ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «*Αν η συνάρτηση f ορίζεται στο x_0 τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την* $x = x_0$».

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Ψ

2) Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

Δηλαδή η κατακόρυφη ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *« Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ μπορεί να έχει και άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ».*

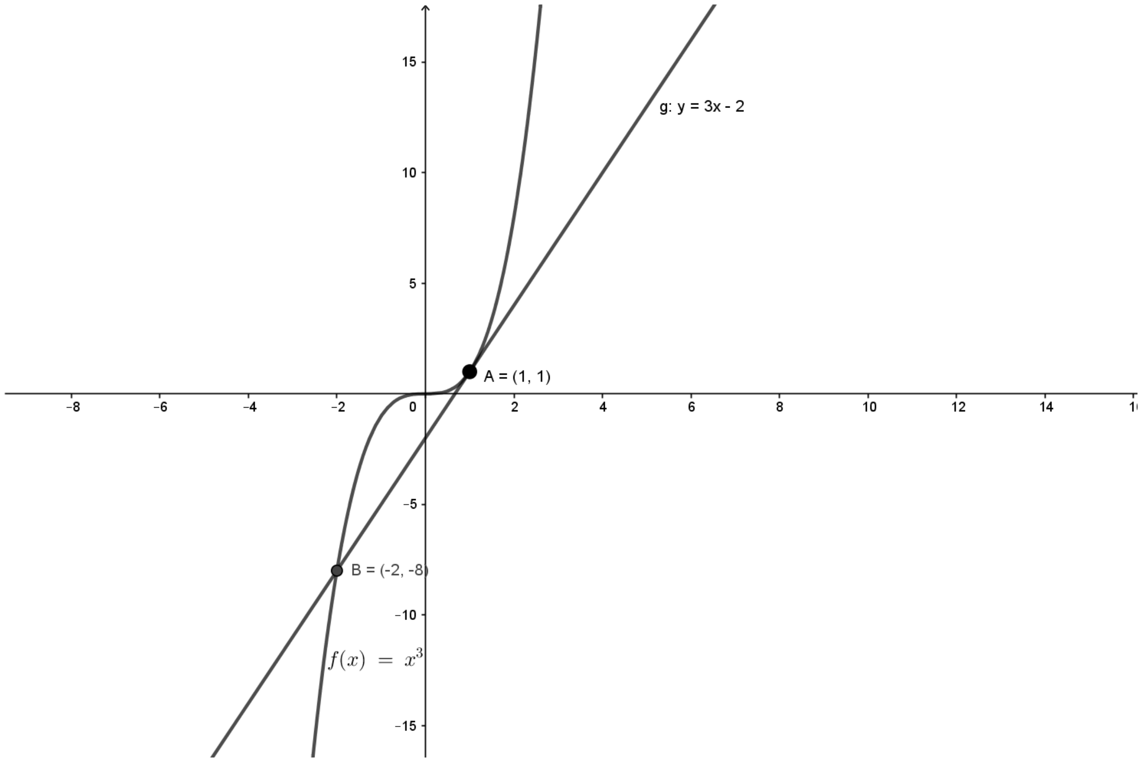
1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ και την εφαπτομένη της στο $A(1,1)$ την $y=3x-2$ η οποία τέμνει την C_f και στο σημείο $B(-2,-8)$ όπως βλέπουμε και στο σχήμα.



Άσκηση 3

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Αν η συνάρτηση* $f:\Delta\to\mathbb{R}$ *αντιστρέφεται και η* f^{-1} *είναι παραγωγίσιμη στο* $f(\Delta)$ *με* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in\Delta$ *, τότε* $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$, $x\in f(\Delta)$ ».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Πράγματι: Για κάθε $x\in f(\Delta)$ ισχύει

$$f\left((f^{-1})(x)\right)=x\Rightarrow\left[f\left((f^{-1})(x)\right)\right]'=(x)'\Rightarrow f'\left((f^{-1})(x)\right)(f^{-1})'(x)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left((f^{-1})(x)\right)},\ x\in f(\Delta)\,.$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « *Μπορεί δύο συναρτήσεις* f, g *να μην είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο* x_0 *του πεδίου ορισμού τους και η συνάρτηση* $f+g$ *να είναι παραγωγίσιμη στο* x_0 ».

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$.

Όμως η συνάρτηση $f + g$ έχει τύπο $(f+g)(x) = x$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα τότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle»*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α
2) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$, άρα $f(\alpha) \neq f(\beta)$ οπότε η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.

Άσκηση 6

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Δεν μπορεί ταυτόχρονα στο ίδιο διάστημα $[\alpha, \beta]$ να ισχύουν το θεώρημα του Rolle και το θεώρημα του Bolzano»*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Αν ισχύει το θεώρημα του Bolzano έχουμε $f(\alpha)f(\beta) < 0, (1)$ και αν ισχύει το θεώρημα του Rolle έχουμε $f(\alpha) = f(\beta)$ οπότε η (1) γίνεται $f^2(\alpha) < 0$ άτοπο.

Άσκηση 7

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση* $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $[\alpha,\beta]$ *με* $f(\alpha)=f(\beta)$ *τότε και η συνάρτηση* $g(x)=(fof)(x)$ *ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του* $Rolle$ *στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$*».*

    1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

    2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη , οπότε και η σύνθεση $(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Επίσης ισχύει $\mathrm{f}(\alpha)=\mathrm{f}(\beta)$ και επειδή $\mathrm{f}(\alpha),\mathrm{f}(\beta)\in[\alpha,\beta]\Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{f}(\alpha))=\mathrm{f}(\mathrm{f}(\beta))\Rightarrow(\mathrm{fof})(\alpha)=(\mathrm{fof})(\beta)$. Άρα η συνάρτηση $\mathrm{g}(\mathrm{x})=(\mathrm{fof})(\mathrm{x})$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Άσκηση 8

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν ισχύει* $f'(x)<0$ *και* $g'(x)>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *τότε πάντα οι γραφικές παραστάσεις των* f,g *θα έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο »*.

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Ψ

2) Οι συναρτήσεις $f(x)=-e^x, g(x)=e^x$, προφανώς δεν έχουν κοινό σημείο αλλά $f'(x)=-e^x<0,\ \ g'(x)=e^x>0$.

Άσκηση 9

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε*

$f'(x_1) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f'(x_2)$ *».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Λύση

1) Α

2) Έχουμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα άνω οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f'(x_2)$.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη έχει τρία σημεία συνευθειακά τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής».*

  1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
  2) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$ τα τρία συνευθειακά σημεία.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$, οπότε υπάρχουν τουλάχιστον, δύο σημεία $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$, $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ έτσι ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $M(\xi_1, f(\xi_1)), N(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι παράλληλες στην ευθεία (ε).

Άρα έχουμε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \lambda_\varepsilon$. Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq \Delta$,έτσι ώστε $f''(x_0) = 0$.

Άσκηση 11

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύουν ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$ και δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές».

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Δικαιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) Α

2) Αν ήταν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε θα είχαμε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$ αντίστοιχα που είναι άτοπο αφού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$.

Άσκηση 12

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- *«Αν* f *συνεχής συνάρτηση στο διάστημα* $[\alpha,\beta]$ *για την οποία ισχύει ότι* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$ *τότε κατά ανάγκη θα είναι* $f(x)=0$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$ *».*

1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

<u>Λύση</u>

1) ψ

2) Παράδειγμα: $\mathrm{f(x)=\eta\mu x}$, $x\in[0,2\pi]$

$\int_{0}^{2\pi} \eta\mu x\,dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_{0}^{2\pi} = -\sigma\upsilon\nu 2\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 0$ αλλά δεν είναι $\eta\mu x = 0$ για κάθε $x\in[0,2\pi]$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f'(x)>3,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β₁. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα το πολύ $x_0\in(-1,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)-x_0^3=0.$

Β₂. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, αν $f(\lambda^2-4)-3(\lambda^2-4)\le f(\lambda-2)-3(\lambda-2)$.

Β₃. Αν $A(2,f(2))$ και $B(3,f(3))$, αποδείξτε ότι $(AB)>\sqrt{10}$.

<u>Λύση</u>

Β₁. Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(-1,1)$ τέτοια ώστε $f(x_1)-x_1^3=0$ και $f(x_2)-x_2^3=0.$

Αν $h(x)=f(x)-x^3$, τότε ισχύει το Θ. Rolle στο $[x_1,x_2]\subseteq(-1,1)$, οπότε θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)-3\xi^2=0\Leftrightarrow f'(\xi)=3\xi^2>3\Leftrightarrow \xi^2>1\Leftrightarrow \xi<-1 ή \xi>1$.

Άτοπο, αφού $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(-1,1)$.

Άρα υπάρχει ένα το πολύ $x_0\in(-1,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)-x_0^3=0.$

Β₂. Έχουμε $f'(x)>3\Leftrightarrow f'(x)-3>0\Leftrightarrow (f(x)-3x)'>0$.

Αν $g(x)=f(x)-3x$, τότε $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Οπότε: $f(\lambda^2-4)-3(\lambda^2-4)\le f(\lambda-2)-3(\lambda-2)\Leftrightarrow g(\lambda^2-4)\le g(\lambda-2)\overset{g:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lambda^2-4\le\lambda-2\Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-2\le 0\Leftrightarrow -1\le\lambda\le 2$.

Β₃. Έχουμε: $(AB)=\sqrt{(3-2)^2+(f(3)-f(2))^2}=\sqrt{1+(f(3)-f(2))^2}$ (1)

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την f στο $[2,3]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1\in(2,3)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=f(3)-f(2)>3$, οπότε η (1) γίνεται:

$(AB)=\sqrt{1+(f(3)-f(2))^2}>\sqrt{1+3^2}=\sqrt{10}\Rightarrow (AB)>\sqrt{10}$.

Άσκηση 2

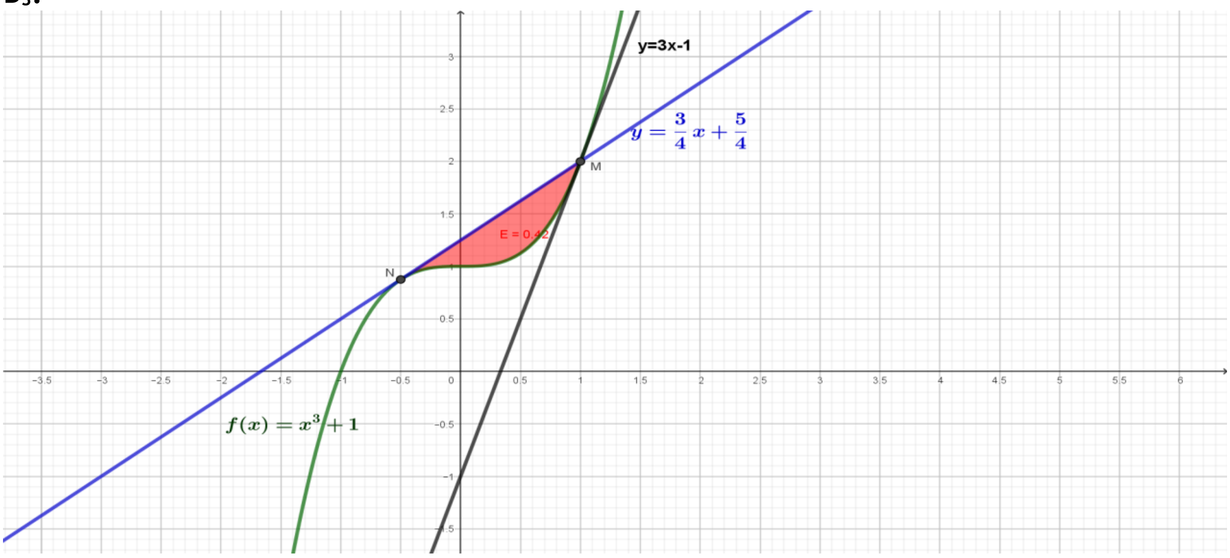
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3+1$ και $M(1,2)$ ένα σημείο της.
B$_1$. Αποδείξτε ότι από το Μ διέρχονται δύο εφαπτόμενες της C_f.
B$_2$. Βρείτε τις εξισώσεις των δύο εφαπτομένων του (**B$_1$**) ερωτήματος.
B$_3$.Αν Ν το σημείο επαφής της μιας από τις δύο εφαπτόμενες, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από αυτή και την C_f.

<u>Λύση</u>

B$_1$. Αν $\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι το σημείο επαφής της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο Μ, τότε έχει εξίσωση $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ με $f'(x_0)=3x_0^2$ και $f(x_0)=x_0^3+1$, οπότε $(\varepsilon): y-(x_0^3+1)=3x_0^2(x-x_0)$.
Αφού διέρχεται από το σημείο Μ οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν την (ε) και θα έχουμε:
$$2-(x_0^3+1)=3x_0^2(1-x_0) \Leftrightarrow (x_0-1)\left(2x_0^2-x_0-1\right)=0 \Leftrightarrow x_0=1 \text{ ή } x_0=-\frac{1}{2}.$$
Για $x_0=1$, έχουμε το $M(1,2)$ και για $x_0=-\frac{1}{2}$ έχουμε το $N(-\frac{1}{2},\frac{7}{8})$.

B$_2$. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων του B$_1$ ερωτήματος είναι:
$(\varepsilon_1): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2=3(x-1) \Leftrightarrow y=3x-1$ και
$$(\varepsilon_2): y-f(-\frac{1}{2})=f'(-\frac{1}{2})\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y-\frac{7}{8}=3\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}.$$

B$_3$.



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε: $\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \geq x^3+1$ για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2},1\right]$.

Άρα $E=\int_{-1/2}^{1}\left|f(x)-y\right|dx=\int_{-1/2}^{1}\left(y-f(x)\right)dx=\int_{-1/2}^{1}\left(\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}-x^3-1\right)dx=\int_{-1/2}^{1}\left(-x^3+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx=$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-1/2}^{1}+\frac{3}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{1}+\frac{1}{4}\left[x\right]_{-1/2}^{1}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{64}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\cancel{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{64}+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}\cancel{+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}=$$

$=\frac{1+24-6+8}{64}=\frac{27}{64}=0,42$ τ.μ.

Άσκηση 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $[1,3]$ με συνεχή την πρώτη παράγωγο και ισχύουν: $f(1)=1,\ f(2)=2$ και $f(3)=1$.

B₁. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=1$.

B₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_2 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)=-1$.

B₃. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_3 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_3)=\frac{1}{2}$.

B₄. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)<0$.

<u>Λύση</u>

B₁. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για τη συνάρτηση f στο $[1,2]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1,2)$, ώστε $f'(x_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=2-1=1$.

(Μπορούμε να εφαρμόσουμε και το Θ.Rolle στην $g(x)=f(x)-x$ στο $[1,2]$).

B₂. Όμοια, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για τη συνάρτηση f στο $[2,3]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (2,3)$, ώστε $f'(x_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=1-2=-1$.

B₃. Αφού η συνάρτηση f έχει συνεχή την πρώτη παράγωγο στο $[1,3]$, τότε η f' θα είναι συνεχής και στο $[x_1,x_2]\subseteq[1,3]$ με $f'(x_2)=-1<\frac{1}{2}<1=f'(x_1)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_3 \in (x_1,x_2)\subseteq(1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_3)=\frac{1}{2}$.

B₄. Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_1,x_2]\subseteq[1,3]$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1,x_2)\subseteq(1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-1-1}{x_2-x_1}=\frac{-2}{x_2-x_1}<0$, γιατί $1<x_1<2<x_2<3 \Rightarrow x_2-x_1>0$.

Άσκηση 4

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-x^2+3x-3$.

B₁. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης C_f, η εφαπτομένη είναι παράλληλη στη διχοτόμο του $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημορίου.

B₂. Να βρεθεί σημείο M της C_f, που να απέχει ελάχιστη απόσταση από το $O(0,0)$ και η ελάχιστη απόσταση.

B₃. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $x=1$, τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη του (B₁) ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

B₁. Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ το ζητούμενο σημείο. Τότε $f'(\alpha)=-1$ γιατί η εφαπτομένη του $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημορίου έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-x$.

Είναι $f'(x)=-2x+3$, οπότε $f'(\alpha)=-1 \Leftrightarrow -2\alpha+3=-1 \Leftrightarrow \alpha=2$.

Άρα $A(2,f(2))=(2,-1)$.

B₂. Έστω $M(x,y)=(x,f(x))$ το σημείο που απέχει ελάχιστη απόσταση από το $O(0,0)$.

Είναι $\left|\overrightarrow{MO}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-x^2+3x-3\right)^2}$.

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2+\left(-x^2+3x-3\right)^2$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Έχουμε $g'(x)=2x+2\left(-x^2+3x-3\right)\left(-2x+3\right)=\ldots=2\left(x-1\right)\left(2x^2-7x+9\right)$,

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$ γιατί $2x^2-7x+9>0$, αφού $\Delta=49-72=-23<0$ (ομόσημο του 2).

