], k - 1$ είναι ακέραιοι. Για το αντίστροφο έχουμε, πάλι από την α), $x \geq [x] \geq k$.

Αποδεικνύουμε την η). Από την β) είναι $[x] \leq x \leq y$, οπότε από την ζ) προκύπτει $[x] \leq [y]$.

Η θ) προκύπτει από την η) με αντιθετοαντιστροφή.

Αποδεικνύουμε την ι). Από τις α), β) έχουμε $x - 1 < [x] = [y] \leq y$, άρα $x - y < 1$. Ομοίως έχουμε $y - 1 < [y] = [x] \leq x$, οπότε $y - x < 1$. Από αυτές τις δύο ανισότητες προκύπτει $|x - y| < 1$.

Αποδεικνύουμε την κ). Ας είναι $\{x\} = \{y\}$. Από τον ορισμό του κλασματικού μέρους, αυτή γράφεται ως $x - y = [x] - [y]$, άρα $x - y \in \mathbb{Z}$. Ας είναι τώρα $x - y \in \mathbb{Z}$. Πάλι, από τον ορισμό του κλασματικού μέρους έχουμε $\{x\} - \{y\} = x - y - [x] + [y] \in \mathbb{Z}$. Όμως, ισχύει $0 \leq \{x\} < 1$ και $0 \leq \{y\} < 1$, οπότε $-1 < \{x\} - \{y\} < 1$. Επειδή είδαμε ότι $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, πρέπει να ισχύει $\{x\} - \{y\} = 0$, δηλαδή $\{x\} = \{y\}$.

Η μ) προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς του ακέραιου και του δεκαδικού μέρους. Τέλος, θα αποδείξουμε την ν) και από αυτήν θα προκύψει άμεσα και η ξ). Αρκεί να αποδείξουμε ότι

- $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1$,
- $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x]$.

Έστω $x \notin \mathbb{Z}$ και ας είναι $[x] = k$. Τότε $k < x < k + 1 \Rightarrow -k - 1 < -x < -k \Rightarrow [-x] = -k - 1$, δηλαδή $[-x] = -[x] - 1$.



Έστω τώρα $x \in \mathbb{Z}$, οπότε $-x \in \mathbb{Z}$. Είναι $[-x] = -x = -[x]$.

3. Οι συναρτήσεις ακέραιο μέρος και κλασματικό μέρος

Με βάση τα προηγούμενα μπορούμε να ορίσουμε δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = [x] \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \{x\} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις συναρτήσεις αυτές.

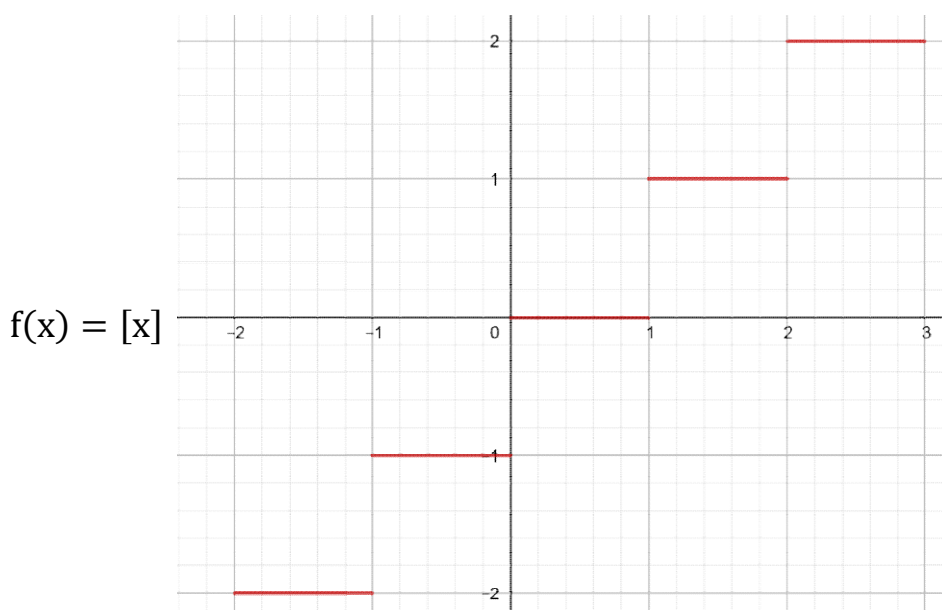
A) Η συνάρτηση ακέραιο μέρος.

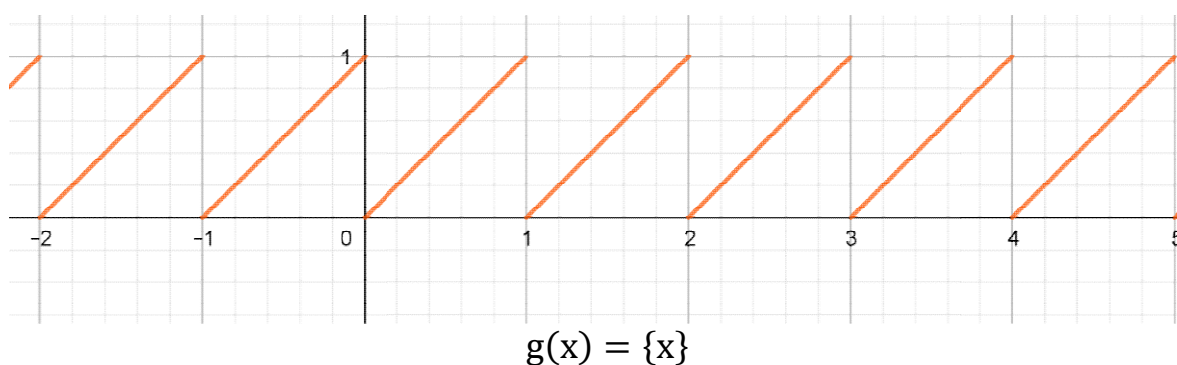
Είναι φανερό ότι η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{Z}$. Από την πρόταση 1η) προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα (ωστόσο δεν είναι γνησίως αύξουσα σε κανένα διάστημα του πεδίου ορισμού της). Επίσης η συνάρτηση έχει ασυνέχεια άλματος σε κάθε ακέραιο.

B) Η συνάρτηση κλασματικό μέρος.

Η g έχει φανερά σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1)$. Από την πρόταση 1μ) προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό. Η g έχει ασυνέχεια άλματος σε κάθε ακέραιο.

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g .





4. Ιδιότητες του ακέραιου μέρους

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένες προτάσεις οι οποίες περιέχουν περαιτέρω ιδιότητες του ακέραιου μέρους.

Πρόταση 2

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\alpha) [x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$$

$$\beta) [x] - [y] - 1 \leq [x - y] \leq [x] - [y],$$

$$\gamma) 2[x] \leq [2x] \leq 2[x] + 1.$$

Απόδειξη: Ας είναι $[x] = a, [y] = b$, οπότε $a \leq x < a + 1, b \leq y < b + 1$ και επομένως είναι $a + b \leq x + y < a + b + 2$. Από την 1ζ) λαμβάνουμε τότε $a + b \leq [x + y] < a + b + 2$. Δεδομένου ότι ο $[x + y]$ είναι ακέραιος θα ισχύει $[x + y] = a + b$ ή $[x + y] = a + b + 1$, οπότε η α) αποδείχθη. Η απόδειξη της β) είναι ίδια. Η γ) προκύπτει από την α) θέτοντας $y \rightarrow x$.

Παρόμοιες ιδιότητες έχει και το κλασματικό μέρος.

Πρόταση 3

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\alpha) \{x\} + \{y\} - 1 \leq \{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$$

$$\beta) \{x\} - \{y\} \leq \{x - y\} \leq \{x\} - \{y\} - 1,$$

$$\gamma) 2\{x\} - 1 \leq \{2x\} \leq 2\{x\}.$$



Η απόδειξη είναι ανάλογη με την προηγούμενη.

Πρόταση 4

Αν $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ισχύει

$$\left\lfloor \frac{[x]}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

Απόδειξη: Ας είναι $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = k$. Ισχύει (στη δεύτερη συνεπαγωγή χρησιμοποιούμε την 1ζ))

$$k \leq \frac{x}{n} < k + 1 \Rightarrow nk \leq x < n(k + 1) \Rightarrow nk \leq [x] < n(k + 1) \Rightarrow$$

$$k \leq \frac{[x]}{n} < k + 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{[x]}{n} \right\rfloor = k.$$

Πρόταση 5

Αν $k \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ισχύει

$$\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow n|k,$$

$$\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor \Leftrightarrow n \nmid k.$$

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$n|k \Rightarrow \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor + 1,$$

$$n \nmid k \Rightarrow \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor.$$

Υποθέτουμε ότι $n|k$ και ας είναι $\frac{k}{n} = h$. Έχουμε τότε

$$h - 1 = \frac{nh - n}{n} < \frac{hn - 1}{n} = \frac{k - 1}{n} < h,$$

$$\text{οπότε } \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor = h - 1 = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor - 1.$$

Ας είναι τώρα $n \nmid k$ και ας θέσουμε $\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor = h$. Έχουμε τότε



$$h < \frac{k}{n} < h + 1 \Rightarrow nh < k < n(h + 1) \Rightarrow nh < k - 1 < n(h + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \leq \frac{k-1}{n} < h + 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{k-1}{n} \right\rfloor = h.$$

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι το παρακάτω κριτήριο ώστε να είναι ένα θετικός ακέραιος, πρώτος:

$$n \text{ πρώτος} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right) = 2.$$

5. Η ταυτότητα του Hermite

Μια κλασική ταυτότητα σχετικά με το ακέραιο μέρος αποδίδεται στον γάλλο μαθηματικό Charles Hermite. Σύμφωνα με αυτήν:

Ταυτότητα Hermite (1884): Αν $x \in \mathbb{R}$ και n είναι κάποιος θετικός ακέραιος, ισχύει

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx].$$

Παραθέτουμε δύο αποδείξεις

Απόδειξη 1^η: Λόγω της πρότασης 1μ) έχουμε ισοδύναμα να αποδείξουμε ότι

$$n[x] + \left[\{x\} + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[\{x\} + \frac{n-1}{n} \right] = n[x] + [n\{x\}]$$

δηλαδή ότι

$$\left[\{x\} + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[\{x\} + \frac{n-1}{n} \right] = [n\{x\}].$$

Ας είναι $k = [n\{x\}]$, οπότε $\frac{k}{n} \leq \{x\} < \frac{k+1}{n}$. Επειδή είναι $\{x\} < 1$, προκύπτει πως $k < n$. Αν $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, ισχύει $\left[\{x\} + \frac{j}{n} \right] = 0$ ή 1 και μάλιστα ισχύει

$$\left[\{x\} + \frac{j}{n} \right] = 1 \Leftrightarrow \{x\} \geq 1 - \frac{j}{n} \Leftrightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{n-j}{n} \Leftrightarrow j \geq n-k.$$

Επομένως είναι



$$\left[\{x\} + \frac{1}{n} \right] + \cdots + \left[\{x\} + \frac{n-1}{n} \right] = \sum_{j=n-k}^{n-1} 1 = k = [n\{x\}]$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ας δούμε τώρα ακόμα μια απόδειξη, η οποία δημοσιεύθηκε στο περιοδικό American Mathematical Monthly [5] από τον Yoshio Matsuoka το 1964 και έκτοτε η κομψότητά της την έχει καθιερώσει.

Απόδειξη 2^η: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] - [nx], \quad x \in \mathbb{R}$$

και θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει $h(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} h\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \cdots + [x + 1] - [nx + 1] = \\ &= \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] + [x] + 1 - [nx] - 1 = h(x). \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση h είναι περιοδική, με περίοδο $\frac{1}{n}$. Ως εκ τούτου, μπορούμε να μελετήσουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $I = \left[0, \frac{1}{n}\right)$. Όμως είναι φανερό ότι $h(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Συνεπώς ισχύει $h(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Σχόλιο: Από την ταυτότητα του Hermite προκύπτει ότι $[2x] - [x] = \left[x + \frac{1}{2} \right]$. Μάλιστα ο $\left[x + \frac{1}{2} \right]$ είναι ο πλησιέστερος ακέραιος στον πραγματικό αριθμό x (αν υπάρχουν δύο τέτοιοι ακέραιοι, είναι ο μεγαλύτερος εκ των δύο).

6. Ο τύπος του Legendre

Ας είναι p ένας πρώτος αριθμός και n ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $e_p(n)$ το μεγαλύτερο εκθέτη λ , για τον οποίο ισχύει $p^\lambda | n$. Είναι δηλαδή

$$e_p(n) = \lambda \Leftrightarrow (p^\lambda | n \wedge p^{\lambda+1} \nmid n),$$

το οποίο γράφεται και ως

$$e_p(n) = \lambda \Leftrightarrow p^\lambda \parallel n.$$



Ο τύπος του Legendre (ο οποίος στη βιβλιογραφία εμφανίζεται και ως τύπος de Polignac) υπολογίζει το $e_p(n!)$. Εμφανίζεται στο βιβλίο του Adrien Marie Legendre, **Théorie des nombres**, που δημοσιεύθηκε το 1808.

,Τύπος του Legendre: Ισχύει

$$e_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right].$$

Καταρχάς, ας παρατηρηθεί ότι το άθροισμα αυτό είναι πεπερασμένο, αφού όταν $p^j > n$, είναι $\left[\frac{n}{p^j} \right] = 0$, οπότε δεν πρόκειται στην πραγματικότητα για άπειρη σειρά. Ο λόγος για τον οποίο ισχύει αυτός ο τύπος είναι προφανής. Από τους παράγοντες του $n!$, ακριβώς $\left[\frac{n}{p} \right]$ διαιρούνται από το p , ακριβώς $\left[\frac{n}{p^2} \right]$ διαιρούνται από το p^2 , ακριβώς $\left[\frac{n}{p^3} \right]$ διαιρούνται από το p^3 κτλ. Ας δούμε όμως και μία επαγωγική απόδειξη. Η πρόταση ισχύει φανερά για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n - 1$ και ας είναι ξ ο μέγιστος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $p^\xi | n$. Επειδή είναι $n! = n \cdot (n - 1)!$ έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\sum \left[\frac{n}{p^j} \right] - \sum \left[\frac{n-1}{p^j} \right] = \xi.$$

Όμως, από την πρόταση 5 ισχύει

$$\left[\frac{n}{p^j} \right] - \left[\frac{n-1}{p^j} \right] = \begin{cases} 1, & \text{αν } p^j | n \\ 0, & \text{αν } p^j \nmid n \end{cases}$$

οπότε προκύπτει η ζητούμενη.

Πόρισμα:

Αν για την ανάλυση του θετικού ακέραιου n σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ισχύει

$$n = \prod_{j=1}^r p_j^{a_j}$$

τότε

$$n! = \prod_{j=1}^r p_j^{e_{p_j}(n!)}$$

Ως εφαρμογή του τύπου του Legendre, ας υπολογίσουμε τη μεγαλύτερη δύναμη του 7 που διαιρεί το $1000!$. Ο εκθέτης της δύναμης αυτής ισούται με



$$\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7^4} \right\rfloor = 142 + 20 + 2 + 0 = 164.$$

Ισχύει δηλαδή $7^{164} | 1000!$, ενώ $7^{165} \nmid 1000!$. Μάλιστα, κάνοντας χρήση της πρότασης 4, μπορούμε να συντομεύσουμε τη διαδικασία. Ο ζητούμενος εκθέτης ισούται με

$$\left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{142}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{7} \right\rfloor = 142 + 20 + 2 + 0 = 164.$$

Ως ακόμα μία εφαρμογή, ας βρούμε σε πόσα μηδενικά λήγει ο αριθμός $1000!$. Είναι φανερό ότι αρκεί να βρούμε τη μεγαλύτερη δύναμη του **5** που διαιρεί το $1000!$. Από τον τύπο του Legendre και με τη βοήθεια της πρότασης 4, έχουμε

$$e_5(1000!) = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{40}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{8}{5} \right\rfloor = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Άρα ο αριθμός $1000!$ λήγει σε 249 μηδενικά.

Συνεχίζουμε με μια ακόμη εφαρμογή. Αυτή τη φορά θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Legendre για να αποδείξουμε ότι ο γνωστός μας διωνυμικός συντελεστής είναι ακέραιος. Πιο συγκεκριμένα, θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν n, m θετικοί ακέραιοι, με $n \geq m$, ο αριθμός

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

είναι ακέραιος. Ισοδύναμα, θέλουμε να αποδείξουμε ότι $m!(n-m)! | n!$, δηλαδή ότι για κάθε πρώτο αριθμό p ισχύει

$$e_p(n!) \geq e_p(m!(n-m)!).$$

Από τον τύπο του Legendre έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\sum \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \geq \sum \left\lfloor \frac{m}{p^j} \right\rfloor + \sum \left\lfloor \frac{n-m}{p^j} \right\rfloor.$$

Από την πρόταση 2α) έχουμε

$$\left\lfloor \frac{m}{p^j} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m}{p^j} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{m+n-m}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor,$$

οπότε, αθροίζοντας, προκύπτει η ζητούμενη. Ας επισημάνουμε ότι ακριβώς το ίδιο επιχείρημα αποδεικνύει ότι είναι ακέραιοι και οι λεγόμενοι πολυωνυμικοί συντελεστές



$$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_r} = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_r!},$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_r \geq 0$ και $a_1 + a_2 + \dots + a_r = n$. Αυτό φυσικά είναι αναμενόμενο, αφού ο παραπάνω πολυωνυμικός συντελεστής είναι ο συντελεστής του $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_r^{a_r}$ στο ανάπτυγμα του $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$.

7. Προσδιορισμός της ημέρας από την ημερομηνία

Μια εφαρμογή του ακέραιου μέρους αποτελεί και η εύρεση της ημέρας της εβδομάδας μιας συγκεκριμένης ημερομηνίας. Για παράδειγμα, τι μέρα ήταν η 2 Οκτωβρίου 1976; Από κάθε ημερομηνία ορίζονται 4 ακεραίοι A, M, E, Y ως εξής:

- A είναι ο αριθμός της ημέρας του μήνα, στο παράδειγμά μας $A = 2$,
- M είναι ο αριθμός του μήνα, αρχής γενομένης από τον Μάρτιο, στο παράδειγμά μας $M = 8$,
- E είναι ο αριθμός των εκατοντάδων στο έτος, στο παράδειγμά μας $E = 19$,
- Y είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $E:100$, στο παράδειγμά μας $Y = 76$.

Αν H είναι η μέρα της εβδομάδας, όπου $H = 0$ αντιστοιχεί στην Κυριακή, $H = 1$ αντιστοιχεί στην Δευτέρα κτλ., τότε

$$H = A + [2,6M - 0,2] + Y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{E}{4}\right] - 2E - (1 + \Delta) \left[\frac{M}{11}\right] \bmod 7,$$

όπου θέτουμε $\Delta = 1$ αν το έτος είναι δίσεκτο και $\Delta = 0$ αν το έτος δεν είναι δίσεκτο.

Στο παράδειγμά μας είναι

$$H = 2 + [20,6] + 76 + [19] + [4,75] - 38 - 2 \left[\frac{8}{11}\right] = 83 \equiv 6 \bmod 7.$$

Επομένως η 2^η Οκτωβρίου 1976 ήταν Σάββατο!

Ο παραπάνω τύπος ισχύει για κάθε ημερομηνία μετά το 1582 που υιοθετήθηκε το Γρηγοριανό ημερολόγιο. Υπενθυμίζουμε ότι ένα έτος είναι δίσεκτο αν διαιρείται με το 4, εκτός από τα έτη που διαιρούνται με το 100, τα οποία είναι δίσεκτα, αν διαιρούνται με το 400. Για παράδειγμα, τα έτη 1976, 2000 είναι δίσεκτα, ενώ τα 1900, 2002, 2100 δεν είναι.

Επαληθεύστε την ισχύ του παραπάνω τύπου αποδεικνύοντας ότι

- αν ισχύει για μια ημερομηνία, τότε ισχύει και για την επόμενη, αλλά και για την προηγούμενη μέρα,



- ισχύει για μία οποιαδήποτε μέρα του ημερολογίου σας.

8. Λυμένα θέματα

Ξεκινάμε με ένα άθροισμα, το οποίο εμφανίζεται στην απόδειξη του Νόμου της Τετραγωνικής Αντιστροφής από τον K. F. Gauß.

1. Αν p, q θετικοί ακέραιοι, πρώτοι μεταξύ τους, ισχύει

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Πράγματι, επειδή $\text{MKΔ}(p, q) = 1$, οι αριθμοί $\left\lfloor \frac{jp}{q} \right\rfloor, j = 1, 2, \dots, q-1$ δεν είναι ακέραιοι και από την ιδιότητα 1ν) έχουμε

$$\left\lfloor \frac{jp}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(q-j)p}{q} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{jp}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-jp}{q} \right\rfloor = p - 1.$$

Επομένως είναι

$$\begin{aligned} & 2 \left(\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor \right) = \\ & = \left(\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor \right) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \right) \\ & = \underbrace{(p-1) + \cdots + (p-1)}_{q-1} = \\ & = (p-1)(q-1). \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε ακόμα ότι, λόγω συμμετρίας, προκύπτει

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor.$$

Μάλιστα, ισχύει και το γενικότερο αποτέλεσμα, το οποίο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό American Mathematical Monthly [11] από τον Marcelo Pelozzi το 1997 και μάλιστα είχε αποτελέσει θέμα διαγωνισμού στην Ταϊβάν το 1998:

- Αν p, q θετικοί ακέραιοι, ισχύει

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1) + \text{gcd}(p, q) - 1}{2}.$$

Μια απόδειξη αυτού βρίσκεται στον σύνδεσμο

<https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=40354>



2. Αν n είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι

$$\left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1 - \sqrt{8n + 1}}{2} \right\rfloor = 0.$$

Πράγματι, έχουμε την παρακάτω ακολουθία ισοδυναμιών

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} \right\rfloor = k &\Leftrightarrow k \leq \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} < k + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2k - 1 \leq \sqrt{8n - 7} < 2k + 1 &\Leftrightarrow (2k - 1)^2 \leq 8n - 7 < (2k + 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{k^2 - k}{2} + 1 \leq n < \frac{k^2 + k}{2} + 1 &\Leftrightarrow \frac{k^2 - k}{2} < n \leq \frac{k^2 + k}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2k - 1)^2 < 8n + 1 \leq (2k + 1)^2 &\Leftrightarrow 2k - 1 < \sqrt{8n + 1} \leq 2k + 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -k \leq \frac{1 - \sqrt{8n + 1}}{2} < -k + 1 &\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{1 - \sqrt{8n + 1}}{2} \right\rfloor = -k \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Στη συνέχεια θα δούμε μια ταυτότητα που πρότεινε ο S. Ramanujan στο περιοδικό Journal of the Indian Mathematical Society. Ακόμα δύο προβλήματα του Ramanujan από το περιοδικό αυτό θα βρει ο αναγνώστης στην ενότητα με τα προτεινόμενα προβλήματα.

3. Αν n είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι

$$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n + 1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n + 2} \right\rfloor.$$

Καταρχάς θα αποδείξουμε ότι $\left\lfloor \sqrt{4n + 2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n + 1} \right\rfloor$. Ας είναι $\left\lfloor \sqrt{4n + 2} \right\rfloor = k$. Τότε ισχύει

$$k < \sqrt{4n + 2} < k + 1$$

και η απουσία της ισότητας στην αριστερή ανισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι κανένας αριθμός της μορφής $4n + 2$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε ο αριθμός $\sqrt{4n + 2}$ δεν είναι ακέραιος (με άλλα λόγια $x^2 \equiv 0 \text{ ή } 1 \pmod{4}$). Επομένως έχουμε

$$k^2 < 4n + 2 < (k + 1)^2 \Rightarrow k^2 \leq 4n + 1 < (k + 1)^2 \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{4n + 1} \right\rfloor = k.$$



Πλέον έχουμε να αποδείξουμε ότι $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+1}]$. Από την $[\sqrt{4n+1}] = k$ έχουμε $k^2 \leq 4n+1 < (k+1)^2$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$k \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k+1,$$

δηλαδή ότι

$$k^2 \leq 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} < (k+1)^2.$$

Για την αριστερή, αρκεί να αποδειχθεί ότι $2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} \geq 4n+1 \Leftrightarrow n \geq 0$.

Για την δεξιά, αρκεί να αποδειχθεί ότι $2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)} \leq 4n+2 \Leftrightarrow 1 \geq 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε ένα θέμα από την Μαθηματική Ολυμπιάδα των Η.Π.Α. του έτους 1975.

4. Αν $x, y \geq 0$ να αποδειχθεί ότι

$$[5x] + [5y] \geq [3x+y] + [3y+x].$$

Ακολουθούμε την απόδειξη του M. Klamkin από το [9]. Γράφοντας $x = [x] + \alpha, y = [y] + \beta$, με $\alpha, \beta \in [0,1)$, η αποδεικτέα γράφεται

$$[x] + [y] + [5\alpha] + [5\beta] \geq [3\alpha + \beta] + [3\beta + \alpha],$$

οπότε είναι αρκετό να αποδειχθεί ότι $[5\alpha] + [5\beta] \geq [3\alpha + \beta] + [3\beta + \alpha]$. Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \geq \beta$. Τότε ισχύει $[5\alpha] \geq [3\alpha + \beta]$. Αν λοιπόν ισχύει και $2\beta \geq \alpha$ η απόδειξη ολοκληρώνεται. Απομένει επομένως να αποδείξουμε την ανισότητα όταν ισχύει $\alpha > 2\beta$. Θέτουμε $5\alpha = \kappa + \lambda, 5\beta = \mu + \nu$, όπου κ, μ μη αρνητικοί ακέραιοι και $\lambda, \nu \in [0,1)$. Τότε η ανισότητα λαμβάνει τη μορφή

$$\kappa + \mu \geq \left\lfloor \frac{3\kappa + \mu + 3\lambda + \nu}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3\mu + \kappa + 3\nu + \lambda}{5} \right\rfloor \quad (*)$$

Είναι $1 > \alpha > 2\beta$, οπότε $5 > 5\alpha > 10\beta$ και $5 > \kappa + \lambda > 2\mu + 2\nu$. Επομένως $5 > \alpha$, δηλαδή $\alpha \leq 4$ και $\kappa \geq 2\mu$, αφού αν ήταν $\kappa < 2\mu$ θα είχαμε $\kappa \leq 2\mu - 1 \Rightarrow \kappa + 1 - 2\mu \leq 0 \Rightarrow \kappa + \lambda - 2\mu < 0$

που είναι άτοπο. Άρα είναι $4 \geq \kappa \geq 2\mu$ και επομένως έχουμε να εξετάσουμε τις ακόλουθες εννέα περιπτώσεις



κ	4	4	4	3	3	2	2
μ	2	1	0	1	0	1	0

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει η (*) στις εννέα αυτές περιπτώσεις, δεδομένου ότι ισχύει επίσης $3\lambda + \nu < 4, 3\nu + \lambda < 4$.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε ήδη στην ενότητα **Στ.**, η ανισότητα αυτή, σε συνδυασμό με τον τύπο του Legendre μας εξασφαλίζει ότι είναι ακέραιος ο αριθμός

$$\frac{(5m)!(5n)!}{m!n!(3m+n)!(3n+m)!}$$

πράγμα το οποίο ήταν το δεύτερο ερώτημα του θέματος του διαγωνισμού.

Ο Klamkin [9], ως ασκήσεις για τον αναγνώστη, που αντιμετωπίζονται με όμοιο τρόπο, δίνει τις ακόλουθες:

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ακέραιοι αριθμοί:

$$\frac{(3m)!(3n)!}{m!n!(m+n)!(n+m)!}, \quad \frac{(4m)!(4n)!}{m!n!(2m+n)!(2n+m)!},$$

$$\frac{(mnr)!}{m!n!^m r!^{mn}}, \quad \frac{(m-1)!\delta}{m_1!m_2! \dots m_r!}$$

όπου στο τελευταίο κλάσμα είναι $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$ και $\delta = \text{MKΔ}(m_1, m_2, \dots, m_r)$.

Το επόμενο θέμα προτάθηκε από τη Μεγάλη Βρετανία για την Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα που έλαβε χώρα στη Σοβιετική Ένωση το 1968

5. Αν n είναι θετικός ακέραιος, να εκφράσετε ως μια απλή συνάρτηση του n το άθροισμα

$$S := \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^j}{2^{j+1}} \right\rfloor + \dots$$



Όπως θα φανεί από τη λύση, στην πραγματικότητα το n μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Στην ενότητα Ε. είδαμε ότι συνέπεια της ταυτότητας του Hermite είναι η ισότητα

$$\left[n + \frac{1}{2} \right] = [2n] - [n]$$

οπότε βλέπουμε ότι το S είναι στην πραγματικότητα τηλεσκοπικό.

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{n + 2^j}{2^{j+1}} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{n}{2^{j+1}} + \frac{1}{2} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2^j} \right] - \left[\frac{n}{2^{j+1}} \right] \right) = [n].$$

Ο αναγνώστης καλείται να αποδείξει την παραπάνω ισότητα και επαγωγικά.

