ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Μιχαήλ Λάμπρου, Πανεπιστήμιο Κρήτης, για το πρόγραμμα MATHEU

Παράγραφος 1. Ιστορική Εισαγωγή

Στη φιλοσοφία και τις εμπειρικές επιστήμες ο όρος *επαγωγή* χρησιμοποιείται για να περιγράψει την διαδικασία διατύπωσης γενικών κανόνων από εξέταση ειδικών περιπτώσεων. Στα Μαθηματικά, αντιθέτως, τέτοια συμπεράσματα πρέπει να αποφεύγονται διότι τα μαθηματικά είναι επιστήμη που βασίζεται σε αποδείξεις, και κάθε πρόταση πρέπει να συνοδεύεται από αυστηρή απόδειξη. Για παράδειγμα ο John Wallis (1616-1703) υπέστη ισχυρή κριτική από τους σύγχρονούς του μαθηματικούς επειδή στο περίφημο έργο του *Arithmetica Infinitorum* (1656), μετά από εξέταση των εξής έξι σχέσεων,

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ , \qquad \frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12},$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\ , \qquad \frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24},$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}, \qquad \frac{0+1+4+9+16+25+36}{36+36+36+36+36+36+36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$

ισχυρίστηκε, χωρίς περαιτέρω επιχειρήματα, ότι ο γενικός κανόνας

$$\frac{0^2+1^2+2^2+...+n^2}{n^2+n^2+n^2...+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n},$$

έπεται “*per modum inductionis*” (από τη μέθοδο της επαγωγής).

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο ισχυρισμός του Wallis’ είναι σωστός: ισοδυναμεί στην ορθή πρόταση (γνωστή και στον Αρχιμήδη) ότι

$$1^2+2^2+...+n^2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right)n^2(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Αυτό όμως που όφειλε να κάνει ήταν να δώσει την αυστηρή απόδειξη του τύπου, και να μην αρκεστεί στα έξι παραδείγματα.

Ένας τρόπος να αντιμετωπίσουμε τέτοιες καταστάσεις είναι να χρησιμοποιήσουμε την λεγόμενη μέθοδο της *τελείας* ή *μαθηματικής επαγωγής*. Η μέθοδος αυτή, που καμιά φορά ονομάζεται απλά *επαγωγή*, αναπτύσσεται σε αυτά που ακολουθούν.

Η επαγωγή είναι μία απλή αλλά ισχυρή και ευέλικτη μέθοδος απόδειξης προτάσεων που αφορούν, άμεσα ή έμμεσα, ακεραίους. Έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε σχεδόν όλο το φάσμα των μαθηματικών: την συναντάμε σε μεγάλο εύρος κλάδων όπως στην Άλγεβρα, στην Γεωμετρία, στην Τριγωνομετρία, στην Ανάλυση, στην Συνδυαστική, στην Θεωρία Γραφημάτων και σε πολλούς άλλους κλάδους.

Η αρχή της επαγωγής έχει μακρά ιστορία στα μαθηματικά. Κατ΄ αρχάς, παρ’ όλο που η ίδια η αρχή δεν διατυπώνεται με σαφήνεια σε κανένα αρχαίο ελληνικό κείμενο, υπάρχουν αρκετά σημεία όπου γίνεται χρήση ενός πρόδρομου σταδίου της. Άλλωστε ορισμένοι ιστορικοί αναγνωρίζουν στο ακόλουθο χωρίο από τον διάλογο *Παρμενίδη*

(§147a7-c3) του Πλάτωνα (427-347 BC) ως την αρχαιότερη χρήση επαγωγικού συλλογισμού:

Δύο ἄρα δεῖ τὸ ὀλίγιστον εἶναι, εἰ μέλλει ἅψις εἶναι. – Δεῖ. – Ἐὰν δὲ τοῖν δυοῖν ὅροιν τρίτον προσγένηται ἑξῆς, αὐτὰ μὲν τρία ἔσται, αἱ δὲ ἅψεις δύο. – Ναί. – Καὶ οὕτω δὴ ἀεὶ ἑνὸς προσγιγνομένου μία καὶ ἅψις προσγίγνεται, καὶ συμβαίνει τὰς ἅψεις τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν μιᾷ ἐλάττους εἶναι. ᾧ γὰρ τὰ πρῶτα δύο ἐπλεονέκτησεν τῶν ἅψεων εἰς τὸ πλείω εἶναι τὸν ἀριθμὸν ἢ τὰς ἅψεις, τῷ ἴσῳ τούτῳ καὶ ὁ ἔπειτα ἀριθμὸς πᾶς πασῶν τῶν ἅψεων πλεονεκτεῖ· ἤδη γὰρ τὸ λοιπὸν ἅμα ἕν τε τῷ ἀριθμῷ προσγίγνεται καὶ μία ἅψις ταῖς ἅψεσιν. – Ὀρθῶς. – Ὅσα ἄρα ἐστὶν τὰ ὄντα τὸν ἀριθμόν, ἀεὶ μιᾷ αἱ ἅψεις ἐλάττους εἰσὶν αὐτῶν. – Ἀληθῆ.

Και πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο όροι, εάν πρόκειται να υπάρχει επαφή. – Πρέπει – Εάν δε στους δύο όρους προστεθεί τρίτος διαδοχικά, τότε αυτοί μεν θα είναι τρεις, οι δε επαφές δύο. – Ναι – Και έτσι αν ένας όρος προστίθεται συνέχεια, και μία επαφή θα προστίθενται, και έπεται ότι οι επαφές θα είναι μία λιγότερες από το πλήθος των όρων. Διότι με όποιον αριθμό τα δύο πρώτα υπερέχουν του πλήθους των επαφών, με το ίδιο αριθμό το μετέπειτα πλήθος των όρων θα υπερβαίνει το πλήθος των επαφών. Διότι κατόπιν όταν προστίθεται ένας όρος, προστίθεται και μία επαφή στο πλήθος των επαφών. – Σωστά – Όσο λοιπόν είναι το πλήθος των όρων, πάντα οι επαφές θα είναι κατά μία λιγότερες. –Σωστά -.

Το προηγούμενο χωρίο είναι, βέβαια, από φιλοσοφικό κείμενο. Υπάρχουν όμως και διαφορά μαθηματικά έργα τα οποία περιέχουν μια πρώιμη μορφή επαγωγικού συλλογισμού. Ένα τέτοιο, παραδείγματος χάριν, είναι στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (~330 - ~ 265 π.Χ.) Πρόταση 31 του βιβλίου VII, όπου αποδεικνύεται ότι κάθε φυσικός αριθμός είτε είναι πρώτος είτε διαιρείται από κάποιον πρώτο.

Μία απόδειξη κάπως πιο κοντά στη σύγχρονη μορφή της επαγωγής περιέχεται στην *Συναγωγή* του Πάππου (~290-~350 μ.Χ.). Εκεί αποδεικνύεται το ακόλουθο γεωμετρικό θεώρημα:

Έστω AB ένα ευθύγραμμο τμήμα και C ένα σημείο του. Θεωρούμε από την ίδια πλευρά του AB τρία ημικύκλια με διαμέτρους AB, AC και CB, αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε τώρα κύκλους C_n ως εξής: ο C_1 εφάπτεται των τριών παραπάνω ημικυκλίων. Ο C_{n+1} εφάπτεται του C_n και των ημικυκλίων επί των AB και AC. Αν d_n το μήκος της διαμέτρου του C_n και h_n η απόσταση του κέντρου του από την AB. Τότε $h_n = nd_n$.

Ο τρόπος με τον οποίο αποδεικνύει το θεώρημα ο Πάππος είναι να δείξει γεωμετρικά την αναδρομική σχέση $h_{n+1} /d_{n+1} = (h_n + d_n)/d_n$. Κατόπιν επικαλείται ένα αποτέλεσμα του Αρχιμήδη (287 - 212 π.Χ.) από το έργο του *Λήμματα* (Πρόταση 6) η οποία δείχνει την ορθότητα του παραπάνω θεωρήματος στην περίπτωση n = 1. Χρησιμοποιώντας την τελευταία σε συνδυασμό με την αναδρομική σχέση, συνάγει το αποτέλεσμα για το γενικό n.

Μετά την πτώση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, οι Μούσες μετακόμισαν στον Αραβικό κόσμο. Η επαγωγή, αν και δεν αναφέρεται ρητά στα κείμενα των αραβόφωνων μαθηματικών, υπάρχουν συγγραφείς που χρησιμοποιούν ένα προστάδιό της. Παραδείγματος χάριν ο al-Karaji (953-1029) στο *al-Fakhri* διατυπώνει, μεταξύ άλλων, τον τύπο για το ανάπτυγμα του διωνύμου και περιγράφει το λεγόμενο τρίγωνο του αφού πρώτα «διαπιστώσει» έναν κανόνα μετά από έλεγχο μικρού αριθμού περιπτώσεων, συνήθως 5.(Τέτοια γενίκευση από ένα μικρό αριθμό παραδειγμάτων στον γενικό κανόνα, ονομάζεται «ατελής επαγωγή»). Ο ίδιος ήξερε επίσης τον τύπο $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$. Έναν αιώνα αργότερα βρίσκουμε παρόμοια ψήγματα επαγωγικού συλλογισμού στο έργο book *al-Bahir* του al-Samawal (~1130-~1180), όπου εμφανίζεται η ταυτότητα $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Αργότερα ο ραβίνος Levi Ben Gershon (1288-1344), ο οποίος έζησε στη Γαλλία, χρησιμοποιεί και αυτός συλλογισμούς πρόδρομης μορφής της επαγωγής στο έργο του *Maasei Hoshev* γραμμένο στα εβραϊκά.

Η πρώτη σαφής διατύπωση επαγωγικού συλλογισμού σε έργο γραμμένο σε δυτική γλώσσα είναι στο *Arithmeticorum Libri Duo* (1575) του ελληνικής καταγωγής Φραγκίσκου Μαυρόλυκου (1495–1575), γνωστότερου ως Francesco Maurolyco, ο οποίος γεννήθηκε και έζησε στην Σικελία. Οι γονείς του σπουδαίου αυτού μαθηματικού της Αναγεννήσεως ήσαν έλληνες εκ Κωνσταντινουπόλεως. Στο εν λόγω έργο αποδεικνύεται επαγωγικά, μεταξύ άλλων, ότι το άθροισμα των πρώτων n περιττών ακεραίων ισούται με n-οστό τετράγωνο αριθμό. Συμβολικά, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, ένα γεγονός γνωστό ήδη στους αρχαίους Πυθαγορείους.

Μια άλλη πρώιμη αναφορά στην μαθηματική επαγωγή γίνεται στο *Traité du Triangle Arithmetique* του Blaise Pascal (1623–1662), όπου εμφανίζεται και μελετάται το λεγόμενο σήμερα «τρίγωνο του Pascal's Triangle». Εκεί ο συγγραφέας αποδεικνύει επαγωγικά ότι οι διωνυμικοί συντελεστές ${}^nC_k$ ικανοποιούν την σχέση ${}^nC_k : {}^nC_{k+1} = (k + 1) : (n - k)$, για κάθε n και k με $0 \leq k < n$. Σε αυτό το σημείο, η μετάβαση από τον n στον n + 1 χρησιμοποιεί την ταυτότητα ${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r$ (η οποία έχει αποδειχθεί με χρήση της Συνδυαστικής).