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'	-	0	+
g	↘	min	↗

Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,1\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$. Άρα η συνάρτηση g έχει ελάχιστο στο $x_0=1$, δηλαδή έχουμε $g\left(x\right)\geq g\left(1\right)=2$

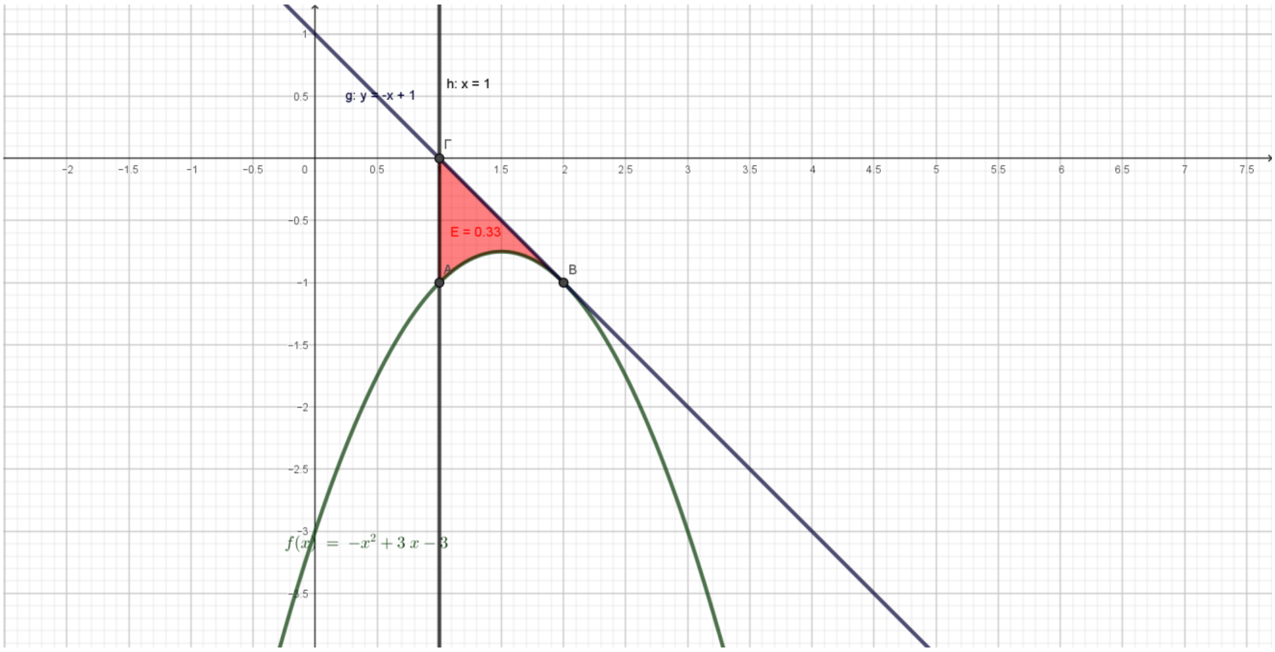
Η συνάρτηση $h\left(x\right)=\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα, επίσης έχουμε

$$g\left(x\right)\geq g\left(1\right)=2 \Rightarrow h\left(g\left(x\right)\right)\geq\sqrt{g\left(1\right)}=h\left(g(1)\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(-x^2+3x-3\right)^2}\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\overline{OM}\right|\geq\sqrt{2}$$

Άρα έχουμε ελάχιστο για $x=1 \Rightarrow y=f(1)=-1$, οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(1,-1\right)$ και η ελάχιστη απόσταση $d_{min}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

B₃. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2,-1)$ του B_1 ερωτήματος είναι:

$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+1=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+1$.



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$y \geq f(x) \Leftrightarrow -x+1 \geq -x^2+3x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \geq 0$ για κάθε $x \in [1,2]$.

Άρα $E=\int_1^2 |f(x)-y|\,dx=\int_1^2 (y-f(x))dx=\int_1^2 \left(x^2-4x+4\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+4x\right]_1^2=$

$=\frac{8}{3}-4\frac{4}{2}+4\cdot 2-\left(\frac{1}{3}-4\frac{1}{2}+4\right)=\frac{8}{3}-8+8-\frac{1}{3}+2-4=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}=0,33$ τ.μ.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f'(1) = f(0) + f(1)$.

B$_1$. Αποδείξτε ότι $f(0) > 0$.

B$_2$. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι υπάρχει σημείο $A(x_0, f(x_0))$ που η εφαπτομένη στο A διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

<u>Λύση</u>

B$_1$. Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ θα είναι και συνεχής, οπότε εφαρμόζοντας το Θ. Μ.Τ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) - f(0).$$

Είναι $\xi \in (0,1) \Leftrightarrow 0 < \xi < 1 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(1) \Leftrightarrow f'(0) < \underline{f(1) - f(0) < f'(1)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(1) - f(0) < f(1) + f(0) \Leftrightarrow 2f(0) > 0 \Leftrightarrow f(0) > 0$.

B$_2$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ για $x = y = 0$ η (ε) γίνεται:

$-f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 f'(x_0)$ (1).

Αρκεί, λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε να ισχύει η (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - xf'(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(0) = f(0) > 0$, $g(1) = f(1) - f'(1) = f(1) - f(0) - f(1) = -f(0) < 0$. Δηλαδή $g(0)g(1) < 0$, οπότε εφαρμόζοντας το Θ. Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 f'(x_0)$ που είναι η (1).

Άσκηση 6

B₁:Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των καμπυλών: $C_1: x=2y^2$ και $C_2: x^2+2y^2=2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

B₂:Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $C_1: x=2y^2$, $C_2: x^2+2y^2=2$.

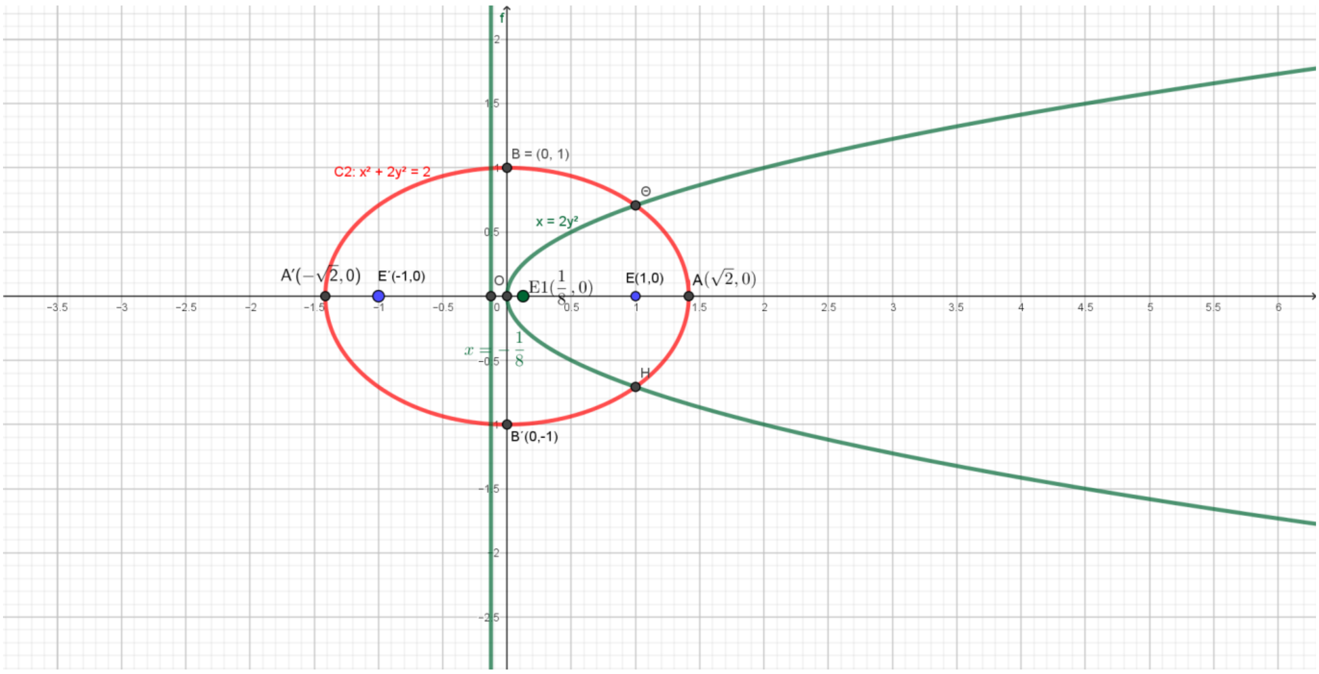
(Γνωρίζουμε ότι: $\sigma\upsilon\nu^2 x=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ **).**

<u>Λύση</u>

B₁: Η $C_1: x=2y^2 \Leftrightarrow y^2=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow y^2=2\cdot\frac{1}{4}x$ είναι μία παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $x'x$, έχει εστία το σημείο $\mathrm{E}_1\left(\frac{p}{2},0\right)=\left(\frac{1}{8},0\right)$, διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{8}$ και κορυφή την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.

Η $C_2: x^2+2y^2=2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$ είναι μία έλλειψη με

$\alpha=\sqrt{2}, \beta=1$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$ οπότε $\gamma=1$, με κέντρο συμμετρίας το $\mathrm{O}(0,0)$, κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}'(-\alpha,0)=\left(-\sqrt{2},0\right)$, $\mathrm{A}(\alpha,0)=\left(\sqrt{2},0\right)$, $\mathrm{B}'(0,-\beta)=(0,-1)$, $\mathrm{B}(0,\beta)=(0,1)$ και εστίες τα σημεία $\mathrm{E}'(-\gamma,0)=(-1,0)$, $\mathrm{E}(\gamma,0)=(1,0)$.

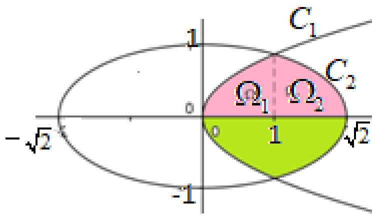


B2: Βρίσκουμε τα σημεία τομής των καμπυλών:

$$\left.\begin{array}{l} x=2y^2,\ x>0 \\ x^2+2y^2=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2y^2,\ x>0 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2y^2,\ x>0 \\ x=1 \ \ ή\ x=-2(απορρ) \end{array}\right\}$$

Άρα τα σημεία τομής των C_1, C_2 είναι τα $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Το κομμάτι της C_1 που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ είναι η συνάρτηση $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$ και το κομμάτι που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ είναι η $y=-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$



Αντίστοιχα για την C_2 που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ είναι η $y=\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}$ και το κομμάτι που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ είναι η $y=-\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}$

Έχουμε $\Omega_1=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{3}\,τ.μ$ $\Omega_2=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$

(θέτουμε $x=\sqrt{2}ημt \Rightarrow dx=\sqrt{2}συνt$ οπότε για $x=\sqrt{2}\Rightarrow 1=ημt\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$ και για $x=1\Rightarrow 1=\sqrt{2}ημt\Rightarrow ημt=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$) , οπότε έχουμε

$$\Omega_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{2-2ημ^2t}\sqrt{2}συνtdt=\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1-ημ^2t}συνtdt=\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{συν^2t}συνtdt=$$

$$\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}συν^2tdt=\sqrt{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+συν2t}{2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[t+\frac{1}{2}ημ2t\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{8}$$

Αν Ω το ζητούμενο εμβαδόν , τότε λόγω συμμετρίας των C_1 ,C_2 ως προς τον άξονα x΄x έχουμε

$$\Omega_{ολ}=2\Omega_1+2\Omega_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}(\pi-2)}{4}=\frac{\sqrt{2}(2+3\pi)}{12}\ \text{τ.μ}$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και ισχύει $f(1)+\frac{3}{2}=f(2)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=x_0$.

Γ2. Αν η f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f'(1)>2$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=2x_1$.

Γ3. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[1,2]$ και δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης C_f που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=x+2018$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=x_2$.

<u>Λύση</u>

Γ1.

Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ θα είναι και συνεχής στο $[0,2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x^2}{2}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]\subseteq[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $g'(x)=f'(x)-x$. Επίσης $g(1)=f(1)-\frac{1}{2}$ και $g(2)=f(2)-2=f(1)+\frac{3}{2}-2=f(1)-\frac{1}{2}$. Οπότε $g(1)=g(2)$. Από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-x_0=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=x_0$.

Γ2.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f'(x)-2x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Η συνάρτηση $k(x)$ είναι συνεχής και στο $[1,x_0]\subseteq[1,2]$, όπου x_0 η ρίζα του Γ1 ερωτήματος.

Είναι $k(1)=f'(1)-2>0$ από την υπόθεση και $k(x_0)=f'(x_0)-2x_0=x_0-2x_0=-x_0<0$, αφού $x_0 \in (1,2)$.

Οπότε $k(1)k(x_0)<0$. Ισχύει, λοιπόν το Θ. Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1,x_0)\subseteq(1,2)$ τέτοιο ώστε $k(x_1)=0 \Leftrightarrow f'(x_1)-2x_1=0 \Leftrightarrow f'(x_1)=2x_1$.

Γ3.

Αφού η f έχει σύνολο τιμών το $[1,2]$, θα ισχύει $1\le f(x)\le 2$, (1) για κάθε $x\in[0,2]$.

Επίσης, αφού δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης C_f που η εφαπτομένη να γίνεται παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=x+2018$, θα ισχύει $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in[0,2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,2]$.

Είναι $h(0) = f(0) > 0$, από την (1) και $h(2) = f(2) - 2 \le 0$, επίσης από την (1).
Τότε $h(0)h(2) \le 0$. Ισχύει το Θ. Bolzano για την h στο $\left[0,2\right]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in \left(0,2\right]$ τέτοιο ώστε $h(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - x_2 = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = x_2$.
Επειδή $h'(x) = f'(x) - 1 \ne 0$, τότε $h'(x) > 0$ *ή* $h'(x) < 0$ οπότε η συνάρτηση h θα είναι γνησίως μονότονη. Άρα το $x_2 \in \left(0,2\right]$ θα είναι μοναδικό.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f , όχι πολυωνυμική, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f(2)=2f(1)$ $και$ $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,2)$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$, (1) έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0\in(1,2)$.

Γ₂. Να αποδείξετε ότι η ρίζα x_0 της εξίσωσης (1) είναι μοναδική.

Γ₃. Αν $g(x)=f(x)-x$ τότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο με τετμημένη το x_0, διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Είναι:

$$xf'(x)=f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-(x)'f(x)=0\overset{x\neq 0,\,αφού\, x\in(1,2)}{\Leftrightarrow}\frac{xf'(x)-(x)'f(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ x\in[1,2]$.

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, τότε η συνάρτηση h θα είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

Επίσης $h(1)=\dfrac{f(1)}{1}=f(1)$ και $\mathrm{h}(2)=\dfrac{\mathrm{f}(2)}{2}=\dfrac{2\mathrm{f}(1)}{2}=\mathrm{f}(1)$. Επομένως $h(1)=h(2)$. Ισχύει, λοιπόν το Θ.Rolle που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(x_0)=0\Leftrightarrow\frac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)=f(x_0).$$

Άρα η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\mathrm{x}_0\in(1,2)$.

Γ₂. Έστω ότι η εξίσωση $xf'(x)=f(x)$ έχει 2 ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(1,2)$ με $\rho_1<\rho_2$.

Αν $t(x)=xf'(x)-f(x)$, τότε η συνάρτηση t είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]\subseteq[1,2]$και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2), αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, με $t'(x)=\cancel{f'(x)}+xf''(x)-\cancel{f'(x)}=xf''(x)$. Ακόμα $t(\rho_1)=t(\rho_2)=0$.

Επομένως, από το Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)\subseteq(1,2)$ τέτοιο ώστε $t'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f''(\xi)=0\Leftrightarrow f''(\xi)=0$, που είναι **άτοπο**, αφού $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(1,2)$.

Άρα η εξίσωση $\mathrm{t(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow xf'(x)=f(x)}$ δεν έχει 2 ρίζες στο $(1,2)$, οπότε η ρίζα $x_0\in(1,2)$ του Γ1 ερωτήματος είναι μοναδική.

Γ₃. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x)=f(x)-x$ στο σημείο με τετμημένη το x_0 έχει εξίσωση: $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-(f(x_0)-x_0)=(f'(x_0)-1)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=(f'(x_0)-1)x-x_0f'(x_0)+\cancel{x_0}+f(x_0)-\cancel{x_0}\Leftrightarrow y=(f'(x_0)-1)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$ (1).

Πρέπει το $\mathrm{O}(0,0)$ να την επαληθεύει, οπότε για $x=y=0$ η (1) μας δίνει:
$0=\left(f'(x_0)-1\right)\cdot 0-x_0 f'(x_0)+f(x_0)\Leftrightarrow -x_0 f'(x_0)+f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0 f'(x_0)$ που **ισχύει** σύμφωνα με το Γ1 ερώτημα.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $f(x+y)=f(x)f(y)$ για κάθε $x,y\in R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Γ1: Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Γ2: Να βρείτε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=e^x,\ x\in R$.