6. Να υπολογίσετε τη διαφορά $A - B$, όπου

$$A = \sum_{k=0}^{2000} \left[\frac{3^k + 2000}{3^{k+1}} \right], \quad B = \sum_{k=0}^{2000} \left[\frac{3^k - 2000}{3^{k+1}} \right].$$

Κάθε όρος της διαφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$\left[\frac{1}{3} + q_k \right] - \left[\frac{1}{3} - q_k \right],$$

όπου $q_k = \frac{2000}{3^{k+1}}$. Από την ιδιότητα 1ν) γνωρίζουμε ότι $-[x] = [-x] + 1$, όταν $x \notin \mathbb{Z}$ και επειδή προφανώς οι όροι $\frac{1}{3} - q_k$ δεν είναι ακέραιοι, ισχύει

$$\left[\frac{1}{3} + q_k \right] - \left[\frac{1}{3} - q_k \right] = \left[q_k + \frac{1}{3} \right] + \left[q_k - \frac{1}{3} \right] + 1$$

και επομένως η ζητούμενη διαφορά ισούται με το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{2000} \left(\left[q_k + \frac{1}{3} \right] + \left[q_k - \frac{1}{3} \right] + 1 \right).$$

Στην ταυτότητα του Hermite θέτουμε $x \rightarrow q_k - \frac{1}{3}$ και $n = 3$, οπότε λαμβάνουμε

$$\left[q_k - \frac{1}{3} \right] + [q_k] + \left[q_k + \frac{1}{3} \right] = [3q_k - 1],$$



δηλαδή

$$\left[q_k + \frac{1}{3} \right] + \left[q_k - \frac{1}{3} \right] + 1 = [3q_k] - [q_k].$$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό και ισούται με

$$[2000] - \left[\frac{2000}{3} \right] + \left[\frac{2000}{3} \right] - \left[\frac{2000}{3^2} \right] + \dots = 2000.$$

Συνεχίζουμε με ένα θέμα από διαγωνισμό στη Ρωσία το 1999

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n^2} \{\sqrt{k}\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Για $n = 1$ ζητούμενη φανερά ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το θετικό ακέραιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον $n + 1$. Κάθε ένας από τους αριθμούς $\sqrt{n^2 + 1}, \sqrt{n^2 + 2}, \dots, \sqrt{n^2 + 2n}$ βρίσκεται μεταξύ των n και $n + 1$. Επομένως ισχύει

$$\{\sqrt{n^2 + i}\} = \sqrt{n^2 + i} - n < \sqrt{n^2 + i + \frac{i^2}{4n^2}} - n = \frac{i}{2n}.$$

Επομένως είναι

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{(n+1)^2} \{\sqrt{k}\} &= \sum_{k=1}^{n^2} \{\sqrt{k}\} + \sum_{k=n^2+1}^{(n+1)^2} \{\sqrt{k}\} < \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} i = \\ &= \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{2n + 1}{2} = \frac{(n + 1)^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

8. Αν $a_n = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right]$ να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = \sum_{n=1}^{2004} \frac{1}{a_n}.$$



Παρατηρούμε ότι η ισότητα $[a_n] = k$ είναι ισοδύναμη με

$$k \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k+1 \Leftrightarrow k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Αφού οι n, k είναι ακέραιοι, η τελευταία διπλή ανισότητα γράφεται ως $k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k$. Ας είναι $x_k = k^2 - k$, οπότε $x_{k+1} = k^2 + k$. Επομένως $a_n = k \Leftrightarrow x_k < n \leq x_{k+1}$ και αυτό συμβαίνει για $x_{k+1} - x_k = 2k$ τιμές του n . Σύμφωνα με τα παραπάνω και δεδομένου ότι ισχύει $x_{45} < 2004 < x_{46}$, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{2004} \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{44} \sum_{x_k < n \leq x_{k+1}} \frac{1}{k} + \sum_{x_{45} < n \leq 2004} \frac{1}{45} = 44 \cdot 2 + \frac{24}{45} = 88 + \frac{8}{15}.$$

9. Προτεινόμενα θέματα

1. Σε πόσα μηδενικά λήγει ο αριθμός $\binom{200}{84}$;
2. Να βρεθεί ο ελάχιστος θετικός ακέραιος n , ώστε ο $n!$ να λήγει σε 37 μηδενικά.
Τι συμβαίνει αν θέλουμε να λήγει σε 60 ή 61 μηδενικά;
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες τιμές του $n \in \mathbb{N}$ για τις οποίες ο αριθμός $x_n = \lfloor 2^n \sqrt{2} \rfloor$ είναι άρτιος.
4. Αν $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $[x^2] - [x]^2 = 100$, να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του x .
5. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + [x]^2 + \{x\}^2 = 10$.
6. Να λυθεί η εξίσωση

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4x+1}{6} \right\rfloor = \frac{5x-4}{3}.$$

7. Να βρεθούν όλοι θετικοί ακέραιοι n για τους οποίους ισχύει

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor = 217.$$

8. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι



$$\left\{\frac{x}{n}\right\} + \left\{\frac{x+1}{n}\right\} + \cdots + \left\{\frac{x+n-1}{n}\right\} = \{x\} + \frac{n-1}{2}.$$

9. (Ramanujan) Αν n είναι θετικός ακέραιος να αποδείξετε ότι

$$\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right].$$

10. (Ramanujan) Αν n είναι θετικός ακέραιος να αποδείξετε ότι

$$\left[\frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{2}}\right] = \left[\frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}}\right].$$

11. Αν $n \in \mathbb{N}$ να αποδείξετε ότι

$$a. \left[\sqrt{3n+1}\right] = \left[\sqrt{3n+2}\right]$$

$$b. \left[\sqrt{5n+2}\right] = \left[\sqrt{5n+3}\right]$$

$$c. \left[\sqrt[3]{7n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+2}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+3}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+4}\right] = \left[\sqrt[3]{7n+5}\right].$$

12. Αν $n \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι

$$\left[\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}\right] = \left[\sqrt{4n^2 + 3}\right].$$

13. Αν $n \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι

$$\left[\sqrt{n - \frac{1}{4}}\right] = \left[\sqrt{n + \frac{3}{4}}\right] \Leftrightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{N}.$$

14. Αν $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ είναι ο χρυσός λόγος και $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι

$$[\varphi^2 n] = [1 + \varphi[\varphi n]].$$

15. Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\begin{aligned} & [4x] + [4y] + [4z] \\ & \geq [x + y + z] + [x + y] + [y + z] + [z + x] + [x] + [y] \\ & + [z]. \end{aligned}$$

16. Αν $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt[n]{a_1! a_2! \cdots a_n!} \geq \left[\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right]!.$$



17. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x] + [2x] + \cdots + [nx] = \frac{n([x] + [nx])}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

18. Αν $m \geq 1$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left[(1 + \sqrt{3})^{2m+1}\right]$ διαιρείται από το 2^{m+1} , αλλά όχι από το 2^{m+2} .

19. Αν n είναι θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

είναι ακέραιοι και μάλιστα άρτιοι.

20. Έστω $\theta \in (0,1)$. Ορίζουμε την ακολουθία $(g_n)_{n \geq 1}$ ως εξής:

$$g_n = \begin{cases} 0, & \text{αν } [n\theta] = [(n-1)\theta] \\ 1, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}{n} = \theta.$$

10. Βιβλιογραφία

1. I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery, **An Introduction to the Theory of Numbers**, John Wiley and Sons, Inc., 1991
2. Mihai Onucu Drimbe, **200 de identități și inegalități cu "partea întreagă"**, Editura GIL, 2004
3. Titu Andreescu, **105 Algebra Problems from the AwesomeMath Summer Program**, XYZ Press, 2013
4. T. Andreescu, D. Andrica, **Number Theory, Structures, Examples and Problems**,



- Birkhäuser, 2009
5. Yoshio Matsuoka, **On a Proof of Hermite's Identity**, American Mathematical Monthly, AMS, Vol. 71, p. 1115, 1964
6. Leonard E. Dickson, **History of the Theory of Numbers**, Vol. I, Dover, 2005
7. James J. Tattersall, **Elementary Number Theory in Nine Chapters**, Cambridge University Press, 1999
8. G.H. Hardy, P.V. Seshu Aiyar, B.M. Wilson, **Collected Papers of Srinivasa Ramanujan**, AMS Chelsea Publishing, 1962
9. Murray Klamkin, **USA Mathematical Olympiads 1972-1986**, MAA, 1988
10. J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, **Equations and Inequalities, Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory**, CMS Books in Mathematics, Springer, 2000
11. Marcelo Pelozzi, **A Geometrical Method for Finding an Explicit Formula for the Greatest Common Divisor**, American Mathematical Monthly, AMS, Vol. 104, p. 445-446, 1997
12. Jean-Marie De Koninck, Armel Mercier, **1001 Problems in Classical Number Theory**, AMS, 2007



Περιοδικοί Αριθμοί

Μελέτη αριθμών της μορφής $\frac{1}{\rho}$ ($\rho > 5$ πρώτος)

Τσόπελας Ιωάννης - Αμαλιάδα Ηλείας

Στη παρακάτω εργασία εξετάζονται ως προς τη περιοδικότητα οι αριθμοί της μορφής $\frac{1}{\rho}$ ($\rho > 5$ πρώτος). Εξάγονται κάποια συμπεράσματα (θεωρώ σημαντικά), όπως η συσχέτιση της περιοδικότητας του $\frac{1}{\rho}$, όπου $\rho > 5$ πρώτος αριθμός, με τους διαιρετές του 11...11 με πλήθος μονάδων όσα και τα ψηφία της περιόδου του $\frac{1}{\rho}$.

Με χρήση αρκετών παραδειγμάτων τα συμπεράσματα αυτής της εργασίας μπορούν να γίνουν κατανοητά ακόμα και από μαθητές Γυμνασίου.

Ορισμός 1

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται κάθε κλάσμα δ της μορφής :

$$\delta = \frac{\alpha}{10^v}, \alpha \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{N}$$

Ορισμός 2

Ένας ρητός αριθμός x λέγεται **δεκαδικός** όταν υπάρχει δεκαδικό κλάσμα δ ώστε $x = \delta$. Δηλαδή όταν υπάρχουν ακέραιος α και φυσικός v ώστε $x = \frac{\alpha}{10^v}$.

Πρόταση 1

Αν ρ πρώτος $\rho \neq 2$ και $\rho \neq 5$, τότε το κλάσμα $\frac{1}{\rho}$ δεν μπορεί να είναι ισοδύναμο με ένα δεκαδικό κλάσμα.

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πρώτος p ώστε το κλάσμα $\frac{1}{p}$ να είναι ισοδύναμο με κάποιο δεκαδικό κλάσμα άρα υπάρχουν $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\frac{1}{p} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow pa = 10^n \Rightarrow p \mid 10^n \Rightarrow p \mid 2^n \quad \text{ή} \quad p \mid 5^n \Rightarrow p \mid 2 \quad \text{ή} \quad p \mid 5$$

το οποίο είναι άτοπο (από υπόθεση).

Συμπέρασμα

Υπάρχουν λοιπόν και εκείνοι οι ρητοί που δεν μπορούν να είναι ισοδύναμοι με κάποιο δεκαδικό κλάσμα. Για παράδειγμα κάθε ρητός της μορφής $\frac{1}{p}$ όπου p πρώτος διαφορετικός των 2, 5 (όπως αποδείξαμε) δεν μπορεί να είναι ισοδύναμος με κάποιο δεκαδικό κλάσμα.

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε τον ρητό $\frac{1}{7}$. Σύμφωνα με την πρόταση 2 ο ρητός αυτός δεν μπορεί να είναι δεκαδικός. Οι ρητοί που δεν είναι δεκαδικοί αριθμοί λέγονται **περιοδικοί αριθμοί**

Ειδικότερα, εκτελώντας τη διαίρεση $1:7$ παρατηρούμε ότι μετά από τα 6 πρώτα υπόλοιπα που είναι τα 1,3,2,6,4,5 εμφανίζεται πάλι το 1 και η διαίρεση μοιάζει να αρχίζει από την αρχή. Άρα, $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$ (άπειρα δεκαδικά που επαναλαμβάνονται ανά έξι) και σε συντομία: $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$. Ο αριθμός $\frac{1}{7}$ λέγεται **περιοδικός** και το τμήμα του δεκαδικού μέρους του αριθμού που επαναλαμβάνεται (δηλαδή το 142857) λέγεται **περίοδος** του αριθμού $\frac{1}{7}$

Σχόλιο

Επειδή $\frac{1}{7} = 0,142857142857142857\ldots$ μπορούμε να θεωρήσουμε ως περίοδο του $\frac{1}{7}$, και τον 12 – ψήφιο αριθμό 142857142857.



Ορίζουμε ως **αρχική περίοδο** (ή **απλά περίοδο**) ενός περιодικού δεκαδικού αριθμού τον **ελάχιστο φυσικό** που επαναλαμβάνεται στο δεκαδικό μέρος του αριθμού.

Για παράδειγμα ο αριθμός $\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots$ έχει **περίοδο** τον 6-ψήφιο 142857.

Πρόταση 2 Αν $\rho > 5$ πρώτος, τότε

α) $\frac{1}{\rho}$ περιодικός δεκαδικός.

β) Αν ο $\frac{1}{\rho}$ έχει περίοδο με λ ψηφία τότε ο ρ διαιρεί τον φυσικό αριθμό

$$\underbrace{111\ldots 1}_{\lambda\text{-ψηφία}}.$$

Απόδειξη

α) Έστω $\rho > 5$ πρώτος με λ ψηφία. Κατά την εκτέλεση της διαίρεσης $1:\rho$ (σε κάθε βήμα αυτής) θα πρέπει να υπολογίζουμε το πηλίκο διαιρέσεων της μορφής $A:\rho$ όπου ο A φυσικός ο οποίος λήγει σε 0 και έχει μορφή $A = \alpha \cdot 10^i$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots, \rho-1$ και $i = 1, 2, \dots$

Το υπόλοιπο αυτών των διαιρέσεων θα είναι πάντα $\neq 0$ (επειδή ο ρ δεν διαιρεί κανέναν από τους $\alpha, 10^i$) οπότε μετά από $\rho-1$ (το πολύ) βήματα θα προκύψει το ίδιο υπόλοιπο με κάποιο από αυτά που ήδη έχουν εμφανιστεί. Από το επόμενο βήμα της διαίρεσης, αυτή θα μοιάζει σαν να εκτελείται από την αρχή οπότε προκύπτει πηλίκο περιодικός αριθμός.

β)

$$\frac{10^u}{\rho} = y_1 y_2 \dots y_\mu, \overline{z_1 z_2 \dots z_\lambda} \quad (1)$$



$$\frac{1}{\rho} = 0, y_1 y_2 \dots y_\mu \overline{z_1 z_2 \dots z_\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{10^{\mu+\lambda}}{\rho} = y_1 y_2 \dots y_\mu z_1 z_2 \dots z_\lambda, \overline{z_1 z_2 \dots z_\lambda} \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{10^{\mu+\lambda} - 10^\mu}{\rho} = y_1 y_2 \dots y_\mu z_1 z_2 \dots z_\lambda - y_1 y_2 \dots y_\mu = B \Rightarrow \rho B = 10^\mu (10^\lambda - 1) \Rightarrow$$

$$\rho / 10^\mu (10^\lambda - 1) \stackrel{(\rho, 10)=1}{\Rightarrow} \rho / 10^\lambda - 1 \Rightarrow \rho / \underbrace{99 \dots 99}_{\lambda\text{-ψηφία}} \stackrel{(\rho, 9)=1}{\Rightarrow} \rho / \underbrace{11 \dots 11}_{\lambda\text{-ψηφία}}.$$

Παραδείγματα

Ο ρητός $\frac{1}{7} = 0,14285714\dots$ έχει 6-ψήφια περίοδο άρα $7 / 111.111$

Ο ρητός $\frac{1}{11} = 0,0909\dots$ έχει 2-ψήφια περίοδο άρα $11 / 11$

Ο ρητός $\frac{1}{13} = 0,07692307\dots$ έχει 6-ψήφια περίοδο άρα $13 / 111.111$

Ο ρητός $\frac{1}{37} = 0,027027\dots$ έχει 3-ψήφια περίοδο άρα $37 / 111$

Ο ρητός $\frac{1}{41} = 0,0243902\dots$ έχει 5-ψήφια περίοδος άρα $41 / 11.111$

Ο ρητός $\frac{1}{73} = 0,0136986301\dots$ έχει 8-ψήφια περίοδος άρα $73 / 11.111.111$

Ο ρητός $\frac{1}{101} = 0,00990099\dots$ έχει 4-ψήφια περίοδος άρα $101 / 1.111$

Σχόλιο



Το αντίστροφο της πρότασης 3 δεν αληθεύει. Δηλαδή αν $\rho > 5$ πρώτος και ρ είναι παράγοντας του φυσικού αριθμού $\underbrace{111\dots1}_{\mu\text{-ψηφία}}$, τότε η περίοδος του $\frac{1}{\rho}$ δεν είναι κατ' ανάγκη μ -ψηφία.

Για παράδειγμα $37/111.111$ όμως ο ρητός $\frac{1}{37} = 0,02702 \dots$ έχει 3-ψηφία περίοδο

Πόρισμα 2.1 Αν $\rho > 5$ πρώτος, τότε η περίοδος του $\frac{1}{\rho}$ έχει τουλάχιστον δύο ψηφία και το πολύ $\rho-1$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η περίοδος του αριθμού $\frac{1}{\rho}$ έχει ένα ψηφίο, τότε σύμφωνα με την πρόταση 3 ο πρώτος ρ θα διαιρεί τον $10^1 - 1 \Rightarrow \rho/9$, άτοπο γιατί ρ πρώτος με $\rho > 5$. Επίσης η περίοδος του $\frac{1}{\rho}$ έχει το πολύ $\rho-1$ ψηφία (όπως προκύπτει από την απόδειξη της πρότασης 3α).

Πρόταση 3 Αν ο περιδικός δεκαδικός $\frac{1}{\rho}$ $\rho > 5$ πρώτος έχει περίοδο λ - ψηφίων τότε ο λ είναι ο ελάχιστος φυσικός με την ιδιότητα $\rho \mid \underbrace{111\dots1}_{\lambda\text{-ψηφία}}$.

Απόδειξη

Ο περιδικός δεκαδικός $\frac{1}{\rho}$, $\rho > 5$ πρώτος έχει περίοδο λ - ψηφίων άρα ο ελάχιστος φυσικός που επαναλαμβάνεται στο δεκαδικό μέρος του αριθμού $\frac{1}{\rho}$ έχει λ -ψηφία, οπότε και ο μικρότερος αριθμός με όλα τα ψηφία του μονάδες που διαιρείται από τον ρ είναι ο $\underbrace{111\dots1}_{\lambda}$



Πρόταση 4 Αν ο περιοδικός δεκαδικός $\frac{1}{\rho}$, $\rho > 5$ πρώτος έχει περίοδο λ – ψηφίων και $\rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\mu\text{-ψηφία}}$ τότε $\lambda \mid \mu$.

Απόδειξη

Από την πρόταση 3 προκύπτει ότι $\mu \geq \lambda$. Σύμφωνα με το θεώρημα της Ευκλείδειας Διάρεσης για τους λ, μ υπάρχουν π, υ ώστε : $\mu = \lambda \cdot \pi + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \lambda$.
Αν ήταν $\upsilon \neq 0$ τότε $0 < \upsilon < \lambda$ και $\upsilon = \mu - \lambda \cdot \pi$.

$$\rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\lambda\text{-ψηφία}} \text{ και } \rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\mu\text{-ψηφία}} \Rightarrow \rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\lambda\pi\text{-ψηφία}} \text{ και } \rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\mu\text{-ψηφία}} \Rightarrow$$

$$\rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\mu\text{-ψηφία}} - \underbrace{111\dots 1}_{\lambda\pi\text{-ψηφία}} = \underbrace{111\dots 1}_{(\mu-\lambda\pi)\text{-ψηφία}} \underbrace{000\dots 0}_{\lambda\pi\text{-ψηφία}} \Rightarrow [\mu - \lambda\pi = \upsilon]$$

$$\rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\upsilon\text{-ψηφία}} \cdot 10^{\lambda\pi} \Rightarrow \rho \mid \underbrace{111\dots 1}_{\upsilon\text{-ψηφία}}, \text{ \textbf{\textit{άτοπο}},} \text{ διότι } \lambda \text{ ο ελάχιστος με την ιδιότητα}$$

αυτή. Άρα $\upsilon = 0 \Rightarrow \mu = \lambda \cdot \pi \Rightarrow \lambda \mid \mu$.

Παραδείγματα **\alpha)** $\frac{1}{37} = 0,027027\dots = 0,027$ άρα είναι περιοδικός με περίοδο 3 – ψηφίων οπότε $37/111$ σύμφωνα με την πρόταση 2. Σύμφωνα με την πρόταση 4, ο 37 δεν μπορεί να διαιρεί τον 1.111, επειδή αν ίσχυε κάτι τέτοιο, τότε θα έπρεπε $\frac{3}{4}$ κάτι που είναι **\textit{άτοπο}**.

Ομοίως, ο 37 δεν μπορεί να διαιρεί τον 11.111 γιατί αν ίσχυε κάτι τέτοιο τότε θα έπρεπε $\frac{3}{5}$ **\textit{άτοπο}**. Μπορούμε να γενικεύσουμε λοιπόν και να πούμε ότι ο πρώτος αριθμός $\rho = 37$ δεν διαιρεί κανένα αριθμό $11\dots 1$ με πλήθος ψηφίων $3k+1$ ή $3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$) αντίθετα διαιρεί τους αριθμούς $11\dots 1$ με πλήθος ψηφίων 3 ή 6 ή 9 ή 12 ή 15 κλπ. Δηλαδή, $37/111$, $37/111.111$, $37/111.111.111$ κλπ.

\beta) $\frac{1}{41} = 0,0243902439\dots = 0,02439$ άρα είναι περιοδικός με περίοδο 5 – ψηφίων οπότε $41/11.111$ σύμφωνα με την πρόταση 2. Σύμφωνα με την πρόταση 4 όμως το 41 δεν μπορεί να διαιρεί τον 111.111, επειδή αν ίσχυε κάτι τέτοιο



τότε θα έπρεπε $5/6$ **άτοπο**. Ομοίως το 41 δεν μπορεί να διαιρεί τον $1.111.111$ γιατί αν ίσχυε κάτι τέτοιο τότε θα έπρεπε $5/7$ **άτοπο**. Άρα, οι αριθμοί: $111.111(6\text{--ψηφία}), 1.111.111(7\text{--ψηφία}), 11.111.111(8\text{--ψηφία}), 111.111.111(9\text{--ψηφία}), 1.111.111.111(11\text{--ψηφία})$ κλπ. δεν διαιρούνται με το 41. Αντίθετα οι αριθμοί: $11.111(5\text{--ψηφία}), 1.111.111.111(10\text{--ψηφία}), 111.111.111.111.111(15\text{--ψηφία})$ κλπ. διαιρούνται με το 41.

Για την απλούστευση των παραπάνω προτάσεων ορίζουμε την παρακάτω ακολουθία:

Ορισμός 3 Ορίζουμε την ακολουθία $\alpha_n = \underbrace{111\dots 1}_{n\text{--ψηφία}}$

Δηλαδή $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 11$, $\alpha_3 = 111$, $\alpha_4 = 1111$ κλπ.

Πόρισμα Κάθε πρώτος $p > 5$ είναι παράγοντας κάποιου όρου της ακολουθίας α_n . (προκύπτει από την πρόταση 2).

Πρόταση 5 Αν $\mu, n \in \mathbb{N}$ ώστε μ/n τότε α_μ / α_n .

Απόδειξη

Για ευκολία παραθέτουμε την απόδειξη όταν $\mu = 2$ και $n = 6$.

$$\alpha_6 = 111.111 = 110000 + 1100 + 11 = 11(10000 + 100 + 1) = 11 \cdot 10101 = \alpha_2 \cdot 10101 \Rightarrow \alpha_2 / \alpha_6.$$

Παρόμοια μπορούμε να αποδείξουμε την γενική περίπτωση.

Πρόταση 6 Αν $p > 5$ πρώτος και $\frac{1}{p}$ περιοδικός με λ – ψηφία περιόδου τότε p / α_λ .

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 3 και τον ορισμό 3.

Πρόταση 7 Έστω $p > 5$ πρώτος και $\frac{1}{p}$ περιοδικός με λ –ψηφία περιόδου.



Αν ρ/α_μ τότε λ/μ .

Απόδειξη Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 5 και τον ορισμό 3.

Πρόταση 8 Αν $\rho > 5$ πρώτος και $\frac{1}{\rho}$ περιοδικός με λ – ψηφία περιόδου

τότε α) $\rho/\alpha_\lambda, \rho/\alpha_{2\lambda}, \rho/\alpha_{3\lambda}, \dots, \rho/\alpha_{\lambda\lambda}, \dots$ β) Ο πρώτος ρ δεν διαιρεί κανένα άλλο όρο της ακολουθίας α_n .

Απόδειξη α) Το ρ/α_λ το δείξαμε στην πρόταση 7 τα υπόλοιπα είναι προφανή.

β) Προκύπτει άμεσα από την πρόταση 5.

Παράδειγμα $\frac{1}{13} = 0,076923076923 \Rightarrow 13/\alpha_6$ και ακόμα $13/\alpha_{12},$

$13/\alpha_{18}, 13/\alpha_{24}$ κλπ., ενώ ο 13 δεν διαιρεί κανέναν άλλο από τους όρους της ακολουθίας α_n . Δηλαδή, ο 13 διαιρεί τους όρους της υποακολουθίας α_{6k} και μόνο αυτούς.

Πρόταση 9 Έστω $5 < \rho \neq 11$ πρώτος και $\frac{1}{\rho}$ περιοδικός με 2λ -ψηφία περιόδου. Τότε $\rho / \underbrace{\alpha\beta\alpha\beta\dots\alpha\beta}_{2\lambda\text{-ψηφία}}$ όπου $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Απόδειξη

$\frac{1}{\rho}$ περιοδικός με 2λ -ψηφία περιόδου $\Rightarrow \rho / \underbrace{1111\dots 11}_{2\lambda\text{-ψηφία}} \Rightarrow \rho / \underbrace{1010\dots 10}_{2\lambda\text{-ψηφία}} +$

$\underbrace{1010\dots 1}_{(2\lambda-1)\text{-ψηφία}} \Rightarrow \rho / 10 \cdot \underbrace{1010\dots 1}_{(2\lambda-1)\text{-ψηφία}} + \underbrace{1010\dots 1}_{(2\lambda-1)\text{-ψηφία}} \Rightarrow \rho / 11 \cdot \underbrace{1010\dots 1}_{(2\lambda-1)\text{-ψηφία}} \Rightarrow \rho = 11$ ή $\rho / \underbrace{1010\dots 1}_{(2\lambda-1)\text{-ψηφία}}$

.Αλλά $\rho \neq 11$ οπότε : $\rho / \underbrace{1010\dots 1}_{(2\lambda-1)\text{-ψηφία}} \Rightarrow \rho / \alpha\beta \cdot \underbrace{1010\dots 1}_{(2\lambda-1)\text{-ψηφία}} \Rightarrow \rho / \underbrace{\alpha\beta\alpha\beta\dots\alpha\beta}_{2\lambda\text{-ψηφία}}.$

Παραδείγματα

- $\frac{1}{7}$ περιοδικός με περίοδο 6 – ψηφίων $\Rightarrow 7 / \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta.$



- $\frac{1}{13}$ περιοδικός με περίοδο 6 – ψηφίων $\Rightarrow 13 / \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta$
- $\frac{1}{73}$ περιοδικός με περίοδο 8 – ψηφίων $\Rightarrow 73 / \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta$
- $\frac{1}{101}$ περιοδικός με περίοδο 4 – ψηφίων $\Rightarrow 101 / \alpha\beta\alpha\beta$

Πρόταση 10 Έστω $\rho > 5$ πρώτος με την περίοδο του $\frac{1}{\rho}$ να είναι λ – ψηφίων. Αν ρ/α_μ και ρ/α_ν ($\mu > 1, \nu > 1$) τότε $\lambda/(\mu, \nu)$.

Απόδειξη

$\rho > 5$ πρώτος με την περίοδο του $\frac{1}{\rho}$ να είναι λ – ψηφίων και ρ/α_μ άρα λ/μ (πρόταση 7).

$\rho > 5$ πρώτος με την περίοδο του $\frac{1}{\rho}$ να είναι λ – ψηφίων και ρ/α_ν , άρα λ/ν (πρόταση 7) επομένως λ κοινός διαιρέτης των $\mu, \nu \Rightarrow \lambda / (\mu, \nu)$.

Πόρισμα 10.1 Αν α_μ, α_ν δυο όροι της ακολουθίας που ορίσαμε παραπάνω με $(\mu, \nu) = 1$, τότε $(\alpha_\mu, \alpha_\nu) = 1$.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει ρ πρώτος κοινός διαιρέτης των α_μ, α_ν . Αυτός δεν μπορεί να είναι ούτε ο 2 ούτε ο 5 διότι οι όροι της ακολουθίας (α_n) που ορίσαμε λήγουν σε 1. Άρα, θα είναι ένας πρώτος $\rho > 5$ αλλά ίσως είναι και $\rho = 3$. Έστω $\rho > 5$ και η περίοδος του $\frac{1}{\rho}$ είναι λ –ψηφίων τότε από πρόταση 10 $\Rightarrow \lambda/(\mu, \nu) \Rightarrow$

$\lambda=1$ οπότε ο $\frac{1}{\rho}$ θα έχει περίοδο ενός ψηφίου άτοπο λόγω του πορίσματος 3.1 .

Άρα απέμεινε μόνο η περίπτωση να είναι $\rho = 3$.Αν όμως $3/\alpha_\mu, 3/\alpha_\nu \Rightarrow 3/1+1+\dots+1$ και $3/1+1+1 \dots+1 \Rightarrow 3/\mu$ και $3/\nu \Rightarrow 3/(\mu, \nu) \Rightarrow 3/1$ άτοπο. Επομένως, αν $(\mu, \nu) = 1$, τότε $(\alpha_\mu, \alpha_\nu) = 1$.



Το πρόρισμα 10.1 μπορεί να ενταχθεί σε μια γενικότερη, πολύ χρήσιμη πρόταση:

Πρόταση 11

Αν $\mu > 1, \nu > 1$ φυσικοί αριθμοί και $\rho > 5$ πρώτος τότε ρ διαιρέτης του (α_μ, α_ν) αν και μόνο αν ρ διαιρέτης του $\alpha_{(\mu, \nu)}$.

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω $\rho > 5$ πρώτος διαιρέτης του (α_μ, α_ν) με περίοδο του $\frac{1}{\rho}$ λ-ψηφίων.

Επειδή ρ/α_μ και $\rho/\alpha_\nu \Rightarrow \lambda/\mu$ και λ/ν (δες πρόταση 5) $\Rightarrow \lambda/(\mu, \nu) \Rightarrow \alpha_\lambda/\alpha_{(\mu, \nu)}$ (δες πρόταση 6). Αλλά $\rho/\alpha_\lambda \Rightarrow \rho/\alpha_{(\mu, \nu)}$. Άρα, κάθε πρώτος διαιρέτης του (α_μ, α_ν) είναι και διαιρέτης του $\alpha_{(\mu, \nu)}$.

$(\Leftarrow)$ Έστω $\rho > 5$ πρώτος διαιρέτης του $\alpha_{(\mu, \nu)}$ με περίοδο του $\frac{1}{\rho}$ λ-ψηφίων $\Rightarrow \lambda/(\mu, \nu) \Rightarrow \lambda/\mu, \lambda/\nu \Rightarrow \alpha_\lambda/\alpha_\mu$ και $\alpha_\lambda/\alpha_\nu \Rightarrow$ [δες πρόταση 6] $\alpha_\lambda/(\alpha_\mu, \alpha_\nu)$ και επειδή $\rho/\alpha_\lambda \Rightarrow \rho/(\alpha_\mu, \alpha_\nu)$. Άρα κάθε πρώτος διαιρέτης του $\alpha_{(\mu, \nu)}$ είναι και διαιρέτης του (α_μ, α_ν) .

Σχόλιο Η πρόταση 11 ισχύει και όταν $\rho = 3$.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1^η

Έστω $\rho > 5$ πρώτος παράγοντας του $\alpha_q = 11 \dots 1$ (q-ψηφία) όπου $q > 2$ πρώτος. Να αποδείξετε ότι ο ρ δεν μπορεί να διαιρεί κανένα από τους $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{q-1}$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι περιοδικός λ-ψηφίων.



Σύμφωνα με το πόρισμα 3.1 θα ισχύει $\lambda > 1$ ενώ σύμφωνα με την πρόταση 4 θα ισχύει: ρ/α_λ και ο λ είναι ο ελάχιστος με την ιδιότητα αυτή. Εφόσον λοιπόν $\rho/\alpha_q \Rightarrow \lambda \leq q$. Έστω ότι $\lambda < q$.

$\frac{1}{\rho}$ είναι περιοδικός λ - ψηφίων

$$\rho / \alpha_q \Rightarrow \lambda / q.$$

οπότε ο πρώτος q έχει διαιρέτη λ ώστε $1 < \lambda < q$ δηλαδή διαιρέτη λ διαφορετικό των $1, q$ άτοπο. Άρα $\lambda = q$ (1).

Ας υποθέσουμε ότι $\exists r \in \{2, 3, \dots, q-1\}$ ώστε: $\rho / \alpha_r \Rightarrow \lambda \leq r$ οπότε λόγω της (1) $q \leq r$ άτοπο διότι: $r < q$. Επομένως ο ρ δεν μπορεί να διαιρεί κανένα από τους $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{q-1}$.

Εφαρμογή 2^η Έστω ρ, q πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 5 ($\rho \neq q$). Αν οι ρητοί αριθμοί $\frac{1}{\rho}$ και $\frac{1}{q}$ έχουν περιόδους κ - ψηφίων και λ - ψηφίων αντίστοιχα, τότε ο ρητός $\frac{1}{\rho q}$ έχει περίοδο m όπου $m = \text{ΕΚΠ}(\kappa, \lambda)$.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $r < m$ ώστε $1/\rho q$ περιοδικός με περίοδο r - ψηφίων $\Rightarrow \rho q/\alpha_r \Rightarrow \rho/\alpha_r$ και $q/\alpha_r \Rightarrow \kappa/r$ και $\lambda/r \Rightarrow r$ κοινό πολλαπλάσιο των $\rho, q \Rightarrow r \geq \text{ΕΚΠ}(\rho, q) \Rightarrow r \geq m$ άτοπο. Επειδή $\rho/\alpha_m, q/\alpha_m$ και $(\rho, q) = 1 \Rightarrow \rho q/\alpha_m \Rightarrow$ μια περίοδος του ρq είναι m - ψηφίων (1).

Δείξαμε όμως ότι δεν μπορεί να υπάρξει περίοδος μικρότερη από m (σε πλήθος ψηφίων), (2). Από (1), (2) έπεται το ζητούμενο.