Όλοι οι παραπάνω συγγραφείς χρησιμοποίησαν την έννοια του φυσικού αριθμού διαισθητικά. Αυτό επαρκεί για τις ανάγκες του παρόντος άρθρου, και θα υιοθετήσουμε την ίδια πρακτική. Όμως, ένα χαρακτηριστικό των σύγχρονων μαθηματικών, ιδίως από τα τέλη του 19ου αιώνα, είναι να αναπτύσσονται οι θεωρίες με βάση τα αξιώματα. Ειδικά για τους φυσικούς αριθμούς, η αξιωματική τους θεμελίωση έγινε από τον Giuseppe Peano (1858-1932) ο οποίος δημοσίευσε τα λεγόμενα «αξιώματα Peano» το 1889, σε ένα τευχίδιο με τίτλο *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Η ακριβής διαδικασία δεν θα μας απασχολήσει. Το μόνο που τονίζουμε είναι ότι ένα από τα αξιώματά του είναι έτσι διατυπωμένο ώστε να εμπεριέχει την μαθηματική επαγωγή ως αποδεικτικό εργαλείο. Με άλλα λόγια, ο διαισθητικός τρόπος που αναπτύσσεται η επαγωγή στην §2 παρακάτω, στην πραγματικότητα είναι νόμιμη τεχνική.

Η ύλη που ακολουθεί παρουσιάζεται σε μικρές παραγράφους, η κάθε μία με την δική της συλλογή ασκήσεων. Οι πρώτες παράγραφοι είναι κάπως απλές, αλλά προς το τέλος τα θέματα γίνονται πιο απαιτητικά. *Πολλές ασκήσεις μπορούν να λυθούν και με άλλους τρόπους, πέρα από την επαγωγή, αλλά η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθεί επαγωγή σε όλες τις περιπτώσεις (εκτός αν ζητείται το αντίθετο).*

Παράγραφος 2. Προκαταρκτικά

Η μαθηματική επαγωγή είναι μία μέθοδος για να αποδεικνύονται προτάσεις που αφορούν, άμεσα ή έμμεσα, ακεραίους. Για παράδειγμα θεωρήστε την πρόταση "$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n + 1)/6$", όπου $n \in \mathbb{N}$, την οποία δηλώνουμε ως P(n). Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι η P(n) είναι αληθής για διάφορες τιμές του n, όπως για παράδειγμα η P(1), δηλαδή η $1^2 = 1 = 1.(1+ 1)(2.1 + 1)/6$, η P(2), δηλαδή $1^2 + 2^2 = 5 = 2.(2 + 1)(2.2 + 1)/6$, η P(3), $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = 3.(3 + 1)(2.3 + 1)/6$ και ούτω καθ' εξής. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε διαπιστώσει την αλήθεια της παραπάνω ταυτότητας στις περιπτώσεις n = 1, n = 2 και n = 3 (σε λίγο θα δούμε ότι οι δύο τελευταίες περιττεύουν), αλλά ας υποθέσουμε ότι κάποιος έχει επαληθεύσει την ταυτότητα μέχρι μία συγκεκριμένη τιμή του n, την n = k. Με άλλα λόγια, είμαστε βέβαιοι ότι γι' αυτήν την συγκεκριμένη τιμή του k, ισχύει "$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = k(k + 1)(2k + 1)/6$". Είναι όμως αυτός ο τύπος αληθής και για τον επόμενο φυσικό αριθμό n = k + 1; Ισχυριζόμαστε ότι είναι. Για να το δούμε αυτό, *κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι ισχύει* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = k(k + 1)(2k + 1)/6$, έχουμε

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = k(k + 1)(2k + 1)/6 + (k + 1)^2 \quad \text{(από την υπόθεσή μας)}$$
$$= (k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]/6$$
$$= (k + 1)(k + 2)(2k + 3)/6,$$

αλλά αυτό το τελευταίο είναι ο ισχυρισμός μας για το $n = k + 1$.

Ας συνοψίσουμε: Θέλαμε να αποδείξουμε ότι μία πρόταση P(n) ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n \geq 1$. Πρώτα την αποδείξαμε σωστή στην περίπτωση $n = 1$; μετά, *υποθέτοντας* ότι είναι αληθής για $n = k$, την αποδείξαμε και στην περίπτωση $n = k + 1$. Με άλλα λόγια, με ανάδραση αυτών που αποδείξαμε, το γεγονός ότι ισχύει η P(1) συνεπάγεται το ίδιο πράγμα για την P(2). Τώρα, το γεγονός ότι ισχύει η P(2) συνεπάγεται το ίδιο πράγμα για την P(3); η ισχύς της P(3) συνεπάγεται της P(4), *και ούτω καθ' εξής*, αποδεικνύεται η P(n) για κάθε[1] $n \geq 1$.

Το αποδεικτικό σχήμα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξή μας μπορεί να συνοψιστεί συμβολικά ως

$$\begin{array}{l} P(1) \\ P(k) \Rightarrow P(k+1) \\ \hline \Rightarrow \text{η } P(n) \text{ είναι αληθής για κάθε } n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Το βήμα "$P(k) \Rightarrow P(k+1)$" της απόδειξης ονομάζεται *επαγωγικό βήμα,* και η υπόθεση ότι η P(k) είναι αληθής, ονομάζεται *επαγωγική υπόθεση*.

Ακολουθεί ένα δεύτερο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1 (ανισότητα Bernoulli). Δείξτε ότι αν a πραγματικός αριθμός με $a > -1$, τότε $(1 + a)^n \geq 1 + na$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Για $n = 1$ η ανισότητα είναι ορθή για προφανείς λόγους (ισχύει άλλωστε ως ισότητα). Έστω τώρα ότι ισχύει η ανισότητα για $n = k$. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι $(1 + a)^k \geq 1 + ka$. Αυτή είναι η επαγωγική μας υπόθεση, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$. Έχουμε

$$\begin{aligned} (1 + a)^{k+1} &= (1 + a)(1 + a)^k \\ &\geq (1 + a)(1 + ka) && \text{(από την επαγωγική υπόθεση)} \\ &= 1 + (k + 1)a + ka^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)a && (\text{διότι } ka^2 \geq 0). \end{aligned}$$

Αυτό, από την αρχή της επαγωγής, ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ως τελικό σχόλιο, επισημαίνουμε ότι στα παραπάνω παραδείγματα η επαγωγική διαδικασία ξεκίνησε από το $n = 1$. Αυτό δεν είναι απαραίτητο. Υπάρχουν περιπτώσεις (δείτε τις ασκήσεις) όπου η επαγωγή μπορεί να ξεκινά από άλλον ακέραιο. Η κατάσταση είναι αυτονόητη και δεν χρειάζεται να την εξηγήσουμε περισσότερο.

Οι επόμενες ασκήσεις ζητούν να επαληθευτούν διάφοροι τύποι. Καμία από αυτές τις ασκήσεις δεν πρέπει να παρουσιάσουν ιδιαίτερες δυσκολίες στον αναγνώστη. Βρίσκονται εκεί μόνο και μόνο για να εξοικειωθεί με τις επαγωγικές αποδείξεις. Θα προτείναμε μάλιστα στον αναγνώστη να κάνει μερικές από αυτές νοητά, χωρίς χαρτί και μολύβι.

[1] Σε αυτό το βήμα γίνεται η διαισθητική έννοια των φυσικών αριθμών, η οποία τακτοποιείται με τα αξιώματα Peano.

Άσκηση 2.1. (Ρουτίνα). Δείξτε επαγωγικά την αλήθεια των ακόλουθων τύπων, για κάθε φυσικό αριθμό n.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = n^2(n + 1)^2/4$,

b) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$,

c) $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)/12$,

d) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$,

e) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$,

f) $\frac{3}{1^2 2^2}+\frac{5}{2^2 3^2}+\frac{7}{3^2 4^2}+\dots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$,

g) $(n + 1)(n + 2)\dots(2n - 1)(2n) = 2^n .1.3.5.\dots.(2n - 1)$,

h) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)!}{k!2^k}=\sum_{k=1}^{n}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1)$,

i) $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\dots+(-1)^n\frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}$,

j) $(\cos x)(\cos 2x)(\cos 4x)(\cos 8x)\dots(\cos 2^{n-1}x) = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ (για $x\in\mathbb{R}$ με $\sin x \neq 0$),

k) $\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$, (για $x\in\mathbb{R}$ με $\sin x \neq 0$),

l) $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{ριζικά}}=2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$,

m) $(1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5) + (1^7 + 2^7 + 3^7 + \dots + n^7) = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)^4$,

n) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$.

Άσκηση 2.2. Εάν μία ακολουθία (a_n) ικανοποιεί

a) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n\in\mathbb{N}$), δείξτε ότι $a_n + 1 = 2^{n-1}(a_1 + 1)$.

b) $a_1 = 0$ και $a_{n+1} = (1 - x)a_n + nx$ ($n\in\mathbb{N}$), όπου $x \neq 0$, δείξτε ότι

$$a_{n+1} = [nx - 1 + (1 - x)^n]/x.$$

Άσκηση 2.3. Έστω (a_n) δοθείσα ακολουθία. Ορίζουμε νέες ακολουθίες (x_n), (y_n) ως $x_1 = 1$, $x_2 = a_1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ και, για $n \geq 3$, $x_n = a_n x_{n-1} + x_{n-2}$, $y_n = a_n y_{n-1} + y_{n-2}$. Δείξτε ότι $x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = (-1)^n$.

Άσκηση 2.4. Αν κάθε ένας από τους a_1, a_2, … , a_n είναι ίσος με το άθροισμα δύο τελείων τετραγώνων, δείξτε ότι ισχύει το ίδιο και για το γινόμενό τους.

Άσκηση 2.5. Δείξτε ότι ο $2n^5/5 + n^4/2 - 2n^3/3 - 7n/30$ είναι ακέραιος για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Άσκηση 2.6. Δείξτε ότι αν $x \neq y$, τότε το πολυώνυμο $x - y$ διαιρεί το $x^n - y^n$.

Άσκηση 2.7. Δείξτε ότι κάθε κυρτό n-γωνο έχει ½ n(n – 3) διαγωνίους (n ≥ 3).

Άσκηση 2.8. Αποδείξτε επαγωγικά τον τύπο για το ανάπτυγμα του διωνύμου. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι ισχύει

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k a^k b^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

όπου ${}^{n}C_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο ${}^{n+1}C_k = {}^{n}C_{k-1} + {}^{n}C_k$ $(1 \le k \le n)$. (Το ανάπτυγμα του διωνύμου ήταν γνωστό στους Άραβες. Δεν είχαν πλήρη απόδειξη αλλά, μετά από έλεγχο των πρώτων μικρών n, διατύπωσαν τον γενικό κανόνα ακολουθώντας ατελή επαγωγή. Αργότερα το θεώρημα ανακαλύφθηκε εκ νέου και γενικεύτηκε από τον Isaac Newton (1654-1705), ο οποίος το συμπεριέλαβε στα περίφημα *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Για την απόδειξη χρησιμοποίησε επιχειρήματα από την Συνδυαστική. Η πρώτη επαγωγική απόδειξη οφείλεται στον Jakob Bernoulli (1654-1705), και δημοσιεύτηκε μετά τον θάνατό του στο έργο του *Ars Conjectκaii* (1713)).

Άσκηση 2.9. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι ο αριθμός $(2+\sqrt{3})^n$ γράφεται στη μορφή $a_n + b_n\sqrt{3}$. Δείξτε α) επαγωγικά και β) χωρίς επαγωγή, ότι οι αριθμοί a_n, b_n ικανοποιούν $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ (n∈ℕ).