Γ3: Αν $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο $A(0,1)$.

Γ4: Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται, μεταξύ των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g και της ευθείας $x=1$.

<u>Λύση</u>

Γ1: Για $x=y=0$ η σχέση $f(x+y)=f(x)f(y)$ μας δίνει:
$f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)(f(0)-1)=0\Leftrightarrow f(0)=1 \acute{\eta}\, f(0)=0$ και επειδή $f(x)>0$ τότε έχουμε $f(0)=1$.

$$f'(0)=1\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=1,\ (1)$$

Έστω $x_0\in R$, τότε:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{x=h+x_0}{=}\lim_{h\to0}\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)f(x_0)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)(f(h)-1)}{h}=f(x_0)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)f'(0)\overset{(1)}{=}f(x_0).$$

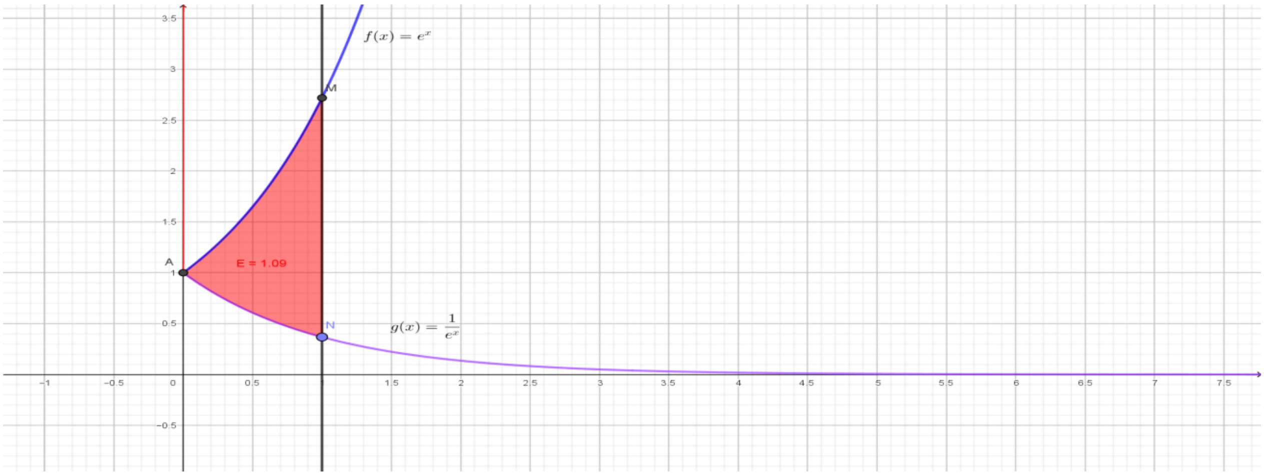
Οπότε $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$.

Γ2: Αφού $f'(x)=f(x)\overset{\varepsilon\varphi.2.6}{\Rightarrow} f(x)=ce^x,\ c\in R$. (2)
Επειδή $f(0)=1$, η (2) για $x=0$ γίνεται $f(0)=ce^0\Rightarrow 1=c$.
Άρα $f(x)=e^x,\ x\in R$.

Γ3: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$.

Προφανής ρίζα είναι η $x=0$ αφού $h(0)=\dfrac{e^0-1}{e^0}=0$.

Επίσης $h'(x)=\left[e^x-\dfrac{1}{e^x}\right]'=e^x+\dfrac{1}{e^x}>0$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική.
Αφού $f(0)=g(0)=1$ το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$.



Γ4:

Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\mathrm{E} = \int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x} \right) dx = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^{-x} dx = \left[e^x \right]_0^1 + \left[e^{-x} \right]_0^1 = e - 1 + \frac{1}{e} - 1 = e + \frac{1}{e} - 2$$

τ.μ.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-x+1,\ \ x>0$.

Γ₁. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .

Γ₂. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της $f\left(x\right)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του λ∈IR.

Γ₃. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο ακρότατο της και της ευθείας $x=\dfrac{1}{e}$

Γ₄. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(Ω), του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της ευθείας $y=-x+1$ και των ευθειών $x=\dfrac{1}{e},\ x=\lambda$ για $0<\lambda<\dfrac{1}{e}$. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}E(\Omega)$. Ποιου χωρίου το εμβαδόν παριστάνει το όριο αυτό;

<u>Λύση</u>

Γ₁.

- Η είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων
- $f\,'(x)=\dfrac{(\ln x)'x-\ln x\cdot x'}{x^2}-1=\dfrac{\dfrac{1}{x}x-\ln x}{x^2}-1=\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}$ και η οποία έχει προφανή λύση την $x_0=1$
- $f\,''(\mathrm{x})=\dfrac{(1-\ln x-x^2)'\cdot x^2-(1-\ln x-x^2)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{x}-2x\right)x^2-2x(1-\ln x-x^2)}{x^4}$

$$=\frac{-x-2x^3-2x(1-\ln x-x^2)}{x^4}=\frac{-x-2x^3-2x+2x\ln x+2x^3}{x^4}=\frac{2x\ln x-3x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$$f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\ln x-3}{x^3}=0\Leftrightarrow\ln x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow x=e\sqrt{e}$$

- $\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\ln x-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln x-x^2\right)\dfrac{1}{x^2}=\left(+\infty\right)\left(+\infty\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f'\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x-x^2}{x^2}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\ln x-x^2)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{x}-2x}{2x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\dfrac{1}{x}-2x\right)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-2\right)=-1$$

- Ασύμπτωτες : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} - x + 1\right) = (-\infty) - 0 + 1 = -\infty$, οπότε η ευθεία $x = 0$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη .

  Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\frac{\ln x}{x} - x + 1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2} - 1 + \frac{1}{x}\right) = 0 - 1 + 0$,

  αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$

  Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x) - (-x)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - x + 1 + x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right) = 0 + 1 = 1$

  αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0$

  Άρα η ευθεία $y = -x + 1$είναι πλάγια ασύμπτωτη

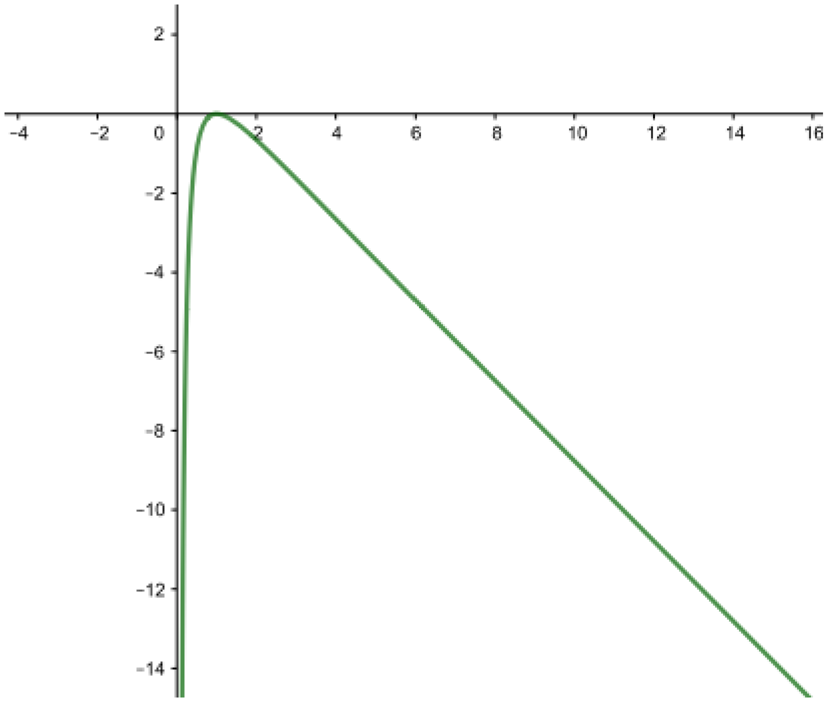
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - x + 1\right) = -\infty$

- Τα πρόσημα των f'', f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

x		0		1		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
f''			$-$		$-$	0	$+$	
f'		$+\infty$	↘	0	↘		↗	-1
f'			$+$		$-$		$-$	
f		$-\infty$	↗	0	↘		↘	$-\infty$

τ.μέγιστο Σ. Καμπής

Το σύνολο τιμών της f είναι το: $f\left(D_f\right) = f\left((0,1]\right) \cup f\left([1,+\infty)\right) = (-\infty, 0] \cup (-\infty, 0] = (-\infty, 0]$



Γ₂.

- Για $\lambda > 0$, έχουμε $\lambda \notin f\left(D_f\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ είναι αδύνατη (καμία λύση).
- Για $\lambda = 0$, έχουμε $\lambda \in f\left(D_f\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ είναι έχει μοναδική λύση την $x = 1$.
- Για $\lambda < 0$, έχουμε $\lambda \in f\left(\left(0,1\right]\right) = (-\infty, 0]$ $\kappa\alpha\iota$ $\lambda \in f\left(\left[1,+\infty\right)\right) = (-\infty, 0]$, οπότε η εξίσωση $f\left(x\right) = \lambda$ έχει δύο ακριβώς λύσεις.

Γ₃. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο ακρότατο της $x_0 = 1$, είναι :

$y - f\left(1\right) = f'\left(1\right)\left(x-1\right) \Leftrightarrow y = 0$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^{1} |\, f(x)\,|\, \mathrm{dx} \overset{f(x)<0}{=} -\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\, \mathrm{dx} = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} (\frac{\ln x}{x} - \mathrm{x} + 1)\, \mathrm{dx} =$

$= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x} dx + \int_{\frac{1}{e}}^{1} (x-1) dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x)' \ln x dx + \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} =$

$$=-\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=-\left[\frac{\ln^2 1}{2}-\frac{\ln^2\frac{1}{e}}{2}\right]+\left[(1-1)-\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)\right]=$$

$$=\frac{(-1)^2}{2}-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}=\frac{e^2-2+2e}{2e^2}\ \ \tau.\mu.$$

Γ4. $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}|\,f(x)-(-x+1)\,|\,\mathrm{dx}=\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}|\,\frac{\mathrm{lnx}}{x}-\mathrm{x}+1+x-1\,|\,\mathrm{dx}=$

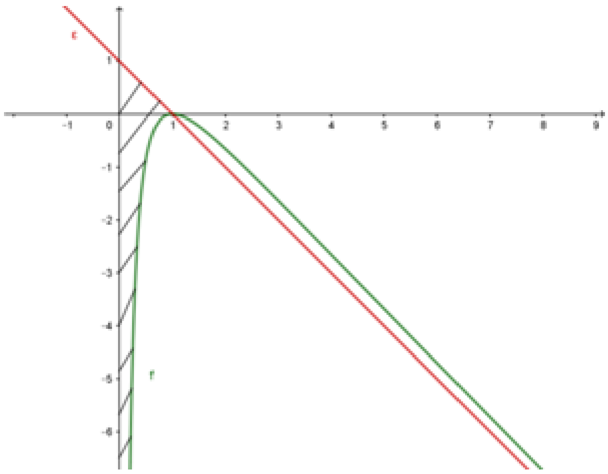
$$\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}|\,\frac{\mathrm{lnx}}{x}\,|\,dx=-\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\frac{\mathrm{lnx}}{x}dx=\left\{\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in(\lambda,\frac{1}{e})\subset(0,1)\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota:\ln x<0\overset{x>0}{\Rightarrow}\frac{\mathrm{lnx}}{x}<0\right\}=$$

$$=-\int_{\lambda}^{\frac{1}{e}}\ln x\cdot(\ln x)'dx=-\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{e}}=-\left[\frac{\ln^2\frac{1}{e}}{2}-\frac{\ln^2\lambda}{2}\right]=-\frac{(-1)^2}{2}+\frac{\ln^2\lambda}{2}=\frac{\ln^2\lambda-1}{2}\tau.\mu.$$

$$\lim_{\lambda\to0^+}E(\Omega)=\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\ln^2\lambda-1}{2}=\frac{(+\infty)-1}{2}=+\infty$$

Το παραπάνω όριο παριστάνει το εμβαδόν του ανοιχτού χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ασύμπτωτή της στο +∞, και των κατακόρυφων ευθειών $x=0$ και $x=\frac{1}{e}$.

(βλέπε διπλανό σχήμα)



Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f^2(x)-4xf(x)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = 8-x^3,\ x,\alpha\in\mathbb{R}$
- $f(-1)=-3$ και $f(1)=1$

Γ₁. Να αποδείξετε ότι η g έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$.
Γ₂. Αν η συνάρτηση G είναι παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το αριθμό α.
Γ₃. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
Γ₄. Αν $h(x)=e^x$, να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και της h και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τη C_h , τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις της συνεχούς συνάρτησης f , επομένως η g θα έχει οπωσδήποτε παράγουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ₂. Αφού η G είναι παράγουσα της g στο $\mathbb{R}$, θα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = 8-x^3 \Leftrightarrow [G(\mathrm{t})]_{\alpha}^{x} = 8-x^3 \Leftrightarrow G(x)-G(\alpha)=8-x^3$$

Για $x=\alpha$ έχουμε:

$$G(\alpha)-G(\alpha)=8-\alpha^3 \Leftrightarrow 0=8-\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3=8 \Leftrightarrow \alpha=2$$

Γ₃. Έχουμε $\int_{2}^{x} g(t)dt = \left[G(t)\right]_2^x \Leftrightarrow 8-x^3 = G(x)-G(2)$. Παραγωγίζουμε , οπότε

$G'(x) = (8-x^3)' \Leftrightarrow g(x) = -3x^2 \Leftrightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) - 4\mathrm{xf}(\mathrm{x}) = -3x^2 \Leftrightarrow \mathrm{f}^2(\mathrm{x}) - 4\mathrm{xf}(\mathrm{x}) + 4x^2 = x^2$
$(\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 2\mathrm{x})^2 = x^2 \Leftrightarrow |\mathrm{f}(\mathrm{x}) - 2\mathrm{x}| = |x|$ (1),

Θεωρώ τη συνάρτηση φ (x) = f(x) − 2x στο R και τότε η (1) γράφεται $|\varphi(\mathrm{x})| = |x|$, για κάθε x ϵ R.

- Αν $\mathrm{x} > 0$ τότε η $|\varphi(\mathrm{x})| = \mathrm{x}$

Η φ είναι συνεχής και φ(x) $\neq 0$ για κάθε x>0, άρα η φ διατηρεί πρόσημο στο (0,+∞), και επειδή

$\varphi(1)=f(1)-2=1-2=-1 \Rightarrow \varphi(x)<0$

Έτσι έχουμε $-\varphi(x)=x \Rightarrow -f(x)+2x=x \Rightarrow f(x)=x,\ x>0$

- Αν $\mathrm{x} < 0$ τότε η $|\varphi(\mathrm{x})| = -\mathrm{x}$

Η φ είναι συνεχής και φ(x) $\neq 0$ για κάθε x<0, άρα η φ διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$, και επειδή

$\varphi(-1)=f(-1)-2=-3-2=-5 \Rightarrow \varphi(x)<0$

Έτσι έχουμε $-\varphi(x)=-x \Rightarrow -f(x)+2x=-x \Rightarrow f(x)=3x,\ x<0$

Έτσι έχουμε $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 3x, & x<0 \end{cases}$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

$x_0=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \Leftrightarrow 0=0=f(0)$

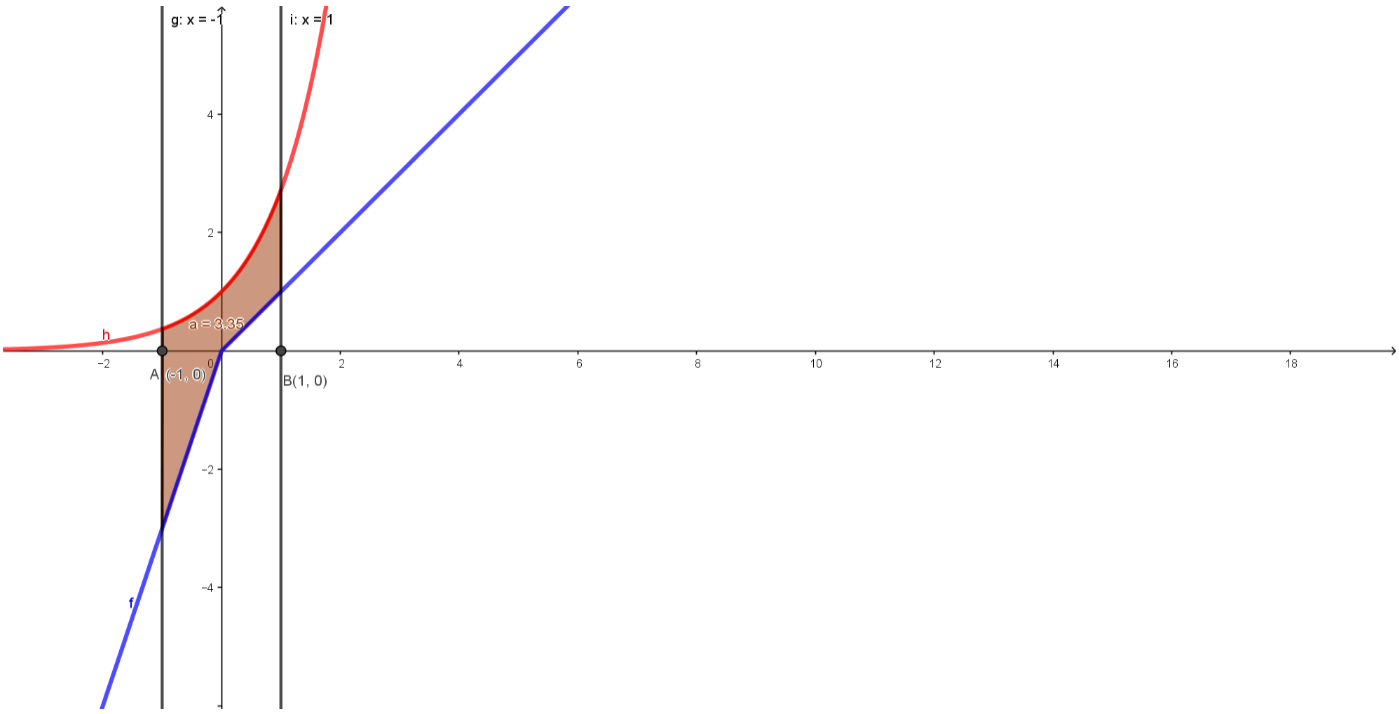
Άρα $f(x)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ 3x, & x<0 \end{cases}$

Γ_4.