Παραδείγματα

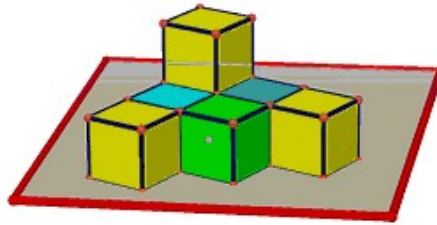


(α) Ας θεωρήσουμε τον περιοδικό $\frac{1}{37}$ (με 3-ψήφια περίοδο) και τον περιοδικό $\frac{1}{13}$ (με 6 – ψήφια περίοδο). Αφού $\text{ΕΚΠ}(3, 6)=6$ τότε $\frac{1}{13 \cdot 37} = \frac{1}{481}$ περιοδικός με 6 – ψήφια περίοδο. Πράγματι: $\frac{1}{481} = 0,002079002...$

(β) Ας θεωρήσουμε τον περιοδικό $\frac{1}{7}$ (με 6 – ψήφια περίοδο) και τον περιοδικό $\frac{1}{101}$ (με 4 – ψήφια περίοδο). Αφού $\text{ΕΚΠ}(4,6)=12$ τότε $\frac{1}{7 \cdot 101} = \frac{1}{707}$ περιοδικός με 12 – ψήφια περίοδο. Πράγματι : $\frac{1}{707} = 0,00141442715700141...$

Βιβλιογραφία

- Αγάπης Γ. Αριθμοί και άλλα. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη-Χάρη Βαφειάδη.
- Αδαμόπουλος Λ. και άλλοι. Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Β' Λυκείου. Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
- Αντωνιάδης Α. & Κοντογεώργης Α. Θεωρία Αριθμών και Εφαρμογές
- Βλάμος Π. Θεωρία Αριθμών. Έκδοση Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
- Καζαντζής Θ.Ν. Θεωρία Αριθμών. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη-Χάρη Βαφειάδη.
- Ξένος Θ. Θεωρία Αριθμών. Εκδόσεις Ζήτη.
- Πουλάκης Δ. Θεωρία Αριθμών. Εκδόσεις Ζήτη.
- Ρασσιάς Ι. Θεωρία Αριθμών. Εκδόσεις Συμμετρία.
- Σπανδάγος Ε. Ασκήσεις Θεωρίας Αριθμών. Εκδόσεις Αίθρα.
- Apostol T. Εισαγωγή στην Αναλυτική Θεωρίας Αριθμών. Εκδόσεις Gutenberg.
- Sierpinski W. 250 προβλήματα της Στοιχειώδους θεωρίας Αριθμών. Εκδόσεις Κάτοπτρο.

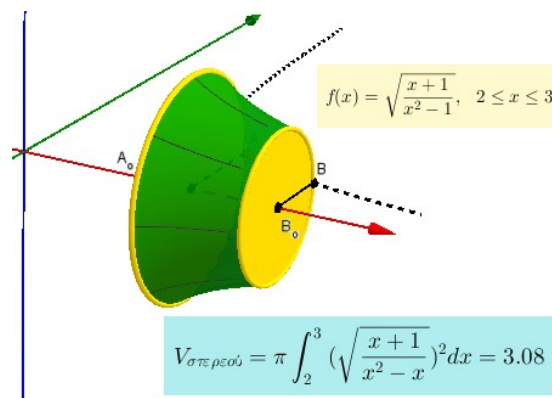


Αξιοποιώντας τα λογισμικά προγράμματα

Σε αυτήν τη στήλη θα μελετώνται προβλήματα γεωμετρικά, αλλά και αλγεβρικά μέσω λογισμικών προγραμμάτων. Μια τέτοια διαδικασία, που εμπεριέχει «κινητικότητα», αποτελεί ένα ισχυρό ερέθισμα στον αναγνώστη και σε κάθε υποψήφιο λύτη.

Για να μπορέσει ο εκπαιδευτικός δάσκαλος να εξαντλήσει τις δυνατότητες της λεγόμενης «Ζώνης επικείμενης ανάπτυξης» του μαθητή, σύμφωνα με τις απόψεις του Lev Vygotsky (1896-1934), σίγουρα θα ξεκινήσει από ένα γενικό ερέθισμα στην αρχή, αλλά οπωσδήποτε στη συνέχεια θα βρεθεί στην ανάγκη να παράσχει «μικρά πακέτα βοήθειας» ώστε να επιτύχει τον διδακτικό του στόχο. Αυτός επιτυγχάνεται και διευκολύνεται από τα «εργαλεία» διαθέτουμε στο «ψηφιακό εργαστήριο».

Στη σημερινή εποχή, η δραστηριότητα στην τάξη επηρεάζεται από τις δυνατότητες που παρέχει η Τεχνολογία και βαθμιαία προσαρμόζεται σε αυτήν. Για το λόγο αυτό αξίζει να αφιερώσουμε κάποιο χρόνο για τη μύηση στο νέο πνεύμα και την ουσιαστική αξιοποίησή της Τεχνολογίας. Θεωρούμε ότι ιδιαίτερα στα Μαθηματικά, το μέλλον της εκπαιδευτικής διαδικασίας θα επηρεαστεί ριζικά από τη χρήση των λογισμικών και των άλλων υποστηρικτικών μηχανισμών. Αυτό θα αλλάξει και τη συνολική εικόνα της στρατηγικής της διδασκαλίας. Προς αυτή την κατεύθυνση στοχεύει η συγκεκριμένη στήλη.





Γεωμετρικές ενασχολήσεις 6

Κώστας Δόρτσιος

1. Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας

Ένας ενδιαφέρων γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι και ο μετασχηματισμός της ομοιότητας. Θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε καλύτερα το μετασχηματισμό αυτό μέσα από το περιβάλλον του λογισμικού Geogebra.

Ορισμός I: Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας είναι ένας σημειακός μετασχηματισμός που προκύπτει από μια ομοιοθεσία και από έναν επίπεδο μετασχηματισμό, δηλαδή από μια ομοιοθεσία και από μια στροφή ή από μια ομοιοθεσία και από μια μεταφορά (δηλαδή, παράλληλη μετατόπιση).

Για να συμβολίσουμε μια ομοιότητα χρησιμοποιούμε το σύμβολο: $S = S(H, R)$ ή $S = S(H, T)$,

Όπου το σύμβολο $H = H(O, l)$ είναι *μια ομοιοθεσία* με κέντρο το σημείο O και λόγο ίσο με l , το σύμβολο $R = R(O', \varphi)$ είναι *μια στροφή* με κέντρο το σημείο O' και γωνία ίση με φ και το σύμβολο $T = T(\vec{c})$ είναι *μια μεταφορά* κατά ένα διάνυσμα $\vec{c}$.

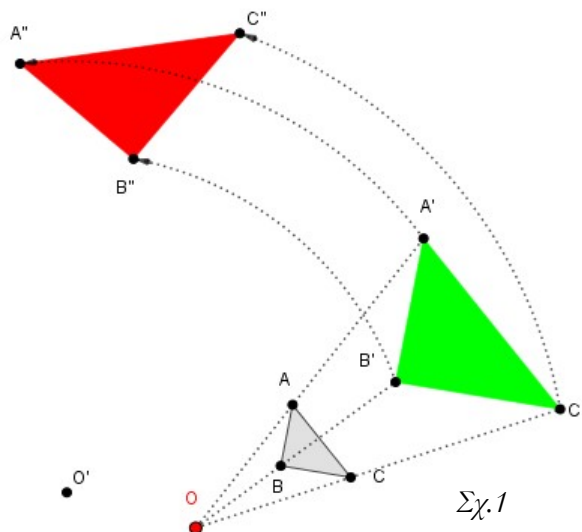
Παράδειγμα 1^α

Να βρεθεί η εικόνα του τριγώνου ABC μέσα από την ομοιότητα $S = S(H, R)$, γνωρίζοντας τα στοιχεία της ομοιοθεσίας και της στροφής.

Επεξεργασία



Εργαζόμαστε στο σχήμα 1.

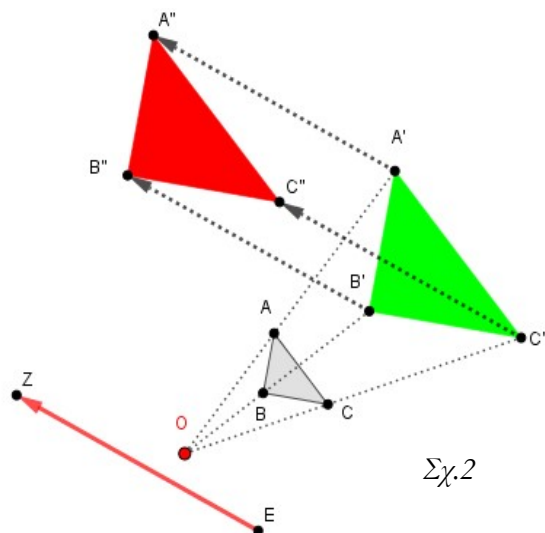


Στο σχήμα 1 (<https://www.geogebra.org/m/ws9w7wvp>) δημιουργήθηκε αρχικά η εικόνα $A'B'C'$ του δοθέντος τριγώνου ABC μέσω της ομοιοθεσίας $H(O, l)$ και στη συνέχεια η εικόνα $A''B''C''$ του $A'B'C'$ μέσω της στροφής $R(O', \varphi)$

Παράδειγμα 1β

Να βρεθεί η εικόνα του τριγώνου ABC μέσα από την ομοιότητα $S = S(H, T)$, γνωρίζοντας τα στοιχεία της ομοιοθεσίας και της μεταφοράς.

Εργαζόμαστε στο σχήμα 2 (<https://www.geogebra.org/m/w2kk5k2b>).





Στο σχήμα 2 δημιουργήθηκε αρχικά η εικόνα $A'B'C'$ του δοθέντος τριγώνου ABC μέσω της ομοιοθεσίας $H(O, l)$ και στη συνέχεια η εικόνα $A''B''C''$ του $A'B'C'$ μέσω της παράλληλης μετατόπισης $T(\vec{a})$, όπου $\vec{a} = \vec{EZ}$.

2. Κέντρο της ομοιότητας

Έστω ότι έχουμε την ομοιότητα $S = S(H, R)$. Τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

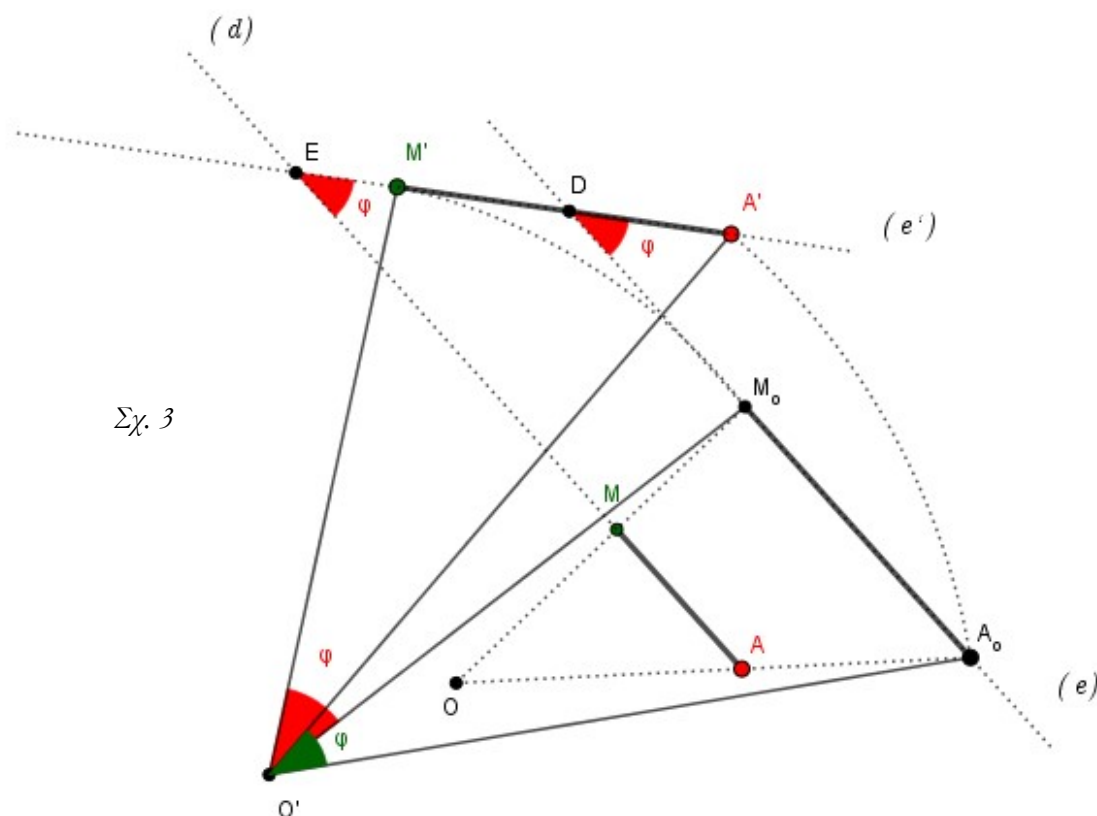
Πρόταση Ι. Η ομοιότητα αυτή ορίζεται πλήρως αν γνωρίζουμε:

- δυο ομόλογα(αντίστοιχα) σημεία,
- το λόγο της ομοιοθεσίας H και
- τη γωνία φ της στροφής R .

Απόδειξη

Σύμφωνα με τα ανωτέρω δεδομένα αν θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο M του επιπέδου τότε μπορούμε μέσω της ομοιότητας $S(H, R)$ να βρούμε την εικόνα M' . Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζαμε επιπλέον το κέντρο O της ομοιοθεσίας H καθώς και το κέντρο O' της στροφής, τότε σύμφωνα με το σχήμα 3, η εικόνα του τμήματος AM μέσω της ομοιοθεσίας H θα ήταν το τμήμα A_oM_o και στη



Σχ. 3



συνέχεια μέσω της στροφής R θα κατέληγε στο τμήμα $A'M'$.

Είναι γνωστό ακόμα, από το μετασχηματισμό της στροφής, ότι η γωνία μεταξύ της ευθείας (e) και της εικόνας της (e') , μέσω της στροφής R , είναι ίση με τη δοθείσα γωνία της στροφής φ . Από το ανωτέρω σχήμα ακόμα παρατηρούμε ότι επειδή $AM \parallel A_o M_o$ θα είναι ίσες και οι γωνίες στα σημεία D, E , δηλαδή $\bar{D} = \bar{E} = \varphi$.

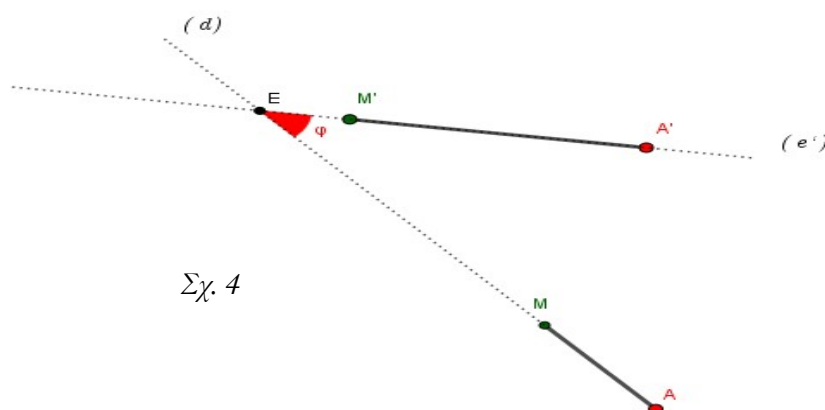
Έτσι, από την παρατήρηση αυτή, προκύπτει η ακόλουθη κατασκευή της εικόνας **ενός τυχαίου σημείου M του επιπέδου** μέσω της ομοιότητας $S = S(H, R)$ κατά την οποία γνωρίζουμε μόνο τα εξής:

- το σημείο A και το ομόλογό του A' ,
- το λόγο της ομοιοθεσίας H , και
- τη γωνία φ της στροφής R .

Μας είναι άγνωστα δηλαδή τα δυο κέντρα O, O' , της ομοιοθεσίας H και της στροφής R .

Κατασκευή της εικόνας M' του σημείου M , μέσω της ομοιότητας S

Στο σχήμα 4 η ευθεία (e') κατασκευάστηκε έτσι ώστε να σχηματίζει με τη γνωστή ευθεία που ορίζουν τα δεδομένα σημεία A, M , γωνία ίση με τη δοθείσα γωνία φ . Έτσι χαράχτηκε το σημείο E . Κατόπιν κατασκευάζουμε πάνω σ' αυτήν το τμήμα AM' , έτσι ώστε: $(A'M') = l(AM)$ (1)



Σχ. 4



όπου l ο δοθείς λόγος της ομοιοθεσίας H .

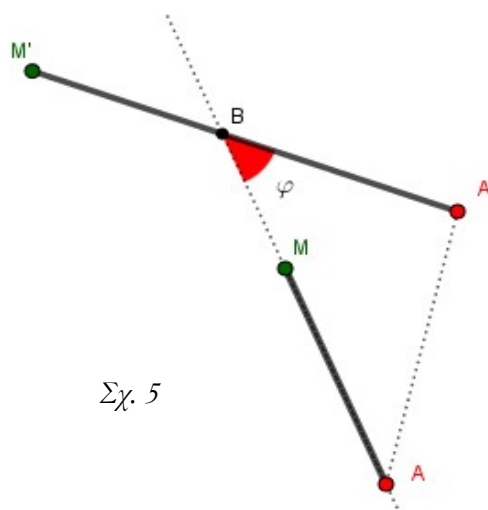
Έτσι στο ανωτέρω σχήμα βλέπουμε τη χάραξη του ομολόγου M' ενός τυχαίου σημείου M του επιπέδου με δεδομένα τα στοιχεία: A, A', l, φ .

Παρατήρηση: Στην ανωτέρω ομοιότητα μπορούμε να βρούμε **απειρία** κέντρων ομοιοθεσίας και στροφής.

Παράδειγμα 2^ο

Δίνεται μια ομοιότητα με στοιχεία (A, A', l, φ) . Να βρεθεί το κέντρο της ομοιοθεσίας και το κέντρο της στροφής.

Επεξεργασία



Σχ. 5

Έστω η ομοιότητα που ορίζεται από τα στοιχεία: (A, A', l, φ) . Στο σχήμα 5 που κατασκευάστηκε σύμφωνα με τα προηγούμενα, φαίνεται η εικόνα M' , μέσω της ομοιότητας αυτής, ενός τυχαίου σημείου M του επιπέδου.

Θα αναζητήσουμε στη συνέχεια ένα κέντρο της ομοιοθεσίας και ένα κέντρο της στροφής της ομοιότητας αυτής.

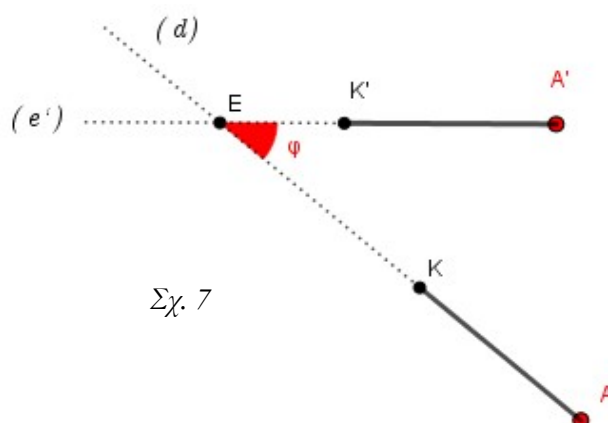


Ένα σημείο K θα λέγεται κέντρο της ομοιότητας $S=S(H,R)$ αν το σημείο αυτό ταυτίζεται με την εικόνα του K' μέσω της ομοιότητας αυτής.



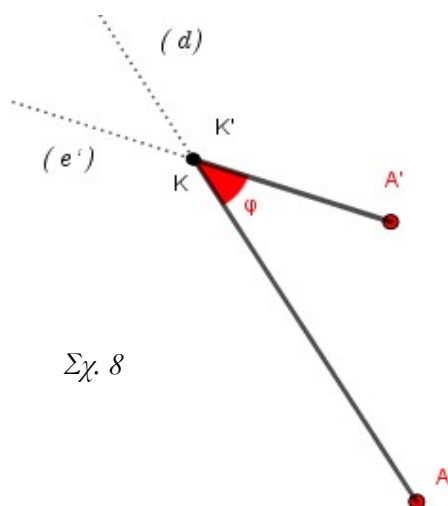
Στο σχήμα 7 έχουμε την εφαρμογή της ομοιότητας $S = S(H, R)$, ώστε να προσδιορίσουμε το ομόλογο K' του σημείου K έχοντας ως δεδομένα τα στοιχεία που αναφέρονται στην πρόταση Ι.

Σύμφωνα με τον ορισμό ΙΙ, το σημείο K θα είναι κέντρο της ομοιότητας αυτής αν ταυτίζεται με την εικόνα του K' .



Σχ. 7

Δηλαδή: $K \equiv K'$



Σχ. 8

Αυτό το παρατηρούμε στο σχήμα 8.

2β) Πρώτη κατασκευή του κέντρου της ομοιότητας $S = S(H, R)$

Από το σχήμα 8 παρατηρούμε ότι είναι:

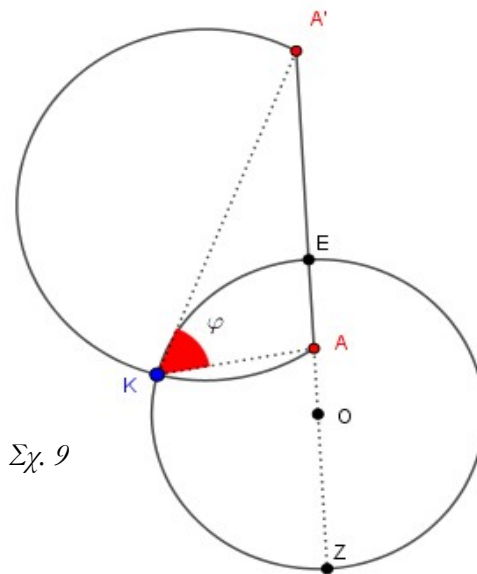


1^ο) Το κέντρο της ομοιότητας βλέπει το σταθερό τμήμα AA' με σταθερή γωνία ίση με τη γωνία φ της στροφής R διότι η γωνία αυτή, όπως φαίνεται από το σχήμα 5, είναι η γωνία μεταξύ των τμημάτων $AK, A'K'$, δηλαδή η γωνία της στροφής R . Άρα θα ανήκει σε ένα τόξο κύκλου που θα βλέπει το τμήμα AA' με σταθερή γωνία ίση με φ . (πρώτος γ. τύπος)

2^ο) Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι για το κέντρο αυτό θα ισχύει αντίστοιχα: $\frac{A'K'}{AK} = l \Rightarrow \frac{A'K}{AK} = l$ (2)

Επομένως το σημείο $K (\equiv K')$ θα ανήκει στον απολλώνιο κύκλο που αναφέρεται στο τμήμα $A'A$ και με λόγο ίσο με το λόγο l της ομοιοθεσίας H .

Άρα το ζητούμενο κέντρο κατασκευάζεται θεωρώντας την τομή των δύο



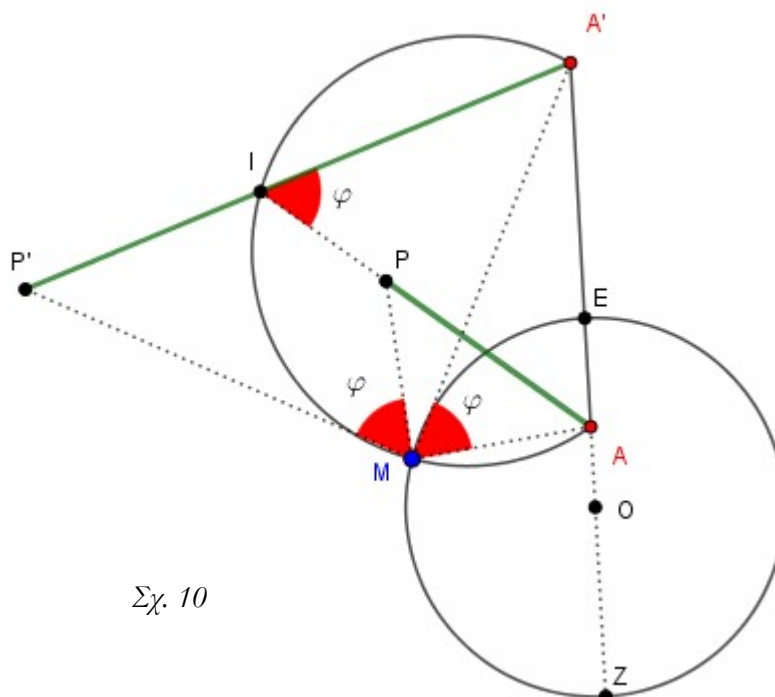
Σχ. 9

αυτών γεωμετρικών τύπων. (Σχ. 9)

2γ) Μια βασική ιδιότητα του κέντρου της ομοιότητας $S = S(H, R)$



Στο σχήμα 10 βλέπουμε το κέντρο M της ομοιότητας αυτής. Επίσης βλέπουμε



Σχ. 10

ένα ακόμα σημείο P καθώς και την εικόνα του P' μέσω της ομοιότητας αυτής.

Επειδή το κέντρο της ομοιότητας M ταυτίζεται εξ ορισμού με την εικόνα του M' μέσω της ομοιότητας αυτής εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι:

- Η γωνία των τμημάτων MA, MA' είναι ίση με τη γωνία φ της στροφής R , γιατί η γωνία των τμημάτων MA, MA' είναι ίση με τη γωνία των τμημάτων $MA, M'A'$.
- Όμοια η γωνία των τμημάτων MP, MP' είναι ίση με τη γωνία φ της στροφής R .
- Ακόμα η γωνία των τμημάτων $AP, A'P'$ είναι κι αυτή ίση με τη γωνία φ της στροφής R .

Συμπέρασμα:

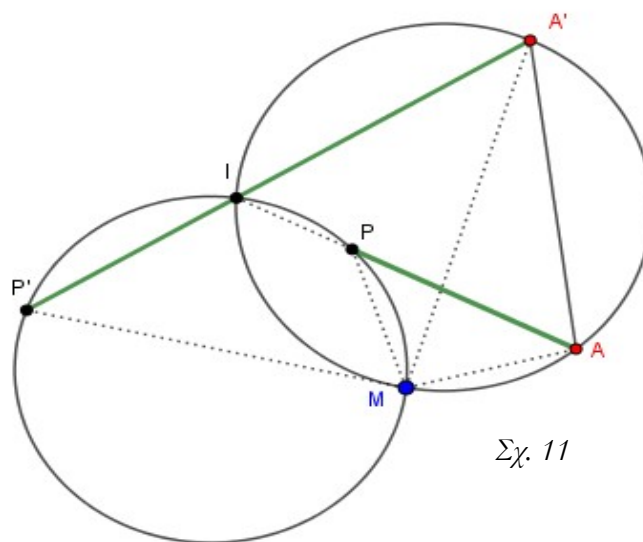
Το κέντρο της ομοιότητας βλέπει κάθε τμήμα που ενώνει δυο αντίστοιχα σημεία με την ίδια γωνία που είναι η γωνία της στροφής.

2γ) Δεύτερη κατασκευή του κέντρου της ομοιότητας $S = S(H, R)$



Από το σχήμα 10 παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο $MPIP'$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Εξάλλου και το τετράπλευρο $MAA'I$ είναι κι αυτό εγγεγραμμένο στο κύκλο που ανήκει το τόξο από το οποίο φαίνεται με γωνία ίση με φ το τμήμα AA' .

Άρα λοιπόν όπως φαίνεται και στο σχήμα 11, το κέντρο της ομοιότητας M είναι το δεύτερο κοινό σημείο της τομής των περιγεγραμμένων κύκλων στα



Σχ. 11

τρίγωνα $AA'P$ και $PP'I$.

Έτσι λοιπόν για να κατασκευάσουμε το κέντρο μιας ομοιότητας $S = S(H, R)$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τα ομόλογα σημεία A', P' δύο τυχαίων σημείων του επιπέδου A και B και στη συνέχεια το σημείο τομής I των ευθειών που αυτά ορίζουν.
- Κατασκευάζουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους στα τρίγωνα $AA'I$ και $PP'I$.

Τότε το δεύτερο σημείο τομής αυτών των δύο κύκλων είναι το κέντρο της ομοιότητας αυτής.

3. Η αντίρροπη ομοιότητα

Ο μετασχηματισμός της ομοιότητας έτσι όπως παρουσιάστηκε ανωτέρω είναι ένας μετασχηματισμός, που σύμφωνα με τον ορισμό I, είναι η σύνθεση μιας ομοιοθεσίας και μιας στροφής.



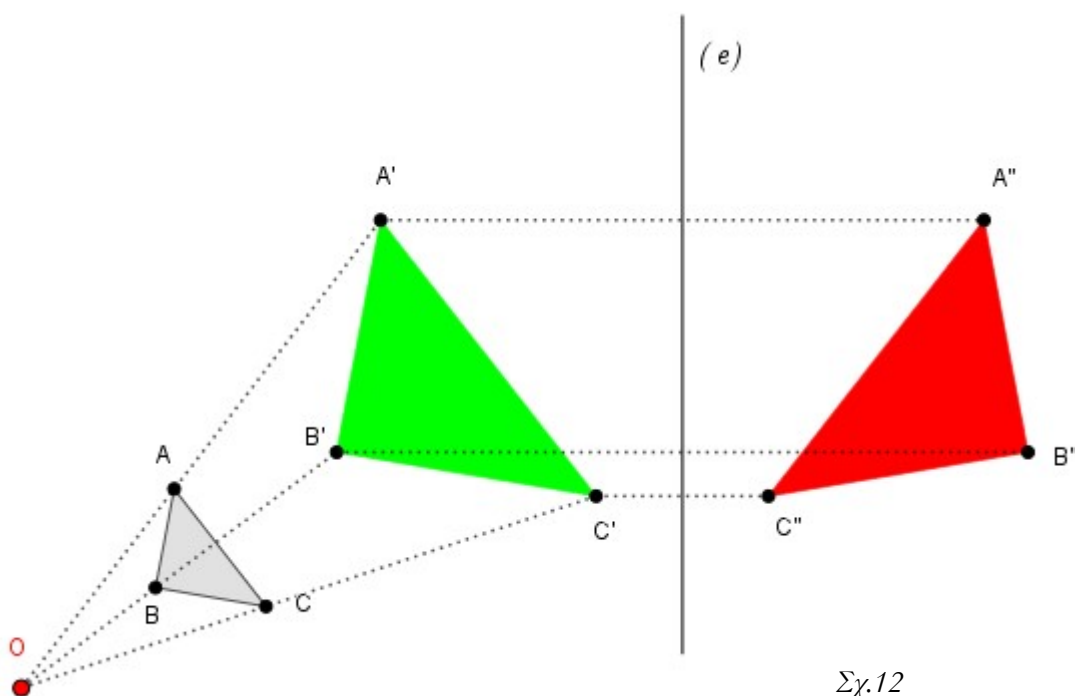
Ο σύνθετος αυτός μετασχηματισμός όταν εφαρμόζεται σε ένα κυρτό πολύγωνο δίνει ως εικόνα ένα όμοιο πολύγωνο και μάλιστα ένα **όμοιο και ομόρροπο πολύγωνο**. Για το λόγο αυτό η ομοιότητα που παρουσιάστηκε μέχρι τώρα λέγεται **ομόρροπη ομοιότητα**.

Μια τέτοια ομοιότητα είναι αυτή του σχήματος 1 του παραδείγματος (1α) της παραγράφου 1. Στην περίπτωση αυτή τα τρίγωνα ABC και $A''B''C''$ είναι ομορρόπως όμοια.

Μια αντίρροπη ομοιότητα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός III. Η **αντίρροπη ομοιότητα** είναι εκείνος ο μετασχηματισμός που προκύπτει από μια ομοιοθεσία και από μια αξονική συμμετρία.

Παράδειγμα 3α:



Σχ.12

Στο σχήμα 12 (<https://www.geogebra.org/m/xejadhua>) έχουμε μια αντίρροπη ομοιότητα, δηλαδή μια ομοιότητα η οποία συντέθηκε από μια ομοιοθεσία και από μια **αξονική συμμετρία** με άξονα τον (e) .