Άσκηση 2.10. Δείξτε ότι ο αριθμός $2^{2^n} - 1$ διαιρείται με τουλάχιστον n διαφορετικούς πρώτους αριθμούς, όπου n∈ℕ.

Άσκηση 2.11. Αν $F_n = a^{2^n} + 1$ είναι ο n-οστός αριθμός του Fermat (n = 0, 1, 2, …), δείξτε ότι

$$F_n - 2 = (a-1)F_0F_1\ldots F_{n-1} \ (n\in\mathbb{N}).$$

Άσκηση 2.12. Δείξτε επαγωγικά ότι $n! > 3^n$ για n ≥ 7.

Άσκηση 2.13. Αν a_0, a_1, a_2, … είναι ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί $a_0 = 1$ και $a_{n+1}^2 > a_n a_{n+2}$ (n = 0, 1, 2, …), δείξτε ότι

$$a_1 > a_2^{1/2} > a_3^{1/3} > a_4^{1/4} > \ldots > a_n^{1/n} > \ldots .$$

Άσκηση 2.14. Ένα αποτέλεσμα του Ramanujan (η απόδειξη του οποίου είναι έξω από τους στόχους του άρθρου, αλλά που μπορείτε να θεωρήσετε ως γνωστό) λεει ότι $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}}}} = 3$. Κάντε χρήση του αποτελέσματος αυτού του Ramanujan's για να αποδείξετε ότι για κάθε n∈ℕ ισχύει

$$\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\ldots}}}}} = n+1.$$

Παράγραφος 3. Κανονικότητες

Ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου της επαγωγής, όπως ίσως διαφαίνεται σε μερικά από τα παραπάνω παραδείγματα (ιδίως στην Άσκηση 1), είναι ότι πρέπει κανείς να γνωρίζει εκ των *προτέρων* τον τύπο που περιγράφει την κατάσταση που μελετά γιατί τότε μόνο τότε μπορεί να ξεκινήσει να τον αποδείξει. Αλλά αυτή η ανάγκη της εκ των προτέρων γνώσης μπορεί μερικές φορές να αμβλυνθεί εάν παρατηρήσει κανείς μία «κανονικότητα» στο θέμα που μελετά, η οποία ενδεχομένως θα τον οδηγήσει σε μία εύστοχη διατύπωση του αναμενόμενου τύπου. Πολλά από τα παραδείγματα των Αράβων ή του Wallis που είδαμε στην §1 είναι περιπτώσεις όπου η μελέτη ειδικών περιπτώσεων ήταν αρκετή να διατυπωθεί σωστά ο γενικός τύπος. Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται κανείς να διατυπώσει μία εικασία και μετά, στη περίπτωση που η εικασία του ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, να δώσει απόδειξη ότι είναι πράγματι σωστή. Με άλλα λόγια, σε κάποιο στάδιο θα χρειαστεί να «μαντεύουμε» το αποτέλεσμα. Τα ακόλουθα παραδείγματα διευκρινίζουν την κατάσταση.

Παράδειγμα 3.1. Για ποιες τιμές του n ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3;

Λύση. Ελέγχοντας μικρές τιμές του φυσικού αριθμού n διαπιστώνει κανείς ότι ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν το n ισούται με 1, 3, 5 και 7, ενώ δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν το n ισούται με 2, 4, 6 ή 8. Φαίνεται λοιπόν εύλογο να μαντέψει κανείς ότι ο $2^n + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς όταν ο n είναι περιττός. Αυτό αποδεικνύεται ορθό, και ο ακόλουθος επαγωγικός συλλογισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί (οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη) για να ολοκληρώσει το ζητούμενο: Γράφουμε $a_n = 2^n + 1$. Τότε $a_{n+2} = 2^{n+2} + 1 = 4(2^n + 1) – 3 = 4a_n – 3$, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 3 ακριβώς όταν συμβαίνει το ίδιο και με το a_n. □

Παράδειγμα 3.2. Αν $f(x) = 2x + 1$, μαντέψτε ένα τύπο για τον n-οστο όρο της ακολουθίας $f_1 = f(x)$, $f_2 = f(f(x))$, $f_3 = f(f(f(x)))$, $f_4 = f(f(f(f(x))))$, … και μετά αποδείξτε τον ισχυρισμό σας με επαγωγή.

Λύση. Με απευθείας υπολογισμό διαπιστώνουμε ότι $f_2 = 4x + 3$, $f_3 = 8x + 7$, $f_4 = 16x + 15$ και ούτω καθ' εξής. Εάν τα παραδείγματα αυτά δεν επαρκούν για να μαντέψει κανείς τον τελικό τύπο, θα πρέπει να συνεχίσει με άλλα ακόμη f_n, πέρα από τα f_2, f_3, f_4 που βρήκαμε. Αργά ή γρήγορα θα υποπτευθεί ότι $f_n(x) = 2^nx + 2^n -1$. Αποδεικνύεται ότι η εικασία αυτή είναι ορθή, και ο αναγνώστης προσκαλείται να συμπληρώσει τα βήματα που λείπουν από τον ακόλουθο επαγωγικό συλλογισμό: $f_{n+1} = f(f_n(x)) = f(2^nx + 2^n -1) = 2(2^nx + 2^n-1) + 1 = 2^{n+1}x + 2^{n+1}-1$. □

Παράδειγμα 3.3. Εξετάζοντας την ακολουθία

$$2 – 1,\ 3 – (2 – 1),\ 4 – (3 – (2 – 1)),\ 5 – (4 – (3 – (2 – 1))),\ \ldots$$

μαντέψτε και αποδείξτε επαγωγικά την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$n – (n – 1 – (n – 2 – (n – 3 – (\ldots – (3 – (2 – 1))\ldots))).$$

Λύση. Οι πρώτοι λόγοι όροι της ακολουθίας, μετά τις απλοποιήσεις, είναι ίσοι 1, 2, 2, 3, 3 και 4, αντίστοιχα. Σε αυτό το στάδιο φαίνεται λογικό να μαντέψει κανείς ότι ο κανόνας είναι

$$n – (n – 1 – (n – 2 – (n – 3 – (\ldots – (3 – (2 – 1))\ldots))) = \begin{cases} n/2 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ (n+1)/2 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Το τελευταίο είναι απλό να αποδεχθεί επαγωγικά, και επαφίεται στον αναγνώστη. Θα χρειαστεί να εξεταστούν χωριστά οι περιπτώσεις n άρτιος ή n περιττός. □

Μία επισήμανση είναι εδώ αναγκαία: όσες πολλές ειδικές περιπτώσεις και αν ελέγξουμε σε μία κατάσταση, όπου φαίνεται ότι ακολουθείται κάποιος κανόνας, δεν επαρκεί για να βγάλουμε αδιαφιλονίκητα συμπεράσματα. Πρέπει *πάντοτε* οι εικασίες μας να ακολουθούνται από αποδείξεις. Η αδυναμία να επινοήσουμε απόδειξη μπορεί να σημαίνει ότι αυτό που νομίζουμε σωστό να είναι, τελικά, εσφαλμένο. Υπάρχουν πολλά παραδείγματα όπου ακόμα και μαθηματικοί της πρώτης γραμμής παρασύρθηκαν σε εσφαλμένη εικασία από την παρατήρηση ορισμένων αρχικών περιπτώσεων. Ο μεγάλος Fermat, για παράδειγμα, αφού παρατήρησε ότι οι αριθμοί $2^{2^0}+1=3,\ 2^{2^1}+1=5,\ 2^{2^2}+1=17,\ 2^{2^3}+1=257$ και $2^{2^4}+1=65537$ είναι πρώτοι, ισχυρίστηκε ότι συμβαίνει το ίδιο για όλους τους αριθμούς της μορφής $2^{2^n}+1$, όπου n φυσικός αριθμός. Αυτό τελικά αποδείχθηκε ψευδές, και το μικρότερο αντι-παράδειγμα βρέθηκε από τον Euler ο οποίος βρήκε ότι $2^{2^5}+1=641\times 6700417$.

Μερικές φορές το μικρότερο αντιπαράδειγμα μιας φαινομενικής μόνο κανονικότητας μπορεί να είναι τεράστιος αριθμός. Παραδείγματος χάριν οι αριθμοί $n^{17}+9$ και $(n+1)^{17}+9$ είναι σχετικά πρώτοι για n =1, 2, 3, . . . διαδοχικά, και για *πολλούς* ακόμη όρους παρακάτω. Είναι όμως πάντα σχετικά πρώτοι οι δύο αριθμοί; Όχι, και το πρώτο παράδειγμα για το αντίθετο είναι η περίπτωση όπου

n = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433.

Υπάρχουν δύο πολύ ενδιαφέροντα άρθρα του Richard Guy, με τίτλο *The Strong Law of Small Numbers* (American Mathematical Monthly, (1988) 697-711) και *The Second Strong Law of Small Numbers* (Mathematics Magazine, 63 (1990) 3 - 20), αντίστοιχα, με πλήθος παραδειγμάτων ακολουθιών οι οποίες φαινομενικά ακολουθούν κάποιο κανόνα. Όμως, σε αρκετές περιπτώσεις η πραγματικότητα, πέρα από το πώς δείχνουν τα φαινόμενα, είναι τελείως διαφορετική. Αξίζει επίσης να δείτε την ιστοσελίδα

http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=LawOfSmall

από όπου ελήφθη το προηγούμενο παράδειγμα.

Ακολουθούν ορισμένες ασκήσεις σε αυτή τη θεματική όπου δίνονται ορισμένες ακολουθίες αριθμών και ο αναγνώστης καλείται είτε (i) να διατυπώσει ένα κανόνα και μετά να αποδείξει ότι η εικασία του είναι πράγματι ορθή, ή (ii) να βρει ένα αντιπαράδειγμα στον κανόνα που φαίνεται, εκ πρώτης όψεως, να περιγράφει την κατάσταση.

Άσκηση 3.1. Αφού εξετάστε ορισμένες μικρές τιμές n, μαντέψτε έναν τύπο για την κάθε περίπτωση των παρακάτω αθροισμάτων και μετά αποδείξτε τον επαγωγικά.

a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2$,

b) $1\cdot(1!) + 2\cdot(2!) + 3\cdot(3!) + \ldots + n\cdot(n!)$,

c) $n^2 - [(n-1)^2 - [(n-2)^2 - [(n-3)^2 - [\ldots - [3^2 - (2^2 - 1^2)]\ldots]]]]$,

d) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots+\dfrac{1}{(x+n-1)(x+n)}$.

Άσκηση 3.2. Δίδεται ότι το άθροισμα $1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή $n(n + 1)(2n + 1)(An^4 + Bn^3 - 3n + 1)/42$, όπου A και B σταθερές ανεξάρτητες του n. Μαντέψτε κατάλληλες τιμές για τα A και B και μετά δείξτε ότι οδηγούν σε σωστό τύπο.

Άσκηση 3.3. Αν (p_n) είναι η ακολουθία των πρώτων αριθμών αρχίζοντας από τον $p_1 = 2$, δείξτε ότι η ακολουθία των αριθμών $p_1 + 1$, $p_1 p_2 + 1$, $p_1 p_2 p_3 + 1$, ... , $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1$, την οποία χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης στην περίφημη απόδειξή του στα *Στοιχεία* ότι υπάρχουν άπειροι το πλήθος πρώτοι αριθμοί, αποτελείται από πρώτους αριθμούς για n = 1, 2, 3, 4, 5 αλλά όχι για n = 6.