- Έστω $x<0 \Rightarrow 3x<0$ και επειδή ισχύει $e^x>0$ θα έχουμε $e^x>3x \Leftrightarrow e^x-3x>0$
- Έστω $x\geq 0$, τότε από εφαρμογή του βιβλίου θα έχουμε

  $\ln x \leq x-1 \overset{x\to e^x}{\Rightarrow} \ln e^x \leq e^x-1 \Rightarrow x\leq e^x-1 \Rightarrow x+1\leq e^x \Rightarrow x<x+1\leq e^x$
- Επομένως έχουμε $h(x)-f(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

- Το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι: Ε(Ω)=$\int_{-1}^{1}[h(x)-f(x)]dx=\int_{-1}^{0}[h(x)-f(x)]dx+\int_{0}^{1}[h(x)-f(x)]dx=\int_{-1}^{0}(e^x-3x)dx+\int_{0}^{1}((e^x-x)dx=[e^x-\frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0}+[e^x-\frac{x^2}{2}]_{0}^{1}$= $e^0-e^{-1}+\frac{3}{2}$+$e^1-\frac{1}{2}-e^0$= e- e^{-1} +1 τετρ. Μονάδες



Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^3+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ₁:Να εξετάσετε αν ισχύουν τα Θεωρήματα Bolzano, Rolle και Μέσης Τιμής για την f στο $[-1,2]$.

Γ₂:Να βρείτε την απόσταση των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f, στα σημεία που έχουν τετμημένες τα διάφορα του μηδενός σημεία, στα οποία ισχύει το Θ. Rolle.

Γ₃:Να αποδείξετε, ότι το μέγιστο της f, το σημείο καμπής της f' και το ελάχιστο της f'' είναι σημεία συνευθειακά.

Γ₄:Να αποδείξετε ότι η παραπάνω ευθεία του ερωτήματος Γ₃, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{2\eta\mu(2x-1)}{(2x-1)^2}$.

Λύση

Γ₁. Η συνάρτηση f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με $f'(x)=4x^3-6x^2+2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Είναι $f(-1)=1+2+1+1=5$ *και* $f(2)=16-16+4+1=5$, οπότε $f(-1)f(2)>0$ που σημαίνει ότι **δεν** ισχύει το Θ.Bolzano.
- Είναι όμως $f(-1)=f(2)$, οπότε το Θ. Rolle ισχύει, άρα και το Θ.Μ.Τ.

Γ₂. Εφαρμόζοντας το Θ. Rolle υπάρχει $x_0\in(-1,2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow 4x_0^3-6x_0^2+2x_0=0\Leftrightarrow 2x_0\left(2x_0^2-3x_0+1\right)=0.\ \Leftrightarrow x_0=0\ \acute{\eta}\ x_0=1\ \acute{\eta}\ x_0=\frac{1}{2}$$

Τα ζητούμενα σημεία που έχουν τετμημένες διάφορα του μηδενός είναι:

$\mathrm{A}(1,f(1))=(1,1)$ και $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{17}{16}\right)$.

Επειδή είναι παράλληλες προς τον xx' ($f'(x_0)=0$), η απόσταση τους είναι

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)=\frac{17}{16}-1=\frac{1}{16}$$

Γ₃. Είναι $f'(x)=4x^3-6x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0\ \acute{\eta}\ x=\frac{1}{2}\ \acute{\eta}\ x=1$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0		$1/2$		1		$+\infty$
f'	-	0	+	0	-	0	+	
f	↘		↗		↘		↗	

Η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο το σημείο $\mathrm{K}\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{17}{16}\right)$.

Είναι $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$ και $f'''(x) = 24x - 12 = 0 \Leftrightarrow 12(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Η κυρτότητα, τα σημεία καμπής της f' και το ελάχιστο της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
f'''		-	0	+	
f''		$\searrow$	min	$\nearrow$	
f'		κοίλη	σ.κ	κυρτή	

Η συνάρτηση f' έχει σημείο καμπής το σημείο $\Lambda\left(\frac{1}{2}, f'\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Η συνάρτηση f'' έχει ελάχιστο το σημείο $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, f''\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ έχουν την ίδια τετμημένη $\frac{1}{2}$.

Άρα βρίσκονται στην ευθεία $x = \frac{1}{2}$.

Γ₄. Έχουμε: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2\eta\mu(2x-1)}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \left(\frac{2}{2x-1} \frac{\eta\mu(2x-1)}{2x-1} \right) = 2 \cdot (-\infty) \cdot 1 = -\infty$.

Ανάλογα: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = +\infty$.

Άρα η ευθεία $x = \frac{1}{2}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g .

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x)>0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση: $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=0$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$.

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha)=f(\beta)$.

Γ₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Γ₃. Να αποδείξετε ότι $f'(\alpha)>0$ και $f'(\beta)<0$.

Γ₄. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο.

Γ₅. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\le f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{f(x)}f'(x)dx=0\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}\left[\ln f(x)\right]'dx=0\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}=0\Leftrightarrow\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ln f(\beta)=\ln f(\alpha)\Leftrightarrow f(\beta)=f(\alpha).$

Γ₂. Αφού η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και από το ερώτημα $Γ_1$ έχουμε $f(\alpha)=f(\beta)$. Ισχύει, λοιπόν το Θ. Rolle, που σημαίνει, ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.
Επειδή $f''(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ είναι μοναδικό.

Γ₃. Από το $Γ_2$ έχουμε ότι $\xi\in(\alpha,\beta)$, οπότε :
$\alpha<\xi<\beta\overset{f':\text{γν.φθίνουσα}}{\Leftrightarrow}f'(\alpha)>f'(\xi)>f'(\beta)\overset{Γ_2}{\Leftrightarrow}f'(\alpha)>0>f'(\beta)$.
Άρα $f'(\alpha)>0$ και $f'(\beta)<0$.

Γ₄. Από το ερώτημα $Γ_2$ έχουμε ότι η συνεχής συνάρτηση f' έχει μοναδική ρίζα το $\xi\in(\alpha,\beta)$.
Αυτό σημαίνει ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο αριστερά και δεξιά της ρίζας.
Επειδή $f'(\alpha)>0$ με $\alpha<\xi$, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,\xi)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\xi]$.

Επειδή $f'(\beta)<0$ με $\beta>\xi$, τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\xi,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\xi,+\infty)$.
Από όλα τα παραπάνω έχουμε ότι $f'(\xi)=0$, αριστερά της ρίζας η f είναι γνησίως αύξουσα και δεξιά η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα η f έχει ολικό μέγιστο, το $A(\xi,f(\xi))$.

Γ₅. Από το $Γ_4$ έχουμε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το $A(\xi,f(\xi))$.
Άρα, από τον ορισμό του μεγίστου, ισχύει : $f(x)\le f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+x$ με $f''(0)=2$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.
Γ$_1$: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
Γ$_2$: Να γίνει η μελέτη της f και στη συνέχεια η γραφική της παράσταση.
Γ$_3$: Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}.

<u>Λύση</u>

Γ$_1$. Είναι $f'(x)=\left(x^3+\alpha x^2+x\right)'=3x^2+2\alpha x+1$ και

$f''(x)=\left(3x^2+2\alpha x+1\right)'=6x+2\alpha \overset{x=0}{\Rightarrow} f''(0)=2\alpha \Rightarrow 2=2\alpha \Rightarrow \alpha=1$.

Άρα $f(x)=x^3+x^2+x$ και $f'(x)=3x^2+2x+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-12=-8<0$ και $\alpha=3>0$ (ομόσημο του 3).
Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική, και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και 1-1 που σημαίνει ότι η f αντιστρέφεται.

Γ$_2$. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$ και είναι συνεχής ως πολυωνυμική.
Από το Γ$_1$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $A=\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ακρότατα.
Το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ αφού

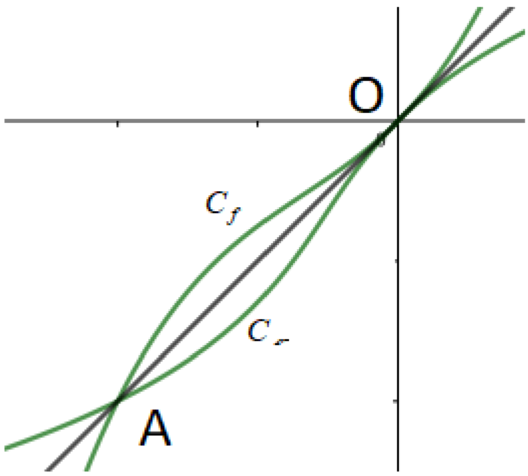
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

$f''(x)=6x+2\geq 0 \Leftrightarrow 6x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{3}$.

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\tfrac{1}{3}\right]$ και κυρτή στο $\left[-\tfrac{1}{3},+\infty\right)$. Παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(-\tfrac{1}{3}, f(-\tfrac{1}{3})\right)=\left(-\tfrac{1}{3},-\tfrac{7}{27}\right)$.

x	$-\infty$	$-\tfrac{1}{3}$	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f''	$-$	0	$+$
f	↗		↗

Σ.Κ



Γ₃. Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:
$f(x)=f^{-1}(x)$. (1)
Έστω x_0 μία λύση της (1).
Τότε $f(x_0)=f^{-1}(x_0)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=f\left(f^{-1}(x_0)\right)\Leftrightarrow f\left(f(x_0)\right)=x_0$. (2)
Θα αποδείξουμε ότι $f(x_0)=x_0$.

- Έστω $f(x_0)>x_0 \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f\left(f(x_0)\right)>f\left(x_0\right)\overset{(2)}{\Rightarrow} x_0>f\left(x_0\right)$,**άτοπο.**
- Έστω $f(x_0)<x_0 \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f\left(f(x_0)\right)<f\left(x_0\right)\overset{(2)}{\Rightarrow} x_0<f\left(x_0\right)$, **άτοπο.**

Άρα: $f(x_0)=x_0 \Leftrightarrow x_0^3+x_0^2+x_0=x_0 \Leftrightarrow x_0^3+x_0^2=0 \Leftrightarrow x_0^2\left(x_0+1\right)=0 \Leftrightarrow x_0=0 \text{ ή } x_0=-1$.
Τα κοινά σημεία που έχουν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα $O(0,0)$ και $A(-1,-1)$.
Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ το ζητούμενο χωρίο θα είναι το 2πλάσιο εμβαδό που περικλείεται από την C_f και την $y=x$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

$$E=2E_1=2\int_{-1}^{0}\left|f(x)-y\right|dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3+x^2+x-x\right)dx=2\int_{-1}^{0}\left(x^3+x^2\right)dx=2\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}=$$
$$=2\cdot(0-\frac{1}{4}+\frac{1}{3})=2\cdot\frac{-3+4}{12}=\frac{1}{6}\text{τ.μ.}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-4,4\right]$ και ισχύουν:
$f(-4)=-4,\ f(4)=4$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-4,4\right)$.

Γ₁:Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο.

Γ₂:Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(-4,4\right)$ που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=-x+2$.

Γ₃: Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in\left(-4,4\right)$ με $\rho_1\neq\rho_2$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(\rho_1)}+\dfrac{1}{3\cdot f'(\rho_2)}=\dfrac{4}{3}$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(-4,4\right)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2$.
Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[-4,4\right]$ θα είναι και συνεχής.
Είναι $f(-4)\neq f(4)$ και $-4=f(-4)<2<f(4)=4$, οπότε από το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(-4,4\right)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2$.
Επίσης, έχουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-4,4\right)$και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-4,4\right]$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-4,4\right]$.
Επομένως το $\xi\in\left(-4,4\right)$ώστε $f(\xi)=2$ είναι μοναδικό.

Γ₂. Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ κάθετη στην ευθεία $\left(\varepsilon\right): y=-x+2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x_0)=1$ αφού $\lambda_\varepsilon=-1$.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-4,4\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-4,4\right)\subseteq\left[-4,4\right]$, οπότε ισχύει το Θ.Μ.Τ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(-4,4\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'\left(x_0\right)=\frac{f(4)-f(-4)}{4-(-4)}=\frac{4+4}{8}=1.$$

Γ₃. Θεωρώντας το $\xi\in\left(-4,4\right)$ του Γ₁ ερωτήματος, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα $\left[-4,\xi\right]$ και $\left[\xi,4\right]$.

- Υπάρχει $\rho_1\in\left(-4,\xi\right)$ τέτοιο ώστε: $f'\left(\rho_1\right)=\dfrac{f(\xi)-f(-4)}{\xi-(-4)}=\dfrac{2-(-4)}{\xi+4}=\dfrac{6}{\xi+4}$.
- Υπάρχει $\rho_2\in\left(\xi,4\right)$ τέτοιο ώστε: $f'\left(\rho_2\right)=\dfrac{f(4)-f(\xi)}{4-\xi}=\dfrac{4-2}{4-\xi}=\dfrac{2}{4-\xi}$

Οπότε: $\dfrac{1}{f'(\rho_1)}+\dfrac{1}{3\cdot f'(\rho_2)}=\dfrac{\xi+4}{6}+\dfrac{4-\xi}{6}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$.

Γ₁ . Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Γ₂ . Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Γ₃ . Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Γ₄ . Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=0$.

Γ₅ . Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}dx$.

<u>Λύση</u>

Γ₁. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}\right)=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+2\right)=$$

$$=(+\infty)\cdot(\sqrt{4+0}+2)=(+\infty)\cdot 4=+\infty.$$

Γ₂. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}-2\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)=-4=\lambda$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x+4x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left(|2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\left(-2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}-2x\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-2x\left(\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1\right)}=0=\beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y=-4x$.

Γ₃. Είναι $f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)'=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x-2\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}<0$, γιατί:

$$2\sqrt{4x^2+1}>2\sqrt{4x^2}=2\cdot2|x|=4|x|\geq 4x \ \text{ άρα } \ 4x-2\sqrt{4x^2+1}<0$$

Αφού η f είναι συνεχής και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι γνησίως φθίνουσα οπότε θα είναι και 1-1. Επομένως αντιστρέφεται και η f^{-1} ορίζεται στο

$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

- $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+1}-2x=y\Leftrightarrow\sqrt{4x^2+1}=y+2x\Leftrightarrow 4x^2+1=(y+2x)^2\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \cancel{4x^2}+1=y^2+4yx+\cancel{4x^2}\Leftrightarrow 4yx=1-y^2\Leftrightarrow x=\frac{1-y^2}{4y}$.

  Άρα $f^{-1}(x)=\frac{1-x^2}{4x},\ x\in f(A)$.

Γ₄. $f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)'=\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}-2=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2\Rightarrow$

$$f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=\left(\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}-2\right)\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{4x^2+1}-4x=$$

$$4x-2\sqrt{4x^2+1}+2\sqrt{4x^2+1}-4x=0.$$

Γ₅. Προφανώς $f(x)>0$ και $\sqrt{4x^2+1}\neq0\Rightarrow f(x)\sqrt{4x^2+1}\neq0$. Διαιρούμε τη σχέση $f'(x)\sqrt{4x^2+1}+2f(x)=0$ με $-2f(x)\sqrt{4x^2+1}$ έτσι έχουμε

$$\frac{f'(x)\sqrt{4x^2+1}}{-2f(x)\sqrt{4x^2+1}}+\frac{2f(x)}{-2f(x)\sqrt{4x^2+1}}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$$

Οπότε έχουμε $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\left[\ln f(x)\right]_0^1 =$
$-\frac{1}{2}\left(\ln f(1) - \ln f(0)\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\sqrt{5}-2\right) - \ln 1\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{5}-2\right)$.