Το αποτέλεσμα, όπως φαίνεται είναι **ένα τρίγωνο αντιρρόπως όμοιο** με το αρχικό. Αυτό προήλθε από το γεγονός ότι η δεύτερη συνιστώσα της ομοιότητας, δηλαδή η αξονική συμμετρία, είναι ένας σημειακός μετασχηματισμός που διατηρεί την ισότητα των σχημάτων αλλά αντιστρέφει τη φορά. Για το λόγο αυτό η αξονική συμμετρία ως σημειακός μετασχηματισμός αναφέρεται, από ορισμένους συγγραφείς, ως **αντίρροπος ισότητα**.

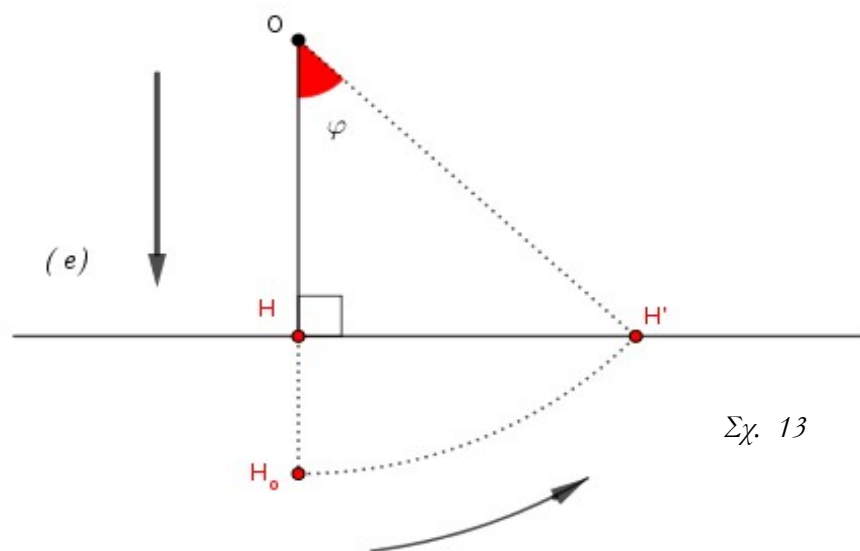
Αντίστοιχα οι μετασχηματισμοί της **στροφής** και της **παράλληλης μεταφοράς** παράγουν εικόνες ίσες με τις αρχικές και μάλιστα του ίδιου προσανατολισμού. Έτσι οι δυο αυτοί μετασχηματισμοί αναφέρονται από κάποιους συγγραφείς ως **ομόρροπες ισότητες**.

4. Εφαρμογές

Δίνεται μια ευθεία (e) και ένα σταθερό σημείο O το οποίο προβάλλεται στην (e) κατά το σημείο H . Θεωρούμε όλες τις ομοιότητες με κέντρο το σημείο O και οι οποίες δίνουν στο σημείο H εικόνα H' η οποία να ανήκει στην ευθεία (e) .

- Να βρείτε τη σχέση του λόγου ομοιοθεσίας και της γωνίας στροφής.
- Να βρεθεί ο γ.τόπος των εικόνων M' ενός σταθερού σημείου M .

Ας ονομάσουμε μια από τις ομοιότητες αυτές με το σύμβολο





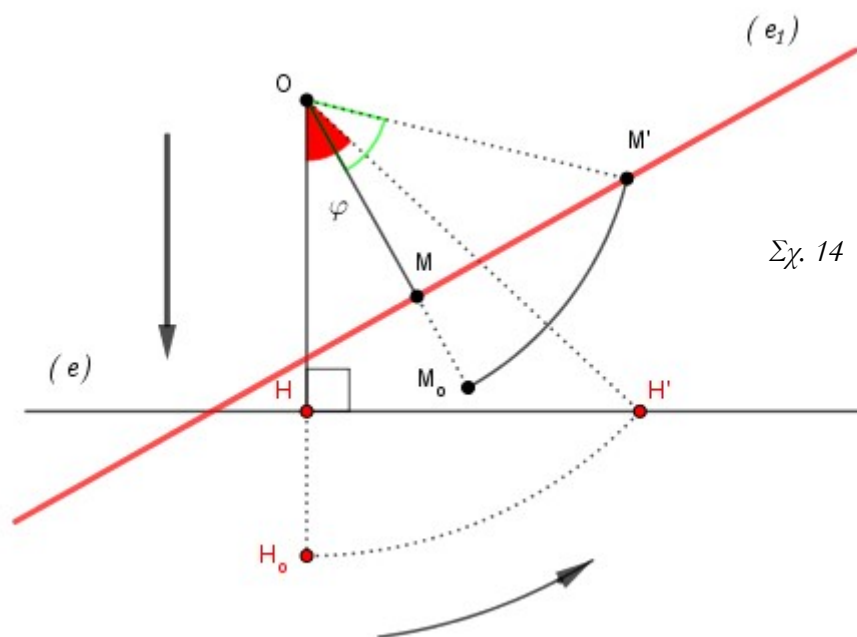
$S(O, l, \varphi)$, όπου O, l, φ είναι αντίστοιχα το κέντρο της κάθε ομοιότητας, ο λόγος της ομοιοθεσίας και η γωνία της στροφής.

i) Από το σχήμα 13 έχουμε:

$$\lambda = \frac{OH_o}{OH} = \frac{OH'}{OH} = \frac{1}{OH/OH'} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (3)$$

Από τη σχέση (3) δηλώνει ότι, στις ομοιότητες αυτές που στέλνουν τις εικόνες των σημείων του επιπέδου πάνω στην ευθεία (e) , η γωνία στροφής ρυθμίζει και το λόγο της ομοιοθεσίας των ομοιοτήτων αυτών.

ii) Έστω M ένα σταθερό σημείο του επιπέδου (e, O) . Ζητούμε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του σημείου αυτού μέσω όλων των ομοιοτήτων $S(O, l, \varphi)$.



Από το σχήμα 14 έχουμε:

Τα τρίγωνα OHH' και OMM' είναι όμοια γιατί:

$$\left. \begin{aligned} \frac{OH'}{OH} &= \frac{OM'}{OM} = l \\ \gamma\omega\nu HOH' &= \gamma\omega\nu MOM' = \varphi \end{aligned} \right| \quad (4)$$



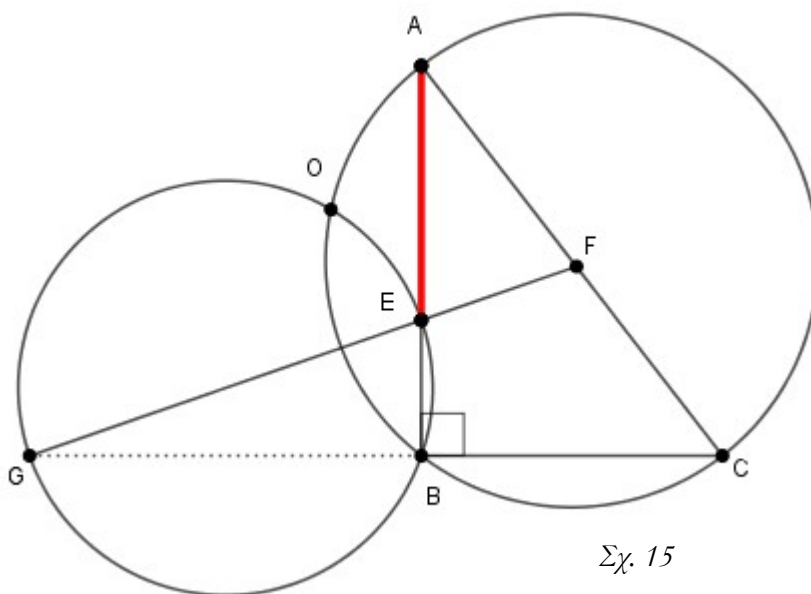
Άρα το τρίγωνο OMM' είναι ορθογώνιο στο M . Έτσι η εικόνα M' του σταθερού σημείου M , για μια τυχαία ομοιότητα, ανήκει στην ευθεία (e_1) που είναι κάθετη στο σταθερό τμήμα OM στο σημείο M .

Επομένως ο ζητούμενος γ. τόπος είναι η ευθεία (e_1) .

1. Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABC ($\hat{B} = 90^\circ$) και ένα τυχόν σημείο της κάθετου πλευράς AB . Από το σημείο E φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει την AC στο σημείο F και την προέκταση της BC στο σημείο G . (Υποθέτουμε ότι τα σημεία E, F, G είναι διαφορετικά από τα σημεία A, B, C)

Να βρεθεί η ομοιότητα εκείνη η οποία στο ζεύγος (A, E) αντιστοιχίζει το ζεύγος (C, G) .

Επεξεργασία



Εργαζόμαστε στο σχήμα 15.

Επειδή το ζεύγος των σημείων (A, E) αντιστοιχίζεται στο ζεύγος (C, G) , και επειδή τα τμήματα AE, CG τέμνονται στο σημείο B τότε σύμφωνα με την πρόταση (2γ), η ζητούμενη ομοιότητα έχει κέντρο το δεύτερο σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων στα τρίγωνα ACB και EGB , δηλαδή το σημείο O .

Επομένως το κέντρο της ομοιοθεσίας και της στροφής είναι το σημείο O .



Ο λόγος της ομοιοθεσίας είναι ασφαλώς ο λόγος των αντίστοιχων τμημάτων CG, AE , δηλαδή: $l = \frac{(CG)}{(AE)}$

Τέλος η γωνία στροφής, λόγω του προσανατολισμού των αντίστοιχων τμημάτων AE, CG , είναι: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

2. Να κατασκευαστεί τρίγωνο ABC όμοιο προς ένα δοσμένο $A_1B_1C_1$ έτσι ώστε η κορυφή του A να είναι ένα δοσμένο σημείο και οι κορυφές του B και C να ανήκουν αντίστοιχα πάνω σε δυο δοσμένους κύκλους $(c_1), (c_2)$.

Επεξεργασία

Στο σχήμα 16 βλέπουμε ως δεδομένα:

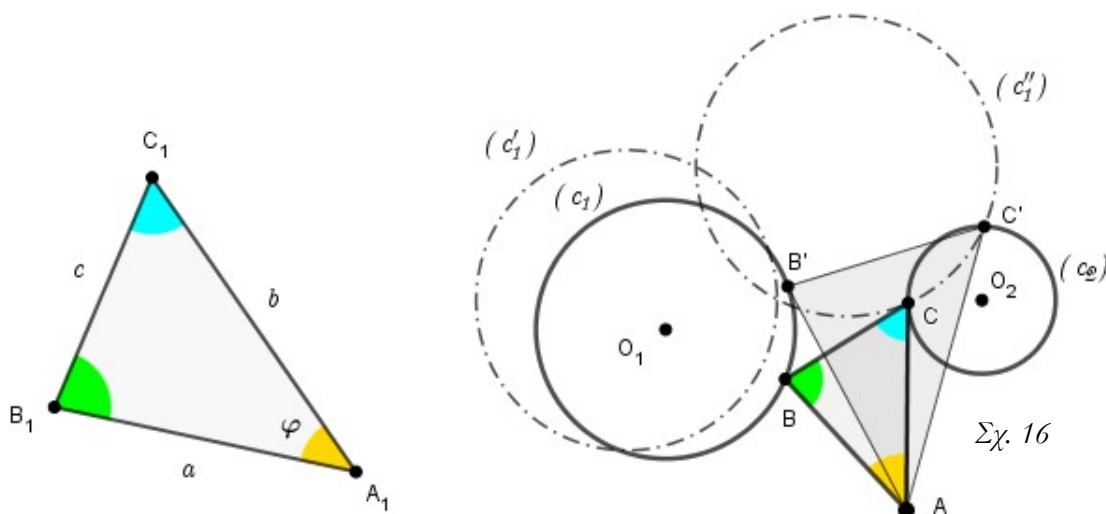
- το τρίγωνο το $A_1B_1C_1$,
- το σημείο A ,
- οι δυο κύκλοι $(c_1), (c_2)$.

Για την κατασκευή αυτή θα ακολουθήσουμε τα εξής στάδια:

Ανάλυση

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει το ζητούμενο τρίγωνο, και είναι το ABC . (Σχ.16 <https://www.geogebra.org/m/cmmq3ubu>). Επειδή αυτό είναι όμοιο με το δεδομένο τρίγωνο $A_1B_1C_1$. Επομένως είναι:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = l = ct \quad (5)$$





Παρατηρούμε ότι το σημείο C ανήκει στο κύκλο (c_2) καθώς επίσης ότι είναι και η εικόνα του σημείου B κατά την ομοιότητα S με στοιχεία:

$$(A, l, \varphi) \quad (6)$$

όπου το l δίνεται από τη σχέση (5) και η γωνία φ είναι η γωνία που αντιστοιχεί στην κορυφή A_1 του δοθέντος τριγώνου $A_1B_1C_1$.

Επειδή όμως το σημείο B ανήκει στον κύκλο (c_1) προκύπτει ότι η εικόνα του B , δηλαδή το σημείο C , θα ανήκει στην εικόνα (c_1'') του κύκλου (c_1) μέσω της ομοιότητας S .

Έτσι το σημείο C θα ανήκει στην τομή των κύκλων (c_2) και (c_1'') .

Σύνθεση(Κατασκευή)

Κατασκευάζουμε την εικόνα (c_1'') του κύκλου (c_1) μέσω της ομοιότητας (6). Αυτό γίνεται αφού βρούμε πρώτα τον ομοιόθετο κύκλο (c_1') και στη συνέχεια τη στροφή αυτού (c_1'') κατά γωνία ίση με φ . Έτσι κατασκευάστηκε το σημείο τομής C του (c_1'') με τον κύκλο με τον κύκλο (c_2) .

Η κατασκευή του σημείου B γίνεται αν εφαρμόσουμε στο σημείο C την ομοιότητα $\left(A, \frac{1}{l}, -\varphi\right)$.

Έτσι κατασκευάστηκε το τρίγωνο ABC .

Απόδειξη

Το τρίγωνο ABC είναι το ζητούμενο. Πράγματι:

- Η γωνία A του τριγώνου αυτού είναι ίση με φ .
- $\frac{AC}{AB} = l = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$

Άρα τα τρίγωνα ABC και $A_1B_1C_1$ είναι όμοια.



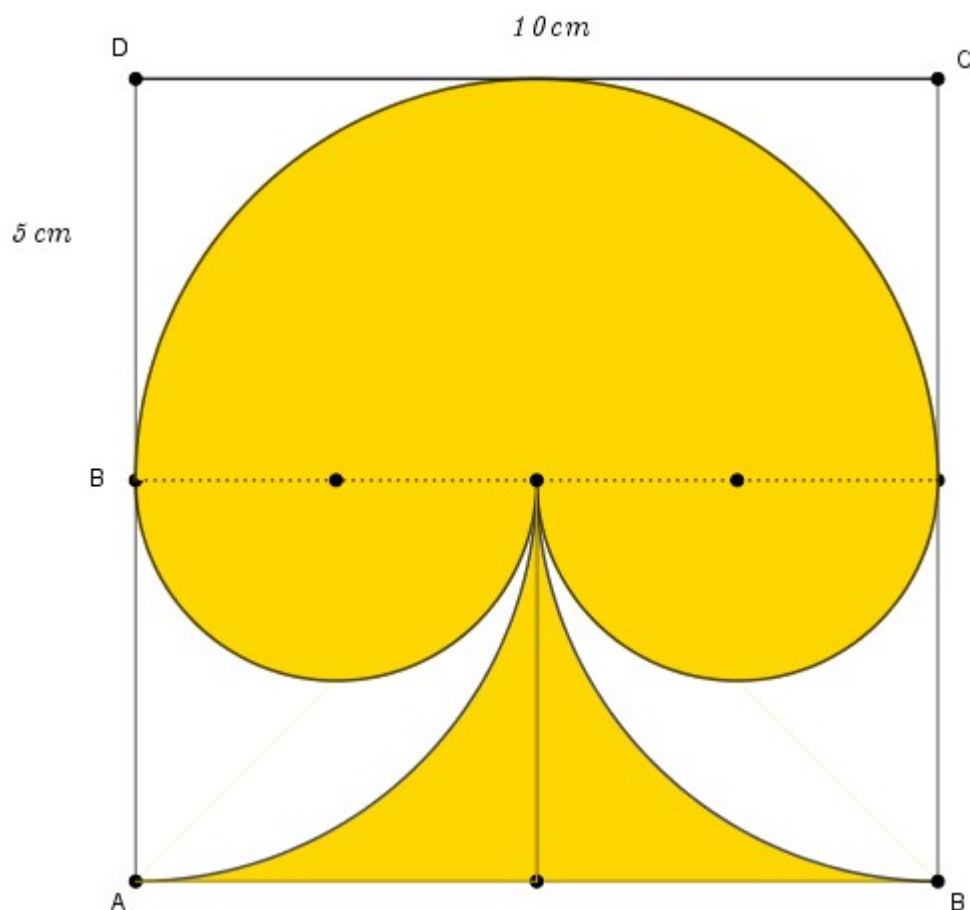
Διερεύνηση

Το πρόβλημα έχει δύο, μία ή καμία λύση. Αυτό εξαρτάται από τον αν οι κύκλοι (c_2) και (c_1'') αν τέμνονται αντίστοιχα σε δυο, ένα ή κανένα σημείο.



Από το προηγούμενο τεύχος 5

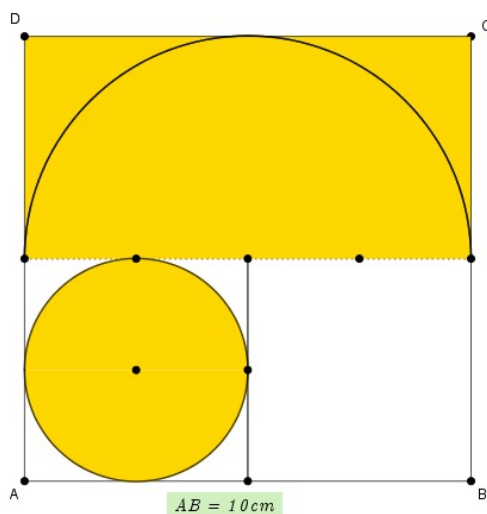
Το «μανιτάρι» του κατωτέρω σχήματος είναι εγγεγραμμένο στο τετράγωνο $ABCD$ με πλευρά $AB=10cm$. Να βρεθεί το εμβαδόν του και η



περίμετρος

του.

Μανιτάρι 1 <https://www.geogebra.org/m/bctvajeq>



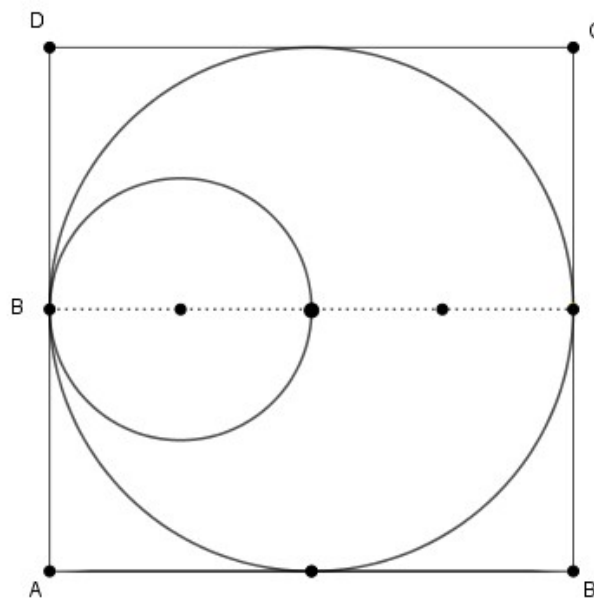
**A) Υπολογισμός του εμβαδού**

Με κατάλληλες μετακινήσεις των τμημάτων αυτού του μανιταριού μπορούμε να οδηγηθούμε στο ακόλουθο σχήμα. Από τον μετασχηματισμό αυτό διαπιστώνεται ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι το άθροισμα του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαστάσεων 5×10 και ενός κύκλου ακτίνας ίσης με 2.5 . Έτσι το εμβαδόν αυτού είναι:

$$E_{\text{μανιταριού}} = 5 \times 10 + \pi \cdot 2.5^2 = 50 + 6.25\pi \text{ cm}^2$$

B) Υπολογισμός της περιμέτρου

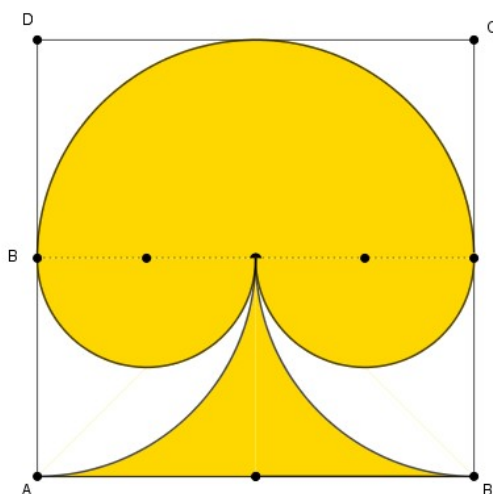
Παρατηρώντας το σχήμα του μανιταριού αυτού εύκολα μπορούμε να αντιληφθούμε ότι τα τόξα των δυο ημικυκλίων διαμέτρου ίσης με 5 cm δημιουργούν ένα κύκλο. Επίσης τα δύο τόξα της βάσης του μανιταριού είναι τόξα ενός τεταρτοκύκλιου διαμέτρου ίσης με 10 cm . Αυτό φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Άρα η ζητούμενη περίμετρος είναι:

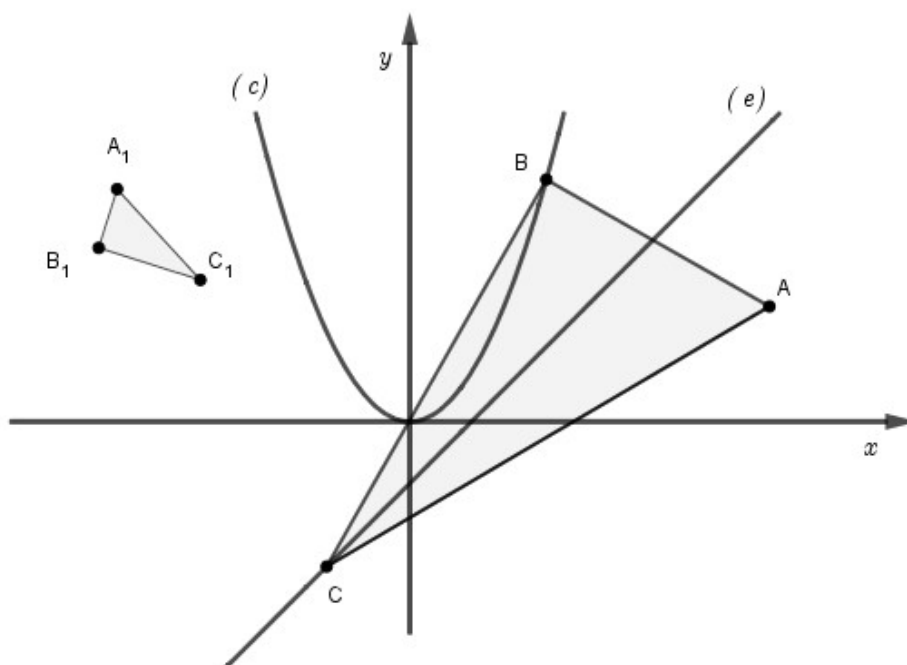


$$\Pi_{\text{μανιταριού}} = 2\pi \cdot 5 + 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 15\pi \text{ cm}$$



Μανιτάρι 2 <https://www.geogebra.org/m/dpz5nzmd>

5. Για την άλλη φορά



9. Δίνεται η παραβολή (c) με εξίσωση $c: y = \frac{1}{2}x^2$, η ευθεία (e) με εξίσωση $(e): y = x - 1$ και ένα σταθερό σημείο A στο επίπεδο αυτών. Να



κατασκευαστεί τρίγωνο ABC έτσι ώστε $B \in c$, $C \in e$ και να είναι όμοιο προς ένα δοσμένο τρίγωνο $A_1B_1C_1$.

10. Δίνεται μια ομοιότητα με τα στοιχεία (A, A', l, φ) , όπου το σημείο A είναι σταθερό και το σημείο A' κινείται πάνω σε σταθερό κύκλο με κέντρο το σημείο O και ακτίνα ίση με R .

Ζητούμε να κατασκευάσουμε το κέντρο της ομοιότητας αυτής και να βρούμε το γεωμετρικό τόπο του κέντρου αυτού.

6. Βιβλιογραφία:

1. **Κανέλλος Σ.**, Ευκλείδειος Γεωμετρία, $\Delta, E, \Sigma T$ Γυμνασίου Θετικής Κατεύθυνσεως. (1975)
2. **Βαρουχάκης Ν.**, Συμπλήρωμα Γεωμετρίας, δια την $\Sigma T'$ Γυμνασίου. (1971).
3. **Βασιλειάδης Π.**, Γεωμετρικά Κατασκευαί, Επιπεδομετρία $\Sigma T'$, τόμος 20. Θεσσαλονίκη (1976).
4. **Τσίντσιφας Γ.**, Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί, A' μέρος. Σημειώσεις.

Ιστότοποι

1. https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_transfos.pdf

7. Λογισμικό Geogebra



Χρήση των Μαθηματικών στην Τεχνολογία την καθημερινότητα και τις Επιστήμες

Τα Μαθηματικά που διδάσκονται στο Ελληνικό σχολείο δεν αναδεικνύουν σχεδόν ποτέ την εφαρμογή τους στην Τεχνολογία, στις Επιστήμες, στην Τέχνη και σε άλλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας. Αυτό είναι κατάφορα αντιφατικό με την εκπαιδευτική διαδικασία, διότι είναι μόνιμο ερώτημα και διαχρονικό ερώτημα των μαθητών είτε ενδιαφέρονται πολύ είτε λίγο με τα Μαθηματικά να γνωρίσουν και να μάθουν κάποιες πλευρές της «χρησιμότητάς» τους.

Ένας στόχος λοιπόν, αυτής της στήλης είναι να αναδείξει όψεις της χρήσης των Μαθηματικών στην Τεχνολογία, στις Επιστήμες.

Ένας δεύτερος στόχος αυτής της στήλης είναι να δείξει πώς ερωτήματα και προβλήματα που αντιμετωπίζει η Τεχνολογία και οι Επιστήμες μπορεί να αποτελέσουν για τα Μαθηματικά πηγή για νέες δημιουργικές προτάσεις και ενδιαφέρουσες λύσεις.



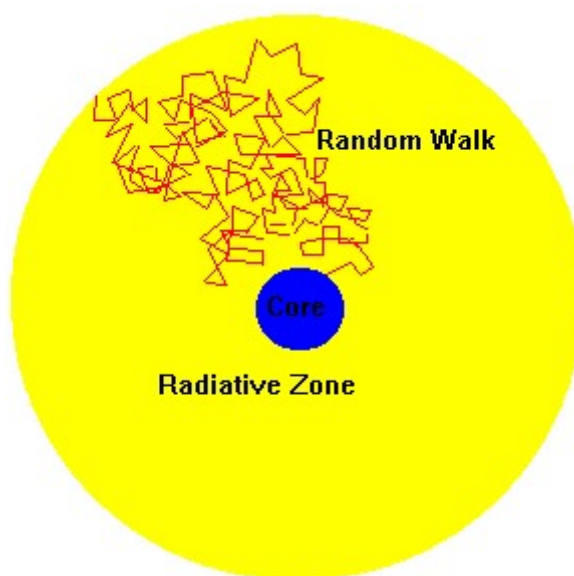


Ο τυχαίος περίπατος του φωτονίου

Ειρήνη Περυσινάκη

Το φωτόνιο είναι το ταχύτερο σωματίδιο στον κόσμο αφού κινείται με την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή 300.000 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο! Φανταζόμαστε λοιπόν ότι κάθε φωτόνιο που παράγεται στον πυρήνα του Ήλιου, σχεδόν αστραπιαία εξέρχεται στην επιφάνειά του για να συνεχίσει το ταξίδι του ως τον πλανήτη μας, διάρκειας μόλις 8 λεπτών!

Όμως η πραγματικότητα είναι πολύ διαφορετική. Τα φωτόνια που απολαμβάνουμε μια ηλιόλουστη ημέρα έχουν παραχθεί στον πυρήνα του Ήλιου πριν από εκατοντάδες χιλιάδες χρόνια ίσως και ένα εκατομμύριο. Γιατί, τόσο χρόνο χρειάζεται ένα φωτόνιο για να διανύσει το εσωτερικό του Ήλιου και να ανέλθει στην επιφάνειά του. Η αιτία για αυτή την καθυστέρηση είναι ο «τυχαίος περίπατος του φωτονίου». Σε αυτό το άρθρο θα γνωρίσουμε τι είναι ακριβώς ο τυχαίος περίπατος και γιατί «διαρκεί» τόσο πολύ. Το μαθηματικό εργαλείο για την ανάλυση του θέματος είναι οι *Πιθανότητες*.

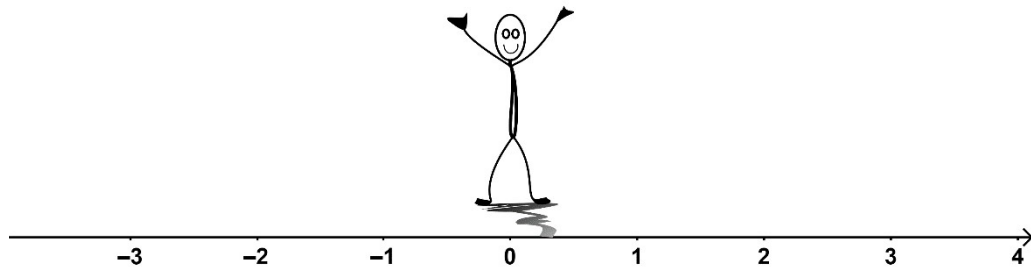


Εικόνα 1: ο τυχαίος περίπατος ενός φωτονίου στο εσωτερικό του Ήλιου



1. Τι είναι ο τυχαίος περίπατος;

Ας θεωρήσουμε την απλή εκδοχή του διαβάτη που κινείται σε μία ευθεία μόνο - φανταστείτε την ως τον άξονα των πραγματικών αριθμών, με τον διαβάτη να βρίσκεται αρχικά στο σημείο 0 (αρχή του άξονα).



Εικόνα 2: Ο τυχαίος περίπατος σε μία διάσταση

Ο διαβάτης θα εκτελέσει έναν τυχαίο περίπατο αν κάθε του βήμα δεξιά ή αριστερά καθορίζεται στην τύχη, για παράδειγμα από την ρίψη ενός νομίσματος. Επομένως, εάν το νόμισμα είναι «αμερόληπτο», οι πιθανότητες να βρεθεί μετά το πρώτο βήμα στον αριθμό **1** ή στον αριθμό **-1** είναι μοιρασμένες, δηλαδή 50-50%. Πειραματιστείτε με αυτήν την εφαρμογή: <https://www.geogebra.org/classic/gdg3rtsf>

Ας υποθέσουμε ότι ο διαβάτης μας κάνει μια σειρά 5 τυχαίων βημάτων. Σε ποιο σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών θα μπορούσε να βρεθεί; Εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι εφόσον το κάθε βήμα μπορεί να είναι είτε **+1** (κίνηση προς τα δεξιά) είτε **-1** (κίνηση προς τα αριστερά), η θέση του διαβάτη στα 5 τυχαία βήματα θα προσδιορίζεται από ένα άθροισμα της μορφής **-1 + 1 + 1 + 1 - 1**, όπου, είτε προσθέτουμε, είτε αφαιρούμε μονάδες. Το αποτέλεσμα βέβαια εξαρτάται από το πόσες μονάδες προσθέτουμε και πόσες αφαιρούμε. Στο παράδειγμά μας αφαιρούμε 2 και προσθέτουμε 3, άρα η τελική θέση του διαβάτη μετά τα συγκεκριμένα 5 βήματα είναι **+1** (εδώ που τα λέμε, δεν πήγε και πολύ μακριά από την αρχική του θέση).

2. Ας βάλουμε πιθανότητες



Συνεχίζουμε με τον τυχαίο περίπατο των 5 βημάτων. Επειδή υπάρχουν 2 δυνατότητες για κάθε βήμα (είτε $+1$ είτε -1), θα έχουμε $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ διαφορετικούς τρόπους κίνησης του διαβάτη.