Άσκηση 3.4. Επιλέξτε n σημεία στη περιφέρεια κύκλου, όπου το n ισούται διαδοχικά με 1, 2, 3, 4,... και κατόπιν σχεδιάστε (σε χωριστά διαγράμματα) όλες τις χορδές που τα συνδέουν. Βεβαιωθείτε μόνο ότι τα σημεία να είναι σε «γενική θέση» υπό την έννοια ότι ανά τρεις οι χορδές δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Μετρήστε τώρα το πλήθος των περιοχών που διαμερίζεται ο κύκλος από τις χορδές. Θα διαπιστώσετε ότι το πλήθος αυτό είναι, διαδοχικά, 1, 2, 4, 8, 16, ... Ποιος κανόνας φαίνεται να ακολουθείται; Είναι ο επόμενος αριθμός ο 32; Δείξτε ότι δεν είναι!

Άσκηση 3.5. Μαντέψτε και μετά αποδείξτε επαγωγικά τον τύπο που δίνει τον γενικό όρο της ακολουθίας (a_n) αν $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ και για $n \geq 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6\sqrt{a_{n-1}}}$.

Άσκηση 3.6. Μαντέψτε και μετά αποδείξτε επαγωγικά τον τύπο που δίνει τον γενικό όρο της ακολουθίας (a_n) αν $a_0 = 1$, και για $n \geq 1$ ισχύει η σχέση $\sqrt{a_0} + \sqrt{a_1} + ... + \sqrt{a_n} = \frac{1}{2}(n+1)\sqrt{a_n}$.

Παράγραφος 4. Διαιρετότητα

Η μέθοδος της επαγωγής μπορεί να εφαρμοσθεί σε μία πληθώρα καταστάσεων, όχι μόνο στην απόδειξη τύπων, όπως ενδεχομένως να συμπεραίνει κανείς από τα παραδείγματα που είδαμε. Σε αυτά που ακολουθούν θα εξετάσουμε μερικές από αυτές τις διαφορετικές περιπτώσεις. Θα αρχίσουμε με μία κάπως εύκολη περίπτωση, την περίπτωση της διαιρετότητας, της οποίας είδαμε κάποια παραδείγματα στην Παράγραφο 2. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό a | b to για να δηλώσουμε ότι ένας ακέραιος a διαιρεί τον ακέραιο b. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το ότι ο a είναι παράγοντας του b ή ότι ο b είναι πολλαπλάσιο του a.

Παράδειγμα 4.1. Δείξτε ότι για κάθε γνήσια θετικό φυσικό αριθμό n, ο 9 διαιρεί τον αριθμό $5^{2n} + 3n - 1$, ή, με σύμβολα, $9 \mid 5^{2n} + 3n - 1$.

Λύση. Θέτουμε $a_n = 5^{2n} + 3n - 1$. Είναι σαφές ότι ο $a_1 = 27$ είναι διαιρετός δια του 9. Έστω τώρα ότι για n = k, ο αριθμός a_n είναι διαιρετός δια 9, δηλαδή ότι $5^{2k} + 3k - 1 = 9M$ για κάποιον ακέραιο M. Πρέπει να δείξουμε ότι ο $a_{k+1} = 5^{2(k+1)} + 3(k+1) - 1 = 25.5^{2k} + 3k + 2$ είναι επίσης διαιρετός δια 9. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε με κάποιο τρόπο την επαγωγική μας υπόθεση, πράγμα που μπορούμε να το επιτύχουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 25 \cdot 5^{2k} + 3k + 2 \\ &= 25 \cdot (5^{2k} + 3k - 1) - 72k + 27 \\ &= 25 \cdot 9M - 9(8n - 3) \quad \text{(από την επαγωγική υπόθεση)} \end{aligned}$$

δηλαδή ο a_{k+1} είναι πολλαπλάσιο του 9.

Άρα, από την αρχή της επαγωγής, έχουμε ότι $9 \mid a_n$ για κάθε γνήσια θετικό φυσικό αριθμό n.□

Άσκηση 4.1. Κάντε ξανά το προηγούμενο παράδειγμα βελτιώνοντας λιγάκι τον συλλογισμό χρησιμοποιώντας τον $a_{k+1} - 25a_k$ στη θέση του a_{k+1}.

Παράδειγμα 4.2. Δείξτε ότι όλοι οι αριθμοί στην ακολουθία 1003, 10013, 100113, 1001113,… και λοιπά, είναι πολλαπλάσια του 17.

Λύση. Έχουμε $1003 = 17 \times 59$. Επίσης, η διαφορά δύο διαδοχικών αριθμών της ακολουθίας είναι της μορφής 9010…0, ο οποίος είναι πολλαπλάσιο του 17 (καθώς $901 = 17 \times 53$). Με αυτές τις πληροφορίες ο αναγνώστης θα μπορέσει να συμπληρώσει τις λεπτομέρειες που απαιτούνται για να ολοκληρωθεί η επαγωγική απόδειξη.□

Άσκηση 4.2. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $7^{2n} - 48n - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 2304.

Άσκηση 4.3. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 17.

Άσκηση 4.4. Δείξτε ότι το άθροισμα των κύβων οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 9.

Παράγραφος 5. Ανισότητες.

Ήδη είδαμε μία ανισότητα, την Bernoulli's (Παράδειγμα 2.1), η οποία εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό n. Η συγκεκριμένη αποδείχθηκε επαγωγικά και, βεβαίως, πολλές ανισότητες που εξαρτώνται από τους φυσικούς αριθμούς μπορούν και αυτές να αποδειχθούν επαγωγικά. Παραδείγματος χάριν, η ακόλουθη γενίκευση της Bernoulli μπορεί να αποδειχθεί με μικρή παραλλαγή της αρχικής απόδειξης που παραθέσαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 5.1 (ανισότητα Weierstrass). Αν οι a_n ($n\in\mathbb{N}$) είναι πραγματικοί αριθμοί είτε όλοι θετικοί είτε όλοι στο [-1, 0] τότε

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Απόδειξη. Όπως αναφέραμε, η απόδειξη ακολουθεί από κοντά την αντίστοιχη της Bernoulli's που παραθέσαμε, και οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη: Για το επαγωγικό βήμα αρκεί να πολλαπλασιάσει κανείς και τα δύο μέλη επί τον θετικό αριθμό $(1 + a_{n+1})$, αλλά χρειάζεται κάποια προσοχή όταν όλα τα a_n είναι στο [-1, 0], οπότε το άθροισμα που περιέχεται στο σύμβολο Σ της άθροισης είναι με αρνητικό, αλλά (ευτυχώς) η παράσταση $a_{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ είναι θετική. □

Υπάρχουν πολλές ανισότητες διάσπαρτες στο κείμενο που ακολουθεί, αλλά ιδού μία αρχική συλλογή.

Άσκηση 5.1. Αποδείξτε επαγωγικά ότι a) $2^n > n^2$ για $n \geq 5$, b) $2^n > n^3$ για $n \geq 10$.

Άσκηση 5.2. Αποδείξτε επαγωγικά ότι $2!4!\ldots(2n)! > [(n + 1)!]^n$ ($n\in\mathbb{N}$).

Άσκηση 5.3. Αποδείξτε επαγωγικά ότι $(2n)!(n + 1) > 4^n(n!)^2$ για κάθε $n > 1$.

Άσκηση 5.4. Αποδείξτε για $n > 1$ την ανισότητα

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}-2.$$

Άσκηση 5.5. Δείξτε ότι αν ο a_k ικανοποιεί $0 < a_k < 1$ για $1\leq k \leq n$, τότε

$$(1 – a_1)(1 – a_2)\ldots(1 - a_n) > 1 – (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Άσκηση 5.6. Δείξτε ότι αν ο a_k ικανοποιεί $0 \leq a_k \leq 1$ για $1 \leq k \leq n$, τότε

$$2^{n-1}(1 + a_1 a_2 \ldots a_n) \geq (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n).$$

Παράγραφος 6. Παραλλαγές της επαγωγής

Στα παραδείγματα που έχουμε δει ως τώρα, η απόδειξη μιας πρότασης P(n) για όλους τους θετικούς ακεραίους n ακολουθούσε το σχήμα: αποδεικνύουμε την P(1) και, κατόπιν, την P(k +1) με χρήση της υπόθεσης ότι αληθεύει η P(k). Υπάρχουν και άλλες μορφές της επαγωγής, ισχυρότερες της κλασικής, οι οποίες θα μελετηθούν στις επόμενες παραγράφους.

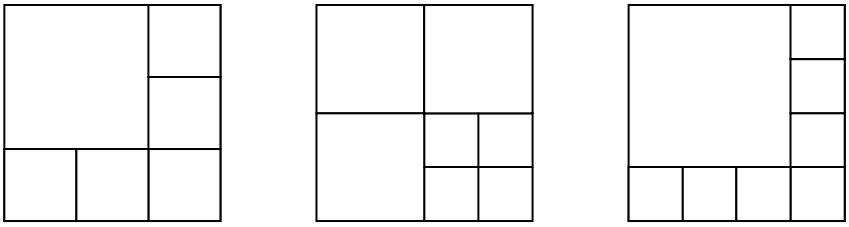
α) Πηδήματα: Σε αυτή τη μορφή της επαγωγής η απόδειξη μιας πρότασης P(n) προχωρά με, λόγου χάριν, *δύο* βήματα τη φορά εκεί που η κλασική πήγαινε με *ένα*. Με άλλα λόγια, το επαγωγικό βήμα δείχνει την αλήθεια της P(k + 2) από την υπόθεση ότι αληθεύει η P(k). Εάν, επιπλέον, αποδείξουμε τις P(1) και P(2), τότε πετυχαίνουμε τον στόχο μας γιατί έχουμε δείξει τις συνεπαγωγές P(1) ⇒ P(3) ⇒ P(5) ⇒ P(7) ⇒ … και P(2) ⇒ P(4) ⇒ P(6) ⇒ P(8) ⇒ … οι οποίες, από κοινού, καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις της P(n). Ανάλογα, θα μπορούσε η μετάβασή μας στο επαγωγικό βήμα να γίνεται με πηδήματα οποιουδήποτε σταθερού $t \in \mathbb{N}$. Στη περίπτωση αυτή χρειάζεται να αποδείξουμε την αλήθεια της $P(k) \Rightarrow P(k + t)$ καθώς και των P(1), P(2), …, P(t).

Παράδειγμα 6.1. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η εξίσωση $a^2 + b^2 = c^n$ έχει λύση στους φυσικούς αριθμούς.

Λύση. Εργαζόμαστε με βήματα των 2: Οι περιπτώσεις των n = 1 και 2 είναι προφανείς. Έστω τώρα ότι για n = k η $a_1^2 + b_1^2 = c_1^k$ είναι κάποια συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης, αποτελούμενη από φυσικούς αριθμούς. Τότε έχουμε την λύση $(c_1 a_1)^2 + (c_1 b_1)^2 = c_1^{k+2}$ της εξίσωσης για την περίπτωση του n = k + 2. □

Παράδειγμα 6.2. Είναι σαφές ότι ένα τετράγωνο μπορεί να μεριστεί σε υποτετράγωνα φέρνοντας ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς τις πλευρές του. Δείξτε ότι μπορεί να μεριστεί σε n τετράγωνα (όχι κατ' ανάγκη του ιδίου μεγέθους) για κάθε $n \geq 6$.