Άσκηση 11 **(νέο 2020)**

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(1)=1$ και για κάθε $x\in(0,1]$ ισχύει:

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Γ2. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

Γ4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $2f(x_0)=1$.

Γ5. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1,x_2\in(0,1)$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2.$$

<u>Λύση</u>

Γ1.

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow$$

Έχουμε:

$$\Rightarrow\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\left[\frac{2}{x^2+1}\right]'\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{2}{x^2+1}+c$$

Και για $x=1$ βρίσκουμε: $c=0$, οπότε $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Γ2. Είναι: $f'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{4x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4x^2}{(x^2+1)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}\geq 0\Leftrightarrow 0<x\leq 1.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Γ3. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,1]$, τότε το σύνολο τιμών της θα είναι: $f(A)=[f(0),f(1)]=[0,1]$.

Γ4. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A=[0,1]$ και το $\frac{1}{2}\in f(A)=[0,1]$ από το Θ. Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει μοναδικό (f γνησίως αύξουσα) $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(x_0)=1.$$

Γ5. Από το **Γ4** ερώτημα έχουμε ότι $f(x_0)=\frac{1}{2}$ με $0<x_0<1$.

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ στα $[0,x_0]$ και $[x_0,1]$ έχουμε ότι θα υπάρχει $x_1\in(0,x_0)$ και $x_2\in(x_0,1)$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{1}{2x_0}\Rightarrow\frac{1}{f'(x_1)}=2x_0 \qquad \textbf{(1)}$$

και $$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-x_0}=\frac{1}{2(1-x_0)}\Rightarrow\frac{1}{f'(x_2)}=2-2x_0 \qquad \textbf{(2)}$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε: $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2x_0+2-2x_0=2$.

Άσκηση 12 (νέο 2020)

Θεωρούμε τη συνάρτηση f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $[2017,2021]$ με $f(\alpha)=2018$ και $f(\beta)=2020$.

Γ1. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτομένες.
Γ2. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.
Γ3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)=f(x)-2019$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Λύση

Γ1.
1^{ος} τρόπος
Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $[2017,2021]$ θα ισχύει:
$2017\le f(x)\le 2021$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 2017 και ολικό μέγιστο το 2021. Δηλαδή υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=2017$ και $x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=2021$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ θα ισχύει το Θεώρημα του Fermat που σημαίνει $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.
Άρα η C_f έχει στα $(x_1,2017)$ και $(x_2,2021)$ οριζόντιες εφαπτομένες.

2^{ος} τρόπος
Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και έχει σύνολο τιμών το $[2017,2021]$ θα ισχύει:
$2017\le f(x)\le 2021$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, (έστω $x_1<x_2$) με $f(x_1)=2017$ και $f(x_2)=2021$.
Επειδή η συνάρτηση f είναι και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ μπορούμε να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[\alpha,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,\beta]$.

- Υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,x_1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha}=\frac{2017-2018}{x_1-\alpha}=-\frac{1}{x_1-\alpha}<0,\ \text{αφού}\ x_1>\alpha$$

- Υπάρχει $\xi_2\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2021-2017}{x_2-x_1}=\frac{4}{x_2-x_1}>0,\ \text{αφού}\ x_2>x_1$$

- Υπάρχει $\xi_3 \in (x_2,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_3)=\frac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2}=\frac{2020-2021}{\beta-x_2}=-\frac{1}{\beta-x_2}<0,\ \text{αφού}\ \beta>x_2$$

Έχουμε λοιπόν: $\alpha<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<\beta$.

Αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε η f' θα είναι συνεχής για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
Εφαρμόζοντας Θ. Bolzano στην f' στα διαστήματα $[\xi_1,\xi_2]$ και $[\xi_2,\xi_3]$ με δεδομένο από τα παραπάνω ότι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$ και $f'(\xi_2)\cdot f'(\xi_3)<0$ θα έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\varphi_1\in(\xi_1,\xi_2)$ και ένα τουλάχιστον $\varphi_2\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\varphi_1)=0$ και $f'(\varphi_2)=0$.
Άρα η C_f έχει 2 οριζόντιες εφαπτομένες.

Γ2. Από το **Γ1** και **1^ος^ τρόπος** (έστω $x_1<x_2$) έχουμε: $\alpha<x_1<x_2<\beta$ και $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.
Έχουμε f' συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$, f' παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)\subset(\alpha,\beta)$ και $f'(x_1)=f'(x_2)$. Δηλαδή ισχύει το Θ.Rolle στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

Γ3. Έχουμε: $f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)=f(x)-2019 \Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)-f(x)+2019=0.$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)\cdot\left(e^{3x}-3e^{x}+2\right)-f(x)+2019=0.$
Από το **Γ1** και **1^ος^ τρόπος** (έστω $x_1<x_2$) έχουμε : $\alpha<x_1<x_2<\beta$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_2)=0$, $f(x_1)=2017$ και $f(x_2)=2021.$
Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
Επίσης $g(x_1)=f'(x_1)\cdot\left(e^{3x_1}-3e^{x_1}+2\right)-f(x_1)+2019=0-2017+2019=2>0$
Και
$g(x_2)=f'(x_2)\cdot\left(e^{3x_2}-3e^{x_2}+2\right)-f(x_2)+2019=0-2021+2019=-2<0$
Άρα $g(x_1)\cdot g(x_2)<0.$
Ισχύει λοιπόν το Θ.Bolzano για την g στο $[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(x_1,x_2)\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:
$g(\rho)=0\Leftrightarrow f'(\rho)\cdot\left(e^{3\rho}-3e^{\rho}+2\right)=f(\rho)-2019.$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$, $x\in R$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.

Δ₂. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και βρείτε την εφαπτομένη της στο $\mathrm{A}\left(1,f(1)\right)$.

Δ₃. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\geq 2ex-e,\ \text{για κάθε } x\in R.$

Δ₄. Γνωρίζοντας ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^{x}\geq x+1$ να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx>\frac{4}{3}$.

Δ₅. Αν F μία παράγουσα της f στο R, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ισχύει $F(x)>F(0)+x,\ \text{για κάθε } x>0$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xF(x)}{f(x)}$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(1,2\right)$ τέτοιο ώστε $F(2)-F(0)=2f(\xi).$

iv. Αφού αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο $\left[0,+\infty\right)$, στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

1) $xF'(x)\leq F(2x)-F(x),\ \text{για κάθε } x\geq 0.$

2) $2\int_0^1 F(2x)dx=\int_0^2 F(x)dx.$

3) $\int_0^2 F(x)dx>2F(1).$

Λύση

Δ₁. Η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}$, $x\in R$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2xe^{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.
Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-∞	0	+∞
f'	-	0	+
f	↘	min	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[0,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $\mathrm{A}(0,f(0)=1)$.

Δ₂. Έχουμε $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2e^{x^2}(1+2x^2)>0$, για κάθε $x\in R$. Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το R. Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο $\mathrm{A}\left(1,f(1)\right)$ είναι:
$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow \mathrm{y}-e=2e(x-1)\Leftrightarrow \mathrm{y}=2ex-e$.

Δ₃. Αφού η συνάρτηση f είναι κυρτή σε όλο το R θα είναι «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, f(1))$. Άρα θα ισχύει $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq 2ex - e, \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x \in R.$

Δ₄. Γνωρίζοντας ότι $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in R$ (το '=' ισχύει για x=0) και θέτοντας όπου x το x^2 έχουμε: $e^{x^2} \geq x^2 + 1$ με το '=¨ να ισχύει για x=0.

$e^{x^2} \geq x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ και επειδή η συνάρτηση $h(x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα $[0,1]$, τότε θα έχουμε

$$\int_0^1 \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} - \left(x^2 + 1\right)dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx - \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx > \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2}dx > \frac{4}{3}.$$

Δ₅. Αφού η F είναι μία παράγουσα της f στο R θα ισχύει

$F'(\mathrm{x}) = f(x) = e^{x^2}, \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x \in R.$

i. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ στο $[0, x]$ με $x > 0$.

   Τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ έτσι ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \Leftrightarrow F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow e^{\xi^2} = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow xe^{\xi^2} = F(x) - F(0), \ (1).$$

   Όμως $\xi \in (0, x) \Leftrightarrow 0 < \xi \Leftrightarrow 0 < \xi^2 \Leftrightarrow e^0 < e^{\xi^2} \Leftrightarrow 1 < e^{\xi^2} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < xe^{\xi^2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x < F(x) - F(0) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x + F(0) < F(x)$

ii. Από το i) ερώτημα έχουμε $F(x) > F(0) + x, \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x > 0$. Όμως $\lim_{x \to +\infty}(F(0) + x) = +\infty$, άρα $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{xF(x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xF(x)}{e^{x^2}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(xF(x))'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{F(x) + xF'(x)}{2xe^{x^2}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x) + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{F(x)}{2xe^{x^2}}\right) = \frac{1}{2}$$ γιατί:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{2xe^{x^2}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \frac{1}{2}\lim_{x \to +\infty} \frac{F'(x)}{(xe^{x^2})'} = \frac{1}{2}\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}} = \frac{1}{2}\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + 2x^2} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

iii. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ για την F $\sigma\tau o$ $[0, 2]$, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$, ώστε $F'(\xi) = \dfrac{F(2) - F(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow F(2) - F(0) = 2F'(\xi) \Leftrightarrow F(2) - F(0) = 2f(\xi)$ (1).

   Αλλά $F(2) - F(0) = \left[F(x)\right]_0^2 = \int_0^2 F'(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \overset{(iii)}{>} \int_0^2 \left(2ex - e\right)dx = \left[ex^2 - ex\right]_0^2 =$

$=4e-2e=2e.$ Οπότε από την (1) $2f(\xi)>2e \Leftrightarrow f(\xi)>e \Leftrightarrow f(\xi)>f(1) \overset{f:\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} \xi>1$.
Άρα $\xi \in (1,2)$.

iv. Επίσης $F''(x)=f'(x)=2xe^{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, οπότε η F είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

1) Στη σχέση $xF'(x) \leq F(2x)-F(x)$ το "=" ισχύει για x=0.

Αν $x>0$, θα αποδείξουμε ότι :

$xF'(x)<F(2x)-F(x) \Leftrightarrow \dfrac{F(2x)-F(x)}{x}>F'(x) \Leftrightarrow \dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}>F'(x)$ (1)

Για τη συνάρτηση F ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,2x]$, $x>0$, αφού είναι συνεχής στο $[x,2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,2x)$. Οπότε υπάρχει $\xi \in (x,2x)$, ώστε $F'(\xi)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}$.

Επειδή η F είναι κυρτή, τότε η F' είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα η (1) γίνεται: $F'(\xi)>F'(x) \Leftrightarrow \xi>x$, το οποίο ισχύει.

2) Θέτοντας $2x=y \Rightarrow dx=\dfrac{dy}{2}$. Για $x=0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $y=0$ και για $x=1$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $y=2$. Οπότε

$$2\int_0^1 F(2x)dx=2\int_0^2 \frac{1}{2}F(\mathrm{y})dy=\int_0^2 F(x)dx.$$

3) Από το (1) ερώτημα έχουμε $xF'(x) \leq F(2x)-F(x)$, $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \geq 0$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$. Οπότε

$$\int_0^1 xF'(x)dx<\int_0^1 (F(2x)-F(x))dx \Leftrightarrow \int_0^1 F(2x)dx-\int_0^1 F(x)dx>\int_0^1 xF'(x)dx \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^2 F(x)dx-\int_0^1 F(x)dx>\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 F(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 F(x)dx>2F(1).$$

Άσκηση 2

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = 1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Δ2. Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή.

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Δ5. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$$

και

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(e^x)}{x}$$

<u>Λύση</u>

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'f(x)dx \\
&= [x \cdot f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f'(x)dx \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)f(u)du \quad (αντικατάσταση\ u = \frac{\pi}{2} - x) \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(u)du = 1$, οδηγούμαστε στη σχέση

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad (1)$$

Από την άλλη, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du \quad (αντικατάσταση\ u = \frac{\pi}{2} - x)
\end{aligned}$$

Καθώς $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du = 1$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 1$$

και λόγω της (1)

$$f(0) = 0 \qquad (2)$$

Ακόμα, για x = 0 η $f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ γίνεται

$$f'(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad (3)$$

Δ2. Η συνάρτηση g είναι σταθερή γιατί είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πραγματικά, καθώς $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f'(x)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = f(x)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x)f'(x) - 2f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= 2f(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Μάλιστα η τιμή της συνάρτησης g είναι ,

$$\begin{aligned} &g(x) = g(0) \Leftrightarrow \\ &g(x) = f^2(0) + f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &g(x) = 1 \qquad (4) \end{aligned}$$

Δ3. Εφόσον $g(x) = f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$$

Αλλά από την (4) έχουμε $g(x) = 1$, και με την αντικατάσταση $u = \frac{\pi}{2} - x$ στο 2^{o} ολοκλήρωμα, παίρνουμε:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(u)du \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi}{2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = \frac{\pi}{4}$$

Δ4. Από τον ορισμό της συνάρτησης g και λόγω της (4) έχουμε ότι

$$f^2(x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

Από όπου προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 1 \qquad (5)$$

Όμως στο $Δ_1$ είδαμε ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (σχέση 1), που σε συνδυασμό με την προηγούμενη σχέση μας δίνει $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Δ5. Στο $Δ_1$ αποδείξαμε ότι $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$. Σε συνδυασμό με τον ορισμό της παραγώγου λαμβάνουμε,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Rightarrow 1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

Λόγω της (5) παίρνουμε ότι $|f(e^x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε για $x \neq 0$

$$\left|\frac{f(e^x)}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{f(e^x)}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(e^x)}{x}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=4$, $f(4)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Δ₁. Να βρείτε τη μονοτονία της σε όλο το R και το σύνολο τιμών της.

Δ₂. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu\in[0,3]$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\mu+1)=f(\mu)-1$.

Δ₃. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{1}{f(x)}$

Δ₄. Να μελετήσετε την $\dfrac{1}{f}$ ως προς τη μονοτονία στο $(-4,4)$.

Δ₅. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ f$ στο $\mathbb{R}$ και να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία στο $[-4,4]$.

Δ₆. Αν η f είναι τριώνυμο δευτέρου βαθμού να βρείτε τον τύπο της f καθώς και τον τύπο της $f\circ f$

Δ₇. Να μελετήσετε την $h(x)=(f\circ f)(x)$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ₈. Να

υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$

<u>Λύση</u>

Δ₁.

- Έχουμε $0<4$ και $f(0)>f(4)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $[0,+\infty)$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- Για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2\le0$, έχουμε :

  $x_1<x_2\le0\Leftrightarrow -x_1>-x_2\ge0 \overset{f\downarrow[0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(-x_1)<f(-x_2) \overset{f:\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha}{\Leftrightarrow} f(x_1)<f(x_2)$

  Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0]$. Τότε το $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\, f(0)\right]=(-\infty,4]$, αφού

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{u=-x}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(-u) \overset{f:\acute{\alpha}\rho\tau\iota\alpha}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) \overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta}{=} -\infty$ και $f(0)=4$.
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_2=[0,+\infty)$. Τότε το $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\, f(0)\right]=(-\infty,4]$,
- Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

  $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,4]$.

Δ₂. <u>1ος τρόπος</u>

Με άτοπο.

Έστω ότι **δεν** υπάρχει $\mu \in [0,3]$ τέτοιο ώστε $f(\mu+1) = f(\mu)-1 \Leftrightarrow f(\mu+1)-f(\mu)+1=0$.Άρα θα ισχύει

$f(x+1)-f(x)+1 \neq 0$, (α) για κάθε $x \in [0,3]$.

Θεωρώ την $g(x) = f(x+1)-f(x)+1$.Για την g ισχύουν:

- Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών. Της $f(x+1)$ (σύνθεση συνεχών), της $-f(x)$ (γινόμενο σταθεράς επί συνεχή συνάρτηση) και της 1 (σταθερή)

$g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0,3]$λόγω (α).

Άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,3]$.

Έστω $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,3]$. Έχουμε:

$g(0) > 0 \Leftrightarrow f(1)-f(0)+1 > 0 \Leftrightarrow f(1)-f(0) > -1$

$g(1) > 0 \Leftrightarrow f(2)-f(1)+1 > 0 \Leftrightarrow f(2)-f(1) > -1$

$g(2) > 0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)+1 > 0 \Leftrightarrow f(3)-f(2) > -1$

$g(3) > 0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)+1 > 0 \Leftrightarrow f(4)-f(3) > -1$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τελευταίων ανισώσεων της κάθε σειράς προκύπτει

$f(4)-f(0) > -4 \Leftrightarrow 0-4 > -4 \Leftrightarrow -4 > -4$ **άτοπο.**

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $g(x) < 0$.