Χρησιμοποιούμε το «δεντροδιάγραμμα» για να τους καταγράψουμε όλους (Πίνακας 1). Απλώς αρχίστε από αριστερά και σε κάθε επόμενο βήμα επιλέξτε έναν από τους δύο προσκείμενους κλώνους, μέχρι να φτάσετε τέρμα δεξιά.

Είναι λογικό να έχουμε τον ίδιο βαθμό προσδοκίας για κάθε έναν από αυτούς τους 32 τρόπους μετακίνησης με 5 βήματα. Η Θεωρία Πιθανοτήτων *μετρά* αυτόν τον βαθμό προσδοκίας με το κλάσμα $\frac{1}{32}$. Και επειδή $\frac{1}{32} = 3,125\%$ λέμε ότι «κάθε ένας από τους 32 τρόπους μετακίνησης έχει **πιθανότητα 3,125%**».

Αν ρωτήσουμε «ποια είναι η πιθανότητα ο διαβάτης να βρεθεί στην θέση $+5$ μετά από έναν τυχαίο περίπατο 5 βημάτων;», η απάντηση και πάλι είναι 3,125% καθώς μονάχα στην περίπτωση που η ακολουθία βημάτων είναι $+1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (περίπτωση μία στις 32) ο διαβάτης θα βρεθεί ακριβώς στην θέση $+5$.

Όμως, για να υπολογίσουμε την πιθανότητα «ο διαβάτης να βρεθεί στην θέση $+1$ », θα πρέπει να προσέξουμε ότι έχουμε πολλούς τρόπους μετακίνησης όπου εμφανίζονται τρία $+1$ και δύο -1 .

Συγκεκριμένα έχουμε τους εξής 10:

$$\begin{array}{ll}
 +1 + 1 + 1 - 1 - 1 & +1 + 1 - 1 + 1 - 1 \\
 +1 + 1 - 1 - 1 + 1 & \\
 +1 - 1 + 1 + 1 - 1 & +1 - 1 + 1 - 1 + 1 \\
 +1 - 1 - 1 + 1 + 1 & \\
 -1 + 1 + 1 + 1 - 1 & -1 + 1 + 1 - 1 + 1 \\
 -1 + 1 - 1 + 1 + 1 &
 \end{array}$$



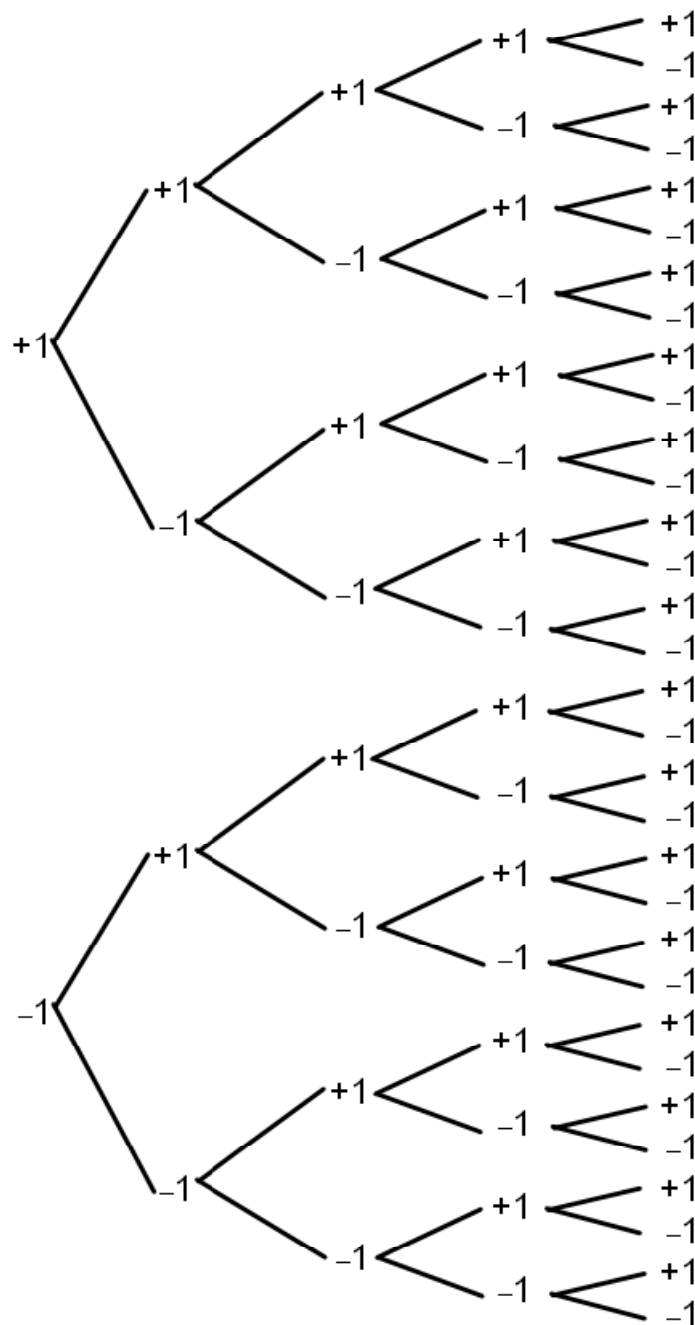
$$-1 - 1 + 1 + 1 + 1$$

Κατά συνέπεια, η πιθανότητα να καταλήξει στην θέση **+1** είναι

$$\frac{10}{32} = 31,25\%$$

Πίνακας 1: Δεντροδιάγραμμα για έναν τυχαίο περίπατο 5 βημάτων

1ο βήμα - 2ο βήμα - 3ο βήμα - 4ο βήμα - 5ο βήμα





Δηλαδή είναι δεκαπλάσια από την πιθανότητα να καταλήξει στην θέση +5.

Αξιολογώντας τα παραπάνω, αντιλαμβανόμαστε ότι σε έναν τυχαίο περίπατο δεν αναμένουμε ο διαβάτης να απομακρυνθεί πολύ από την αρχική του θέση.

Μήπως όμως εάν τα βήματα του τυχαίου περιπάτου αυξηθούν από τα 5 σε πολύ περισσότερα θα έχουμε καλές πιθανότητες ο διαβάτης μας να βρεθεί κάπου μακριά από την αρχική του θέση;

3. Η βοήθεια της Συνδυαστικής στο μέτρημα

Προηγουμένως, για να βρούμε όλους τους περιπάτους 5 βημάτων που είχαν 2 βήματα αριστερά και 3 δεξιά υποβάλαμε τους εαυτούς μας στην εξαντλητική διαδικασία της καταγραφής όλων των περιπτώσεων. Έτσι μετρήσαμε ότι αυτές οι περιπτώσεις είναι 10. Μπορούμε όμως να κάνουμε κάτι πιο έξυπνο με την βοήθεια της Συνδυαστικής, μια και απλώς ενδιαφερόμαστε για το πόσοι είναι αυτοί οι τρόποι και όχι για το ποιοι είναι αυτοί.

Σκεφτόμαστε λοιπόν ως εξής: να μετρήσουμε πόσους τρόπους έχουμε για την επιλογή 2 θέσεων από τις 5 στις οποίες θα εμφανιστούν τα -1 (εννοείται ότι στις υπόλοιπες 3 θα είναι $+1$).

Γενικότερα, αν θέλουμε να μετρήσουμε πόσους τρόπους έχουμε για την επιλογή k θέσεων από ένα σύνολο n θέσεων, το αποτέλεσμα είναι $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Το κλάσμα αυτό συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ και καλείται «συνδυασμοί των n ανά k ». Δηλαδή,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Επομένως, για $n = 5$ και $k = 2$ παίρνουμε $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$, που είναι το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε με την καταμέτρηση.



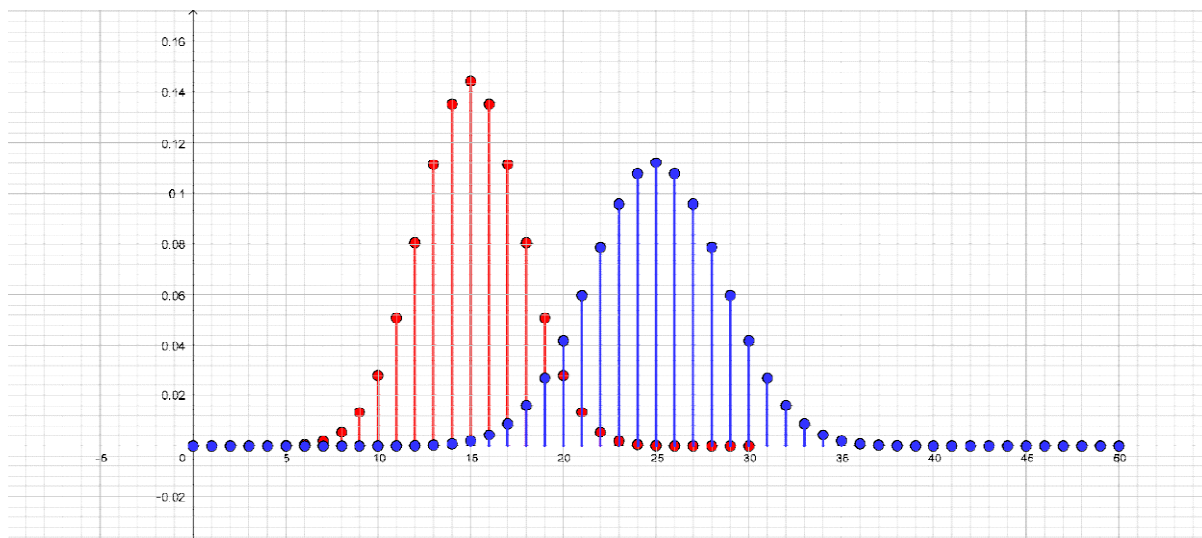
4. Μεγάλοι περίπατοι!

Ας μεγαλώσουμε λίγο τον περίπατό μας στα n βήματα. Τώρα υπάρχουν 2^n διαφορετικοί τρόποι μετακίνησης, ενώ αν θελήσουμε να μετρήσουμε τους τρόπους μετακίνησης που έχουν ακριβώς k βήματα προς τα αριστερά (δηλαδή k φορές το -1) θα είναι $\binom{n}{k}$.

Ας συμβολίσουμε με $P(k)$ την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένας περίπατος που θα έχει ακριβώς k βήματα προς τα αριστερά. Οπότε ισχύει

$$P(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

Τώρα, ας αναπαραστήσουμε γραφικά τα $P(k)$ ως εξής: σε κάθε αριθμό k από το 0 ως το n του άξονα $x'x$ υψώνουμε ένα κατακόρυφο τμήμα ύψους $P(k)$. Στην εικόνα 3 φαίνεται το αποτέλεσμα για $n = 30$ (κόκκινο) και για $n = 50$ (μπλε).



Εικόνα 3: Κατανομή των $P(k)$ για $n = 30$ (κόκκινο) και $n = 50$ (μπλε)

Εδώ είναι και μια διαδραστική εφαρμογή με το λογισμικό GeoGebra για περισσότερο πειραματισμό: <https://www.geogebra.org/m/wxajufu>

Φυσικά, όσο μεγαλώνει το n , τα τμήματά μας απλώνονται σε μεγαλύτερο διάστημα (από το 0 ως το n), αλλά φαίνεται συγχρόνως και να «κονταίνουν».



Αυτή είναι μια από τις πολλές παρατηρήσεις που έχουμε να κάνουμε, τις οποίες παραθέτουμε αμέσως τώρα:

Παρατήρηση 1^η: Τα $P(k)$ παρουσιάζουν κάποια συμμετρικότητα στην κατανομή τους. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Παρατήρηση 2^η: Το πιο μεγάλο $P(k)$ εμφανίζεται κάπου στη μέση (δηλαδή, αν το n είναι άρτιος, έστω $n = 2\mu$, εμφανίζεται ακριβώς στο μ). Αυτό σημαίνει ότι ο περίπατος που έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί, εμφανίζει το -1 στις μισές από τις n θέσεις και επομένως ο διαβάτης παραμένει στην αρχική του θέση (ή δίπλα της για περιττό n).

Παρατήρηση 3^η: Καθώς το n μεγαλώνει, τα $P(k)$ συγχρόνως απλώνονται σε μεγαλύτερο διάστημα (από το 0 ως το n) και μικραίνουν κατά μέσο όρο. Μια απλή εξήγηση για αυτό το φαινόμενο είναι ότι λόγω της ισότητας $P(0) + P(1) + \dots + P(n) = 1$ (γιατί εξαντλούμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις για το k) οι όροι του σταθερού αυτού αθροίσματος όταν πληθαίνουν οφείλουν και να μικραίνουν.

Να σχολιάσουμε ότι η ισότητα $P(0) + P(1) + \dots + P(n) = 1$ είναι άμεση συνέπεια της παρακάτω ταυτότητας (ανάπτυγμα διωνύμου) για $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$: $(\alpha + \beta)^n = \binom{n}{0}\alpha^0\beta^n + \binom{n}{1}\alpha^1\beta^{n-1} + \binom{n}{2}\alpha^2\beta^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}\alpha^n\beta^0$

Μάλιστα, για αυτόν ακριβώς τον λόγο, οι συνδυασμοί των n ανά k καλούνται και διωνυμικοί συντελεστές ενώ η κατανομή των $P(k)$ καλείται διωνυμική κατανομή.

Παρατήρηση 4^η: Είναι άραγε αλήθεια ότι, καθώς το n μεγαλώνει, το μέγιστο $P(k)$ -που όπως είπαμε στην παρατήρηση 2 εμφανίζεται κάπου στη μέση- τείνει να γίνει 0; Η απάντηση είναι «ΝΑΙ γιατί αυτή η μέγιστη τιμή είναι



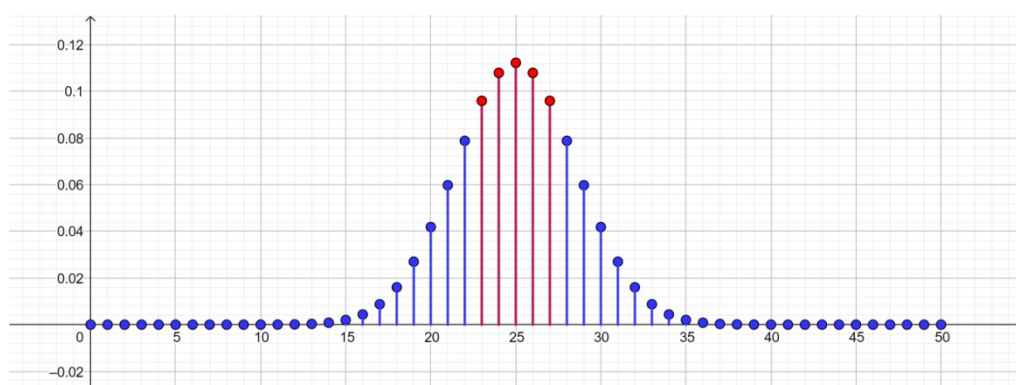
περίπου ίση με $\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$, όπως φαίνεται και στη διαδραστική εφαρμογή με το GeoGebra που παραθέσαμε παραπάνω.

Άσκηση: Να επαληθεύσετε την προσέγγιση για το μέγιστο $P(k)$ (4^η παρατήρηση) στην περίπτωση που το n είναι άρτιος, χρησιμοποιώντας τον εξής προσεγγιστικό τύπο για το $n!$ (τύπος του Stirling): $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

5. Η πραγματικότητα της απομάκρυνσης από την αρχική θέση

Από την παρατήρηση 4 αντιλαμβανόμαστε ότι η πιθανότητα ο διαβάτης να παραμείνει στην αρχική του θέση (ή κάπου εκεί κοντά) είναι πολύ μικρή. Περιμένουμε δηλαδή η πιθανότητα απομάκρυνσης να είναι πολύ μεγάλη, εφόσον φυσικά το n είναι μεγάλο.

Ας πούμε για παράδειγμα ότι ο διαβάτης θέλει να βρεθεί ή μετά το **+4** ή πριν από το **-4**. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε η διαφορά του πλήθους των **-1** και των **+1** σε έναν τυχαίο περίπατο n βημάτων να είναι μεγαλύτερη του 4. Με άλλα λόγια, θέλουμε το πλήθος των **-1** που συμβολίσαμε με k να διαφέρει από το $\frac{n}{2}$ τουλάχιστον 2 μονάδες. Όμως υπάρχουν το πολύ πέντε κ στο διάστημα $\left[\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} + 2\right]$ -είναι τα k που θέλουμε να εξαιρέσουμε- και επομένως αθροιστικά οι πιθανότητες τους είναι το πολύ $5\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$, κάτι πολύ μικρό συγκριτικά με το άθροισμα των πιθανοτήτων των υπόλοιπων k (τα επιθυμητά), καθώς έχουμε πει ότι ισχύει $P(0) + P(1) + \dots + P(n) = 1$.



Εικόνα 4: η βεβαιότητα της απομάκρυνσης από την αρχική θέση μετρώντας μόνο τα μπλε $P(k)$

Για παράδειγμα, αν $n = 50$ θα πρέπει να πάρουμε το άθροισμα όλων των $P(k)$ για k από το 0 ως το 50 εκτός από τα 23, 24, 25, 26, 27 που έχουν σημειωθεί με κόκκινο στην εικόνα 4.

Επομένως, για μεγάλο n , η πιθανότητα ο διαβάτης να βρεθεί τουλάχιστον 4 θέσεις μακριά από την αφετηρία του είναι περίπου 100%. Δηλαδή, **είναι σχεδόν βέβαιο ότι ο διαβάτης θα απομακρυνθεί από την αρχική του θέση.**

6. Ο αγώνας του φωτονίου

Είναι απίστευτες οι συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας στο πυρήνα του Ήλιου και πραγματικά, το φωτόνιο «αγωνίζεται» να ανέβει στην επιφάνειά του. Ο λόγος είναι ότι, υπ' αυτές τις συνθήκες, αναγκάζεται να εκτελέσει έναν τυχαίο περίπατο σε τρεις διαστάσεις -όχι απλώς σε μία όπως εξετάσαμε σε αυτό το άρθρο.

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι απαιτούνται **πολλά** βήματα (άρα και πολύς χρόνος) για να έχουμε την βεβαιότητα ότι το φωτόνιο θα ανέβει στην επιφάνεια του Ήλιου. Ίσως όμως να μην φανταζόμασταν ποτέ το μέγεθος του χρόνου... τόσο μεγάλο που, τελικά, όταν το φωτόνιο ολοκληρώσει τον τυχαίο περίπατό του έχει γεράσει πια!



Μάθετε περισσότερα για τον τυχαίο περίπατο του φωτονίου σε αυτό το βίντεο: <https://youtu.be/Z-UO-RZBQ3U>

7. Δείτε ακόμα:

- 8B10.60 - Random Walk - Modelling a Photon's Journey from the Center of a Star
https://youtu.be/F2yD7-unl_Y
- Monte Carlo Experiments: "Drunken Sailor's" Random Walk
http://195.134.76.37/applets/AppletSailor/Appl_Sailor2.html



- Binomial Distribution-AMSI
https://amsi.org.au/ESA_Senior_Years/PDF/BinomialDistribution4d.pdf
- 8. Σημείωση για τις εικόνες:
Οι εικόνες παρέχονται ελεύθερα από τους συνδέσμους:
- Τυχαίος περίπατος φωτονίου:
https://sites.uni.edu/morgans/astro/course/Notes/section2/random_walk.gif
- Ανθρωπάκι νέος: <https://images.app.goo.gl/JV87R4vXPkzi6T51A>
- Ανθρωπάκι γέρος: <https://images.app.goo.gl/fZ5muWJQozdtMiop8>



Επίλυση και σύνθεση προβλημάτων

Ο σκοπός αυτής της στήλης είναι να αναδεικνύει πρακτικές και τεχνικές που ακολουθούμε για να μεταβάλουμε ένα δεδομένο πρόβλημα ή άσκηση, να το «πειράζουμε», ώστε να προκύψει κάτι που έχουμε κατά νου με βάση κάποιο σχέδιο. Σε μερικές περιπτώσεις αυτό το μεταλλαγμένο πρόβλημα πηγάζει και με αυθόρμητο τρόπο ως μία μορφή πειραματισμού.

Στη διεθνή βιβλιογραφία αυτή η πρακτική ονομάζεται **problemposing**. Στην ελληνική βιβλιογραφία την αποδίδουμε με τον όρο «**σύνθεση προβλημάτων**». Επειδή ο σκοπός της στήλης δεν είναι η διατύπωση θεωριών, θα δίνουμε παραδείγματα σύνθεσης νέων προβλημάτων βασισμένων σε κάποια που ήδη έχουν διατυπωθεί. Στην πραγματικότητα αυτή την πρακτική την ακολουθούν πολλοί δάσκαλοι των Μαθηματικών για να συνθέσουν νέα προβλήματα με στόχο π.χ. ένα τεστ ικανοτήτων των μαθητών τους, ή να διαμορφώσουν ένα «καλό» θέμα για ένα διαγώνισμα ή ακόμα να λύσουν μια προσωπική τους απορία διατυπώνοντας ή μεταβάλλοντας ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Ένας από τους πιο συνηθισμένους τρόπους «πειράγματος» προβλημάτων είναι η τροποποίηση κάποιων δεδομένων με στόχο είτε να τα μετατρέψουμε σε δυσκολότερα είτε σε ευκολότερα προβλήματα. Στα παραδείγματα που θα δίνουμε κάθε φορά στη στήλη αυτή θα είναι σχολιασμένα ώστε να φαίνεται ο σκοπός των αλλαγών.





Για τον ρόλο των αντιπαράδειγμάτων στα σχολικά βιβλία Γυμνασίου και των τάξεων Α', Β' Λυκείου

Χανού Καλλιόπη – Σένδρος Κωνσταντίνος

Τελειόφοιτοι Μαθηματικό Τμήμα Α.Π.Θ.

1. Ορισμός και είδη αντιπαράδειγμάτων

Αντιπαράδειγμα ονομάζουμε ένα παράδειγμα που χρησιμοποιείται για να ανατρέψει την καθολική ισχύ μιας υπόθεσης, ενός ισχυρισμού. Το αντιπαράδειγμα γεννιέται από πρόβλημα και δίνει απάντηση σε πρόβλημα. Δείχνει την "ικανή" συνθήκη μιας ιδιότητας την οποία θέλω να εξασφαλίσω, διότι τη θεωρώ χρήσιμη. Η διδακτική του σημασία έγκειται στο ότι αποτελεί πρόκληση για αποδόμηση των ήδη καθιερωμένων δομών στο μυαλό των μαθητών. Όσον αφορά, τα είδη των αντιπαράδειγμάτων, σύμφωνα με τις ιδιότητές τους, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν (Peled & Zaslavsky, 1997) σε τρεις βασικούς τύπους: Το ειδικό ή αριθμητικό αντιπαράδειγμα, το οποίο δε δίνει πληροφορία για τον τρόπο κατασκευής του και δεν υπάρχει κάποια ένδειξη για το πως μπορεί να αξιοποιηθεί για την κατασκευή άλλων αντιπαράδειγμάτων της ίδιας εικασίας. Για παράδειγμα η πρόταση "Αν n φυσικός πρώτος αριθμός, τότε και ο αριθμός $2n-1$ είναι πρώτος", έχει ως αντιπαράδειγμα την τιμή $n=11$. Δηλαδή, η συγκεκριμένη αριθμητική τιμή καταρρίπτει τον ισχυρισμό, αφού $2 \cdot 11 - 1 = 21$, ο οποίος δεν είναι πρώτος. Το ημι-γενικό αντιπαράδειγμα δίνει κάποιες πληροφορίες για την κατασκευή άλλων αντιπαράδειγμάτων αλλά όχι για τον τρόπο κατασκευής όλων των δυνατών κλάσεων. Ένα ημι-γενικό αντιπαράδειγμα στην εικασία «δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ίσες διαγώνιες είναι ίσα» αποτελεί η κατασκευή ορθογωνίων με ίσες διαγώνιες, οι οποίες, όμως, να σχηματίζουν μεταξύ τους διαφορετικές οξείες γωνίες. Το γενικό αντιπαράδειγμα δίνει όλες τις πληροφορίες για το λόγο που μια πρόταση είναι λανθασμένη αλλά και τον τρόπο κατασκευής ολόκληρης κλάσης αντιπαράδειγμάτων που αντίκειται στον ισχυρισμό της. Για παράδειγμα, στον ισχυρισμό «αν σε δύο τετράπλευρα οι αντίστοιχες πλευρές είναι ίσες, τότε



τα τετράπλευρα είναι ίσα» η κατασκευή τετραπλεύρων με ίσες πλευρές, αλλά άνισες γωνίες αποτελεί γενικό αντιπαράδειγμα.

2. Το αντιπαράδειγμα ως μέθοδος μαθηματικής απόδειξης

Από πλευράς εκπαίδευσης, η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας εξασκεί τους μαθητές στη λογική αιτιολόγηση, η οποία με τη σειρά της αποτελεί κύριο στόχο των περισσότερων προγραμμάτων σπουδών. Στις μεθόδους απόδειξης ανήκει και η διάψευση με αντιπαράδειγμα. Θέλοντας να διαψεύσουμε την εγκυρότητα μιας πρότασης, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα το οποίο να ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης, αλλά όχι το συμπέρασμά της. Το παράδειγμα αυτό λέγεται αντιπαράδειγμα.

3. Το αντιπαράδειγμα ως αποδεικτικό μέσο

Η έννοια του αντιπαραδείγματος ως αποδεικτικού μέσου σε λανθασμένες γενικεύσεις, είναι μια διεπιστημονική έννοια που εφαρμόζεται σε όλες τις Φυσικές και Κοινωνικές Επιστήμες, στη Λογική και στη Φιλοσοφία. Στην επιστημονική αναζήτηση που προχωρά με δοκιμές και σφάλματα, το αντιπαράδειγμα κατέχει κεντρική θέση. Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαία την εννοιολογική εισαγωγή του αντιπαραδείγματος στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Στα Μαθηματικά, το αντιπαράδειγμα κατέχει σημαντική θέση, αφού ως έννοια έχει αποδεικτική αξία. Στην πραγματικότητα, αποτελεί ουσιαστικά μια μορφή Μαθηματικής απόδειξης. Για παράδειγμα, στον ισχυρισμό: «Όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί», προτάσσεται ως αντιπαράδειγμα ότι «το 2 είναι άρτιος και είναι πρώτος αριθμός». Τότε όμως, ο ισχυρισμός αυτός καταρρίπτεται. Στην περίπτωση αυτή ο ισχυρισμός μπορεί να αναθεωρηθεί και να διατυπωθεί με τη σωστή τελικά πρόταση: «Όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι περιττοί, πλην του 2». Σχετικά με τη διαδικασία απόδειξης, ο μαθηματικός διατυπώνει μια μαθηματική εικασία και χρησιμοποιώντας ήδη αποδεδειγμένα μαθηματικά θεωρήματα ή αξιώματα και συγκεκριμένες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, επαγωγή κ.ο.κ.) προσπαθεί να δείξει την εγκυρότητα του ισχυρισμού του, αναζητώντας



ταυτόχρονα κάποιο αντιπαράδειγμα, δηλαδή ένα παράδειγμα που έρχεται σε αντίθεση με την καθολική ισχύ της πρότασής του (Πούλος, Α. 2009). Αν βρεθεί, τότε αναπροσαρμόζει την αρχική του εικασία, ώστε να βρει πεδίο εγκυρότητας και συνεχίζει τη διαδικασία μιας νέας απόδειξης και την ταυτόχρονη αναζήτηση νέων αντιπαραδειγμάτων. Αν δε βρεθεί αντιπαράδειγμα, τότε έχει αποδείξει ένα νέο θεώρημα και η διαδικασία αυτή τελειώνει με την απόδειξη του θεωρήματος. Από τα παραπάνω, διακρίνουμε τον πρωταγωνιστικό ρόλο του αντιπαραδείγματος, στη δημιουργία θεωρημάτων. Κατά τον Lakatos (1996) το αντιπαράδειγμα ανήκει στον πυρήνα της αποδεικτικής διαδικασίας, καθότι ελέγχει την αλήθεια της εικασίας και την αναπροσαρμόζει, ώστε να βρει πεδίο εγκυρότητας. Επομένως, η αξία του αντιπαραδείγματος έγκειται στο ότι υποστηρίζει τους ορισμούς και συντελεί στη δημιουργία μοντέλου εννοιών, διαδικασιών και καταστάσεων.

4. Η διδακτική σημασία των αντιπαραδειγμάτων

Το αντιπαράδειγμα έχει κεντρικό ρόλο τόσο στην ανάπτυξη των Μαθηματικών ως επιστημονικό κλάδο, όσο και στη διδασκαλία τους. Η παιδαγωγική του χρησιμότητα έγκειται στο ότι συμβάλλει ουσιαστικά βοηθώντας το μαθητή να εμπεδώσει, αλλά και να εμβαθύνει στη φύση των Μαθηματικών συλλογισμών. Αποκτά δε ιδιαίτερη διδακτική αξία, γιατί αποτελεί πρόκληση για την αναδόμηση των ήδη υπαρχόντων καθιερωμένων δομών στη σκέψη των μαθητών.

Το αντιπαράδειγμα καλλιεργεί την αμφισβήτηση, που είναι μια βασική πηγή νέων και γόνιμων ιδεών στα Μαθηματικά και κεντρίζει την ερευνητική διάθεση των μαθητών που έχουν κορεστεί από την τυποποιημένη διδασκαλία. Εκτός από μέρος της διδακτικής μεθοδολογίας, είναι και ένα εργαλείο πειραματισμού και ως τέτοιο έχει χρησιμοποιηθεί από αρκετούς ερευνητές. Ο μαθητής αντιστέκεται στο «καινούργιο». Σήμερα, που ο μαθητής ζει, αναπλάθεται και διαμορφώνεται μέσα σε ένα ταχύτατα μεταβαλλόμενο πληροφοριακό περιβάλλον, αναπτύσσοντας μεγαλύτερη αντίσταση στο



«καινούργιο», ο δάσκαλος συναντά αυξημένη δυσκολία στο να μπορέσει να κάμψει αυτή την αντίσταση.

Οι εκπαιδευτικοί, συχνά, αντιμετωπίζουν μια κατάσταση, όπου ένας μαθητής κάνει έναν ισχυρισμό που μπορεί να διαψευστεί και προκειμένου να πειστεί ο μαθητής για το λάθος του, ο εκπαιδευτικός απαιτείται να κατασκευάσει αυθόρμητα ένα δυναμικό αντιπαράδειγμα. Μέσα από τα αντιπαράδειγματα μπορεί να προκληθεί «γνωστική σύγκρουση» με ένα μαθητή, όταν δημιουργείται αντίφαση με τις προϋπάρχουσες γνώσεις του. Στην εκπαιδευτική διαδικασία επιδιώκεται η «γνωστική σύγκρουση», ώστε να αρθούν οι πιθανές παρανοήσεις των μαθητών.

Συνοψίζοντας, το αντιπαράδειγμα στη διδασκαλία ωθεί τους μαθητές να σκεφτούν, να κρίνουν και να κάνουν λογικές συνεπαγωγές, ώστε να φτάνουν σε ένα ορθό συμπέρασμα. Εντείνει την προσοχή σε κάθε λεπτομέρεια μιας πρότασης, ώστε να εκπαιδευτούν στο να ελέγχουν μια θέση, να διευρύνουν έναν ισχυρισμό, να αντιλαμβάνονται σε βάθος τις προϋποθέσεις των θεωρημάτων και να ανακαλύπτουν μόνοι τους τη γνώση.

5. Παράθεση αντιπαράδειγμάτων από τα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών Γυμνάσιου και Α', Β' Λυκείου

Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

1^ο αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: 'Δεν ορίζεται η ρίζα αρνητικού αριθμού', σελίδα 41

Παράθεση: Δεν ορίζουμε ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός. Για παράδειγμα η $\sqrt{-25}$ δεν έχει νόημα, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα -25 .