Λύση. Τα σχήματα που ακολουθούν δείχνουν διαμερίσεις ενός τετραγώνου σε 6, 7 ή 8 υποτετράγωνα. Αφού κάθε τετράγωνο μιας διαμέρισης μπορεί, επιπλέον, να χωριστεί σε 4 μικρότερα τετράγωνα με χρήση δύο κάθετων μεταξύ τους ευθυγράμμων τμημάτων, μπορούμε να αυξήσουμε τα τετράγωνα οποιασδήποτε διαμέρισης κατά 3 (τέσσερα νέα τετράγωνα μείον ένα που χάνεται). Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή με βήμα 3, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη (οι λεπτομέρειες στον αναγνώστη). □



Σημειώστε ότι υπάρχει και μία παραλλαγή αυτής της μεθόδου, όπου το βήμα δεν είναι κατ' ανάγκη σταθερό. Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.3. Δείξτε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος τριγωνικών αριθμών οι οποίοι είναι τέλεια τετράγωνα. (Υπενθυμίζουμε ότι τριγωνικοί καλούνται οι ακέραιοι της μορφής $T_n = 1 + 2 + \ldots + n = ½\, n(n + 1)$).

Λύση. $T_1 = 1 = 1^2$. Έστω τώρα ότι ο τριγωνικός αριθμός T_k είναι τέλειο τετράγωνο. Το πρόβλημά μας είναι πώς θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία για να κατασκευάσουμε έναν μεγαλύτερο τριγωνικό αριθμό ο οποίος είναι τέλειο τετράγωνο. Οι T_{k+1}, T_{k+2} και λοιπά, δεν φαίνεται να μας εξυπηρετούν, και θα χρειαστεί να βελτιώσουμε την μέθοδό μας. Βγαίνουμε από το αδιέξοδο με καταλληλότερη επιλογή παρατηρώντας ότι $T_{4k(k+1)} = 4k(k + 1)[4k(k + 1) + 1]/2 = 4(4k^2 + 4k + 1)T_k = 4(2k + 1)^2 T_k$ το οποίο προφανώς είναι τέλειο τετράγωνο αφού συμβαίνει το ίδιο με τον T_k. □

Άσκηση 6.1. Κάντε χρήση επαγωγής με βήματα των 2 για να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1}(1 + 2 + \ldots + n).$$

Άσκηση 6.2. (Διαγωνισμός Eötvös του 1901). Κάντε χρήση επαγωγής με βήματα των 4 για να αποδείξετε ότι οι αριθμοί της μορφής $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ είναι πολλαπλάσια του 5 εάν και μόνον εάν ο n δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.

Άσκηση 6.3. Κάντε χρήση επαγωγής με βήματα των 3 για να δείξετε ότι κανένας αριθμός της μορφής $2^n + 1$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άσκηση 6.4. Αφού ελέγξτε την ορθότητα των ισοτήτων $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=1$, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=1$ και $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{21^2}=1$, δείξτε επαγωγικά με χρήση βήματος των 3 ότι για κάθε $n \geq 6$, υπάρχουν ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$ με $\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}=1$.

Άσκηση 6.5. (Θεώρημα Erdös-Suranyi). Αφού ελέγξτε την ορθότητα των ισοτήτων $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, $3 = -1^2 + 2^2$ και $4 = -1^2 - 2^2 + 3^2$ δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό N υπάρχει n και κατάλληλη επιλογή προσήμων + ή - signs (τα οποία συμβολίζουμε με ± για συντομία) τέτοια ώστε $N = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm n^2$.

β) Ισχυρή επαγωγή: Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αποδεικνύεται ότι κάθε φυσικός αριθμός k > 1 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων. Η απόδειξή του ουσιαστικά είναι η ακόλουθη: Η πρόταση είναι προφανώς ορθή για k = 2. Έστω τώρα ότι αποδείξαμε πως *όλοι οι φυσικοί αριθμοί από τον 2 μέχρι και τον k,* συμπεριλαμβανομένου, είναι γινόμενο πρώτων. Τότε για τον k+1 υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε είναι πρώτος αριθμός, οπότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε, ή είναι το γινόμενο δύο (εννοείται μικρότερων) αριθμών. Όμως κάθε ένας από τους δύο αυτούς αριθμούς είναι, εξ υποθέσεως, γινόμενο πρώτων επομένως το ίδιο συμβαίνει και με τον k+1. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία συμπεραίνουμε ότι ισχύει η ανάλυση σε πρώτους για τους k+2, k+3, και ούτω καθ' εξής, και τελικά για όλους τους φυσικούς αριθμούς μεγαλύτερους του 1.

Αντιλαμβανόμαστε ότι ο συλλογισμός του Ευκλείδη βασίζεται σε ένα είδος ισχυρότερης επαγωγής όπου α) αποδεικνύουμε την[2] P(1) και β) αποδείξαμε την αλήθεια της P(k+1) υποθέτοντας την αλήθεια *όλων* των P(1), P(2), … , P(k) (όχι μόνο του τελευταίου, P(k)). Το επαγωγικό σχήμα που επικαλούμεθα είναι ότι ισχύουν οι συνεπαγωγές P(1) ⇒ [P(1) και P(2)] ⇒ [P(1) και P(2) και P(3)] ⇒ [P(1) και P(2) και P(3) και P(4)], και ούτω καθ' εξής, καλύπτοντας τελικά όλα τα P(n).

Μία κάπως ευκολότερη παραλλαγή της επαγωγής είναι να αποδείξουμε την P(k+1) από την υπόθεση ότι είναι αληθείς οι P(k-1) και P(k) (δίχως να κάνουμε χρήση των ακόμα μικρότερων φυσικών αριθμών). Με άλλα λόγια, πρώτα αποδεικνύουμε την αλήθεια των P(1), P(2) και μετά της συνεπαγωγής [P(k-1) και P(k)] ⇒ [P(k+1). Παρατηρείστε ότι, ουσιαστικά, προχωράμε με τα βήματα [P(1) και P(2)] ⇒ [P(2) και P(3)] ⇒ [P(3) και P(4)], και λοιπά.

Εννοείται ότι υπάρχουν και άλλες παραλλαγές της παραπάνω διαδικασίας όπως η απόδειξη της P(k+1) από την υπόθεση ότι είναι αληθείς οι P(k-2), P(k-1) και P(k), καθώς και οι αρχικές P(1), P(2) και P(3). Τέτοιες παραλλαγές είναι αυτονόητες, και δεν χρειάζεται να τις σχολιάσουμε παραπάνω. Τα παραδείγματα που ακολουθούν επεξηγούν τις καταστάσεις που μπορεί να συναντήσουμε.

[2] Δεν έχει σημασία ότι στο προηγούμενο παράδειγμα η επαγωγή άρχισε από το k =2. Αυτό έγινε για τεχνικούς λόγους που αφορούν το συγκεκριμένο παράδειγμα. Στα παρακάτω θα διατυπώσουμε την θεωρία αρχίζοντας από το k = 1.

Παράδειγμα 6.4. Μία ακολουθία (a_n) ικανοποιεί $a_1 = a_2 = 4$ και $a_{n+1}a_{n-1} = (a_n - 6)(a_n - 12)$ για n = 2, 3, ... Δείξτε ότι είναι σταθερή.

Λύση. Εξυπακούεται ότι αναμένουμε η σταθερή τιμή της ακολουθίας να είναι 4, όσο δηλαδή η κοινή τιμή των a_1 και a_2. Υποθέτουμε λοιπόν $a_{k-1} = a_k = 4$. Χρησιμοποιώντας *και τις δύο* αυτές υποθέσεις, η αναδρομική μας σχέση γίνεται $4a_{k+1} = (4 - 6)(4 - 12) = 16$, οπότε $a_{k+1} = 4$. Επειδή εξ ορισμού είναι και $a_1 = a_2 = 4$, συμπεραίνουμε ότι, για κάθε n, ισχύει $a_n = 4$. □

Παράδειγμα 6.5. Υπενθυμίζουμε ότι οι φυσικοί αριθμοί έχουν την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι, αντίστροφα, αν $a_n > 0$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Λύση. Η περίπτωση n = 1 δίνει $a_1^3 = a_1^2$, οπότε $a_1 = 1$ (αφού $a_n > 0$). Υποθέτουμε τώρα ότι *για όλες τις τιμές του k μέχρι και τον m* έχουμε $a_k = k$. Με άλλα λόγια, υποθέσαμε $a_1 = 1, \ldots, a_m = m$. Αυτή είναι η ισχυρή μας επαγωγική υπόθεση, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε πλήρως. Για n = m + 1 έχουμε, εξ υποθέσεως,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 + a_{m+1}^3 = (1 + 2 + \ldots + m + a_{m+1})^2$$
$$= (1 + 2 + \ldots + m)^2 + 2(1 + 2 + \ldots + m)a_{m+1} + a_{m+1}^2$$

οπότε $a_{m+1}^3 = m(m + 1)a_{m+1} + a_{m+1}^2$, και άρα $a_{m+1}(a_{m+1} + m)(a_{m+1} - m - 1) = 0$, από όπου έπεται το αποδεικτέο, $a_{m+1} = m + 1$, και ολοκληρώνεται η επαγωγή. □

Άσκηση 6.6. Δείξτε ότι η ακολουθία Fibonacci, η οποία ορίζεται ως $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \in \mathbb{N})$, ικανοποιεί a) $F_nF_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1} = F_{2n-1}$ και b) $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$.

Άσκηση 6.7. Έστω (a_n) η ακολουθία που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 6.4 με μόνη διαφορά ότι τώρα $a_1 = 2$ και $a_2 = 20$. Δείξτε ότι $a_n = 9n^2 - 9n + 2$ $(n \in \mathbb{N})$. Αν, αντίθετα, είχαμε $a_1 = 2$ και $a_2 = 5$, δείξτε ότι $a_n = 4 + (-½)^{n-2}$.

Άσκηση 6.8. Έστω θ μία γωνία. Ορίζουμε x από την ισότητα $x + 1/x = 2\cos\theta$. Δείξτε ότι ισχύει $x^n + 1/x^n = 2\cos n\theta$ $(n \in \mathbb{N})$.

Άσκηση 6.9. Αν οι αριθμοί a και b ικανοποιούν a + b = 6 και ab = 1, δείξτε ότι για κάθε n ο αριθμός $a^n + b^n$ α) είναι ακέραιος και β) δεν είναι πολλαπλάσιο του 5.

Άσκηση 6.10. Έστω $a_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$. Δείξτε ότι ο a_n είναι ακέραιοςs και ότι $2^n | a_n$.

Άσκηση 6.11. Δείξτε ότι ο ισχυρισμός του Pascal στο έργο του *Traité du Triangle Arithmetique*, που αναφέρθηκε στην Παράγραφο 1 είναι αληθής.

Άσκηση 6.12. Έστω $a_1, a_2, a_3, \ldots$ θετικοί ακέραιοι με ιδιότητες $a_1 = 1$ και $a_n < a_{n+1} \leq 2a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Δείξτε ότι κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα διαφορετικών ανά δύο a_n.

Άσκηση 6.13. Έστω ότι η ακολουθία (b_n) ικανοποιεί $b_1 = 1$, $b_{2n} = b_n$ και $b_{2n+1} = b_{2n} + 1$. Δείξτε ότι ο b_n ισούται με το πλήθος των 1 στο δυαδικό ανάπτυγμα του n.

γ) Διπλή Επαγωγή: Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η απόδειξη του επαγωγικού βήματος απαιτεί, από μόνη της, χρήση επαγωγικού συλλογισμού. Τα ακόλουθα παραδείγματα διαλευκάνουν αυτή την εκδοχή.

