∀fter — maths

Μάρκος Βασίλης Αθηνα 2020

Όλες οι αποδείξεις

Γ΄ Λυκείου: Σχόλια πάνω στις αποδείξεις του σχολικού βιβλίου

Πρόλογος

Το παρόν αποτελεί μία συλλογή λυμένων παραδειγμάτων και θεμάτων πάνω στην ύλη της πρώτης ενότητας των Μαθηματικών προσανατολισμού της Γ΄ Γενικού Λυκείου. Τα παραδείγματα που θα βρείτε εδώ μέσα είναι απλά, εν γένει, και στοχεύουν στο να εμπεδωθούν οι βασικές έννοιες της ενότητας. Ωστόσο, τα λυμένα θέματα που βρίσκονται στο τέλος του παρόντος είναι πιο απαιτητικά και απαιτούν συνδυασμό των γνώσεων που έχει αποκτήσει ως τώρα ο/η μαθητής/τρια.

Το παρόν αποτελεί μέρος σειράς σημειώσεων, λυμένων παραδειγμάτων και, γενικότερα, διδακτικού υλικού για όλες τις τάξεις του λυκείου που μπορείτε να βρείτε στο **aftermathsgr.wordpress.com**. Για λάθη, διορθώσεις, παραλείψεις και προτάσεις επικοινωνήστε μαζί μου είτε μέσω e-mail στο `vassileiosmarkos@gmail.com` είτε μέσω της φόρμας επικοινωνίας: **https://aftermathsgr.wordpress.com/contact/**.

Καλό διάβασμα!

Περιεχόμενα

1 Συναρτήσεις, Όρια, Συνέχεια

1.1 Ιδιότητες Ορίων

Πόρισμα 1.1

Για ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\
&= \lim_{x\to x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x\to x_0} (\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu \lim_{x\to x_0} (x^\nu) + \alpha_{\nu-1} \lim_{x\to x_0} (x^{\nu-1}) + \lim_{x\to x_0} \alpha_0 \\
&= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 \\
&= P(x_0).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 1.2

Για μία ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απόδειξη. Διαδοχικά έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

□

1.2 Συνέχεια συνάρτησης

Πόρισμα 1.3

Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής.

Απόδειξη. Άμεσο, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

□

Πόρισμα 1.4

Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Άμεσο, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

□

Θεώρημα 1.1: Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

– η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

– $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε:

$$f(x_0) = \eta$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

– η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και

– $g(\alpha)g(\beta) < 0$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

□

Η ιδέα της απόδειξης

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

2

Διαφορικός Λογισμός

2.1 Η έννοια της παραγώγου

Θεώρημα 2.1

Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] \\ &= \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

□

Η ιδέα της απόδειξης

Προσπαθούμε να δείξουμε ότι $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$ εμφανίζοντας τον λόγο μεταβολής $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ μέσα στην παράσταση $f(x) - f(x_0)$.

2.2 Παραγωγίσιμες Συναρτήσεις - Παράγωγος Συνάρτηση

Πρόταση 2.1

Έστω η συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή:

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$.

□

Η ιδέα της απόδειξης

Η ιδέα είναι η ίδια σε όλες τις επόμενες αποδείξεις: απλοποιούμε τον λόγο μεταβολής και παίρνουμε όριο καθώς $x \to x_0$

Πρόταση 2.2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή:

$$(x)' = 1$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 0$.

□

Πρόταση 2.3

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} &= \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}\\ &= x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x \to x_0} (x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})\\ &= x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},\end{aligned}$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.

□

Πρόταση 2.4

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} \\ &= \frac{x - x_0}{(x - x_0)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},\end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

□

2.3 Κανόνες Παραγώγισης

Θεώρημα 2.2: Παράγωγος Αθροίσματος

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

□

Η ιδέα της απόδειξης

Κι εδώ ξεκινάμε με τον λόγο μεταβολής και εμφανίζουμε γνωστά όρια — τις παραγώγους των f, g, συνήθως.