Επομένως **υπάρχει** $\mu \in [0,3]$τέτοιο ώστε $f(\mu+1) = f(\mu)-1$.

<u>2ος τρόπος</u>

Θεωρώ την $g(x) = f(x+1)-f(x)+1$.Για την g ισχύουν:

- Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών.
- Για $x=0 \Rightarrow g(0) = f(1)-f(0)+1, (1)$

  $x=1 \Rightarrow g(1) = f(2)-f(1)+1, (2)$

  $x=2 \Rightarrow g(2) = f(3)-f(2)+1, (3)$

  $x=3 \Rightarrow g(3) = f(4)-f(3)+1, (4)$
- Προσθέτουμε τις ισότητες $(1)+(2)+(3)+(4)$

  Οπότε $g(0)+g(1)+g(2)+g(3) = f(4)-f(0)+4 = 0-4+4 = 0$
- Αν $g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$

  Τότε $\mu = 0$ ή $\mu = 1$ ή $\mu = 2$ ή $\mu = 3$
- Αν οι αριθμοί $g(0), g(1), g(2), g(3)$ είναι ομόσημοι , τότε

  $g(0)+g(1)+g(2)+g(3) > 0$ ή $g(0)+g(1)+g(2)+g(3) < 0$ άτοπο , άρα δύο είναι ετερόσημοι , επομένως στο διάστημα τους εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Bolzano, οπότε υπάρχει $\mu \in [0,3]$τέτοιο ώστε $f(\mu+1) = f(\mu)-1$.

Δ₃. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής και στο 4, οπότε θα ισχύει:
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 0$. Όμως αν $0 < x < 4 \overset{f\ γν.φθίνουσα}{\Leftrightarrow} f(x) > f(4) = 0$. Δηλαδή έχουμε:
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για $0 < x < 4$. Τότε $\lim_{x\to 4^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

Δ₄.

- Έχουμε: $-4 < x_1 < x_2 \le 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(-4) < f(x_1) < f(x_2) \le f(0) \Rightarrow 0 < f(x_1) < f(x_2) \le 4 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στο $(-4, 0]$.
  Όμοια αποδεικνύεται ότι αν $0 \le x_1 < x_2 < 4 \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}$, οπότε η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $[0, 4)$.

Δ₅. Είναι $D_f = A = R$, οπότε $D_{f\circ f} = \left\{ x \in D_f \ / \ f(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in R / \ f(x) \in R \right\}$.

Προφανώς $f(x) \in R,\ για\ κάθε\ x \in R$. Άρα $D_{f\circ f} = R$.

- Έχουμε: $-4 \le x_1 < x_2 \le 0 \overset{f\ γν.αύξουσα}{\Leftrightarrow} f(-4) \le f(x_1) < f(x_2) \le f(0) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 0 \le f(x_1) < f(x_2) \le 4 \overset{f\ γν.φθίνουσα[0,4]}{\Leftrightarrow} f(f(x_1)) > f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f\circ f)(x_1) > (f\circ f)(x_2).$
  Άρα η $f\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4, 0]$.

- Όμοια αποδεικνύεται ότι η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$.

Δ₆. Αφού η f είναι τριώνυμο 2[ου] βαθμού θα έχει τη μορφή: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma\ με\ \alpha \ne 0.$

Ισχύουν: $\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(0) = 4 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\alpha - 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases}$.

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$.

Οπότε: $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}x^2 + 4\right)^2 + 4 = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{2}x^2$.

Δ7.

$$h(x)=(f\circ f)(x)=-\frac{1}{64}x^4+\frac{1}{2}x^2.$$

➢ $h'(x)=-\frac{1}{16}x^3+x=x\left(-\frac{1}{16}x^2+1\right)=-\frac{1}{16}x(x-4)(x+4)$

$h'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{16}x(x-4)(x+4)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -4$ ή $0\leq x\leq 4$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$h(x)$		↗	τ.μ	↘	τ.ε	↗	τ.μ	↘	

Η συνάρτηση h είναι γν. αύξουσα στα $(-\infty,-4]$ και $[0,4]$ και γν. φθίνουσα στα $[-4,0]$ και $[4,+\infty)$. Παρουσιάζει:

- τοπικό ελάχιστο στο $x_1=0$ με τιμή $h(0)=0$.
- τοπικό μέγιστο στο $x_2=-4$ με τιμή $h(-4)=4$ και
- τοπικό μέγιστο στο $x_3=4$ με τιμή $h(4)=4$.

➢ $h''(x)=\left(-\frac{1}{16}x^3+x\right)'=-\frac{3}{16}x^2+1$

$h''(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{16}x^2+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2\leq 1 \Leftrightarrow x^2\leq \frac{16}{3} \Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Η κυρτότητα και τα σημεία καμπής φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		$-\frac{4\sqrt{3}}{3}$		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$h''(x)$		-		+		-	
$h(x)$		∩	σ.κ	∪	σ.κ	∩	

Η συνάρτηση h είναι κυρτή στο $\left[-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στα $\left(-\infty,-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει:

- Σημείο καμπής στο $x_4=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ με τιμή $h(-\frac{4\sqrt{3}}{3})=\frac{20}{9}$.

- Σημείο καμπής στο $x_5 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ με τιμή $h(\frac{4\sqrt{3}}{3}) = \frac{20}{9}$

Δ8. Είναι $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \; ή \; x = 4$ και

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$, οπότε

$$\mathrm{E} = \int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{4}\left(-\frac{1}{4}x^2 + 4\right)dx = \left[-\frac{1}{12}x^3\right]_{-4}^{4} + \left[4x\right]_{-4}^{4} = -\frac{1}{12}64 + \frac{1}{12}(-64) + 16 + 16 = \frac{64}{3}\tau.\mu$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα και κυρτή, για την οποία επί πλέον ισχύουν:

- $f(0)=f'(0)=1$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
- Η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x$

Δ1. Να υπολογίσετε τα όρια $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3 f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2 f(x)-x^3+x+1}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)-x>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10)$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1}

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x)$

Δ6. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-3x$ ως προς την κυρτότητα.

Δ7. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_h στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Δ8. Αν επιπλέον ισχύει $0<f'(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Δ1. Αφού η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \qquad (1)$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=0 \qquad (2)$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(f(x)-2x\right)+2x\right]=0+\infty=+\infty \qquad (3)$$

Για $x>0$ έχουμε: $\dfrac{x^3 f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2 f(x)-x^3+x+1}=\dfrac{\cancel{x^3}\left[f(x)-2x+3+\dfrac{1}{x^3}\right]}{\cancel{x^3}\left[\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right]}=\dfrac{\left(f(x)-2x\right)+3+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{f(x)}{x}-1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$.

Οπότε:

$$L_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 f(x)-2x^4+3x^3+1}{x^2 f(x)-x^3+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(x)-2x\right)+3+\frac{1}{x^3}}{\frac{f(x)}{x}-1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}\frac{0+3+0}{2-1+0+0}=3$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\left(0, f(0)\right)$ είναι:

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-1=x \Leftrightarrow y=x+1$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή, τότε θα ισχύει: $f(x)\geq y$ για κάθε $x\in R$ και $f(x)>y$, για κάθε $x\in R^*$ (δηλαδή εκτός από το σημείο επαφής).

Οπότε: $f(x)>y \Leftrightarrow f(x)>x+1 \Leftrightarrow f(x)-x>1$, για κάθε $x\in R^*$.

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει:

- $0\leq x\leq 1 \Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f\left(1\right) \overset{\text{Το"="δεν ισχύει παντού στο}[0,1]}{\Rightarrow} \int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 f(1)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx<f(1)$

  Όμοια

- $1\leq x\leq 2 \Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(2) \Rightarrow .... \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx<f(2)$
- ....
- ....
- $9\leq x\leq 10 \Rightarrow f(9)\leq f(x)\leq f(10) \Rightarrow .... \Rightarrow \int_9^{10} f(x)dx<f(10)$

  Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες έχουμε:

  $\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+...+\int_9^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10) \Rightarrow \int_0^{10} f(x)dx<f(1)+f(2)+...+f(10)$

Δ4. Είναι $D_f=A=R$ και επειδή η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο R τότε το σύνολο τιμών της θα είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(0,+\infty\right)$.

Αφού η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο R θα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\left(0,+\infty\right)$ που είναι σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f το R.

Δ5. Για να ορίζεται η $f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x)$ πρέπει

$\left(x^3\in D_{f^{-1}} \,\&\, 4x\in D_{f^{-1}}\right) \Leftrightarrow \left(x^3>0 \,\&\, 4x>0\right) \Leftrightarrow x>0$, οπότε:

$f^{-1}(x^3)<f^{-1}(4x) \overset{f:\text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x^3)\right)<f\left(f^{-1}(4x)\right) \Leftrightarrow x^3<4x \Leftrightarrow x^3-4x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)<0 \Leftrightarrow x<-2 \text{ ή } 0<x<2$.

Τελικά η λύση της ανίσωσης είναι: $x\in\left(0,2\right)$.

Δ6. Έχουμε $h(x)=f(x)-3x$. Η h είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά συναρτήσεων που είναι 2 φορές παραγωγίσιμες, οπότε:

$h'(x)=f'(x)-3$ και $h''(x)=f''(x)$

Επομένως η h έχει την ίδια κυρτότητα με την f, δηλαδή η συνάρτηση h είναι κυρτή στο R.

Δ7. Έστω $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της της h στο $+\infty$. Τότε:

$\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-3\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-3\overset{(1)}{=}2-3=-1$ και

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[h(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x+x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right] \overset{(2)}{=} 0\ .$$

Άρα η $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Όμοια αν $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της της h στο $-\infty$. Τότε:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-3\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x)\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-3 = 0\cdot 0-3=-3 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[h(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-3x+3x\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\ .$$

Άρα η $y=-3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Δ8. Είναι $h'(x)=f'(x)-3$ για κάθε $x\in R$ και επειδή $0<f'(x)<2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε θα έχουμε $-3<f'(x)-3<-1 \Rightarrow h'(x)<0$ για κάθε $x\in R$.

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

α. $\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x\left(1-f(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

β. $f\left(0\right)=\dfrac{3}{2}$

Δ₁. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ₃. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και το σύνολο τιμών της f .

Δ₄. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$

Δ₅. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\dfrac{\pi}{x}\right)$

Δ₆. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

Δ₇. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(\alpha+1)\left(e^x+2\right)=\left(e^x+1\right)(\alpha+2)$, έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha>0$

<u>Λύση</u>

Δ₁.

$$\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x\left(1-f(x)\right)\Leftrightarrow\left(e^x+1\right)f'(x)=e^x-e^xf(x)\Leftrightarrow$$

$$\left(e^x+1\right)f'(x)+e^xf(x)=e^x\Leftrightarrow\left[\left(e^x+1\right)f(x)\right]'=\left(e^x\right)'\Leftrightarrow\left(e^x+1\right)f(x)=e^x+c,\ (1)$$

Για $x=0$ η (1) γίνεται $2f(0)=1+c\Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{3}{2}=1+c\Leftrightarrow c=2$

Άρα ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. $f'(x)=\dfrac{e^x(e^x+1)-(e^x+2)e^x}{(e^x+1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}<0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Δ₃. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{0+2}{0+1}=2$ άρα η ευθεία $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,το σύνολο τιμών της θα είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left(1,2\right)$.

Δ₄. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{e^x+2}{e^x+1}dx=\int_0^1\frac{e^x+1+1}{e^x+1}dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{e^x+1}\right)dx$$

$$=\int_0^1 1dx+\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx=1+I,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ I=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x(e^x+1)}\,dx$$

Για τον υπολογισμό του I θέτω $u=e^x\Rightarrow du=e^x dx$ και
για $x=0\Rightarrow u=1$ και
για $x=1\Rightarrow u=e$ οπότε το ολοκλήρωμα I γίνεται:

$$I=\int_1^e\frac{1}{u(u+1)}du$$

Έχουμε $\dfrac{1}{u(u+1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{u+1}\Leftrightarrow 1=A(u+1)+Bu\Leftrightarrow 1=(A+B)u+A$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=-1\\A=1\end{cases}$$

Άρα $I=\displaystyle\int_1^e\frac{1}{u}du+\int_1^e\frac{-1}{u+1}du=\left[\ln u\right]_1^e-\left[\ln(u+1)\right]_1^e=(\ln e-0)-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)=1+\ln\frac{2}{e+1}$

Άρα $\mathrm{E}=1+1+\ln\dfrac{2}{e+1}=2+\ln\dfrac{2}{e+1}$ τ.μ

Δ₅. $L=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(xf(x)\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=2\lim_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=2l$

$$l=\lim_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\eta\mu\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}\underset{u\to0}{\overset{u=\frac{\pi}{x}}{=}}\pi\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=\pi\cdot1=\pi$$

Άρα $L=2\pi$

Δ₆. Αποδείξαμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και $1-1$ άρα αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Άρα $D_{f^{-1}}=\mathrm{B}=(1,2)$
Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f. Άρα $f^{-1}(B)=D_f=\mathbb{R}$
Για τον τύπο της f^{-1} θέτουμε $y=f(x)$ και διαδοχικά έχουμε:

$$y=\frac{e^x+2}{e^x+1}\Leftrightarrow ye^x+y=e^x+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=2-y\overset{y\neq1}{\Leftrightarrow}e^x=\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow$$

$$\ln e^x\overset{1<y<2}{=}\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow x=\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\frac{2-y}{y-1}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\frac{2-x}{x-1}$$

Άρα ο τύπος της f^{-1} είναι $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{2-x}{x-1}$ με $x\in(1,2)=\mathrm{D}_{f^{-1}}$

Δ7. $(\alpha+1)\left(e^x+2\right)=\left(e^x+1\right)(\alpha+2) \Leftrightarrow \dfrac{e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1} \Leftrightarrow f(x)=f(\ln\alpha)$

αφού $f(\ln\alpha)=\dfrac{e^{\ln\alpha}+2}{e^{\ln\alpha}+1}=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$

Επομένως η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=f(\ln\alpha) \Leftrightarrow x=\ln\alpha$ μοναδική λύση για κάθε $\alpha>0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ₃. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την οποία να βρείτε.

Δ₄. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ₅. Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(1+x^4\right)+e^{-2}<\ln 5+e^{-x^2}$.

Δ₆. Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το $\mathrm{O}(0,0)$ στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτόμενη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Δ₇. Αφού αποδείξετε ότι $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$ (θέτοντας $x=\varepsilon\varphi t$), να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f ,τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Λύση

Δ₁. $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{|2x|}{\left|x^2+1\right|}\le 1 \Leftrightarrow |2x|\le\left|x^2+1\right| \Leftrightarrow 2|x|\le x^2+1 \Leftrightarrow x^2+1-2|x|\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2-2|x|+1\ge 0 \Leftrightarrow \left(|x|-1\right)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ₂. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1$, έχει πεδίο ορισμού το $D_f=A=\mathbb{R}$.

Έχουμε $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}$

- Αν $x\ge 0 \Rightarrow \dfrac{2x}{1+x^2}\ge 0$ και $e^{-x}>0 \Rightarrow \dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x}>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
- Αν $x<0 \Rightarrow -1<\dfrac{2x}{1+x^2}$ και $0<-x \Rightarrow e^0<e^{-x} \Rightarrow 1<e^{-x}$

  Αθροίζοντας τις δύο ανισώσεις έχουμε:

  $0<\dfrac{2x}{1+x^2}+e^{-x} \Rightarrow 0<f'(x) \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα.
- Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.

Δ₃. Προφανής ρίζα η $x=0$ αφού $f(0)=\ln 1-e^0+1=0-1+1=0$ η οποία είναι και μοναδική επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως και ¨1-1¨.

Δ₄. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $D_f=A=\mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών είναι $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left[\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}}-1\right]+1\right]=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}.\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}}-1\right]+1=(+\infty).(0-1)+1=-\infty$, γιατί:

  - $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\underset{u\to+\infty}{\overset{-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$ και
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{-e^{-x}}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+x^2}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=$

$=-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0\cdot 0=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)-e^{-x}+1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]-\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}+1=(+\infty)-0+1=+\infty$

Άρα $f(\mathrm{A})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Δ5. $\ln\left(1+x^4\right)+e^{-2}<\ln 5+e^{-x^2}\Leftrightarrow\ln\left(1+x^4\right)-e^{-x^2}+1<\ln\left(1+2^2\right)-e^{-2}+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2)<f(2)\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2<2\Leftrightarrow|x|^2<\left(\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow|x|<\sqrt{2}\Leftrightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$.