Παράδειγμα 6.6. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ είναι πολλαπλάσιο του 24.

Λύση. Γράφουμε $a_n = 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$, και παρατηρούμε ότι το αποδεικτέο είναι άμεσο στη περίπτωση n = 1. Έστω τώρα ότι ισχύει για n = k. Αφού, όπως εύκολα βλέπουμε, ισχύει $a_{k+1} = 7 \cdot a_k - 6 \cdot 5^k + 30$, η επαγωγική απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $6 \cdot 5^k - 30$ είναι πάντα πολλαπλάσιο του 24. Το τελευταίο αποδεικνύεται με μια νέα επαγωγική διαδικασία, η οποία δεν παρουσιάζει δυσκολίες και αφήνεται στον αναγνώστη. □

δ) Δισδιάστατη Επαγωγή: Μέχρι τώρα εξετάσαμε προτάσεις P(n) οι οποίες εξαρτώνται από *μία* παράμετρο n. Μερικές φορές όμως συναντάμε προτάσεις που εξαρτώνται από δύο ή περισσότερους φυσικούς αριθμούς. Ένας εποικοδομητικός τρόπος αντιμετώπισης τέτοιων προτάσεων, που για ευκολία ας τις ονομάσουμε P(m,n), είναι να προχωράμε σταδιακά, ανακατεύοντας τα m με τα n. Παραδείγματος χάριν θα μπορούσαμε να αποδεικνύαμε την αλήθεια της α) P(1,1), κατόπιν των β) of P(2,1) και P(1,2), μετά των γ) P(3,1), P(2,2) και P(1,3), και ούτω καθ΄ εξής. Η συγκεκριμένη περιγραφή διαβαίνει, τρόπος του λέγειν, «διαγώνια». Όμως, κάθε άλλη διαδρομή που σαρώνει σταδιακά όλα τα (m,n), είναι εξ ίσου αποδεκτή.

Παράδειγμα 6.7. (ΔΜΟ 1972). Δείξτε ότι για οποιοδήποτε ζεύγος μη-αρνητικών ακεραίων m και n, ο αριθμός (2m)!(2n)! είναι πολλαπλάσιο του m!n!(m+n)! .

Λύση. Πρέπει να δείξουμε ότι ο αριθμός C(m, n) = (2m)!(2n)!/(m!n!(m+n)!), όπου m, n $\geq$ 0, είναι ακέραιος. Αυτό είναι αληθές στην περίπτωση των C(m, 0) = (2m)!/(m!m!) (αφήνουμε αυτό το βήμα στον αναγνώστη: ένας τρόπος να το αντιμετωπίσει είναι να αναγνωρίσει ότι ο C(m, 0) είναι διωνυμικός συντελεστής, και άρα ακέραιος). Από εκεί και πέρα εύκολα δείχνει κανείς ότι C(m, n) = 4C(m, n – 1) - C(m + 1, n – 1). Με χρήση τώρα του προηγουμένου, δείχνει κανείς εύκολα ότι ο C(m,1) είναι ακέραιος για κάθε m, κατόπιν ότι και ο C(m, 2) για κάθε m, μετά ο C(m, 3) για κάθε m, και λοιπά. □

Άσκηση 6.14. Δείξτε επαγωγικά ότι το γινόμενο r διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του r! .

Άσκηση 6.15. Αν (F_n) η ακολουθία Fibonacci, δείξτε ότι $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ και $2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{2n+2}$. (Υπόδειξη: Έστω P(n) η πρώτη ταυτότητα και Q(n) η δεύτερη. Η επαγωγή ακολουθεί την διαδρομή P(1) $\Rightarrow$ Q(1) $\Rightarrow$ P(2) $\Rightarrow$ Q(2) $\Rightarrow$ P(3) $\Rightarrow$ ...).

ε) Μπρος Πίσω: Η εξής παραλλαγή της κλασικής επαγωγής προχωρά σε δύο στάδια. Πρώτα δείχνει κανείς ότι $P(1) \Rightarrow P(n_1) \Rightarrow P(n_2) \Rightarrow P(n_3) \Rightarrow \ldots$ για μία επιλεγμένη εκ των προτέρων ακολουθία $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Μετά δείχνει το *προς τα πίσω* βήμα P(k) $\Rightarrow$ P(k-1). Αντιλαμβάνεται κανείς ότι αυτό το προς τα πίσω βήμα καλύπτει τα κενά μεταξύ των αριθμών 1, n_1 , n_2 , n_3 , … για τα οποία δεν είχε ληφθεί μέριμνα στο πρώτα στάδιο, και έτσι ολοκληρώνεται η επαγωγική απόδειξη. Θα εξηγήσουμε την διαδικασία με απόδειξη της ανισότητας του Αριθμητικού-Γεωμετρικού μέσου (ανισότητα ΑΜ-ΓΜ). Το πρώτο στάδιο κάνει χρήση της ακολουθίας $1 < 2 < 2^2 < 2^3 < \ldots$.

Παράδειγμα 6.8. Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία θετικών αριθμών (a_n) ισχύει

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Λύση. Η περίπτωση n = 1 είναι τετριμμένη. Υποθέτοντας ότι ισχύει η P(k) για όλες τις ακολουθίες (a_n) θετικών αριθμών, η απόδειξη της P(2k) είναι η εξής: Εφαρμόζουμε την P(k) στην ακολουθία ((a_{2n-1} + a_{2n})/2). Παίρνουμε

$$\left(\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k}\right)^k \geq \frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}$$

$$\geq \sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}$$

η οποία μπορεί να γραφεί στη μορφή που απαιτεί η P(2k), συγκεκριμένα

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}}{2k}\right)^{2k} \geq a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{2k}.$$

Με άλλα λόγια, αποδείξαμε την ανισότητα στις περιπτώσεις P(1), P(2), P(2^2), P(2^3), ….

Για το προς τα πίσω βήμα,

Για το προς τα πίσω βήμα, υποθέτουμε την P(k) και συμπεραίνουμε την αλήθεια της P(k-1). Πραγματικά, από την P(k) με εφαρμογή στους k αριθμούς a_1, a_2, …, a_{k-1} και (a_1+ a_2 + …+ a_{k-1})/(k-1) , έχουμε

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}{k}\right)^k \geq a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$$

η οποία εύκολα μετασχηματίζεται στην P(k-1), με αναγωγή ομοίων όρων. □

Άσκηση 6.16. Ξανακάνετε το βήμα P(k) ⇒ P(2k) στην απόδειξη του παραδείγματος 6.7 αλλά κάνοντας τώρα χρήση της ταυτότητας

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_{2k}}}\ ,$$

για να καταλήξετε σε μία μικρή παραλλαγή της απόδειξης της ανισότητας του ΑΜ-ΓΜ.

Άσκηση 6.17. (ανισότητα Jensen). Αν μία συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα, είναι κοίλη, δείξτε ότι $f\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)}{n}$ για κάθε a_1, a_2, …, a_n στο I. Επίσης δείξτε την αντίστροφη ανισότητα στην περίπτωση που η f είναι κυρτή. (Υπενθυμίζουμε ότι οι κοίλες συναρτήσεις ικανοποιούν $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ και οι κυρτές την αντίθετη ανισότητα).

στ) Ισχυροποίηση: Το ακόλουθο παράδειγμα περιγράφει αυτή την περίεργη τεχνική, η οποία θα ερμηνευτεί αμέσως μετά.

Παράδειγμα 6.9. Δείξτε ότι για n ≥ 2 ισχύει $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} \leq \frac{3}{4}$.

Λύση. Εάν προσπαθήσει ο αναγνώστης να κάνει την κλασική επαγωγική διαδικασία θα διαπιστώσει ότι το επαγωγικό βήμα αποτυγχάνει, οπότε θα χρειαστεί να κάνουμε κάποια παραλλαγή της μεθόδου μας. Πραγματικά, αντί της ζητούμενης, θα αποδείξουμε την *ισχυρότερη* ανισότητα P(n): $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{n}$.
Η περίπτωση n = 2 είναι άμεση. Για το επαγωγικό βήμα (οι λεπτομέρειες είναι απλές και αφήνονται στον αναγνώστη) χρησιμοποιούμε το βήμα

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\le\frac{3}{4}-\frac{1}{k+1},$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το περίεργο είναι ότι ενώ αποτύχαμε να αποδείξουμε μία πρόταση, καταφέραμε να αποδείξουμε μια ισχυρότερη! Το μυστήριο ξεδιαλύνει αν συνειδητοποιήσουμε ότι η απόδειξη του επαγωγικού βήματος στην δεύτερη απόπειρα βασίστηκε σε *ισχυρότερη υπόθεση*, οπότε δεν μας εκπλήττει ότι και το συμπέρασμα ήταν ισχυρότερο. Στην αποτυχημένη πρώτη απόπειρα, η επαγωγική υπόθεση ήταν πολύ αδύναμη για να επιτύχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 6.18. Αποδείξτε την ανισότητα $\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot...\cdot\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}<\frac{1}{3n}$.

Άσκηση 6.19. Αποδείξτε την ανισότητα $\frac{1}{2\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$.

Άσκηση 6.20. Αποδείξτε την ανισότητα $(1+\frac{1}{2^3})(1+\frac{1}{3^3})\cdot...\cdot(1+\frac{1}{n^3})\le 3$.

Η τεχνική της ενδυνάμωσης χρησιμοποιήθηκε έως τώρα μόνο για απόδειξη ανισοτήτων. Δεν πρέπει να βγάλει κανείς το συμπέρασμα ότι εκεί είναι και η μοναδική εφαρμογή της. Ιδού ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 6.10. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχουν n διαφορετικοί ανά δύο διαιρέτες του n! των οποίων το άθροισμα είναι n! .

Λύση. Πριν διατυπώσουμε ποια ακριβώς είναι η ισχυρότερη πρόταση, ας επιχειρήσουμε μία απόδειξη με την κλασική επαγωγική μέθοδο: η περίπτωση n = 1 είναι προφανής. Έστω ότι υπάρχουν k διαφορετικοί ανά δύο διαιρέτες d_1, d_2, …, d_k του k! το άθροισμα των οποίων είναι k!. Αναζητάμε τώρα k + 1 διαφορετικούς ανά δύο διαιρέτες του (k + 1)! με άθροισμα (k + 1)!. Εξετάζουμε τους $(k + 1)d_1$, $(k + 1)d_2$, … , $(k + 1)d_k$. Όλοι είναι διαιρέτες του (k + 1)!, είναι διαφορετικοί ανά δύο, έχουν άθροισμα (k + 1)! αλλά το πρόβλημα είναι ότι το πλήθος τους είναι μόνο k. Αν αντικαταστήσουμε τον $(k + 1)d_1$ με τους kd_1 και d_1, έχουμε συνολικά k + 1 αριθμούς, αλλά τώρα ένας από αυτούς, ο kd_1, μπορεί να μην είναι διαιρέτης του (k + 1)!. Υπάρχει τρόπος να ξεπεράσουμε την δυσκολία. Συγκεκριμένα με το να πάρουμε $d_1 = 1$, αλλά το ερώτημα είναι αν έχουμε το δικαίωμα. Η απάντηση είναι καταφατική εάν αρχίσουμε την διαδικασία από την αρχή αλλά τώρα να αντικαταστήσουμε την προς απόδειξη πρόταση με την ισχυρότερη «για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχουν n διαφορετικοί ανά δύο διαιρέτες του n! των οποίων το άθροισμα είναι n! και τέτοιοι ώστε *ο ένας από τους διαιρέτες να είναι ο 1*». Η διαδικασία τώρα είναι προφανής, και αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη. □

Παράγραφος 7. Επίνοιες

Στην αρχή του άρθρου μιλήσαμε για την προσαρμοστικότητα της επαγωγής ως αποδεικτικό εργαλείο. Με τα παραδείγματα που ακολουθούν φαίνεται ακόμη καθαρότερα η ποικιλία σε αυτή την προσαρμοστικότητα. Εδώ η εφαρμογή της επαγωγικής υπόθεσης είναι κάπως πιο περίπλοκη.