Πρόταση 2.5

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή:

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

□

Πρόταση 2.6: Παράγωγος της εφx

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x : \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή:

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(\varepsilon\phi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \\ &= \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.\end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Πρόταση 2.8

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή:

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

□

Η ιδέα της απόδειξης

Πολύ χρήσιμη η σχέση

$$\alpha^\beta = e^{\beta \ln \alpha}.$$

Πρόταση 2.9

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Απόδειξη. Πράγματι

- αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ
- αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε: $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

  και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

□

2.4 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

Θεώρημα 2.3

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1.x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$
Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (2.1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

□

Η ιδέα της απόδειξης

Ένας τρόπος είναι να αποδείξουμε ότι $f(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$. Ωστόσο, πώς θα «ψυχανεμιστούμε» αυτήν τη σταθερά; Μετά από λίγη σκέψη, παρατηρούμε το εξής: μία συνάρτηση είναι σταθερή αν και μόνον αν $f(x_1) = f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$. Τα υπόλοιπα είναι ένα Θ.Μ.Τ. μακριά...

Πόρισμα 2.1

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:
$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει
$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$
Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

□

Θεώρημα 2.4

Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Απόδειξη.

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) <$

$f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις ποϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

– Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

□

Η ιδέα της απόδειξης

Εφόσον $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, γεωμετρικά έχουμε ότι οι εφαπτόμενες της f θα έχουν θετική κλίση. Αν λοιπόν επιλέξουμε αυθαίρετα δύο σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της C_f, μέσω του Θ.Μ.Τ., μπορούμε να βρούμε εφαπτομένη παράλληλη στη χορδή που σχηματίζουν αυτά τα δύο σημεία και, δεδομένου ότι η εφαπτομένη έχει θετική κλίση, και η χορδή θα έχει θετική κλίση, δηλαδή, αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$.

2.5 Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης

Θεώρημα 2.5: Fermat

Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και } f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{2.2}$$

Επειδή, επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

– αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (2.2), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \tag{2.3}$$

– αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (2.2), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \tag{2.4}$$

Έτσι, από τις (2.2), (2.3) και (2.4) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. □

Η ιδέα της απόδειξης

Αν η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0, «πλησιάζοντας» αρκετά το x_0, αριστερά από το σημείο $(x_0, f(x_0))$ η γραφική παράσταση της f θα έχει χορδές με μη αρνητική κλίση — αφού πρέπει να «ανέβουμε» προς το μέγιστο — και δεξιά από το σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα έχει χορδές με αρνητική κλίση — ανάλογα, πρέπει να «κατέβουμε». Επομένως, παίρνοντας τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ μπορούμε να συνάγουμε το πρόσημο του κάθε ορίου (≥ 0 και ≤ 0 αντίστοιχα) και, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να συνάγουμε ότι $f'(x_0) = 0$.

Θεώρημα 2.6

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Απόδειξη. i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \tag{2.5}$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0] \tag{2.6}$$

Επομένως, λόγω των (2.5) και (2.6) ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.
- Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Ομοίως αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

□

Η ιδέα της απόδειξης

Χρησιμοποιούμε το πρόσημο της παραγώγου για να συνάγουμε την μονοτονία της f πρώτα στο $(\alpha, x_0]$ (γνησίως αύξουσα, αφού $f'(x) > 0$) και μετά στο $[x_0, \beta)$ (γνησίως φθίνουσα, αφού $f'(x) < 0$). Στη συνέχεια για $\alpha < x \leq x_0 \overset{f:\uparrow}{\Longrightarrow} f(x) \leq f(x_0)$ και στη συνέχεια για $\beta > x \geq x_0 \overset{f:\downarrow}{\Longrightarrow} f(x_0) \geq f(x)$ οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Η ιδέα της απόδειξης

Υποθέτουμε ότι $f'(x) > 0$ στο $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και παίρνουμε $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_0 < x_2$. Από την μονοτονία της f στα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$ βλέπουμε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Έπειτα, επιλέγουμε $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με x_1, x_2 και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α') $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$
β') $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$
γ') $x_1 < x_0 < x_2$

Προσοχή στην τρίτη περίπτωση στην οποία «συγκολλούμε» τα δύο διαστήματα εκατέρωθεν του x_0.

3

Ολοκληρωτικός Λογισμός

3.1 Αόριστο Ολοκλήρωμα

Θεώρημα 3.1

Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, τότε

– όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

– κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη. – Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x)+c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μία παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

– Έστω G μία άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθα } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με γνωστό πόρισμα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

□

3.2 Η Συνάρτηση Ολοκλήρωμα $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Θεώρημα 3.2: Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μία παραγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \tag{3.1}$$

Από την (3.1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

□