Δ6. Επειδή $f(0)=0\Leftrightarrow f^{-1}(0)=0$, τότε το $\mathrm{O}(0,0)\in C_f\ \ και\ \ \mathrm{O}(0,0)\in C_{f^{-1}}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στη C_f στο $\mathrm{O}(0,0)$ είναι:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=1\cdot x\Leftrightarrow y=x$. (1)

Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου δηλαδή , ως προς την $y=x$.

Λόγω συμμετρίας , επειδή η $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο Ο(0,0), θα είναι και εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο Ο(0,0).

Άρα οι $C_f\ \ και\ \ C_{f^{-1}}$ στο κοινό τους σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ έχουν κοινή εφαπτομένη την $y=x$.

Δ7.

- Αν $x=\varepsilon\varphi t\Rightarrow dx=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$.

Για $x=0,\ έχουμε\ \ t=0$ και για $x=1,\ έχουμε\ \ t=\frac{\pi}{4}$. Οπότε:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\frac{\eta\mu^2 t}{\sigma\upsilon\nu^2 t}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt=\int_0^{\pi/4}\frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2 t}}{\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^2 t}\cdot\frac{1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2 t}}dt=$$

$$= \int_0^{\pi/4} dt = \left[t\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \ .$$

- Για $x \geq 0 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$\mathrm{E} = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left[\ln\left(1+x^2\right) - e^{-x} + 1\right]dx = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx + \int_0^1 -e^{-x}dx + \int_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 (x)' \ln\left(x^2+1\right)dx + \left[e^{-x}\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 = \left[x\ln(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{e} - 1 + 1 - 0 =$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx + \frac{1}{e} = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{e} - 2\left[x\right]_0^1 + 2\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx}_{\pi/4} = \ln 2 + \frac{1}{e} - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \left(\ln 2 + \frac{1}{e} + \frac{\pi}{2} - 2\right) \text{τ.μ.}$$

Άσκηση 7

Δίνονται συνάρτηση $f:\left[-\frac{\pi}{2},0\right]\to\mathbb{R}$ παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ και συνάρτηση $g(x)=3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ₁. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες στο διάστημα $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι άρτια και η $g'(x)$ είναι περιττή στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ₃. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Δ₄. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Δ₅. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g,f^{-1}

Δ₆. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τη $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $(\varepsilon_1): x+y=2$ και $(\varepsilon_2): x+y=-\frac{\pi}{2}$.

Δ₇. Να αποδείξετε ότι το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$ βρίσκεται πάνω στη $C_{f^{-1}}$

Δ₈. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, να βρείτε την κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο Α .

<u>Λύση</u>

Δ₁. Το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων είναι το $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$

Η συνάρτηση f είναι παράγουσα της $-3\eta\mu^3 x$ στο $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, άρα $f'(x)=-3\eta\mu^3 x$

Επίσης $g'(x)=\left(3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x\right)'=-3\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x=-3\eta\mu x\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=-3\eta\mu^3 x$ άρα $f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c,\ (1)$

Για $x=-\frac{\pi}{2}$ έχουμε $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$,οπότε η (1) για $x=-\frac{\pi}{2}$ γίνεται $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)+c$ ή $0=c$ άρα $f(x)=g(x)$ στο διάστημα $\Delta=\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Δ₂. Για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow -x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Επίσης

$g(-x)=3\sigma\upsilon\nu(-x)-\sigma\upsilon\nu^3(-x)=3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x=g(x)$ άρα άρτια.

Έχουμε $g(-x)=g(x)\Rightarrow\left(g(-x)\right)'=g'(x)\Rightarrow g'(-x)(-x)'=g'(x)\Rightarrow -g'(-x)=g'(x)$ άρα η g' είναι περιττή.

Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια. Επίσης αποδεικνύεται ότι αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή. Οι προτάσεις αυτές για να χρησιμοποιηθούν πρέπει να αποδειχθούν .

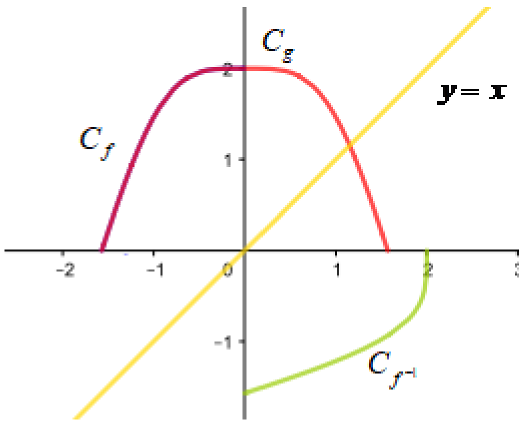
x	$-\pi/2$		0
$f'(x)$		+	
$f''(x)$		−	
$f(x)$		↗	

Δ3. Έχουμε $f'(x)=-3\eta\mu^3 x>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.Επίσης $f''(x)=-9\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, άρα η f είναι κοίλη. Η μονοτονία και η κυρτότητα της f φαίνεται συνοπτικά στον διπλανό πίνακα μεταβολών, όπου παρατηρούμε ότι η f έχει ελάχιστο στο $-\frac{\pi}{2}$ το $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, μέγιστο στο 0 το $f(0)=g(0)=2$ και δεν έχει σημεία καμπής .

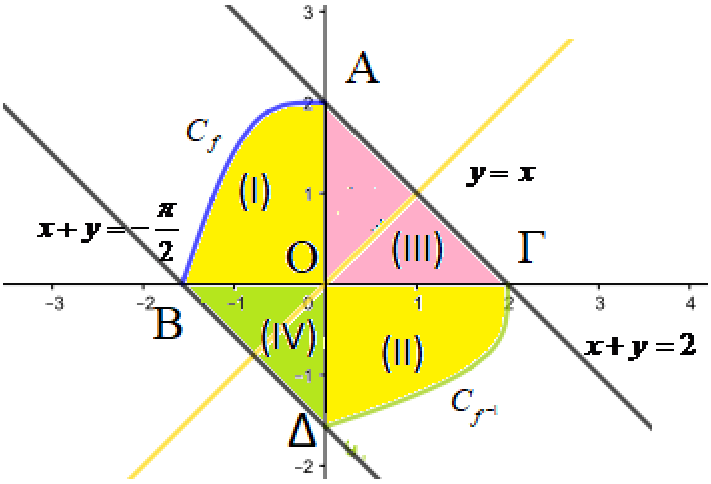
Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Έχουμε $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\le f(x)\le f(0)\Rightarrow 0\le f(x)\le 2$ άρα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο $[0,2]$ το οποίο είναι και πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Δ5. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $y=x$ του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου



Δ₆.



$$E=(I)+(III)+(II)+(IV)=E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Gamma O\Delta}+E_{\Delta OB}$$

Λόγω συμμετρίας τα χωρία (I) και (II) είναι ισεμβαδικά, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=2E_{AOB}+E_{AO\Gamma}+E_{\Delta OB}$$

$$E_{AOB}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^3 x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}3\sigma\upsilon\nu x dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^3 x dx=$$

$$[3\eta\mu x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^2 x(\eta\mu x)'dx=3(0-(-1))-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\eta\mu^2 x\right)(\eta\mu x)'dx\overset{*}{=}$$

$$3-\int_{-1}^{0}\left(1-u^2\right)du=3-\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{0}=3+\left(-1+\frac{1}{3}\right)=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\tau.\mu$$

* Θέτουμε $u=\eta\mu x\Rightarrow du=(\eta\mu x)'\,dx$ οπότε για $x=0\Rightarrow u=0,\ x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=-1$

$$E_{AO\Gamma}=\frac{(\mathrm{OA})(\mathrm{O\Gamma})}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\tau.\mu \quad \text{και} \quad E_{\Delta OB}=\frac{(\mathrm{OB})(\mathrm{O\Delta})}{2}=\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot}{2}=\frac{\pi^2}{8}\tau.\mu$$

Άρα $E=2E_{AOB}+E_{\Gamma O\Delta}+E_{\Delta OB}=2\cdot\frac{7}{3}+2+\frac{\pi^2}{8}=\frac{20}{3}+\frac{\pi^2}{8}\ \tau.\mu$

Δ₇. Το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)\in C_{f^{-1}}\Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$

$\frac{5\sqrt{2}}{4}=3\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sigma\upsilon\nu^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ το οποίο ισχύει.

Δ8. Η κλίση της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},-\frac{\pi}{4}\right)$ είναι ο αριθμός $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$.

Έχουμε $\left(fof^{-1}\right)(x)=x$ ή $f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow \left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)'=(x)' \Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right)\cdot\left(f^{-1}(x)\right)'=1$

Για $x=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ έχουμε $f'\left(f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1 \Leftrightarrow$

$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1 \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)\right)=1 \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x\left(x^2+x+3\right)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν $g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $g'(2)=0$

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x\to-\infty$.

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Δ4. Να βρείτε σημείο Β της C_h με $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $A(2,0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από τη C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

Δ5. Αν $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ και $\int_{g(0)}^{g(a)} f(x)dx=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\alpha): g'(x_0)=g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0$

<u>Λύση</u>

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)-\left(g(2-h)-g(2)\right)}{h}=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\frac{\left(g(2-h)-g(2)\right)}{h}\right)=0,(1)$$

- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(2+h)-g(2)}{h}\right)\overset{2+h=x}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right)\overset{g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma}{=}g'(2),(2)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{g(2-h)-g(2)}{h}\right)\overset{2-h=x}{=}-\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\right)\overset{g\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma}{=}-g'(2),(3)$

Η (1) με βάση τις $(2),(3)$ γίνεται $g'(2)-\left(-g'(2)\right)=0\Leftrightarrow 2g'(2)=0\Leftrightarrow g'(2)=0$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\left(x^2+x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+3}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+3)'}{(e^{-x})'}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-e^{-x}}\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(2x+1)'}{(-e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0 \Rightarrow y=0$ (οριζόντια ασύμπτωτη)

Δ3. Έχουμε $f'(x)=e^x\left(x^2+3x+4\right)>0\Rightarrow f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ και

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(x^2+3x+4\right)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι $(0,+\infty)$

Δ4. Το σημείο $B\left(x,\sqrt{f(x)}\right)$ της C_h απέχει απόσταση από το $A(2,0)$

$$(AB)=d(x)=\sqrt{(x-2)^2+\left(\sqrt{f(x)}-0\right)^2}=\sqrt{(x-2)^2+f(x)},x\in\mathbb{R}$$

$$d'(x)=\frac{2(x-2)+f'(x)}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}=\frac{\overbrace{2(x-2)+e^x\left(x^2+3x+4\right)}^{t(x)}}{2\sqrt{(x-2)^2+f(x)}}$$

Θα μελετήσουμε πρώτα τη συνάρτηση $t(x)=2(x-2)+e^x\left(x^2+3x+4\right)$ ως προς το πρόσημό της. Η εξίσωση $t(x)=0$ έχει προφανής λύσης την $x=0$

Έχουμε $t'(x)=2+e^x\left(\underbrace{x^2+5x+7}_{+}\right)>0$.Το πρόσημο της $t(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
t'	$+$		$+$
$d'=t$	$-\infty$ $\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$ $+\infty$

Το πρόσημό της $d(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
d'	$-$		$+$
d	$\searrow$		$\nearrow$

$$\min d(0)=\sqrt{7}$$

Οπότε το σημείο B είναι $\mathrm{B}(0,h(0))$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{f(0)}\right)$ ή $\mathrm{B}\left(0,\sqrt{3}\right)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_h στο σημείο B είναι

$\lambda_{(\varepsilon)}=h'(0)=\dfrac{f'(0)}{2\sqrt{f(0)}}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της AB είναι

$$\lambda_{\mathrm{AB}}=\frac{0-\sqrt{3}}{2-0}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\lambda_{\mathrm{AB}}\lambda_{(\varepsilon)}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-1\Rightarrow(\varepsilon)\perp\mathrm{AB}$$

Δ5. Από τη σχέση $\underbrace{g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2}_{H(x)}\le 0$ έχουμε $H(x)\le H(0)$ δηλαδή η συνάρτηση $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στο 0. Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $H(x)$ και παραγωγίσιμη στο 0 άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, άρα $H'(0)=0,\ (*)$.

Όμως ισχύει: $H(x)=g(2)+xg(x)-g(x+2)-\left(f(x)-3\right)^2 \Rightarrow$

$H'(x)=g(x)+xg'(x)-g'(x+2)-2\left(f(x)-3\right)f'(x)$.

Για $x=0 \Rightarrow H'(0)=0 \Rightarrow g(0)-g'(2)-2\left(f(0)-3\right)f'(0)=0 \Rightarrow g(0)=g'(2)$

$\Rightarrow g(0)=g'(2)=0,(2)$

Η σχέση $\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x)dx=0$ από τη (2) γίνεται $\int_{0}^{g(\alpha)} f(x)dx=0$

Αν $g(\alpha)>0$ και επειδή $f(x)>0 \Rightarrow \int_{0}^{g(\alpha)} f(x)dx>0$ άτοπο.

Αν $g(\alpha)<0$ και επειδή $f(x)>0 \Rightarrow \int_{0}^{g(\alpha)} f(x)dx<0$ άτοπο. Άρα $g(\alpha)=0$, (3).

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $W(x)=g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,\alpha]$.
  - $W(x)=g(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$ παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ (γινόμενο παραγωγίσιμων), οπότε και συνεχής στο $[0,\alpha]$
  - $W(0)=g(0)\cdot \sigma\upsilon\nu 0=0,\ W(\alpha)=g(\alpha)\cdot \sigma\upsilon\nu \alpha=0,$

    Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\alpha):W'(x_0)=0$

    Έχουμε όμως $W'(x)=g'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x-g(x)\cdot \eta\mu x$. Για

    $x=x_0 \Rightarrow W'(x_0)=g'(x_0)\cdot \sigma\upsilon\nu x_0-g(x_0)\cdot \eta\mu x_0=0 \Leftrightarrow$

    $g'(x_0)=g(x_0)\cdot \dfrac{\eta\mu x_0}{\sigma\upsilon\nu x_0} \Leftrightarrow g'(x_0)=g(x_0)\cdot \varepsilon\varphi x_0$

Άσκηση 9_(νέα 2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να γράψετε τη σχέση που συνδέει την f με την f'

Δ5. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Δ6. Να υπολογίσετε τα όρια: $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$, $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Δ7. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.

Δ8. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f'}$,τον άξονα $x'x$ τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\sqrt[3]{2}$

<u>Λύση</u>

Δ1. $f^3(x)+f(x)=x^3 \quad (1)$, για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$

Με άτοπο

Έστω ότι η f δεν είναι ↑ στο $\mathbb{R}$, άρα θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και $f(x_1)\ge f(x_2)$ (και όχι $f(x_1)<f(x_2)$)

$$f(x_1)\ge f(x_2)\Rightarrow \left.\begin{array}{c} f^3(x_1)\ge f^3(x_2)\\ f(x_1)\ge f(x_2)\end{array}\right\}\Rightarrow f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2)$$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_1^3\ge x_2^3 \Leftrightarrow x_1\ge x_2$ άτοπο. Άρα η f είναι ↑ στο $\mathbb{R}$

Δ2. Θέτουμε στην (1) όπου x το $-x$ και προκύπτει:

$$f^3(-x)+f(-x)=-x^3 \quad (2)$$

$$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} f^3(x)+f^3(-x)+f(x)+f(-x)=0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)+f(-x)]\left[f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)\right]+[f(x)+f(-x)]=0$$

$$\Leftrightarrow [f(x)+f(-x)]\left[\underbrace{f^2(x)-f(x)f(-x)+f^2(-x)}_{A}+1\right]^{*}=0$$

$\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0 \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f περιττή.