Σχόλιο: Το παραπάνω αντιπαράδειγμα αποτρέπει το μαθητή από το να χρησιμοποιήσει για υπόριζο αρνητικό αριθμό. Η παράθεση του συγκεκριμένου αντιπαράδειγματος είναι απαραίτητη, διότι οι μαθητές της Β' Γυμνασίου



έρχονται πρώτη φορά σε επαφή με την έννοια της τετραγωνικής ρίζας και μέσω του συγκεκριμένου αντιπαράδειγματος γίνεται ξεκάθαρο ότι δεν ορίζεται αρνητικό υπόριζο.

2^ο αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: "Δυο σχήματα με ίσες περιμέτρους δεν είναι απαραίτητα ισεμβαδικά" σελίδα 115.

Παράθεση: Στο παρακάτω σχήμα χρησιμοποιήσαμε 12 σπίρτα για να σχηματίσουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με 9 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου! Αν τοποθετήσουμε, όμως, με διαφορετικό τρόπο τα 12 αυτά σπίρτα, μπορούμε να σχηματίσουμε σχήματα με άλλο εμβαδόν. Για παράδειγμα, το παρακάτω σχήμα (σταυρός) έχει εμβαδόν ίσο με 5 τετράγωνα πλευράς ενός σπίρτου.

Σχόλιο: Το παραπάνω αντιπαράδειγμα βοηθά τους μαθητές που συγχέουν τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού επίπεδου σχήματος. Με αυτόν λοιπόν τον απλό και χειροπιαστό τρόπο (με μονάδα μέτρησης το ένα σπίρτο) γίνεται αντιληπτό από το μαθητή ότι δυο σχήματα με ίσες περιμέτρους δεν είναι απαραίτητα ισεμβαδικά.

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

3^ο αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: "Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε " $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$ " , σελίδα 21

Παράθεση: Παρατηρούμε ακόμη ότι $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$, ενώ $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ δηλαδή $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16 + 9}$

Γενικά: Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$

Σχόλιο: Το παραπάνω αντιπαράδειγμα αποτρέπει το μαθητή από το να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα του πολλαπλασιασμού $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$ στην



πρόσθεση. Η παράθεση του συγκεκριμένου αντιπαράδειγματος είναι αναγκαία για την αποφυγή συγχύσεων, αφού για πρώτη φορά οι μαθητές κάνουν πράξεις με ρίζες στη Γ' Γυμνασίου.

Προτεινόμενη προσθήκη: Θα ήταν θεμιτό να υπάρχει παράθεση της ιδιότητας του πολλαπλασιασμού με τους ίδιους αριθμούς, δηλαδή $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{144} = 12$, ώστε να βοηθήσει επιπλέον τους μαθητές να κατανοήσουν τη διαφορά ανάμεσα στις δυο περιπτώσεις.

4° αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: "Το πηλίκο των μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο", σελίδα 30

Παράθεση: $(7xy^4):(-x^3y) = \frac{7xy^4}{-x^3y} = -\frac{7y^3}{x^2}$ Παρατηρούμε ότι στο παράδειγμα το πηλίκο των μονωνύμων δεν είναι μονώνυμο.

Σχόλιο: Το παραπάνω αντιπαράδειγμα αποτρέπει το μαθητή από το να βγάλει λανθασμένο συμπέρασμα, διότι στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό μονωνύμων το αποτέλεσμα είναι πάντα μονώνυμο, ενώ στη διαίρεση κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

5° αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: "Αν α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^2 = \alpha$ δεν έχει λύση (αδύνατη)", σελίδα 91

Παράθεση: Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 16 = 0$, παρατηρούμε ότι αυτή γράφεται $x^2 = -16$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση (αδύνατη), γιατί το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν και δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με -16 .



Σχόλιο: Στόχος του παραπάνω αντιπαραδείγματος είναι να διαχωρίσει την επίλυση της εξίσωσης $x^2=a$ σε δύο περιπτώσεις, όταν το a είναι θετικός ($x = \sqrt{a}$ ή $x=-\sqrt{a}$) και όταν το a είναι αρνητικός (αδύνατη).

6^ο αντιπαραδείγμα:

Πρόταση: Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη'', σελίδα 112

Παράθεση: Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, γιατί είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε λανθασμένο συμπέρασμα. Πράγματι, αν αφαιρέσουμε ή διαιρέσουμε κατά μέλη τις ανισότητες $6 > 4$ και $3 > 1$, τότε καταλήγουμε στις ανισότητες $3 > 3$ ή $2 > 4$, που δεν ισχύουν.

Σχόλιο: Στόχος του παραπάνω αντιπαραδείγματος είναι να γίνει αντιληπτό από το μαθητή ότι σε καμία περίπτωση δεν αφαιρούμε ούτε διαιρούμε κατά μέλη ανισώσεις(αν και αυτό είναι εφικτό στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό). Ακόμα για να είναι περισσότερο οικείο και απλοϊκό το παράδειγμα χρησιμοποιήθηκαν οι φυσικοί αριθμοί 1,3,4,6 με τους οποίους είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές από το Δημοτικό.

Προτεινόμενη προσθήκη: Καλό θα ήταν, να αντιπαρατεθεί ως σχόλιο η δυνατότητα να διαιρέσουμε και τα δυο μέλη με τον ίδιο αριθμό (εφιστώντας τηνπροσοχή στην περίπτωση όπου ο αριθμός είναι αρνητικός, να γίνει αλλαγή της φοράς της ανίσωσης) ή να αφαιρέσουμε και από τα δυο μέλη τον ίδιο αριθμό για την αποφυγή συγχύσεων.

Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α' Λυκείου

7^ο αντιπαραδείγμα:

Πρόταση: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$, δεν ισχύει το αντίστροφο, σελίδα 10



Παράθεση: Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β , αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2 = 3^2$, ενώ $-3 \neq 3$.

Σχόλιο: Στόχος του παραπάνω αντιπαραδείγματος είναι να γίνει αντιληπτό ότι $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, ενώ $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ ισχύει μόνο αν $a \geq 0$ και $b \geq 0$.
8^ο αντιπαραδείγμα:

Πρόταση: $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$, μόνο αν $\gamma \neq 0$, σελίδα 46

Παράθεση: Όταν από την ισότητα $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ ή από την ισότητα $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ μεταβαίνουμε στην ισότητα $\alpha = \beta$, τότε λέμε ότι διαγράφουμε τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως, στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.

Έστω $\alpha = 1$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ \alpha \cdot \alpha &= \alpha \cdot 1 \\ \alpha^2 &= \alpha \\ \alpha^2 - 1 &= \alpha - 1 \\ (\alpha + 1)(\alpha - 1) &= (\alpha - 1) \cdot 1 \\ \alpha + 1 &= 1 \\ \alpha &= 0\end{aligned}$$

Όμως έχουμε και $\alpha = 1$, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα

$$(\alpha + 1)(\alpha - 1) = (\alpha - 1)$$

διαγράψαμε τον παράγοντα $(\alpha - 1)$ ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Σχόλιο: Στόχος του παραπάνω αντιπαραδείγματος είναι να γίνει αντιληπτό από το μαθητή ότι πρέπει πάντα σε μια ισότητα που θέλουμε να διαγράψουμε τον κοινό στα δύο μέλη παράγοντα να ελέγχουμε πρώτα αν είναι διάφορος του μηδενός, μιας και διαίρεση με το μηδέν δεν ορίζεται.



9^ο αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$, δεν ισχύει το αντίστροφο, σελίδα 47

Παράθεση: Ενώ είναι φανερό ότι, αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$, δεν ισχύει το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα είναι $(-2)^2 = 2^2$, αλλά $-2 \neq 2$.

Σχόλιο: Στόχος του παραπάνω αντιπαραδείγματος είναι να γίνει αντιληπτό ότι $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$ ενώ $\alpha^\nu = \beta^\nu \Rightarrow \alpha = \beta$ δεν ισχύει όπως και στο προηγούμενο αντιπαράδειγμα.

Προτεινόμενη προσθήκη: Αν και το παραπάνω αντιπαράδειγμα είναι εύστοχο, θα ήταν χρήσιμο να συμπεριληφθούν οι υποπεριπτώσεις για τον εκθέτη, δηλαδή αν είναι περιττός η ζυγός.

10^ο αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: Για $\alpha > 0$ δεν ισχύει $\alpha^2 > \alpha$, σελίδα 49

Παράθεση: Έτσι ο ισχυρισμός «για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^2 > \alpha$ » δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2 < \alpha$.

Σχόλιο: Το παραπάνω αντιπαράδειγμα δείχνει πώς μπορούμε με χρήση του αντιπαραδείγματος να απορρίψουμε ένα ισχυρισμό που υποψιαζόμαστε ότι είναι λανθασμένος. Επομένως, εισάγει την έννοια του αντιπαραδείγματος για πρώτη φορά σε σχολικό βιβλίο και προτρέπει με αυτό το χαρακτηριστικό παράδειγμα τους μαθητές να το χρησιμοποιούν.

11^ο αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: Δεν επιτρέπεται να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη, σελίδα 56 (ομοίως στο 6^ο αντιπαράδειγμα).

Παράθεση: 1^η Αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι: $10 > 6$ και $7 > 2$, αλλά $10 - 7 < 6 - 2$.

2^η Επίσης, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν



συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση. Για παράδειγμα, είναι $24 > 10$ και $6 > 2$, αλλά $\frac{24}{6} < \frac{10}{2}$ $2 < 3$

Σχόλιο: Στόχος του παραπάνω αντιπαράδειγματος είναι να γίνει αντιληπτό από το μαθητή ότι σε καμία περίπτωση δεν αφαιρούμε, ούτε διαιρούμε κατά μέλη ανισώσεις. Στο παρόν αντιπαράδειγμα τονίζεται για δεύτερη φορά στους μαθητές (για πρώτη φορά στη Γ' Γυμνασίου), καθώς αποτελεί συχνό λάθος η αφαίρεση ή η διαίρεση κατά μέλη ανισώσεων.

Άλγεβρα γενικής παιδείας Β' Λυκείου

12^ο αντιπαράδειγμα:

Πρόταση: Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με $\log x$, όπου $0 < x < 1$, τότε η φορά αλλάζει διότι $\log x < 0$, σελίδα 184

Παράθεση: Από την ανισότητα $2 > 1$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 2 \log 0,5 &> 1 \log 0,5 \\ \log 0,52 &> \log 0,5 \\ \log 0,25 &> \log 0,5 \\ 0,25 &> 0,5, \text{ αλλά } 0,5 > 0,25 \end{aligned}$$

Σχόλιο: Το παραπάνω αντιπαράδειγμα αν και τίθεται στους μαθητές με τη μορφή ερώτησης (Να βρεθεί το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς). Στην ουσία αποτελεί αντιπαράδειγμα ώστε οι μαθητές να μη ξεχνούν την αλλαγή φοράς όταν πολλαπλασιάζουν και τα δυο μέλη μιας ανίσωσης με $\log x$, όπου $0 < x < 1$.

Προτεινόμενη προσθήκη: Επιπροσθέτως, προτείνεται να περιληφθεί το εξής παράδειγμα $\log 0,1 = \log 10 - 1 = -1 < 0$.

6. Βιβλιογραφικές αναφορές:

- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ., Σβέρκος Α., Αδαμόπουλος Α. και Δαμιανού Χ., (έκδοση 2013). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α' Λυκείου*. Εκδότης: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος.



- Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. και Σβέρκος Α., (έκδοση 2013). *Άλγεβρα γενικής παιδείας Β' Λυκείου*. Εκδότης: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος.
- Αργυράκης Δ., Βουργάνας Ρ., Μεντής Κ., Τσικοπούλου Σ. Χρυσοβέργης Μ., (έκδοση 2013). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. Εκδότης: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος.
- Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ. και Ρεκούμης Κ., (έκδοση 2013). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Εκδότης: Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων Διόφαντος.
- Lakatos Imre, (1996). *Αποδείξεις και ανασκευές*. Εκδόσεις Τροχαλία.
- Πούλος Α., (2009). *Εικασίες και αντιπαραδείγματα για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών στην τάξη και τον διαγωνισμό του Α.Σ.Ε.Π.* Εκδόσεις Μαυρίδη.
- Peled, I. & Zaslavsky, O, (1997) Counter - Examples that (only) Prove and Counterexamples that (also) Explain. *FOCUS on Learning Problems in Mathematics*, Vol. 19, 3, pp. 49-61



Μαθηματικών όρων και συμβόλων «επίσκεψις»



Είναι πολύ ενδιαφέρον, όχι μόνο από μαθηματικής άποψης, αλλά και από γλωσσολογικής, να γνωρίζουμε το πλάτος και το βάθος που ορίζουν και σηματοδοτούν οι λέξεις που χρησιμοποιούμε στα σχολικά Μαθηματικά.

Η γνώση της σημασιολογικής έκτασης λέξεων και συμβόλων μας βοηθά να τα χειριζόμαστε σωστά, να κατανοούμε καλύτερα τη σημασία τους στο κείμενο και η ανάγνωσή του ίδιου του κειμένου να γίνει αποτελεσματικότερη.

Αυτή η αντίληψη αποτυπώνεται με σαφήνεια στο γνωμικό του κυνικού φιλοσόφου της Αρχαίας Αθήνας, του Αντισθένη που σώθηκε μέχρι σήμερα:

«ἀρχή παιδεύσεως ἢ τῶν ὀνομάτων ἐπίσκεψις» *

Θεωρούμε ότι λέξεις όπως: υποτείνουσα, περίκεντρο, ημίτονο, σκαληνό τρίγωνο, αφαίρεση, παρονομαστής και πολλές άλλες που έχουν την αφετηρία τους στην αρχαία ελληνική γλώσσα ή σε άλλες γλώσσες, έχουν ανάγκη ανάλυσης, ερμηνείας και μεταφοράς στη σημερινή νεοελληνική γλώσσα.

Στο ψηφιακό μας περιοδικό «Μελέτη» καθιερώνουμε τη στήλη με τον τίτλο: «**Μαθηματικών όρων και συμβόλων επίσκεψις**» στην οποία θα περιγράφονται μαθηματικές λέξεις ως έννοιες, ως ιστορία, ως ετυμολογία και ως εργαλεία. Επίσης, η ιστορική καταγωγή των μαθηματικών συμβόλων θα βρίσκει μια θέση στη στήλη αυτή.

* Αντισθένης. Αρχαία Κείμενα: TLG. Fragmentavaria 38.8 to 38.9



Η υποτείνουσα

Από τον Όμηρο ως τον Ευκλείδη

Κώστας Δόρτσιος

1. Γενικά

Η λέξη «υποτείνουσα» είναι μια λέξη πολύ γνωστή στους μαθητές, ακόμα κι από τα χρόνια της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Είναι μια λέξη που την χρησιμοποιούμε σήμερα, όσες φορές αναφερόμαστε στο ορθογώνιο τρίγωνο, και επομένως αξίζει να αναζητήσουμε την ακριβή της εννοιολογική σημασία καθώς και την ετυμολογία της.

Έχοντας ως δεδομένο ότι, όσο καλύτερα γνωρίζουμε την αφετηρία μιας λέξης, τόσο καλύτερα κατανοούμε την έκταση και το βάθος της του νοήματός της, στο άρθρο αυτό θα αναζητήσουμε τη διαδρομή της «υποτείνουσας» από τον Όμηρο μέχρι τον Ευκλείδη.

Θα αναζητήσουμε τα συνθετικά της στοιχεία, την ανάλυση και τη σύνθεση των στοιχείων αυτών και τον τρόπο με τον οποίο η λέξη αυτή έγινε αναπόσπαστο λεκτικό στοιχείο των σημερινών ανθρώπων όχι μόνο στη χώρα μας αλλά σχεδόν σε ολόκληρο τον κόσμο.

2. Η λέξη «υποτείνουσα» σε διάφορα λεξικά

1α) Η υποτείνουσα ως ουσιαστικό

Αναζητώντας τη σημασία και την ερμηνεία της λέξης αυτής σε λεξικά που βρίσκουμε εύκολα στον ψηφιακό χώρο διαβάζουμε:

«υποτείνουσα η [ipotinusa] 027: (μαθημ.) η πλευρά του ορθογώνιου τριγώνου που είναι απέναντι από την ορθή γωνία. (I)

[λόγ.<αρχ. ὑποτείνουσα]»¹

¹ <http://www.greek-language.gr>



Αλλά και σε άλλα σημερινά λεξικά έντυπης μορφής, για παράδειγμα στο Ελληνικό Λεξικό Τεγόπουλου–Φυτράκη, για τη λέξη αυτή διαβάζουμε:

«υποτείνουσα (η) ουσ.[αρχ. ὑποτείνουσα, θηλ. μτχ. του ὑποτείνω] (γεωμ.) η απέναντι της ορθής γωνίας πλευρά ορθογωνίου τριγώνου. **(II)**

Από τις δυο αυτές ερμηνείες γίνεται αρχικά αντιληπτό ότι η λέξη αυτή δηλώνει στη γλώσσα των μαθηματικών και ιδιαίτερα της γεωμετρίας την πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου η οποία βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία.

Όμως μετά από πιο προσεκτική ανάγνωση, ιδιαίτερα στην ερμηνεία που δίνει το λεξικό των Τεγόπουλου–Φυτράκη, μαθαίνουμε ότι η λέξη αυτή είναι ένα **ουσιαστικό**, δηλαδή ένα από τα διάφορα μέρη του λόγου της ελληνικής γλώσσας, και μάλιστα **γένους θηλυκού**. Για το λόγο αυτό η λέξη αυτή εμφανίζεται στα λεξικά αυτά ως ανεξάρτητο λήμμα.

1β) Η υποτείνουσα ως μετοχή

Από τον ορισμό αυτό **(II)** του Λεξικού Τεγόπουλου – Φυτράκη, μέσα από συντομογραφίες διαβάζουμε ότι η λέξη **ὑποτείνουσα**, γραμμένη με δασεία, ξεκινάει από την αρχαία ελληνική γλώσσα και μάλιστα από τη **μετοχή** θηλυκού γένους του ρήματος **ὑποτείνω**.

Για το λόγο αυτό, αν αναζητήσουμε τη λέξη αυτή στο μεγάλο λεξικό της ελληνικής γλώσσας των Henry G. Liddell – Robert Scott, τότε δεν θα τη βρούμε σε ανεξάρτητο λήμμα, αλλά ως μια αναφορά των συγγραφέων αυτών στο λήμμα που ερμηνεύει το ρήμα **«υποτείνω»**.

Στο λήμμα αυτό διαβάζουμε:

ὑποτείνω = 1) α) ἐκτείνω ὑποκάτω, θέτω ὑποκάτω.

β) ὑπό τήν μείζονα γωνίαν ὑπό τήν τοῦ τριγώνου (ἐξυπακούεται ἡ γραμμή)



2) α) προτείνω ή υπισχνούμαι να...

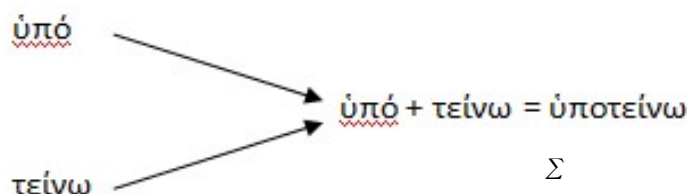
β) προβάλλω ενώπιόν τινος, προσφέρω, προτείνω.

Έτσι εύκολα συμπεραίνει κανείς ότι η λέξη αυτή στην αρχαιότητα χρησιμοποιούνταν ως μετοχή του ρήματος «υποτείνω», ενώ με την πάροδο των αιώνων και την εξέλιξη της γλώσσας, καθώς και της επιστήμης των μαθηματικών κατέληξε να θεωρείται ως ουσιαστικό με αυτοτελές πλέον περιεχόμενο και μονοσήμαντη ερμηνεία.

3. Τα συνθετικά της στοιχεία

Η «υποτείνουσα» ως μετοχή, σύμφωνα πάλι από το μεγάλο λεξικό της ελληνικής γλώσσας των Henry G. Liddell – Robert Scott, εμφανίζεται κατά τον πέμπτο και τέταρτο αιώνα π.Χ. κυρίως σε κείμενα του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη καθώς και διαφόρων άλλων συγγραφέων. Όμως τα συνθετικά της μέρη που είναι η πρόθεση «υπό» και το ρήμα «τείνω» είναι παλαιότερα και ανάγονται στη μεγάλη δεξαμενή της ελληνικής γλώσσας που είναι τα Ομηρικά Έπη.

Έτσι για να κατανοήσει κανείς καλύτερα το πλάτος και το βάθος της



λέξης «υποτείνουσα» θα πρέπει να δει τη σημασία των λέξεων που σιγά – σιγά και με την πάροδο των αιώνων ενώθηκαν και έπλασαν τη λέξη αυτή. Παρατηρώντας το σχήμα 1 βλέπουμε την πορεία της δημιουργίας της λέξης «υποτείνω» η οποία δομήθηκε κατά τον πέμπτο και τέταρτο αιώνα ενώ τα συνθετικά της στοιχεία «υπό» και «τείνω» ανάγονται στον Όμηρο. Η γλώσσα είναι ένα μεγάλο ποτάμι που στη διάβα του δημιουργεί, χτίζει, ανανεώνει, εγκαταλείπει, προσαρμόζεται. Κι όλα αυτά με στόχο να υπηρετήσει ανθρώπινες ανάγκες, από τις πιο απλές μέχρι και τις πλέον σύνθετες.



Η πρόθεση «ὕπό»

Η πρόθεση «ὕπό» είναι, σύμφωνα με τη γραμματική της αρχαίας ελληνικής γλώσσας, μια από τις λεγόμενες **κύριες προθέσεις** και χρησιμοποιείται άλλοτε μπροστά από άλλες λέξεις ή ακόμα όπως και στην περίπτωση που μελετάμε σε σύνθεση με άλλες λέξεις.

Για την πρόθεση αυτή μαθαίνουμε, πάλι από μεγάλο λεξικό της ελληνικής γλώσσας των Henry G. Liddell – Robert Scott, ότι όταν είναι σε σύνθεση με άλλες λέξεις δηλώνει:

- κάτι βρίσκεται από την κάτω μεριά, π.χ. ὑπόκειμαι, ὑπόβαθρον, ὑποβάλλω.
- κάποιο αντικείμενο είναι καλυμμένο ή περιβεβλημένο με κάποιο άλλο πράγμα, π.χ. ὑπάργυρος, ὑπόχρυσος.
- μια ενέργεια γίνεται ως υποταγή σε κάποιον, π.χ. ὑψηλός, όπως και η λόγια λέξη ὑπολογαγός.
- κάτι που γίνεται σιγά – σιγά, π.χ. ὑποκινώ, υποδαυλίζω.

Όπως φαίνεται η πρόθεση αυτή έχει πολλές σημασίες που δηλώνουν όχι μόνο τόπο αλλά και κάποια λεπτή επίδραση στο νόημα της δευτέρης λέξης.

Ας δούμε δυο παραδείγματα από την Ιλιάδα.

Από την πρώτη ραψωδία και στους στίχους 484-486 διαβάζουμε:

*«αὐτὰρ ἐπεὶ ῥ' ἴκοντο κατὰ στρατὸν εὐρὺν Ἀχαιῶν,
νῆα μὲν οἷ γε μέλαιναν ἐπ' ἠπείροιο ἔρυσσαν
ὑψοῦ ἐπὶ ψαμάθοις, ὑπὸ δ' ἔρματα μακρὰ τάνυσσαν·
αὐτοὶ δ' ἐσκίδναντο κατὰ κλισίας τε νέας τε»*

Δηλαδή:

«Στων Αχαιῶν το ἀπέραντο στρατόπεδο ἅμα εφθάσαν



ετράβηξαν εις την στεριά τ' ολόμαυρο καράβι

ψηλά στην άμμον **κι έβαλαν στυλώματα απο κάτω**

και στες σκηνές εσκόρπισαν εκείθε και στες πρύμνες»

(Ιλιάδα, 1^η ραψωδία, στίχ. 486 – 486. Μετάφραση Ιάκωβου Πολυλά)

Στην περίπτωση αυτή η πρόθεση «ὕπό» δηλώνει στη σημερινή γλώσσα τη λέξη «αποκάτω».

Επίσης από την πέμπτη ραψωδία και στους στίχους 251-254 βλέπουμε μια άλλη περίπτωση:

«Τὸν δ' ἄρ' **ὕπόδρα** ἰδὼν προσέφη κρατερὸς Διομήδης·

μή τι φόβον δ' ἀγόρευ', ἐπεὶ οὐδὲ σὲ πεισέμεν οἶω.

Οὐ γάρ μοι γενναῖον ἀλυσκάζοντι μάχεσθαι

οὐδὲ καταπτώσσειν· ἔτι μοι μένος ἔμπεδόν ἐστιν»

Δηλαδή:

«**Με λοξό βλέμμ'** απάντησεν ο δυνατός Διομήδης:

«Μη κάμης λόγον δια φυγὴν, ποσὼς δεν θα με πείσης.

Ὅτι δεν το 'χω φυσικό την μάχην ν' αποφεύγω

ή να δειλιάζω. Ασάλευτην έχω καρδιάν ακόμῃ»

(Ιλιάδα, 5^η ραψωδία, στίχ. 251 – 254. Μετάφραση Ιάκωβου Πολυλά)

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τη φράση «**ὕπόδρα ἰδὼν**» που δηλώνει «**με λοξό βλέμμα**».

Εξάλλου το «**ὕπόδρα**» προκύπτει από το ρήμα «**ὕποδερκομαι**» που σημαίνει «**υποβλέπω**».

**Το ρήμα «τείνω»**

Για το ρήμα αυτό, το οποίο ξεινιά και αυτό από τα ομηρικά έπη και φθάνει έτσι ακέραιο μέχρι σήμερα, έχουμε, πάλι από το μεγάλο λεξικό της ελληνικής γλώσσας των Henry G. Liddell – Robert Scott, πολλές ερμηνείες:

τείνω = τεντώνω ισχυρώς, μετά δυνάμεως, τεντώνω όσον δύναμαι.

Παράδειγμα:

Από την τέταρτη ραψωδία της Ιλιάδας και στους στίχους 124 μέχρι και 126 διαβάζουμε:

*«Αὐτὰρ ἐπεὶ δὴ κυκλοτερὲς μέγα τόξον ἔτεινε,
λίγξε βιός, νευρὴ δὲ μέγ' ἴαχεν, ἄλτο δ' οἴστος
όξυβελῆς καθ' ὄμιλον ἐπιπτέσθαι μενεαίνων»*

Δηλαδή:

*«Και όταν εις κύκλον τέντωσε το μέγα τόξο, ακούσθη
τριγμός του τόξου, της χορδής βοή κι εξετινάχθη
το βέλος ανυπόμονο να πέση μες στα πλήθη»*

(Ιλιάδα, 4^η ραψωδία, στίχ. 124 – 126. Μετάφραση Ιάκωβου Πολυλά)

- i) *τείνω = τείνω εις το έπακρον.*
- ii) *τείνω = εκτείνω, απλώνω.*

Αναφέρουμε μερικές ακόμα από τις ερμηνείες του ρήματος αυτού από το ίδιο λεξικό:

τείνω = διευθύνω, σκοπεύω(με το τόξο), τοποθετώ κατά μήκος, προτείνω,

παρουσιάζω, προσφέρω, εκτείνω σε βάθος χρόνου, εκτείνομαι

μέχρις ενός σημείου (γεωγραφικά), αγωνίζομαι, μάχομαι,



προσπαθώ, πλησιάζω.

Ακόμα μπορούμε να πούμε ότι και η λέξη «**τανύω**» είναι μια συνώνυμη λέξη γιατί κι αυτή σημαίνει «**τείνω**».

Έτσι, στους παρακάτω στίχους, βλέπουμε τον μέσο υπερσυντέλικό του ρήματος «τείνω» που έχει τη μορφή «τέταμαι».

«στὰν δὲ μεταστοιχί· σήμηνε δὲ τέρματ' Ἀχιλλεύς.

τοῖσι δ' ἀπὸ νύσσης τέτατο δρόμος· ὧκα δ' ἔπειτα

ἔκφερ' Ὀϊλιάδης· ἐπὶ δ' ὄρνυτο δῖος Ὀδυσσεὺς»

Δηλαδή:

«Τα τέρματ' ἔθεσ' ὁ Ἀχιλλεύς, κι εκείνοι αραδιασθήκαν.

***Απ' την βαλβίδα ὄρμησαν** κι ἐβγαίν' εμπρός των ἄλλων*

ὁ Αἴας και πολύ σιμά κατόπιν ὁ Ὀδυσσεάς»

(Ιλιάδα 23^η ραψωδία, στίχ. 756 – 758. Μετάφραση Ιάκωβου Πολυλά)

Από τις ανωτέρω σημασίες και ερμηνείες του ρήματος αυτού, προκύπτει και ο πλούτος που εμπεριέχεται στην ομηρική αυτή λέξη και η οποία φθάνει ακέραια μέχρι και τις ημέρες μας.

Μια ὁμορφη χρήση του ρήματος «τείνω» βρίσκουμε στην τραγωδία «Αντιγόνη» του Θηβαϊκού κύκλου του μεγάλου τραγωδού του πέμπτου π. Χ. αιώνα Σοφοκλή:

«Ἄλλ' ἄνδρα, κεῖ τις ἦ σοφός, τὸ μανθάνειν

*πόλλ' αἰσχρὸν οὐδὲν καὶ τὸ μὴ **τείνειν** ἄγαν»*

Δηλαδή:



*«Για έναν άνδρα, και σοφό, διόλου ντροπή δεν είναι
το να μαθαίνει το σχοινί να μην παρατεντώνει»*

*(Σοφοκλής, Αντιγόνη στίχ. 710 - 711. Μετάφραση Στ. Μπαζάκου -
Μαραγκουδάκη)*

4. Η εμφάνιση του ρήματος «υποτείνω» και της λέξης «υποτείνουσα»

Σύμφωνα με το Μεγάλο Λεξικό της Ελληνικής Γλώσσας των Henry G. Liddell – Robert Scott, η λέξη «υποτείνουσα» εμφανίζεται κατά τον πέμπτο αιώνα π.Χ. σε κείμενο του Πλάτωνα και αργότερα κατά τον τέταρτο αιώνα π.Χ. συναντάμε το ρήμα «υποτείνω» σε κείμενα του Αριστοτέλη. Με το ρήμα αυτό ο φιλόσοφος θέλει να δηλώσει την πλευρά εκείνη ενός τριγώνου η οποία βρίσκεται απέναντι από τη μείζονα γωνία του τριγώνου αυτού.

Η υποτείνουσα σε κείμενο του Πλάτωνα

Ο Πλάτωνας στο έργο του με τίτλο *«Τίμαιος»* ή *«Περί φύσεως»* χρησιμοποιεί τη λέξη «υποτείνουσα» με τη σημασία που και εμείς σήμερα χρησιμοποιούμε.

Το έργο αυτό είναι ίσως και το πλέον σημαντικό βιβλίο του Πλάτωνα που μιλά για τη δημιουργία του κόσμου. Ο μελετητής του πλατωνικού έργου A. E. Taylor αναφέρει ότι το έργο έχει χρονολογία δράσης το έτος 421 π.Χ. , κατά τη διάρκεια του Πελοποννησιακού Πολέμου και μάλιστα την εποχή της Νικίειας ειρήνης. Ο «Τίμαιος» είναι ένας διάλογος μεταξύ των τεσσάρων προσώπων: του Τίμαιου, του Ερμοκράτη, του Κριτία και του Σωκράτη.

Ο «Τίμαιος» είναι ένα βιβλίο πολυδιαβασμένο ανά τους αιώνες και μάλιστα κατά την περίοδο του Μεσαίωνα. Αξίζει να θυμίσουμε ότι κατά το 1510 ο μεγάλος ζωγράφος Ραφαήλ ζωγράφησε στην αίθουσα του Βατικανού το περίφημο έργο «Η σχολή των Αθηνών» με κεντρικά πρόσωπα τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη. Κατά την απεικόνιση του Ραφαήλ ο Πλάτωνας κρατά με το αριστερό του χέρι τον «Τίμαιο» ενώ ο Αριστοτέλης κρατά την «Ηθική». Για το μεγάλο ζωγράφο τα δύο αυτά έργα, ο «Τίμαιος» και η «Ηθική» (*Ηθικά*



Νικομάχεια», είναι τα πλέον αντιπροσωπευτικά έργα των δύο αυτών μεγάλων ελλήνων φιλοσόφων.