Πριν αναπτύξουμε το πρώτο μας παράδειγμα, επισημαίνουμε ότι η μεταβλητή n στην οποία εφαρμόσαμε την επαγωγή στα παραπάνω, ήταν αυτονόητη από τα δεδομένα του εκάστοτε προβλήματος. Υπάρχουν όμως ορισμένες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις όπου η μεταβλητή με την οποία εργαζόμαστε δεν είναι τόσο πρόδηλη.

Παράδειγμα 7.1. Δείξτε ότι για κάθε σύνολο $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ μη αρνητικών ακεραίων, η παράσταση $X = \dfrac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)!}{a_1!a_2!\dots a_n!}$ είναι ακέραιος.

Λύση. Η επαγωγή δεν θα είναι στον αριθμό n αλλά στον $N = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Αν N = 1, οπότε (χωρίς βλάβη στη γενικότητα) $a_1 = 1$, $a_2 = \dots = a_n = 0$, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε τώρα ότι για κάποιον ακέραιο $k \geq 1$, ο X είναι ακέραιος όποτε το άθροισμα $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ μη αρνητικών ακεραίων ισούται με k. Θα δείξουμε το αντίστοιχο όποτε n μη αρνητικοί ακέραιοι έχουν άθροισμα k + 1.

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $a_j \geq 1$ για κάθε $1 \leq j \leq n$ (αν κάποιο $a_j = 0$, η τιμή του X δεν αλλάζει, οπότε μπορούμε να διώξουμε τον a_j). Έστω λοιπόν $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k + 1$. Από την επαγωγική υπόθεση εφαρμοσμένη στους αριθμούς $a_1 - 1, a_2, \dots, a_n$, έχουμε ότι ο

$$\frac{a_1X}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{(a_1 - 1 + a_2 + \dots + a_n)!}{(a_1 - 1)!a_2!\dots a_n!}$$

είναι ακέραιος. Όμοια οι $a_2X/(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \dots, a_nX/(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ είναι επίσης ακέραιοι, οπότε συμβαίνει το ίδιο και με το άθροισμά τους

$$X = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_jX}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}. \ \square$$

Άσκηση 7.1. Δώστε διαφορετική απόδειξη του παραδείγματος 7.1 κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\dfrac{(a+b+\dots+c)!}{a!b!\dots c!} = \dfrac{((a+b)+\dots+c)!}{(a+b)!\dots \cdot c!} \cdot \dfrac{(a+b)!}{a!b!}$.

Στα επόμενα δύο παραδείγματα εφαρμόζουμε την επαγωγή με πιο ευρηματικό τρόπο.

Παράδειγμα 7.2. Έστω A οποιοδήποτε υποσύνολο του {1, 2, 3, ... , 2n - 1} με n στοιχεία, όπου $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχουν στοιχεία x και y του A (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά) με x + y = 2n.

Λύση. Για n = 1 το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα είναι αληθές για n = k και, για να εφαρμόσουμε επαγωγικό συλλογισμό, θεωρούμε ένα υποσύνολο A του {1, 2, 3, ... , 2k + 1} με k + 1 στοιχεία. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν x και y στο A με x + y = 2(k + 1). Αν το 1 και το 2k + 1 ανήκουν και τα δύο στο A, τελειώσαμε, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο δεν είναι στοιχείο του A. Σβήνουμε από το A και το άλλο. Αυτό που μένει είναι ένα σύνολο A' με τουλάχιστον k στοιχεία τέτοιο ώστε $A' \subseteq \{2, 3, \dots, 2k\}$. Αφαιρούμε 1 από κάθε στοιχείο του A', οπότε παίρνουμε ένα υποσύνολο του {1, 2, 3, ... , 2k -1} με τουλάχιστον k στοιχεία. *Εφαρμόζουμε την επαγωγική μας υπόθεση σε αυτό το* *τελευταίο σύνολο*: Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν x και y στο A με (x - 1) + (y - 1) = 2k, και άρα x + y = 2(k + 1). □

Άσκηση 7.2. (ταυτότητα Hermite's) Αν n είναι θετικός ακέραιος και x ένας πραγματικός αριθμός, δείξτε ότι

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+...+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx],$$

όπου το σύμβολο [.] δηλώνει «ακέραιο μέρος». (Υπόδειξη: η επαγωγή δεν είναι ως προς n αλλά ως προς το μοναδικό $k \in N$ με $k/n \le x < (k+1)/n$).

Άσκηση 7.3. Σε ένα κυκλικό σιρκουί αγώνων αυτοκινήτου υπάρχουν n σταθμοί ανεφοδιασμού των οποίων η αποθηκευμένη βενζίνη είναι ακριβώς όση χρειάζεται ένα αυτοκίνητο να κάνει τον πλήρη γύρο του σιρκουί. Δείξτε ότι υπάρχει σταθμός ανεφοδιασμού από τον οποίο μπορεί να ξεκινήσει το αυτοκίνητο με σκοπό να ολοκληρώσει έναν γύρο. Το αυτοκίνητο μπορεί να χρησιμοποιεί βενζίνη μόνο από τους σταθμούς ανεφοδιασμού, την οποία μπορεί περισυλλέγει όταν βρεθεί στον εκάστοτε σταθμό.

Παράγραφος 8. Δυσκολότερες ερωτήσεις

Άσκηση 8.1. Αν x πραγματικός αριθμός όχι της μορφής n + ½ για ακέραιο n, συμβολίζουμε με {x} τον πλησιέστερο ακέραιο στον x (ώστε για παράδειγμα {e} = {π} = 3). Δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{n^2+n}\{\sqrt{k}\} = 2\sum_{k=1}^{n} k^2.$

Άσκηση 8.2. Έστω n φυσικός αριθμός. Θεωρούμε όλα τα σημεία (a,b) του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες που ικανοποιούν $0 \le a$, $0 \le b$, και $a + b \le n$. Δείξτε ότι αν όλα αυτά τα σημεία καλυφθούν από ευθείες, τότε το πλήθος των ευθειών θα είναι τουλάχιστον n + 1.

Άσκηση 8.3. Εάν N είναι φυσικός αριθμός, εκτελούμε την εξής διαδικασία για να παράγουμε έναν καινούργιο ακέραιο s(N): Πρώτα γράφουμε τον N στο δεκαδικό ανάπτυγμα ως N = $\overline{a_n a_{n-1}...a_0}$ και μετά θέτουμε s(N) = $\sum a_k^2$. Δείξτε ότι η διαρκής επανάληψη αυτής της διαδικασίας στους εκάστοτε νέους αριθμούς θα οδηγήσει τελικά είτε στον αριθμό 1 είτε στον κύκλο 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20. (Σημείωση: μπορεί κανείς να ελέγξει την ορθότητα του ισχυρισμού για όλους τους φυσικούς αριθμούς μέχρι και τον 999. Ο αναγνώστης μπορεί να θεωρήσει το τελευταίο ως δεδομένο. Η επαγωγή στο on $\mathbb{N}$ ξεκινά από εκεί και πέρα.)

Άσκηση 8.4. Δείξτε ότι κάθε όρος της ακολουθίας που ορίζεται από τις συνθήκες $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ και $a_{n+3} = (1 + a_{n+1}a_{n+2})/a_n$ ($n \ge 1$) είναι ακέραιος.

Άσκηση 8.5. Δείξτε ότι αν οι m και n είναι θετικοί ακέραιοι, τότε το ίδιο συμβαίνει και με τον $\frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$.

Άσκηση 8.6 (ανισότητα Chebychev). Έστω $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge 0$ και $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \ge 0$. Δείξτε ότι $\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k).\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} b_k) \le \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)$. Ποια είναι η αντίστοιχη ανισότητα αν $0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ και $0 \le b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$;

Άσκηση 8.7. (διαγωνισμός Putnam 1968, με μικρή παραλλαγή της διατύπωσης). Έστω S ένα σύνολο με n στοιχεία και έστω P το σύνολο όλων των υποσυνόλων του S. Δείξτε ότι μπορούμε να αριθμήσουμε τα στοιχεία του P ως A_1, A_2, ... , A_{2^n} έτσι ώστε $A_1 = \varnothing$ και, επιπλέον, κάθε δύο διαδοχικά στοιχεία της αρίθμησης να διαφέρουν κατά ακριβώς ένα στοιχείο του S.

Άσκηση 8.8. (διαγωνισμός Putnam 1956, με μικρή παραλλαγή της διατύπωσης). Δίνονται 2n σημεία ($n \geq 2$) τα οποία είναι ενώνονται με $n^2 + 1$ ευθύγραμμα τμήματα. Δείξτε ότι σχηματίζεται τουλάχιστον ένα τρίγωνο από τα ευθύγραμμα τμήματα.

Άσκηση 8.9. Έστω A υποσύνολο του {1, 2, … , 2n} με n + 1 στοιχεία. Δείξτε επαγωγικά ότι υπάρχουν x, y στο A έτσι ώστε το x να διαιρεί το y.

Άσκηση 8.10. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n > 1 υπάρχει πεπερασμένο σύνολο A_n σημείων του επιπέδου έτσι ώστε για κάθε $x \in A_n$ υπάρχουν σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στο A_n κάθε ένα από τα οποία απέχει απόσταση 1 από το x.

Άσκηση 8.11. (Παραλλαγή από την Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1997). Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος τιμές του n για τις οποίες μπορούμε να βρούμε έναν $n \times n$ πίνακα του οποίου τα στοιχεία ανήκουν στο σύνολο S = {1, 2, ... , 2n-1} και, για κάθε k = 1, 2, ... , n, η k στήλη και η k γραμμή από κοινού περιέχουν όλα τα στοιχεία του S.

Λύσεις

2.1) Όλες οι ασκήσεις είναι θέμα ρουτίνας. Σημειώνουμε μόνο ότι η j) χρειάζεται την ταυτότητα sin(2y) = 2sinycosy, η k) την $\sin\theta - \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$ με θ = (2n + 2)x και φ = 2nx. Για το επαγωγικό βήμα της l) χρειαζόμαστε την $\sqrt{2+2\cos\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ η οποία συνήθως γράφεται στη μορφή $\cos\theta = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$.

2.2) Το επαγωγικό βήμα χρειάζεται την $a_{k+1} + 1 = 2a_k + 2 = 2(a_k + 1) = 2^k(a_1 + 1)$. Η δεύτερη περίπτωση είναι ανάλογη.

2.3) Χρησιμοποιήστε την $x_{n+1}y_n - x_ny_{n+1} = (a_{n+1} x_n + x_{n-1}) y_n - x_n(a_{n+1} y_n + y_{n-1}) = -(x_ny_{n-1} - x_{n-1}y_n)$.

2.4) Χρησιμοποιήστε την $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu – yv)^2 + (xv + yu)^2$.