* Η παράσταση Α είναι τριώνυμο του 2ου βαθμού ως προς f(x) με $\Delta = f^2(-x) - 4f^2(-x) = -3f^2(-x) \le 0$ και $\alpha > 1$, άρα $\mathrm{A} \ge 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε $\mathrm{A} + 1 \ge 1 > 0$

Δ3. Έστω x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός

Για $x = x_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f^3(x_0) + f(x_0) = x_0^3 \quad (3)$

$$\overset{(1)-(3)}{\Rightarrow} f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) = x^3 - x_0^3$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x) - f(x_0)\right]\left[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)\right] + \left[f(x) - f(x_0)\right] = x^3 - x_0^3$$

$$\Leftrightarrow \left[f(x) - f(x_0)\right]\left[\underbrace{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)}_{\mathrm{B}} + 1\right] = x^3 - x_0^3 \quad (4)$$

Το B είναι τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς $f(x)$ με $\Delta = f^2(x_0) - 4f^2(x_0) = -3f^2(x_0) \le 0$ και $\alpha = 1 > 0$ άρα $\mathrm{B} \ge 0,$ για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{B} + 1 \ge 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\mathrm{B}+1} \le 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{\mathrm{B}+1}\right| \le 1 \quad (i)$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \left|f(x) - f(x_0)\right|\left|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1\right| = \left|x^3 - x_0^3\right|$$

$$\Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| = \frac{\left|x^3 - x_0^3\right|}{\left|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1\right|} \quad (5)$$

$$\overset{(i)}{\Rightarrow} \left|\frac{1}{\mathrm{B}+1}\right| \le 1 \Leftrightarrow \frac{\left|x^3 - x_0^3\right|}{\left|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1\right|} \le \left|x^3 - x_0^3\right| \quad (6)$$

$$\overset{(5),(6)}{\Rightarrow} \left|f(x) - f(x_0)\right| \le= \left|x^3 - x_0^3\right| \Leftrightarrow -\left|x^3 - x_0^3\right| \le f(x) - f(x_0) \le \left|x^3 - x_0^3\right|$$

$\lim\limits_{x \to \chi_0} \left|x^3 - x_0^3\right| = 0$ και $\lim\limits_{x \to \chi_0} \left[-\left|x^3 - x_0^3\right|\right] = 0$ άρα από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0)\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Δηλαδή η f συνεχής στο x_0 και επειδή x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός, τελικά η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Για $x \ne x_0 \overset{(4)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) = \dfrac{(x - x_0)(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{[f^2(x) + f(x) \cdot f(x_0) + f^2(x_0) + 1]}$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^2+x\cdot x_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1} \quad (7)$$

έχουμε $\lim\limits_{x\to \chi_0} f(x)=f(x_0)$ αφού η f συνεχής άρα

$$\lim_{x\to\chi_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to\chi_0}\frac{x^2+x\cdot x_0+x_0^2}{f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow f'(x_0)=\frac{3x_0^2}{3f^2(x_0)+1}$$

και επειδή x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός άρα $f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ5. $\overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)[f^2(x)+1]=x^3 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^3}{f^2(x)+1} \quad (8)$

- αν $x>0 \Leftrightarrow x^3>0 \overset{(8)}{\Rightarrow} f(x)>0$
- αν $x<0 \Leftrightarrow x^3<0 \overset{(8)}{\Rightarrow} f(x)<0$
- αν $x=0 \Rightarrow f(0)=0$
- αν $x>0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f^3(x)+f(x)=x^3 \Rightarrow f^3(x)<x^3 \Leftrightarrow f(x)<x \Rightarrow 0<f^2(x)<x^2 \Leftrightarrow$

$1<f^2(x)+1<x^2+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f^2(x)+1}>\dfrac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{f^2(x)+1}>\dfrac{x^3}{x^2+1} \overset{(8)}{\Leftrightarrow} f(x)>\dfrac{x^3}{x^2+1} \quad (9)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \overset{(9)}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)\underset{u\to+\infty}{\overset{u=-x}{=}}\lim_{u\to+\infty}f(-u)\overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=}\lim_{u\to+\infty}[-f(u)]=-\lim_{u\to+\infty}f(u)=-(+\infty)=-\infty$$

άρα η f συνεχής και ↑ στο $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ άρα Σ.Τ.

$$f(\mathbb{R})=(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Δ6.

- Δείξαμε ότι $f(x)=\dfrac{x^3}{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^3}=\dfrac{1}{f^2(x)+1}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f^2(x)+1]=\lim_{x\to+\infty}f^2(x)+1=+\infty+1=+\infty$$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f^2(x)+1}=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f^2(x)+1}=0$

- $f^3(x)+f(x)=x^3 \overset{x>0}{\Rightarrow} \dfrac{f^3(x)}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^3}=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3=1-\dfrac{f(x)}{x^3} \overset{x>0}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{1-\dfrac{f(x)}{x^3}} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}[1-\frac{f(x)}{x^3}]}=\sqrt[3]{1-0}=\sqrt[3]{1}=1$$

Δ7. Η $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Θέτω $f(x)=y$ και επιλύω ως προς x

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} y^3+y=x^3 \Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{y^3+y}, \alpha\nu\ y^3+y\geq 0 \Leftrightarrow y(y^2+1)\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 0\\ -\sqrt[3]{-y^3-y}, \alpha\nu\ y^3+y<0 \Leftrightarrow y<0\end{cases}$$

Άρα $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{y^3+y}, \alpha\nu\ y\geq 0\\ -\sqrt[3]{-y^3-y}, \alpha\nu\ y<0\end{cases}$

ή $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^3+x}, \alpha\nu\ x\geq 0\\ -\sqrt[3]{-x^3-x}, \alpha\nu\ x<0\end{cases}$

Δ8. Δείξαμε ότι $f'(x)=\dfrac{3x^2}{3f^2(x)+1}\geq 0$, για κάθε $x\geq 0$

$$E=\int_0^{\sqrt[3]{2}} f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^{\sqrt[3]{2}}=f(\sqrt[3]{2})-f(0)=f(\sqrt[3]{2})$$

Έχουμε: $f(\sqrt[3]{2})=a \overset{(1)}{\Rightarrow} a^3+a=(\sqrt[3]{2})^3 \Leftrightarrow a^3+a-2=0$,

Horner:

1	0	1	−2	1
	1	1	2	
1	1	2	0	

$\Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+2)=0$ $\alpha=1$ ή $\alpha^2+\alpha+2=0$ αδύνατη αφού $\Delta=-7<0$

άρα $E=f(\sqrt[3]{2})=a=1\ \tau.\mu$

Άσκηση 10_(νέα 2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-6a^2x^2+8a^2x+5a^4$ με $\alpha>1$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο σημεία καμπής.

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στη θέση x_1 με $x_1<-a$, παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο στη θέση x_2 με $-a<x_2<a$ και επίσης παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο στη θέση x_3 με $x_3>a$

Δ₃. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του a για την οποία ισχύει $f'(x)\geq 32-32a$ για κάθε $x\geq a$

Δ₄. Να αποδείξετε ότι $f(a+10)-f(a)<f'(a+1)+f'(a+2)+...+f'(a+10)$

<u>Λύση</u>

Δ₁. $f(x)=x^4-6a^2x^2+8\alpha^2x+5\alpha^4$, $\alpha>1$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική.

$f'(x)=4x^3-12\alpha^2x+8\alpha^2$

$f''(x)=12x^2-12\alpha^2$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12(x^2-\alpha^2)=0 \Leftrightarrow x^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \mathrm{x}=-\alpha \;\; \acute{\eta} \;\; \mathrm{x}=\alpha$

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

- Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,\alpha]$ και στο $[\alpha,+\infty)$
- Η f είναι κοίλη στο $[-\alpha,\alpha]$

Η C_f έχει δύο σημεία καμπής, τα $\mathrm{A}(-\alpha,-8\alpha^3)$ και $\mathrm{B}(\alpha,8\alpha^3)$

$f(\alpha)=\alpha^4-6\alpha^4+8\alpha^3+5\alpha^4=8\alpha^3$

$f(-\alpha)=\alpha^4-6\alpha^4-8\alpha^3+5\alpha^4=-8\alpha^3$

Δ₂.

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- $f''(\mathrm{x})>0, \forall x\in(-\infty,-\alpha) \Rightarrow \eta\ f' \uparrow \sigma\tau o(-\infty,-\alpha]$
- $f''(\mathrm{x})<0, \forall x\in(-\alpha,\alpha) \Rightarrow \eta\ f' \downarrow \sigma\tau o[-\alpha,\alpha]$
- $f''(x)>0,\ \forall x\in(\alpha,+\infty) \Rightarrow \eta\ f' \uparrow \sigma\tau o[\alpha,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(4\mathrm{x}^3)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}(4\mathrm{x}^3)=+\infty$

$f'(-\alpha)=8\alpha^3+8\alpha^2=8\alpha^2(\alpha+1),\quad f'(\alpha)=-8\alpha^3+8\alpha^2=8\alpha^2(-\alpha+1),$

$\Delta_1=(-\infty,-\alpha)$, Η f' συνεχής και $\uparrow$ στο Δ_1 άρα $f'(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x),\ f'(-a)\right)=(-\infty, 8a^2\underset{(+)}{(a+1)})$

$\Delta_2=[-\alpha,\alpha]$, η f' συνεχής και $\downarrow$ στο Δ_2

Άρα $f'(\Delta_2)=\left[f'(\alpha),\ f'(-a)\right]=[8a^2\underset{(-)}{(-a+1)}), 8a^2\underset{(+)}{(a+1)})]$

$\Delta_3=(\alpha,+\infty)$ η f' συνεχής και $\uparrow$ στο Δ_3

Άρα $f'(\Delta_3)=\left(f'(a),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x),\right)=(8a^2\underset{(-)}{(-a+1)},+\infty)$

- Το $0\in f'(\Delta_1)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1=(-\infty,-\alpha)$ τ.ώ. $f'(x_1)=0,$ αφού η $f'\uparrow$ στο Δ_1
- Το $0\in f'(\Delta_2)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(-a,-a)$ τ.ώ. $f'(x_2)=0$
- Το $0\in f'(\Delta_3)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_3\in(\alpha,+\infty)$ τ.ώ. $f'(x_3)=0$

x	$-\infty$		x_1		$-\alpha$		x_2		α		x_3		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$T.E.$	$\nearrow$		$\nearrow$	$T.M.$	$\searrow$		$\searrow$	$T.E.$	$\nearrow$	$+\infty$

- $x < x_1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ η f $\downarrow$ στο $(-\infty, x_1]$

- $$\left.\begin{array}{l} x_1 < x < -a \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \\ -a \le x < x_2 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\} \acute{\alpha}\rho\alpha\ f'(x) > 0 \text{ για κάθε x} \in (x_1, x_2) \text{ οπότε η} f$$

  γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$

- $$\left.\begin{array}{l} x_2 < x \le \alpha \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \\ \alpha \le x < x_3 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_3) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ για κάθε x} \in (x_2, x_3) \text{ άρα η } f \downarrow \text{ στο } [x_2, x_3]$$

- $x > x_3 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_3) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ η $f \uparrow$ στο $[x_3, +\infty]$

Από τα παρακάτω και τον πίνακα 3 προκύπτει ότι η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο στο $x_1 < -\alpha$, τοπ. μέγιστο στο x_2 με $-\alpha < x_2 < \alpha$ και τοπ. ελάχιστο στο x_3 με $x_3 > \alpha$.

Δ₃. Η $f' \uparrow$ στο $[\alpha, +\infty]$ άρα $x \ge \alpha \Leftrightarrow f'(x) \ge f'(\alpha)$ (i)

Για να ισχύει $f'(x) \ge 32 - 32\alpha$, για κάθε $x \ge \alpha$ λόγω της (i) αρκεί να ισχύει

$f'(\alpha) \ge 32 - 32\alpha \Leftrightarrow -8\alpha^3 + 8\alpha^2 \ge 32 - 32\alpha$

$\Leftrightarrow 8\alpha^3 + 8\alpha^2 + 32\alpha - 32 \ge 0 \Leftrightarrow 8\alpha^2(-\alpha + 1) - 32(-\alpha + 1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (-\alpha + 1)(8\alpha^2 - 32) \ge 0 \Leftrightarrow 8(-\alpha + 1)(\alpha^2 - 4) \ge 0 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha) \ge 0$

α	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$8(-\alpha+1)$	$+$		$+$ 0 $-$		$-$
α^2-4	$+$	0 $-$		$-$ 0	$+$
$\Gamma(\alpha)$	$+$	0 $-$	0 $+$	0	$-$

$\Gamma(\alpha) \ge 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha \le 2$ άρα $a_{\max} = 2$

Δ₄. Δείξαμε ότι η $f' \uparrow \sigma\tau o[\alpha, +\infty]$ Άρα:

$$\alpha \le x \le \alpha+1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\alpha) \le f'(x) \le f'(\alpha+1) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx < \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(\alpha+1)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx < f'(\alpha+1)(\alpha+1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx < f'(\alpha+1)$$

$$\alpha+1 \le x \le \alpha+2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f'(x)dx < f'(\alpha+2)$$

$$\vdots$$

$$\alpha+9 \le x \le \alpha+10 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \int_{\alpha+9}^{\alpha+10} f'(x)dx < f'(\alpha+10)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} f'(x)dx + \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f'(x)dx + \ldots + \int_{\alpha+9}^{\alpha+10} f'(x)dx < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+10} f'(x)dx < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

$$\Leftrightarrow [f(x)]_{\alpha}^{\alpha+10} < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

$$\Leftrightarrow f(a+10) - f(\alpha) < f'(\alpha+1) + f'(\alpha+2) + \ldots + f'(\alpha+10)$$

Άσκηση 11_(νέα 2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία επιπλέον σχύει:

$f(0)=0$, $f(4)=8$ και $f'(0)<0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$

Δ3. Αν η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$

1. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2. Αν η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$
3. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $[0,+\infty)$ σε μοναδικό σημείο $x_0\in(0,4)$
4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x+1)-f(x)=2$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο [0,3]

Λύση

Δ1. $f'(0)<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}<0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ άρα $\dfrac{f(x)}{x}<0$ κοντά στο μηδέν από δεξιά, επομένως $f(x)<0$ κοντά στο 0 αφού $x>0$.Άρα υπάρχει $\kappa>0$ τ.ώ. $f(\kappa)<0$.
Έτσι:

Η f συνεχής στο $[\kappa,4]$ και $f(\kappa)f(4)<0$ άρα σύμφωνα με θεώρημα Bolzano

$\exists x_1\in(\kappa,4)\subseteq(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$

Δ2. Η f συνεχής στο $[0,4]$

Η f παρ/μη συνεχής στο $(0,4)$

άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\rho\in(0,4)$ τέτοιο ώστε

$$\left.\begin{aligned} &f'(\rho)=\frac{f(4)-f(0)}{4}=\frac{8-0}{4}=2>0 \\ &f'(0)<0\Leftrightarrow -f'(0)>0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(\rho)-f'(0)>0 \quad (i)$$

Η f' συνεχής στο $[0,\rho]\subseteq[0,4]$

Η f' παρ/μη συνεχής στο $(0,\rho)\subseteq(0,4)$

άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0,\rho) \subseteq (0,4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(\rho) - f'(0)}{\rho} > 0$

λόγω (i) αφού και $\rho > 0$

$\Delta_3$1. Η εξίσωση εφαπτομένης στη C_f στο $(\rho, f(\rho))$ του (β) ερωτήματος είναι:

$y - f(\rho) = f'(\rho)(x-\rho) \Leftrightarrow y = f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho)$

Η f κυρτή στο $[0,+\infty]$ άρα η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f στο $[0,+\infty]$ βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα ισχύει $f(x) \geq f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho) \quad (\alpha)$ για κάθε $x \in [0,+\infty)$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty}[f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho)] = \lim\limits_{x\to\infty}[f'(\rho)x] = f'(\rho)\lim\limits_{x\to\infty} x = f'(\rho)(+\infty) = +\infty, \quad (\beta)$ αφού

$f'(\rho) > 0 \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x\to\infty}[f'(\rho)x - \rho f'(\rho) + f(\rho)] \underset{(\alpha)}{\overset{(\beta)}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

$\Delta_3$2. Αφού η $y = x$ είμαι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1 \quad (\gamma)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \dfrac{\frac{+\infty}{+\infty}}{\Delta - 1 - \mathrm{H}} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{(x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ άρα $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \overset{(\gamma)}{=} 1$

$\Delta_3$3. Η f συνεχής στο $[0, x_1]$ όπου x_1 το x_1 του ερωτήματος (α)

- Η f παρ/μη στο $(0, x_1)$
- $f(0) = f(x_1) = 0$

άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (0, x_1) \subseteq (0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

Η f κυρτή στο $[0,+\infty]$ άρα η $f' \uparrow$ στο $(0,+\infty)$

$0 < x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

$x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	Ολ.Ελ.	$\nearrow$

Άρα η f στο x_0 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο που είναι ολικό. Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f' είναι $\uparrow$ στο $(0,+\infty)$ επομένως και 1-1.

Δ₃4. Έστω ότι η εξίσωση $f(x+1)-f(x)=2 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)-2=0,$ είναι αδύνατη στο $[0,3]$ άρα η $g(x)=0,$ όπου $g(x)=f(x+1)-f(x)-2$ είναι αδύνατη στο $[0,3]$. Επομένως

Η g συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών

$g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,3]$

άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,3]$

Έστω $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,3]$. Άρα:

$$g(0)>0 \Leftrightarrow f(1)-f(0)-2>0 \Leftrightarrow f(1)-f(0)>2$$
$$g(1)>0 \Leftrightarrow f(2)-f(1)-2>0 \Leftrightarrow f(2)-f(1)>2$$
$$g(2)>0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)-2>0 \Leftrightarrow f(3)-f(2)>2$$
$$g(3)>0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)-2>0 \Leftrightarrow f(4)-f(3)>2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$f(4)-f(0)>8 \Leftrightarrow 8-0>8 \Leftrightarrow 8>8$ άτοπο

Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,3]$

Άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=2$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[0,3]$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/05/2020