Έτσι στο «Τίμαιο» διαβάζουμε:

«ἄ ρ ξ ε ι δὴ τό τε πρῶτον εἶδος καὶ σμικρότατον συνιστάμενον,
στοιχεῖον δ' αὐτοῦ τό **τὴν ὑποτείνουσαν** τῆς ἐλάττονος
πλευρᾶς διπλασίαν ἔχον μήκει»

Δηλαδή: «Ας αρχίσουμε από το πρώτο, που έχει τα μικρότερα συστατικά στοιχεία. Βασικό του χαρακτηριστικό είναι το τρίγωνο που έχει **την υποτείνουσα** διπλάσια στο μήκος από τη μικρότερη πλευρά»

(Πλάτων, Τίμαιος, 54.d.5 –d.7, Μετάφραση: Φιλολογική ομάδα Κάκτου)

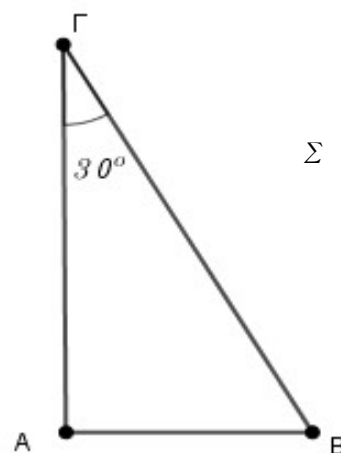


Η Σχολή των Αθηνών (λεπτομέρεια).



Το ανωτέρω χωρίο του «Τίμαιου» είναι και το μοναδικό μέσα στο έργο αυτό, στο οποίο ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί τη λέξη «υποτείνουσα».

Κατά την κοσμολογία του ο Πλάτων θεωρεί ότι ένα από τα θεμελιώδη στοιχεία από τα οποία δομείται ο κόσμος είναι και το ορθογώνιο τρίγωνο κατά το οποίο η υποτείνουσα είναι διπλάσια μιας των καθέτων. (Σχ. 2)



Όπως φαίνεται η λέξη «υποτείνουσα» στο κείμενο αυτό είναι ακριβώς έτσι, όπως την εννοούμε και σήμερα εμείς, μετά τόσους αιώνες. Είναι δηλαδή ένα **ουσιαστικό** (όχι μετοχή) το οποίο ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί για να δηλώσει την πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου η οποία **βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία** του τριγώνου.

Το ρήμα «υποτείνω» σε κείμενο του Αριστοτέλη

Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί το ρήμα «υποτείνω» στο έργο του με τίτλο **«Μετεωρολογικά»** και μάλιστα το τρίτο από τέσσερα βιβλία που απαρτίζουν το έργο αυτό. Τα «Μετεωρολογικά», σύμφωνα με τους μελετητές του αριστοτελικού έργου, γράφηκαν κατά το έτος 330 π.Χ. και κατέχουν ξεχωριστή θέση στο όλο έργο του μεγάλου φιλοσόφου γιατί σ' αυτά ο Αριστοτέλης ασχολείται με πολλούς και διάφορους τομείς, όπως η Αστρονομία, η γεωγραφία, η φυσική, η γεωμετρία, η οπτική, η γεωλογία, η σεισμολογία, η ηφαιστειολογία, η χημεία, ακόμα και η μετεωρολογία με τη σημερινή έννοια τη λέξης².

Στο έργο λοιπόν αυτό διαβάζουμε:

«ἐκκείσθω οὖν τις γραμμὴ ἡ ΔΒ,

καὶ τετμήσθω ὡς ἡ ΜΗ πρὸς ΜΚ ἢ Δ πρὸς Β. μείζων δέ

² Μετεωρολογικά, Εκδόσεις Κάκτος, Εισαγωγή, μετάφραση, σχόλια, σελ. 31.



ἡ MH τῆς KM , ἐπεὶ περ ἐπὶ τὴν μείζω γωνίαν ἢ ἀνάκλασις

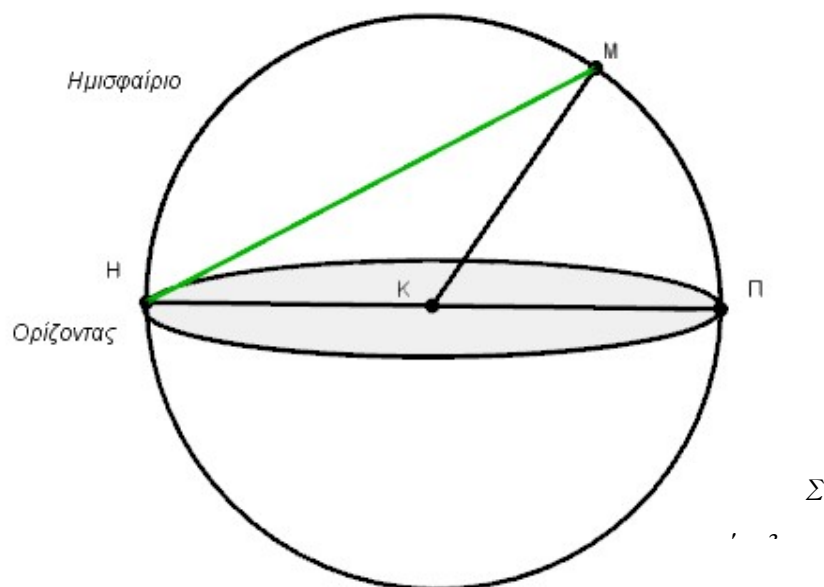
τοῦ κώνου, ὑπὸ γάρ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει

τοῦ KMH τριγώνου»

Δηλαδή:

«Θεωρούμε ευθεία ΔB και τη χωρίζουμε έτσι ώστε ο λόγος μεταξύ των MH και MK να είναι ἴσος με αὐτὸν των Δ και B . Η γραμμή MH εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν KM , ἐπειδὴ ἡ ἀνάκλαση τοῦ κώνου πραγματοποιεῖται με τὴ μεγαλύτερη γωνία, καθότι ἡ MH **βρίσκεται ἀπέναντι ἀπὸ τὴ μεγαλύτερη γωνία** τοῦ τριγώνου KMH »

(Αριστοτέλης, *Μετεωρολογικῶν Γ*, 376.α.10-14, Μετάφρ. Φιλολογικὴ ομάδα Κάντου)



Στο χωρίο αὐτό ὁ Αριστοτέλης θεωρεῖ ἓνα ημισφαῖριο (Σχ.3) το ὁποῖο εἶναι ὁ ουράνιος θόλος καθὼς καὶ τὸν ορίζοντα ἐνὸς τόπου που εἶναι ἓνας μέγιστος κύκλος τοῦ ημισφαίριου αὐτοῦ. Στὸ σημεῖο K που εἶναι τὸ κέντρο τοῦ ημισφαίριου θεωρεῖ ἓναν παρατηρητὴ, στὸ σημεῖο H τὴ θέση τοῦ Ἡλίου κατὰ

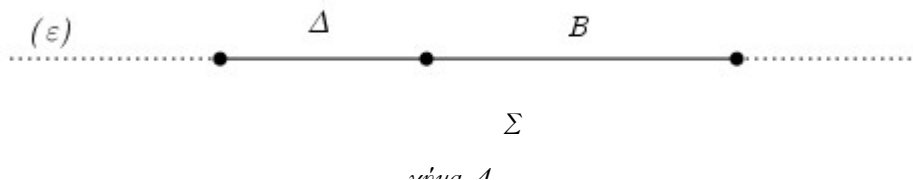


την ώρα της ανατολής ή δύσης και στο σημείο M το οποίο ονομάζει **μέλαν**, ένα σκοτεινό σύννεφο. Αξίζει στο σημείο αυτό να προσέξουμε την προχωρημένη αντίληψη του Αριστοτέλη σχετικά με τη θεώρηση του ουράνιας σφαίρας καθώς και την ικανότητά του να χρησιμοποιεί πρωταρχικά εργαλεία της σφαιρικής αστρονομίας.

Ας προσέξουμε τώρα το σύντομο αυτό κείμενο.

«Θεωρούμε ευθεία ΔB και τη χωρίζουμε έτσι ώστε ο λόγος μεταξύ των MH και MK να είναι ίσος με αυτόν των Δ και B »

Αυτό, με τη σημερινή γλώσσα της Γεωμετρίας, σημαίνει ότι θεωρεί πάνω



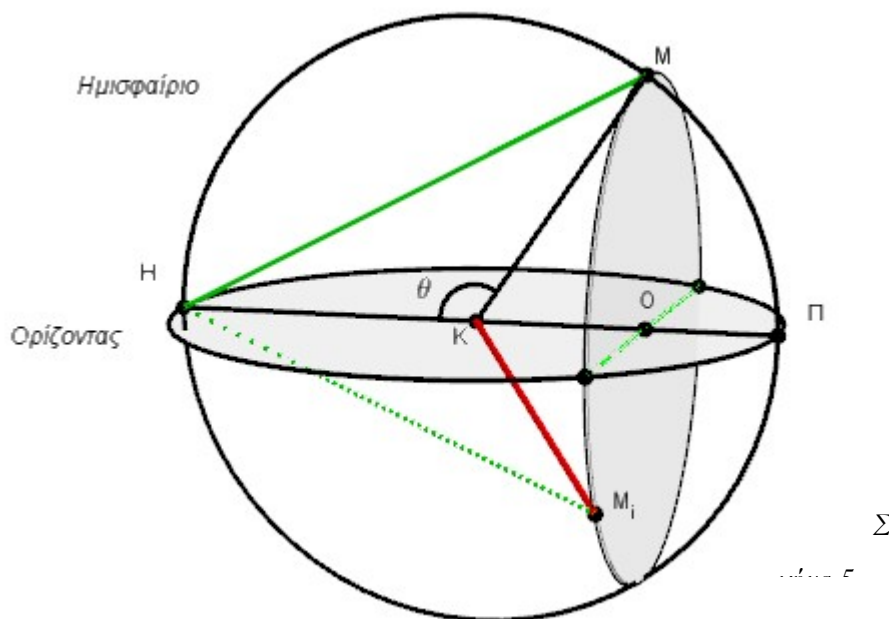
σε μια ευθεία δυο ευθύγραμμα τμήματα, τα Δ και B έτσι ώστε:

$$\frac{\Delta}{B} = \frac{MH}{MK}$$

Και η συνέχεια του κειμένου:

*«Η γραμμή MH είναι μεγαλύτερη από την KM , επειδή η ανάκλαση του κώνου πραγματοποιείται με τη μεγαλύτερη γωνία, καθότι η MH **βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου KMH** »*

τρίγωνο ΗΜΚ καθώς και το τρίγωνο



HM_iK , $i=1,2,3,\dots$ όπου το σημείο M_i κινείται στον κύκλο $C(O,OM)$ ο οποίος ανήκει σε επίπεδο κάθετο στην ευθεία HK . Έτσι οι κώνοι, όπου ο ένας είναι η ανάκλαση του άλλου, είναι οι κώνοι που έχουν βάση τον κύκλο $C(O,OM)$ και ύψη τα τμήματα HO και KO . Η αιτιολόγηση του Αριστοτέλη σχετικά με το ότι ισχύει $MH > MK$ έχει σχολιαστεί από πολλούς μελετητές του έργου αυτού και διατυπώθηκαν πολλές και ενδιαφέρουσες απόψεις.

Ας επιστρέψουμε στο θέμα μας. Ο Αριστοτέλης τελικά διατυπώνει την αιτιολογική πρόταση:

« ∴, ὑπὸ γάρ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει τοῦ ΚΜΗ τριγώνου. »

Δηλαδή:

«...καθότι η MH **βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη γωνία του**
τριγώνου KMH .»

Από την έκφραση αυτή καταλαβαίνουμε ότι το ρήμα «υποτείνει» δηλώνει την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από κάποια γωνία.

Δηλαδή: η πλευρά MH υποτείνει της γωνίας θ ,



ή πιο απλά: η πλευρά ΜΗ βρίσκεται απέναντι της γωνίας θ.

5. Η «υποτείνουσα» σε κείμενα του Ευκλείδη

Ο Ευκλείδης σε όλα τα βιβλία των Στοιχείων του χρησιμοποιεί το ρήμα «υποτείνω» σε διάφορες εγκλίσεις και χρόνους. Έτσι και τη λέξη «υποτείνουσα» τη χρησιμοποιεί ως μετοχή του ρήματος αυτού. Δηλαδή στα Στοιχεία του Ευκλείδη βλέπουμε την ίδια αντίληψη με εκείνη του Αριστοτέλη και όχι εκείνη του Πλάτωνα.

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα από διάφορα βιβλία των Στοιχείων στα οποία βλέπουμε τη χρήση των τύπων αυτών.

«Ἐάν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευράς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνία ἴσην ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν»

(Στοιχεία Ευκλείδου, βιβλίον 1, στίχ.4.1-4.6)

Δηλαδή:

*«Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τις δυο πλευρές αὐτῶν ἀντίστοιχα ἴσες καὶ ἔχουν ἀκόμα τὴν περιεχόμενη ἀπὸ τις πλευρές αὐτές γωνία ἴση, τότε θα ἔχουν καὶ τις βάσεις τῶν ἴσες καὶ τὸ ἓνα τρίγωνο θα εἶναι ἴσο με τὸ ἄλλο κι ἀκόμα οἱ ὑπόλοιπες γωνίες τῶν τριγώνων αὐτῶν **που***

βρίσκονται ἀντίστοιχα ἀπέναντι ἀπὸ τις ἴσες πλευρές

θα εἶναι κι αὐτές ἴσες»



Παρατηρούμε και στην πρόταση αυτή που είναι ένα από κριτήρια ισότητας των τριγώνων ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί το τρίτο πρόσωπο του πληθυντικού του ενεστώτα του ρήματος «υποτείνω».

Αλλά ας δούμε και την πρόταση του Πυθαγορείου Θεωρήματος που διατυπώνει ο Ευκλείδης.

«Ὡς τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τό ἀπό τῆς τήν ὀρθήν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστί τοῖς ἀπό τῶν τήν ὀρθήν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις»

(Στοιχεῖα Ευκλείδου, βιβλίον 1, στίχ.47.1- 47.4)

Δηλαδή:

«Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία είναι ίσο με τα τετράγωνα των πλευρών του τριγώνου που περιέχουν την ορθή γωνία.»

Και στην περίπτωση αυτή, η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, δηλώνεται όχι ως «υποτείνουσα», όπως στην περίπτωση του Πλάτωνα, αλλά ως:

«τῆς ὑποτείνουσας τήν ὀρθήν γωνίαν»

Δηλαδή:

«της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία.»

Την ίδια μορφή παρατηρούμε σε κάθε περίπτωση, όπου ο Ευκλείδης θέλει να δηλώσει ότι μια οποιαδήποτε πλευρά ενός τριγώνου είναι απέναντι από μια γωνία ή μια γωνία του απέναντι από μια πλευρά. Πάντα χρησιμοποιεί το ρήμα «υποτείνω» σε διάφορες εγκλίσεις, χρόνους, αριθμούς ή μετοχές του ρήματος αυτού.

Τέλος και άλλοι συγγραφείς της Γεωμετρίας, μετά τον Ευκλείδη για κάποιους αιώνες, χρησιμοποιούν τη λέξη αυτή όπως και ο Ευκλείδης.



6. Επίλογος

Σε όλη αυτή την προσπάθεια, όπου ταξιδέψαμε σε κείμενα από τον Όμηρο μέχρι τον Ευκλείδη, διαπιστώσαμε το δαιδαλώδες τοπίο μέσα στο οποίο εξελίχθηκε η λέξη «υποτείνουσα», μια λέξη που σήμερα, σχεδόν σε όλον τον κόσμο, την χρησιμοποιούν όσοι ασχολούνται και μελετούν τη γεωμετρία.

Έτσι, αν στο μεταφραστή της google επιχειρήσουμε να μεταφράσουμε την ελληνική αυτή λέξη σε μια άλλη γλώσσα της υφηλίου, θα διαπιστώσουμε ότι, εκτός από μερικές εξαιρέσεις, η λέξη των περισσότερων λαών έχει ρίζα την αρχαία αυτή ελληνική λέξη.

Παραδείγματα:

hypotenuse, Γερμανικά, Αγγλικά

ipotenusa, Ιταλικά

hipotenusa, Ισπανικά

гипотенуза, Ρώσικα

hipotenüs, Τούρκικα

.....

Εκεί που αλλάζει αυτή η εικόνα είναι στις γλώσσες της Άπω Ανατολής, και σε γειτονικές μ' αυτή χώρες.

7. Βιβλιογραφία

- Ευαγγέλου Σ. Σταμάτη, *Ευκλείδου Γεωμετρία*, ΟΕΔΒ. Αθήνα 1975
- *Στοιχεία Ευκλείδου (TLG)*
- *Μετεωρολογικά Αριστοτέλους*, εκδόσεις Κάκτος
- *Τίμαιος Πλάτωνος*, εκδόσεις Κάκτος
- *Μεγάλο Λεξικό της Ελληνικής Γλώσσας των Henry G. Liddell – Robert Scott*,
- *Ελληνικό Λεξικό Τεγόπουλου–Φυτράκη*.



Ιδιότητες των ισόπλευρων τριγώνων

Ανδρέας Πούλος

1. Πρώτη επιλογή από ένα πλήθος ιδιοτήτων αυτού του «ιδιαιτέρου» τριγώνου

Το ισόπλευρο τρίγωνο λόγω της ειδικής σχέσης ισότητας πλευρών και γωνιών του και λόγω των αξόνων συμμετρίας του έχει έντονα ίχνη στην Ιστορία του Πολιτισμού. Το συναντάμε ως σύμβολο σε όλες τις θρησκείες, στη Ζωγραφική, στη Γλυπτική, στις πλακοστρώσεις, ακόμα και στην οχρωματική τέχνη, σε εμπορικά σήματα κλπ. Φυσικά, εδώ θα αναφερθούμε σε μαθηματικές ιδιότητες αυτού του ειδικού τύπου τριγώνου, κάνοντας μια επιλογή από τον μεγάλο αριθμό τους που έχουν ανακαλυφθεί από την αρχαία ακόμη εποχή.

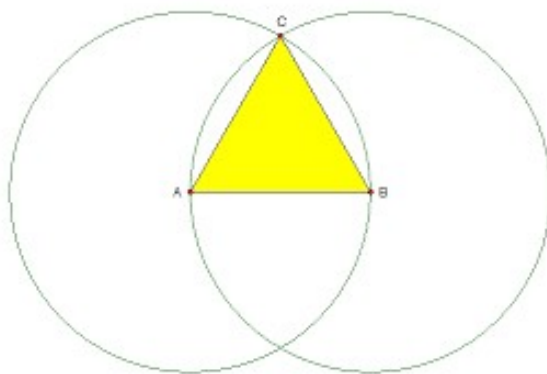
Ένα πρώτο ερώτημα είναι πώς κατασκευάζουμε με κανόνα και διαβήτη ένα ισόπλευρο τρίγωνο; Διακρίνουμε μερικές περιπτώσεις από τις πολλές που έχουν επινοηθεί κατά τη διάρκεια των αιώνων, αρκετές από τις οποίες ήταν ερωτήματα ανθρώπων που είχαν να επιλύσουν και μη μαθηματικά προβλήματα, όπως αυτά της χάραξης σχημάτων πάνω σε μαρμάρινες ή ξύλινες επιφάνειες. Τέτοια ερωτήματα – **προβλήματα κατασκευής ισόπλευρου τριγώνου** είναι:

1. Αν μας ζητηθεί τρίγωνο με πλευρά δεδομένου μήκους.
2. Αν μας ζητηθεί τρίγωνο εγγεγραμμένο σε δεδομένο κύκλο.
3. Αν μας ζητηθεί τρίγωνο περιγεγραμμένο σε δεδομένο κύκλο.
4. Αν μας ζητηθεί τρίγωνο εγγεγραμμένο σε δεδομένο τετράγωνο.
5. Αν μας ζητηθεί οι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου να ανήκουν σε τρεις δεδομένες παράλληλες ευθείες.
6. Αν μας ζητηθεί κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου πλευράς δεδομένου μήκους, αλλά με διαβήτη που δεν μεταβάλλεται το άνοιγμά του.

Για την **πρώτη περίπτωση** η κατασκευή είναι γνωστή ακόμα και από το Δημοτικό σχολείο, χωρίς φυσικά να ζητείται απόδειξη της ορθότητάς της. Υπενθυμίζουμε ότι η κατασκευή αυτή υπάρχει στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη και είναι κατανοητή από την πλειοψηφία των μαθητών. Περιγράφουμε την κατασκευή.



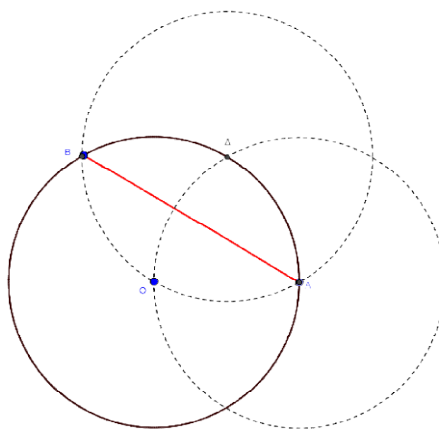
Αν δοθεί ευθύγραμμο τμήμα AB το οποίο είναι η μία πλευρά του ζητούμενου τριγώνου, τότε χαράσσουμε τους κύκλους (A, AB) και (B, BA) . Αυτοί τέμνονται σε δύο σημεία έστω τα C και C' . Το τρίγωνο ABC και το ίσο του ABC' είναι το ζητούμενο, (δείτε το παρακάτω Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Στη **δεύτερη περίπτωση** της κατασκευής ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε δεδομένο κύκλο, έχουμε δύο επιλογές.

A) Να κατασκευάσουμε επίκεντρη γωνία 120° (είναι γνωστή κατασκευή που βασίζεται στην προηγούμενη, δηλαδή στην κατασκευή τυχαίου ισόπλευρου τριγώνου), οι πλευρές της οποία τέμνουν τον δεδομένο κύκλο στα σημεία A και B . Τα σημεία αυτά είναι οι κορυφές του ζητούμενου τριγώνου. Η τρίτη κορυφή κατασκευάζεται όπως στην 1^η περίπτωση, δείτε το Σχήμα 2.

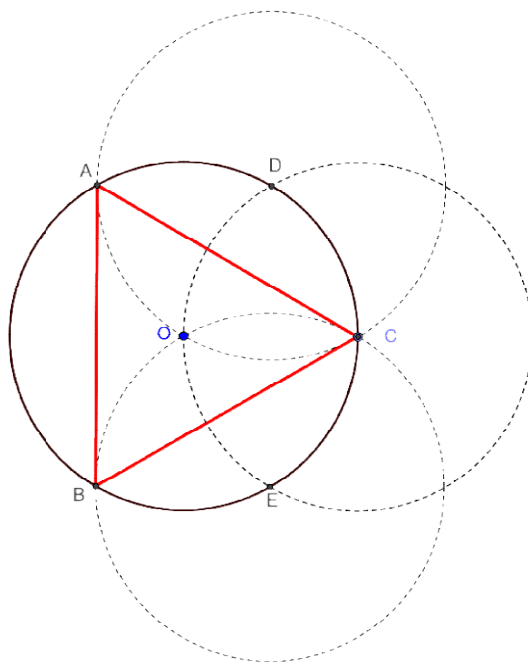


Σχήμα 2

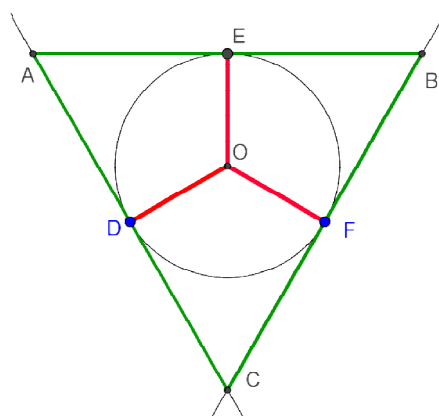


Β) Κατασκευή των τριών κορυφών του τριγώνου πάνω στον κύκλο μόνο με διαβήτη. Επιλέγουμε ένα σημείο C του κύκλου και κατασκευάζουμε τον κύκλο (C, CO) όπου O το κέντρο του δεδομένου κύκλου. Οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία D, E . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τους κύκλους (D, DC) και (E, EC) . Αυτοί τέμνουν τον αρχικό κύκλο για δεύτερη φορά στα σημεία A και B αντίστοιχα.

Το τρίγωνο με κορυφές C, A, B είναι το ζητούμενο, (Σχήμα 3).



Σχήμα 3



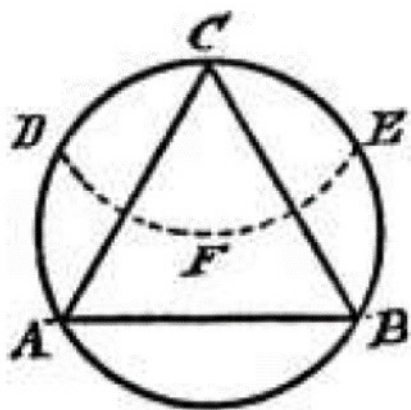
Σχήμα 4



Το Σχήμα 4 είναι μια άλλη πιο «οικονομική» κατασκευή του ζητούμενου ισόπλευρου τριγώνου ABC.

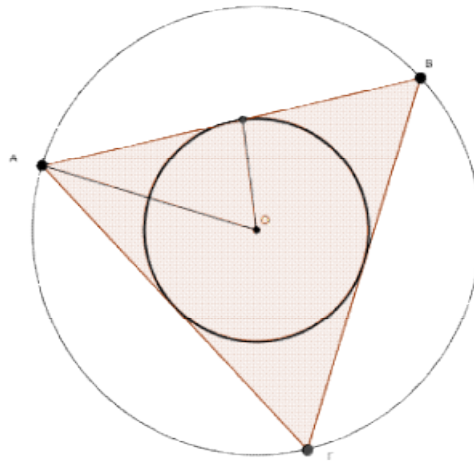
Για την **τρίτη περίπτωση**, της κατασκευής ισόπλευρου τριγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο, έχουμε δύο τουλάχιστον δύο επιλογές.

A) Κατασκευάζουμε επίκεντρες γωνίες 120° με κοινή πλευρά. Αυτές τέμνουν τον δεδομένο κύκλο έστω στα σημεία D, E, F. Από τα σημεία αυτά φέρουμε κάθετες ευθείες (γνωστή κατασκευή) προς τις EF, DF, DE. Οι ευθείες αυτές τέμνονται ανά δύο έστω στα σημεία A, B, C. Το τρίγωνο ABC είναι το ζητούμενο, Σχήμα 5.



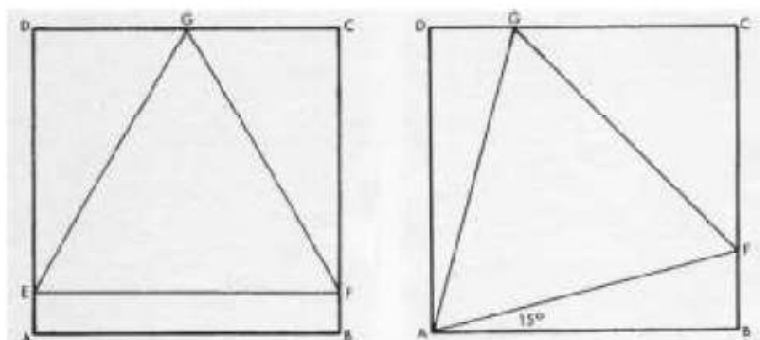
Σχήμα 5

B) Αν δοθεί κύκλος (O, R) στον οποίο πρέπει να περιγράψουμε ισόπλευρο τρίγωνο ABC, τότε κατασκευάζουμε τον κύκλο $(O, 2R)$ και στον κύκλο αυτό εγγράφουμε τρίγωνο ABC, όπως στην δεύτερη περίπτωση. Το τρίγωνο αυτό είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο (O, R) . Η ερμηνεία βασίζεται στην ιδιότητα ορθογωνίου τριγώνου με μία κάθετη πλευρά να έχει μήκος το μισό της υποτεινουσας. Το τρίγωνο αυτό έχει μία γωνία 30° , δείτε το Σχήμα 6.



Σχήμα 6

Για την **τέταρτη περίπτωση** της κατασκευής τριγώνου εγγεγραμμένου σε τετράγωνο έχουμε δύο επιλογές. Είτε να κατασκευάσουμε τρίγωνο που οι δύο κορυφές του να ανήκουν σε παράλληλες πλευρές του τετραγώνου, είτε η μία κορυφή του τριγώνου μας να είναι και κορυφή του τετραγώνου. Στο Σχήμα 7 αποτυπώνονται οι δύο διαφορετικές εκδοχές της λύσης του προβλήματος. Ο «ανήσυχος» αναγνώστης καλείται να αποδείξει ότι δεν υπάρχουν άλλες εκδοχές για τη ζητούμενη κατασκευή. Προφανώς, η αιτιολόγηση ότι τα δύο ισόπλευρα τρίγωνα που εγγεγραμμένα στο τετράγωνο είναι διαφορετικά είναι κάτι που ερμηνεύεται εύκολα.

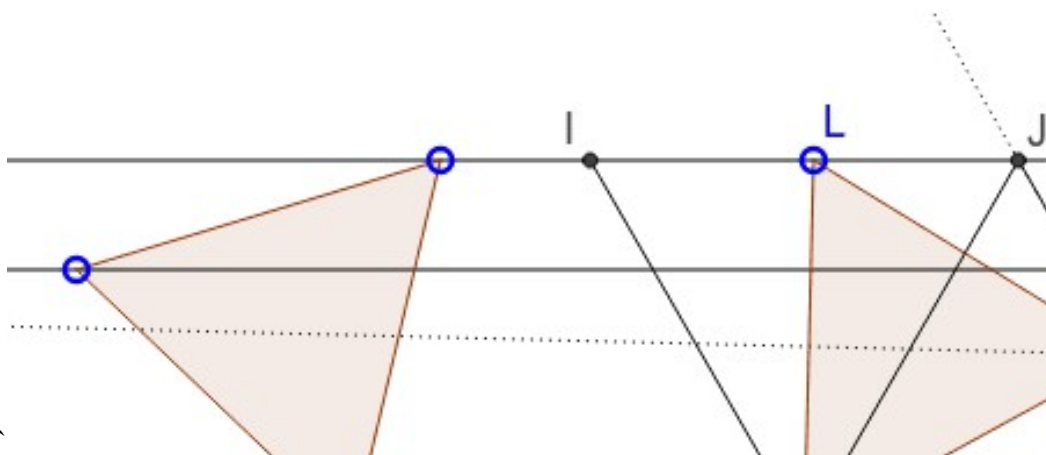


Σχήμα 7

Η **πέμπτη περίπτωση** της κατασκευής ισόπλευρου τριγώνου που οι κορυφές του ανήκουν σε τρεις δεδομένες παράλληλες ευθείες δεν φαίνεται και τόσο εύκολη. Στο Σχήμα 8 υπάρχει αριστερά μια αναπαράσταση της



κατασκευής και δεξιά φαίνεται ένα πιο σύνθετο σχήμα που υποτίθεται ότι «ερμηνεύει» αυτή την κατασκευή.



Σχήμα 8

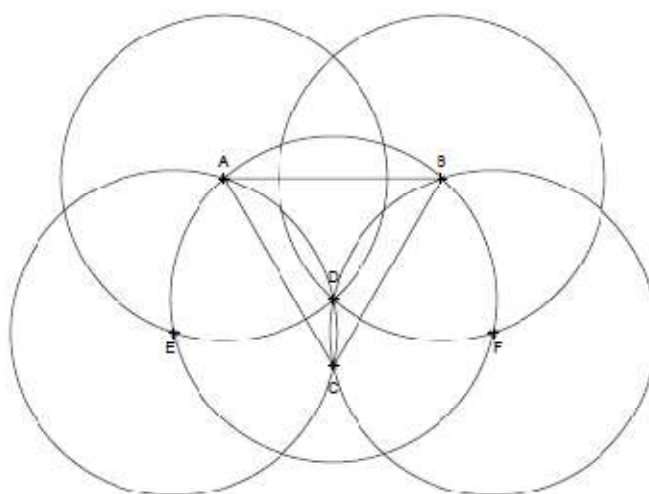
Μάλλον όμως είναι καλύτερα να επιμείνουμε περισσότερο στην ερμηνεία της εικόνας, διότι ίσως εδώ δεν ισχύει το ρητό «μια εικόνα είναι χίλιες λέξεις» !! Μάλλον επιλέγουμε μία άλλη τακτική. Προτείνουμε η κατασκευή αυτή να πραγματοποιηθεί από κάθε «ανήσυχο» αναγνώστη, εκτός αν βέβαια του είναι γνωστή. Ποιος είναι ο σκοπός αυτής της αναφοράς; Μάλλον απλός, υπάρχουν κατασκευές ισόπλευρων τριγώνων με συγκεκριμένες απαιτήσεις, οι οποίες παρουσιάζουν και ιδιαίτερη δυσκολία. Για παράδειγμα, τέτοιες είναι η κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου ώστε οι κορυφές του να ανήκουν σε δύο δεδομένους κύκλους, ή σε τρεις δεδομένους κύκλους, ή σε μία έλλειψη, (είναι αυτό πάντα εφικτό;).

Επίσης, υπερβολικά δύσκολη φαίνεται και η **έκτη περίπτωση** της κατασκευής ισόπλευρου τριγώνου με διαβήτη σταθερού ανοίγματος, αν δεν είμαστε εξοικειωμένοι με τέτοιου είδους κατασκευές. Αυτό το είδος κατασκευών ονομάζονται κατασκευές Mascheroni. Υπάρχει σχετικό θεώρημα που διατυπώνεται ως εξής: «*όποια γεωμετρική κατασκευή μπορεί να γίνει με κανόνα και διαβήτη μπορεί να γίνει μόνο με τον διαβήτη*». Αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα των**



Mohr-Mascheroni³. Πρέπει να διευκρινιστεί ότι μας ζητούν την κατασκευή τριγώνου με συγκεκριμένο μήκος πλευράς. Αλλιώς, το πρόβλημα είναι απλό, πρόκειται για την πρώτη περίπτωση που περιγράψαμε συνοπτικά. Έστω λοιπόν ότι μας ζητούν κατασκευή τριγώνου πλευράς μήκους α . Μας δίνουν έναν διαβήτη που δεν μεταβάλλεται το άνοιγμά του, αλλά αυτό δεν πρέπει να είναι ούτε πολύ «μεγάλο» σε σχήμα με το α , ούτε πολύ «μικρό». Είναι ένα άλλου τύπου πρόβλημα, η απόδειξη ότι σε αυτές τις περιπτώσεις η ζητούμενη κατασκευή είναι αδύνατη, αλλά για τον σκοπό του άρθρου μας αυτή θα την αποφύγουμε.

Έστω λοιπόν, μας δόθηκε διαβήτη με σταθερό άνοιγμα λίγο μεγαλύτερο από το μισό του μήκους της πλευράς του τριγώνου, δηλαδή το $\alpha/2$. Το Σχήμα 9 υποτίθεται ότι ερμηνεύει εικονικά την κατασκευή αυτή⁴. Μπορούμε να περιγράψουμε με ένα σύντομο κείμενο πώς κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ABC στη περίπτωση αυτή;



Σχήμα 9

Οι πέντε κύκλοι του Σχήματος 9 έχουν την ίδια ακτίνα. Οι δύο πρώτοι έχουν κέντρα τα σημεία A και B και ακτίνα όσο το άνοιγμα του σταθερού

³<https://cs.stanford.edu/~aozdemir/blog/construct-mohr-mascheroni/>

⁴Δείτε π.χ. εδώ <https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/ThreeParallelsAndEquilateralTriangle.shtml>



διαβήτη. Αυτοί τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα σημείο (το χρήσιμο για εμάς) το ονομάζουμε D.

Κατασκευάζουμε τον κύκλο (D, DA) που προφανώς διέρχεται από το B. Αυτός τέμνει τους δύο αρχικούς κύκλους στα σημεία E και F, αντίστοιχα.

Με κέντρο το E κατασκευάζουμε κύκλο με την ίδια σταθερή ακτίνα που διέρχεται από τα A και D.

Με κέντρο το F κατασκευάζουμε κύκλο με την ίδια σταθερή ακτίνα που διέρχεται από τα B και D.

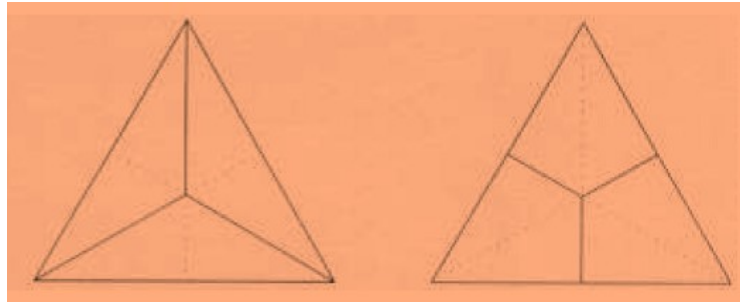
Αυτοί οι δύο κύκλοι εκτός από το σημείο D τέμνονται και σε ένα άλλο το C. Τώρα αυτό που έχουμε να αποδείξουμε είναι ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο και μάλιστα είναι αυτό που ζητούμε να κατασκευάσουμε με αυτόν τον «προβληματικό» διαβήτη. Η απόδειξη δεν είναι δύσκολη, αλλά ίσως είναι μια καλή άσκηση για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη. Για έναν δύσπιστο, ίσως αρκεί μία πιστοποίηση με το λογισμικό Geogebra. Πρέπει να πάρει δύο σταθερά σημεία A και B και έναν διαβήτη με άνοιγμα λίγο μεγαλύτερο από $AB/2$.

Ένας άλλος τύπος προβλήματος είναι αυτός που αφορά τον **χωρισμό δεδομένου ισόπλευρου τριγώνου σε ίσα κυρτά ή μη κυρτά ευθύγραμμα σχήματα**. Επειδή το ισόπλευρο τρίγωνο διαθέτει κέντρο συμμετρίας, ουσιαστικά είναι το μόνο είδος τριγώνου που διαθέτει κέντρο συμμετρίας (και τρεις άξονες συμμετρίας), φαίνεται ότι αυτό διευκολύνει πολύ τον χωρισμό του σε ίσα σχήματα.

Αν μας ζητηθεί ο **χωρισμός του σε δύο ίσα σχήματα**, αυτός γίνεται με έναν τρόπο. Κάθε ευθεία – και μόνον αυτή – που διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας του, που είναι το σημείο τομής των τριών υψών του έχει αυτή την ιδιότητα. Είναι απλό να αιτιολογήσουμε γιατί δεν υπάρχει άλλος τρόπος; Είναι μια καλή άσκηση αυτή, ή είναι πολύ εύκολη. Δοκιμάστε!



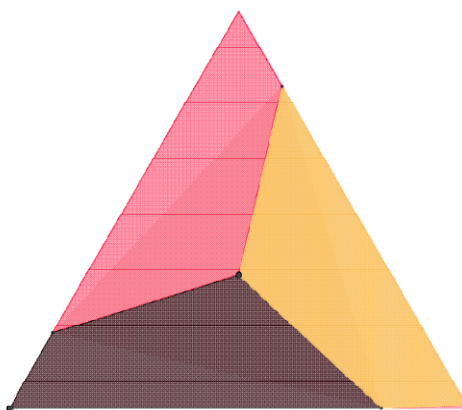
Για τον χωρισμό δεδομένου ισόπλευρου τριγώνου σε **τρία ίσα σχήματα**, ανεξάρτητα αν είναι κυρτά ή μη κυρτά, φαίνεται να υπάρχει εύκολη λύση. Στο Σχήμα 10 εκφράζονται δύο τρόποι, που σίγουρα ο καθένας μπορεί να βρει άμεσα και δώσει και μία πλήρη απόδειξη.



Σχήμα 10

Υπάρχουν όμως άλλοι τρόποι; Το προηγούμενο σχήμα μας δίνει μια ιδέα. Οι φορείς των ευθύγραμμων τμημάτων που διέρχονται από το κέντρο συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου σχηματίζουν ίσες γωνίες, οι οποίες προφανώς είναι 120° . Μήπως λοιπόν, και άλλες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο συμμετρίας του τριγώνου και σχηματίζουν γωνίες 120° μας δίνουν τρία ίσα σχήματα; Αφού μάλιστα, δεν μας ενδιαφέρει αν είναι και μη κυρτά.

Το επόμενο σχήμα - το Σχήμα 11 - δίνει μια εικονική απάντηση.



Σχήμα 11

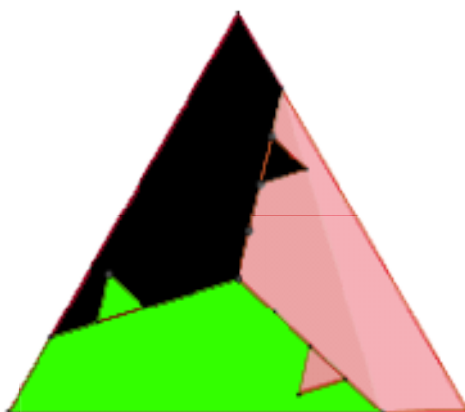
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε τριάδα ευθειών που διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου και σχηματίζουν γωνία 120° το



χωρίζει σε τρία ίσα κυρτά σχήματα; Μάλλον αυτό είναι εύκολο, αρκεί να γνωρίζουμε τι σημαίνει ίσα τετράπλευρα, κάτι που για περιεργο λόγο δεν το αναφέρουν τα σχολικά μας εγχειρίδια. Ίσως, θεωρούν ότι είναι το ίδιο εύκολο όσο και ο ορισμός των ίσων τριγώνων και τα κριτήρια των ίσων τριγώνων; Αυτό είναι ένα ερώτημα για όσους γράφουν βιβλία Γεωμετρίας. Να λοιπόν που εμφανίστηκε από ένα φαινομενικά άσχετο πρόβλημα, ένα θεωρητικό ερώτημα. Έχουμε κριτήρια για ίσα τετράπλευρα; Αν ναι, ποια είναι αυτά;

Είδαμε παραπάνω ότι ο χωρισμός ισόπλευρου τριγώνου σε τρία ίσα κυρτά σχήματα γίνεται με άπειρους τρόπους, αφού υπάρχουν άπειρες τριάδες ισογώνιων ευθειών που διέρχονται από το κέντρο συμμετρίας του. Λογικό ακούγεται όμως και το επόμενο ερώτημα.

Υπάρχουν τρία μη κυρτά σχήματα που είναι λύση του προβλήματος; Το επόμενο σχήμα, το Σχήμα 12, δείχνει ότι υπάρχουν και μάλιστα δίνει και την ιδέα για την απόδειξη ότι υπάρχουν άπειρες τριάδες μη κυρτών ίσων σχημάτων που είναι λύση στο πρόβλημα-ερώτημα που τέθηκε.

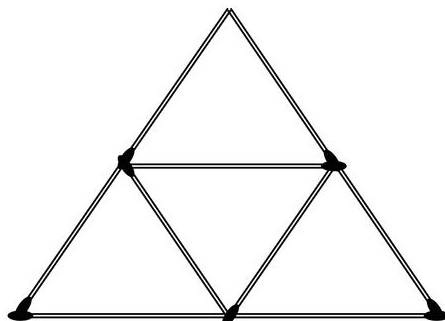


Σχήμα 12

Το επόμενο ερώτημα είναι αν μπορούμε να **χωρίσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε τέσσερα ίσα σχήματα**. Αυτό με πρώτη ματιά δεν φαίνεται εφικτό, διότι θα πρέπει τα τέσσερα σχήματα να περιέχει το καθένα και μία από τις τρεις γωνίες των 60° του ισόπλευρου τριγώνου.



Όμως, αυτές είναι τρεις και τα σχήματα είναι τέσσερα! Άρα, μοιάζει αδύνατο. Ναι, αλλά από τις μικρές τάξεις σχεδόν όλοι έχουμε δει σχήμα όπως το Σχήμα 13. Αυτό είναι και η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.



Σχήμα 13

Ενδιαφέρον έχει το ερώτημα αν υπάρχει **άλλος τρόπος χωρισμού** ενός ισόπλευρου τριγώνου σε τέσσερα ίσα σχήματα. Δεν είναι απαραίτητο να γνωρίζει ο συντάκτης του άρθρου αν υπάρχει απάντηση.

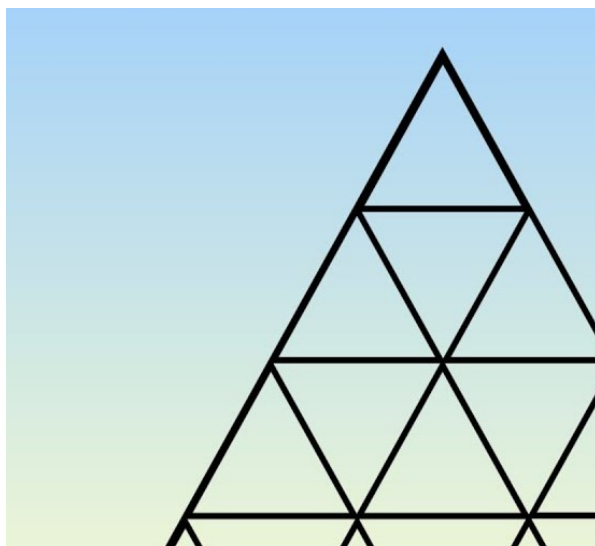
Απλά, τη θέτουμε ως ερώτημα, διότι πιθανώς κάποιος άλλος θα το έχει ήδη θέσει και ίσως το έχει απαντήσει. Αυτού του είδους τα ερωτήματα-προβληματισμοί γεννούν ο ένας τον άλλον.

Προφανώς, ο αναγνώστης αντιλαμβάνεται και νέες ερωτήσεις πριν αυτές τεθούν:

«Μπορούμε να χωρίσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε πέντε ίσα σχήματα»; «Μπορούμε να χωρίσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε έξι ίσα σχήματα»;

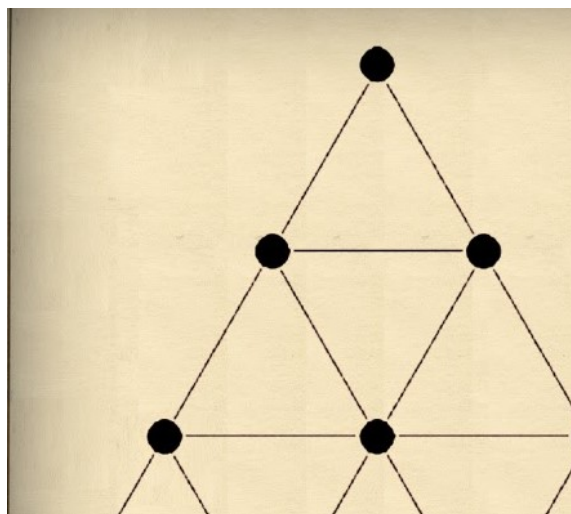
Γενικά, «μπορούμε να χωρίσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο σε έναν οποιοδήποτε αριθμό ίσων σχημάτων»;

Τα Σχήματα 14 και 15 που ακολουθούν, δίνουν απάντηση ότι για ορισμένες περιπτώσεις π.χ. σε εννέα ίσα σχήματα, σε δεκαέξι ίσα σχήματα κλπ.



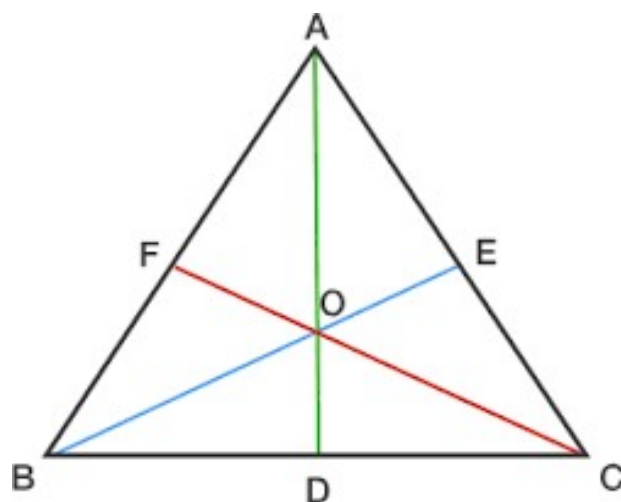
Σχήμα 14

Παρατηρούμε ότι το ερώτημα που τέθηκε σχετίζεται με τους λεγόμενους «τετράγωνους» αριθμούς, παρ' ότι αυτοί εμφανίζονται σε τρίγωνο! Άρα, είναι σίγουρο ότι ο χωρισμός ισόπλευρου τριγώνου σε 4, 9, 16, 25, 36 κλπ. ίσα σχήματα μπορεί να επιτευχθεί.



Σχήμα 15

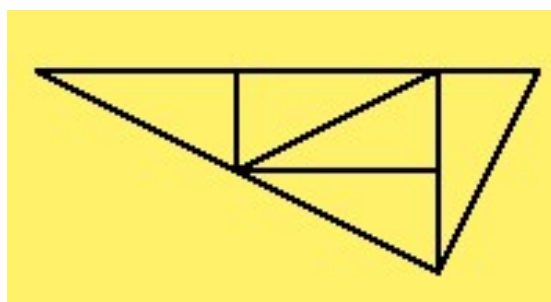
Επίσης, δεν χρειάζεται μεγάλη ενασχόληση με τα γεωμετρικά σχήματα για να απαντήσει κάποιος «αν ένα ισόπλευρο τρίγωνο χωρίζεται σε έξι ίσα σχήματα», παρ' ότι ο αριθμός έξι δεν είναι τετράγωνος. Το Σχήμα 16 δίνει μια απάντηση στο ερώτημα αυτό.



Σχήμα 16

Φαίνεται, ότι έχει ενδιαφέρον το ερώτημα, «αν ένα ισοπλευρο τρίγωνο χωρίζεται σε πέντε ή σε επτά ίσα σχήματα». Δεν έχω απάντηση σε αυτό. Ίσως, εμφανιστεί σε κάποιο επόμενο τεύχος της ΜΕΛΕΤΗΣ. Με την ευκαιρία, παρατηρώντας τα Σχήματα 13 και 16, μπορούμε να απαντήσουμε εύκολα στο ερώτημα, «γιατί είναι εφικτός ο χωρισμός ενός ισοπλευρου τριγώνου χωρίζεται σε 24 ίσα σχήματα».

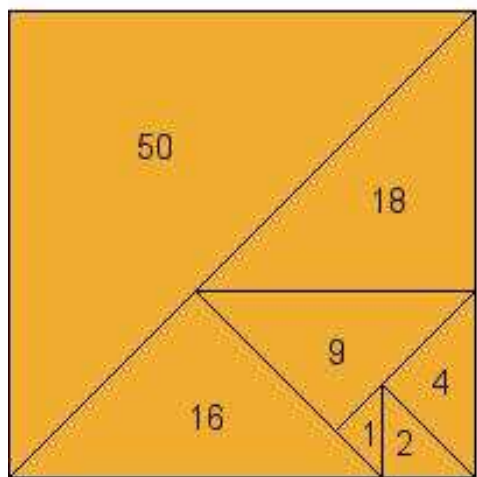
Πάντως, στο Σχήμα 17 αποτυπώνεται ο χωρισμός ενός ορθογώνιου τριγώνου με γωνίες 90° , 60° , 30° σε πέντε ίσα τρίγωνα, όμοια με το αρχικό. Αυτό σημαίνει ότι γενικά, δεν αδύνατος ο χωρισμός τριγώνου σε πέντε ίσα τρίγωνα.



Σχήμα 17

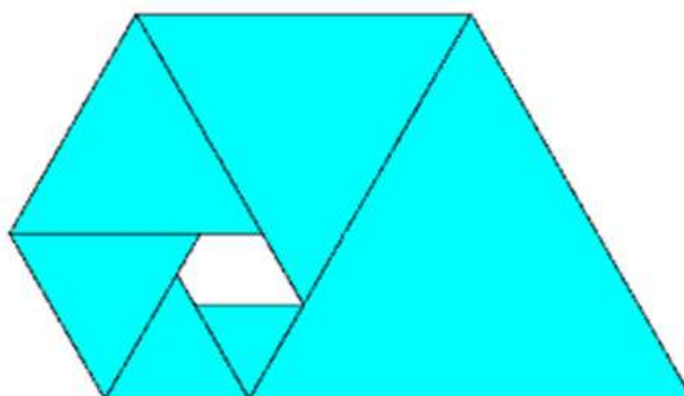
Σε προηγούμενο τεύχος της ΜΕΛΕΤΗΣ είχε παρουσιαστεί το θέμα του χωρισμού ενός δεδομένου τετραγώνου σε μικρότερα τετράγωνα, όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Το Σχήμα 18 εκφράζει έναν από τους δυνατούς χωρισμούς τετραγώνου σε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα όλα διαφορετικά

μεταξύ τους και από αυτό προκύπτει ότι μπορούμε να χωρίσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο σε ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα όλα διαφορετικά μεταξύ τους.



Σχήμα 18

Ο λόγος που τέθηκε το προηγούμενο ερώτημα με μορφή διαπίστωση είναι για διατυπωθεί αν αντίστοιχα, υπάρχει απάντηση στο ερώτημα «είναι εφικτός ο χωρισμός δεδομένου ισόπλευρου τριγώνου σε μικρότερα ισόπλευρα τρίγωνα που το καλύπτουν πλήρως και να είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους;».



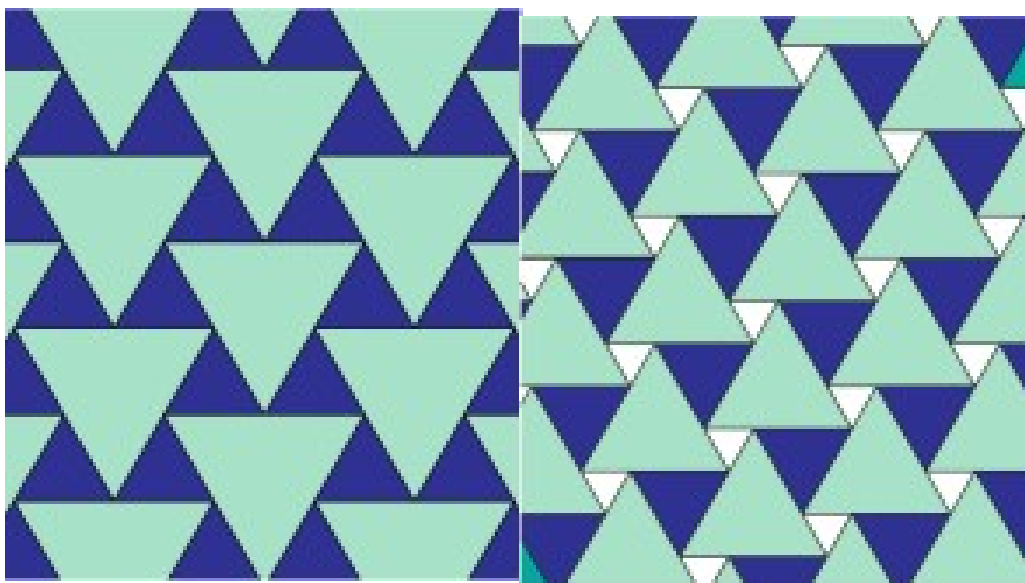
Σχήμα 19

Το Σχήμα 19 δίνει μία «ελπίδα» για έναν τέτοιο χωρισμό με διαφορετικά ισόπλευρα τρίγωνα, αν και σε αυτό φαίνεται να υπάρχει ένα «κενό». Το ερώτημα είναι αν αυτό το «κενό» καλύπτεται από άλλα ισόπλευρα τρίγωνα διαφορετικά μεταξύ τους;



Αποδεικνύεται ότι όχι μόνο ένα ισόπλευρο τρίγωνο δεν καλύπτεται από διαφορετικά ισόπλευρα τρίγωνα, αλλά ούτε και το ίδιο το επίπεδο, δείτε στη βιβλιογραφία, Aduddell, R. Etal (2017), επίσης Buchman E. (1981) κ.α. Εδώ δεν είναι περιττό να σχολιάσουμε ότι το ισόπλευρο τρίγωνο παρά τα «προσόντα του» με πολλές ιδιότητες μας «απογοητεύει». Δεν αναμέναμε μια τέτοια αδυναμία από το ισόπλευρο τρίγωνο!

Επίσης, αποδεικνύεται κάτι που εμπειρικά ίσως έχουμε διαπιστώσει, ότι μόνο δύο τρόποι υπάρχουν να καλύψουμε επίπεδο με διαφορετικά ισόπλευρα τρίγωνα. Ο πρώτος τρόπος είναι με δύο ειδών ισόπλευρα, (Σχήμα 20) και ο δεύτερος με τρία διαφορετικά ισόπλευρα τρίγωνα, (Σχήμα 21).



Σχήμα 20

Σχήμα 21

Εδώ ασχοληθήκαμε με ένα πολύ μικρό αριθμό ερωτημάτων και ιδιοτήτων που αφορούν το ισόπλευρο τρίγωνο. Ασχοληθήκαμε ουσιαστικά με ένα μέρος προβλημάτων που αφορούν κατασκευές του ισόπλευρου τριγώνου και τον χωρισμό του σε μικρότερα ίσα σχήματα. Το πλήθος των ερωτημάτων που μπορούν να τεθούν και να έχουν ένα ουσιαστικό ενδιαφέρον είναι τεράστιο. Αυτό μπορεί να αφορά ειδικά σημεία εντός και εκτός αυτού του τριγώνου, ειδικές ευθείες που σχετίζονται με αυτό, θέματα με το εμβαδόν του, θέματα με τις



γωνίες του. Θα αναρωτηθεί κάποιος, τι είδους ερώτημα-πρόβλημα μπορεί να τεθεί σε σχέση με τις γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου; Να ένα από αυτά που θεωρούμε ότι είναι ανέλπιστο. «Γιατί το ισόπλευρο τρίγωνο **είναι το μόνο τρίγωνο που μπορεί να έχει και τις πλευρές του και τις γωνίες του, τις πρώτες σε ακέραιο αριθμό μήκους και τις δεύτερες, ακέραιο αριθμό σε μέτρο γωνιών**»; Καλό ερώτημα; Νομίζουμε, ναι!

Σε επόμενο τεύχος θα περιμένουμε ένα ή δύο άρθρα με τίτλο «εμφάνιση ισόπλευρου τριγώνου από εκεί που δεν το περιμένουμε», με αναφορές στο **θεώρημα του Ναπολέοντα**, στο **θεώρημα του Morley** κλπ.

2. Βιβλιογραφία

Για την κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου με κορυφές σε τρεις παράλληλες ευθείες

<https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/ThreeParallelsAndEquilateralTriangle.shtml>

Aduddell, R. & Ascanio, M. & Deaton, A. & Mann, C. (2017). Unilateral and equitransitive tilings by equilateral triangles. *Discrete Mathematics*, V, 340, 7, p. 1669-1680.

Buchman E. The impossibility of tiling a convex region with unequal equilateral triangles, *Amer. Math. Monthly* 88 (1981), 748–753.

Conway, J. H., and Guy, R. K., "The only rational triangle", in *The Book of Numbers*, 1996, Springer-Verlag, pp. 201 and 228–239.

Hertel E. & Richter C. (2014). Tiling Convex Polygons with Congruent Equilateral Triangles. *Discrete & Computational Geometry*, V. 51, p. 753-759.

Hungerbühler N., A short elementary proof of the Mohr-Mascheroni theorem, *The American Mathematical Monthly*, vol. 101, No. 8, (1994) 784-787.



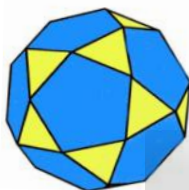
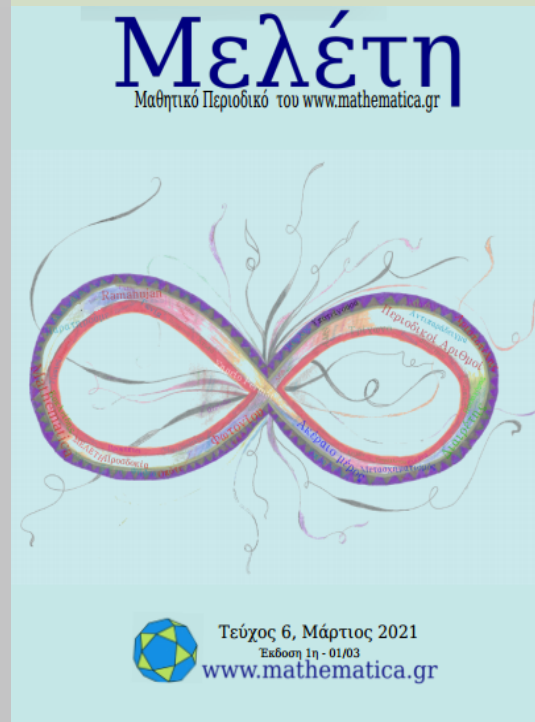
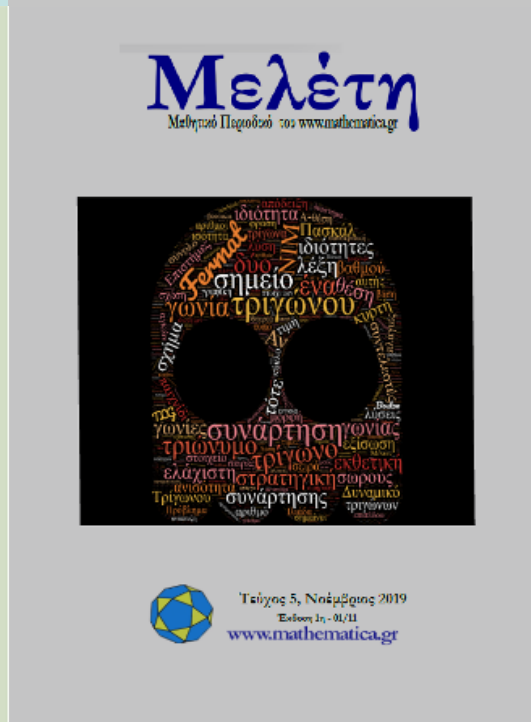
Scherer, K. The impossibility of a tessellation of the plane into equilateral triangles whose sidelengths are mutually different, one of them being minimal, *Elem. Math.* 38 (1983), no. 1, 1–4.

"Εικοσιδωδεκάεδρον" από το www.mathematica.gr

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=26&t=13085>



Όλα τα τεύχη του περιοδικού
«ΜΕΛΕΤΗ»
από το www.mathematica.gr



Μελέτη

Μαθητικό Περιοδικό του www.mathematica.gr

Περιεχόμενα έκτου τεύχους

1. Εμβαθύνοντας σε έννοιες και προβλήματα

Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού, σελ. 5

Περιοδικοί αριθμοί: Μελέτη αριθμών της μορφής $1/\rho$, σελ.26

2. Αξιοποιώντας τα λογισμικά

Γεωμετρικές ενασχολήσεις 6, σελ.39

Από το προηγούμενο τεύχος, σελ.56

3. Χρήση των Μαθηματικών στην Τεχνολογία

Ο τυχαίος περίπατος του φωτονίου, σελ. 61

4. Επίλυση και σύνθεση προβλημάτων

Για το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου και των Α' και Β' τάξεων του Λυκείου, σελ. 72

Ιδιότητες Ισοπλεύρων τριγώνων, σελ.100

6. Επίσκεψις λέξεων και συμβόλων

Η υποτείνουσα από τον Όμηρο ως τον Ευκλείδη, σελ. 84

Η εικόνα του εξωφύλλου αποτελεί προσαρμοσμένη εκδοχή της εικόνας που έχει δημιουργηθεί από μαθήτρια του Εργαστηρίου

Μαθηματικών των Πρότυπων Πειραματικών Σχολείων Ηρακλείου Κρήτης και βρίσκεται εδώ

http://mathlab.mysch.gr/teaching/other/2018-19_infinity/infinity_mask.jpg



Τεύχος 6ο - Μάρτιος 2021

1η έκδοση - 01/03/2021

www.mathematica.gr

ISSN: 2585-3775