2.5) Αν $P(k) = 2k^5/5 + k^4/2 – 2k^3/3 – 7k/30$ τότε, αναπτύσσοντας τα διώνυμα, βρίσκουμε ότι P(k+1) = P(k) + ακέραιος.

2.6) Χρησιμοποιήστε την $x^{n+1} – y^{n+1} = x(x^n – y^n) + y^n(x – y)$.

2.7) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η προσθήκη νέας κορυφής σε ένα k-γωνο αυξάνει τις διαγωνίους κατά k – 1. Ισχύει ακόμη ½ k(k – 3) + k – 1 = ½ (k + 1)(k – 2).

2.8) Θέμα ρουτίνας.

2.9) α) Από την σχέση $(2+\sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}$ έχουμε $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ και $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ (για την απόδειξη του τελευταίου χρειάζεται το ότι η $\sqrt{3}$ είναι αριθμός άρρητος). Είναι τώρα απλό να αποδείξουμε ότι $a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = 1$. β) Από το ανάπτυγμα του διωνύμου αποδεικνύεται ότι ισχύει $(2+\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$. Έχουμε τότε

$$(a_n^2 - 3b_n^2)^n = (a_n + b_n\sqrt{3})^n(a_n - b_n\sqrt{3})^n$$
$$= (2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n = \left[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\right]^n = (4-3)^n = 1.$$

2.10) Χρησιμοποιήστε την $2^{2^{n+1}}-1=(2^{2^n}-1)(2^{2^n}+1)$. Παρατηρήστε ότι οι $2^{2^n}-1$ και $2^{2^n}+1$ δεν έχουν κοινούς πρώτους διαιρέτες καθώς είναι και οι δύο περιττοί αριθμοί που διαφέρουν κατά 2.

2.11) Η περίπτωση n = 1 είναι άμεση. Από την υπόθεση $F_k - 2 = (a - 1)F_0F_1\ldots F_{k-1}$ έχουμε $F_{k+1} - 2 = a^{2^{k+1}}-1=(a^{2^k}-1)(a^{2^k}+1) = (F_k - 2)F_k = (a - 1)F_0F_1\ldots F_{k-1}F_k$.

2.12) 7! = 5040 > 2187 = 3^7. Αν k! > 3^k (όπου k ≥ 7) τότε (k+1)! = (k+1)(k!) > (k+1).3^k ≥ 8.3^k > 3^{k+1}.

2.13) Η συνθήκη $a_1^2 > a_0a_2 = a_2$ δίνει την πρώτη ανισότητα. Υποθέτοντας ότι $a_{k-1}^{1/(k-1)} > a_k^{1/k}$ έχουμε $a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1} > (a_k)^{(k-1)/k}a_{k+1}$, από την οποία έπεται το ζητούμενο.

2.14) Η περίπτωση n = 1 είναι το αποτέλεσμα του. Για το επαγωγικό βήμα, έστω $\sqrt{1+k\sqrt{1+(k+1)\sqrt{1+(k+2)\sqrt{1+(k+3)\sqrt{1+\ldots}}}}} = k+1.$ Υψώνοντας τώρα στο τετράγωνο, αφαιρώντας 1 και κατόπιν διαιρώντας δια k λαμβάνουμε την επόμενη περίπτωση.

3.1) a) $(-1)^n(1 + 2 + \ldots + n) = (-1)^n n(n + 1)/2$

b) (n + 1)!

c) 1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2

d) n/[x(x+n)]

3.2) A = 3, B = 6.

3.3) Αρχικά βρίσκουμε πρώτους αριθμούς, τους 3, 7, 31, 211, 2311, αλλά για n = 6 το αποτέλεσμα είναι 30031 = 59 x 509.

3.4) Ο επόμενος αριθμός, που αντιστοιχεί στο n = 6, είναι 31.

3.5) Βρίσκουμε $a_2 = 2^{3/2}$, $a_3 = 2^{7/4}$, $a_4 = 2^{15/8}$ κ.λπ. Εικάζει κανείς, και αποδεικνύει εύκολα με επαγωγή, ότι $a_n = 2^{(2^n-1)/2^{n-1}}$.

3.6) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ κ.λπ. Η εικασία $a_n = n^2$ είναι σωστή, όπως αποδεικνύεται επαγωγικά. Ένας γρήγορος τρόπος για το τελευταίο είναι να δείξει πρώτα κανείς ότι $\sqrt{a_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n}\sqrt{a_n}$.

4.1) Ουσιαστικά πρόκειται για το προηγούμενο παράδειγμα: $a_{k+1} - 25a_k = -9(8k - 3)$.

4.2) Αν $a_n = 7^{2n} – 48n – 1$, για το επαγωγικό βήμα θεωρήστε το $a_{k+1} - 49\, a_k = 2304k$.

4.3) Αν $a_n = 3.5^{\ 2n+1} + 2^{3n+1}$, το επαγωγικό βήμα διεκπεραιώνεται εύκολα αν θεωρήσουμε το $a_{k+1} – 25a_k = -17.2^{2n+1}$. Αλλιώς, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το $a_{k+1} – 8a_k = 3.17.5^{2k+1}$.

4.4) Αν $a_k = k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$, τότε $a_{k+1} – a_k = (k + 3)^3 – k^3 = 9(k^2 + 3k + 3)$.

5.1) a) $2^5 = 32 \geq 5^2$. Αν $2^k > k^2$ (όπου $k \geq 5$) τότε $2^{k+1}= 2.2^k > 2.k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 5k > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. b) $2^{10} = 1024 > 10^3$. Αν $2^k > k^3$ (όπου $k \geq 10$) τότε $2^{k+1}= 2.2^k > 2.k^3 = k^3 + k^3 \geq k^3 + 10k^2 \geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3$.

5.2) Το επαγωγικό βήμα ανάγεται στο να δείξουμε ότι $(k + 2)\ldots(2k + 2) > (k + 2)^{k+1}$. Αλλά αυτό είναι προφανώς σωστό γιατί κάθε ένας από τους k + 1 όρους αριστερά είναι μεγαλύτερος του (k + 2).

5.3) Αν $(2k)!(k + 1) > 4^k(k!)^2$ τότε $(2k + 2)!(k + 2) = (2k + 2)(2k + 1)[(2k)!(k + 1)](k + 2)/(k + 1) > (2k + 2)(2k + 1)4^k(k!)^2 (k + 2)/(k + 1) = 4^{k+1}((k + 1)!)^2 (2k + 1)(k + 2)/[2(k + 1)^2] > 4^{k+1}((k + 1)!)^2$.

5.4) Το επαγωγικό βήμα ανάγεται στην $\sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$, η οποία είναι ρουτίνα.

5.5) Ο συλλογισμός είναι απλή παραλλαγή του Παραδείγματος 5.1 στο κείμενο.

5.6) Για το επαγωγικό βήμα θεωρήστε ότι ισχύει η ανισότητα για n = m και κάθε ακολουθία (a_k) με $0 \leq a_k \leq 1$ για $1 \leq k \leq m$. Έστω τώρα n = m + 1 και θεωρούμε μία ακολουθία (b_k) με $0 \leq b_k \leq 1$ για $1\leq k \leq m + 1$. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στους $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, … , $a_{m-1} = b_{m-1}$ και $a_m = b_m b_{m+1}$ έχουμε

$2^m(1 + b_1 b_2 \ldots b_{m-1}(b_m b_{m+1})) \geq 2(1 + b_1)(1 + b_2)\ldots(1 + b_{m-1}) (1 + b_m\, b_{m+1})$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται αν παρατηρήσουμε ότι $2(1 + b_m\, b_{m+1}) \geq (1 + b_m)(1 + b_{m+1})$ (το οποίο αληθεύει ως ισοδύναμο της αληθούς πρότασης $(1 - b_m)(1 - b_{m+1}) \geq 0$.)

6.1) Από την επαγωγική υπόθεση με βήμα των 2, απαιτείται η πρόσθεση στην παράσταση $1^2 – 2^2 + 3^2 – 4^2 + \ldots + (-1)^{k-1}k^2$ της ποσότητας $(-1)^k (k + 1)^2 + (-1)^{k+1}(k + 2)^2 = (-1)^{k-1} [- (k+ 1)^2 + (k + 2)^2] = (-1)^{k-1} [(k+ 1) + (k + 2)]$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η πρόσθετη αυτή ποσότητα δίνει το σωστό αποτέλεσμα στο δεξί μέλος της αποδεικτέας.

6.2) Οι περιπτώσεις n = 1, 2, 3, 4 είναι άμεσες: λόγου χάρη ο 5 δεν διαιρεί τον $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354$. Για το επαγωγικό βήμα χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $1^{k+4} + 2^{k+4} + 3^{k+4} + 4^{k+4} – (1^k + 2^k + 3^k + 4^k) = 15.2^k + 80.3^k + 255.4^k$ = (πολλαπλάσιο του 5).

6.3) Κάντε χρήση του $2^{n+3} + 1 = 8.2^n + 1 = 7.2^n + (2^n +1)$.

6.4) Αν οι n αριθμοί ($a_1, a_2, \ldots , a_{n-1}, a_n$) ικανοποιούν την ταυτότητα της άσκησης, τότε προφανώς την ικανοποιούν και οι $n + 3$ αριθμοί ($a_1, a_2, \ldots , a_{n-1}, 2a_n, 2a_n, 2a_n, 2a_n$).

6.5) Προχωράμε με βήματα των 4 κάνοντας χρήση της ταυτότητας $(n + 1)^2 - (n + 2)^2 - (n + 3)^2 + (n + 4)^2 = 4$. Παρατηρείστε ακόμη ότι το εν λόγω αποτέλεσμα επεκτείνετε σε όλους τους ακεραίους, θετικούς και αρνητικούς: Αυτό είναι άμεσο για τον -N από την περίπτωση του N και, τέλος, $0 = 1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2$.

6.6) Ρουτίνα από τον ορισμό.

6.7) Για τους a_1 και a_2 το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτοντας ότι $a_{k-1} = 9(k – 1)^2 – 9(k – 1) + 2$ και $a_k = 9k^2 – 9k + 2$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι $a_{k+1} = 9(k + 1)n^2 – 9(k + 1) + 2$.

6.8) Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε την αλήθεια της πρότασης για τον n = k και, συγχρόνως, τον n = k - 1. Κατόπιν χρησιμοποιούμε την $x^{k+1} + 1/x^{k+1} = (x + 1/x)(x^k + 1/x^k) - (x^{k-1} + 1/x^{k-1}) = 4(\cos a)(\cos ka) - 2\cos(k - 1)a$.

6.9) a) Με χρήση της $a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a + b) – ab(a^{n-1}+ b^{n-1}) = 6(a^n + b^n) - (a^{n-1}+ b^{n-1})$. b) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αναδρομικά, έχουμε $a^{n+1} + b^{n+1} =$

$6[6(a^{n-1} + b^{n-1}) - (a^{n-2} + b^{n-2})] - (a^{n-1}+ b^{n-1}) =$ (πολλαπλάσιο του 5) - $(a^{n-2} + b^{n-2})$.

6.10) Παρατηρείστε ότι $a_{n+1} = 6a_n - 4a_{n-1}$ (ένας γρήγορος τρόπος να το διαπιστώσουμε είναι η παρατήρηση ότι οι $a = 3+\sqrt{5}$ και $b = 3-\sqrt{5}$ ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 = 6x – 4$). Έπεται επαγωγικά ότι $a_{n+1} = 6.2^n$.(ακέραιος) – 4. 2^{n-1}.(ακέραιος) = 2^{n+1}.(ακέραιος).

6.11) Για το επαγωγικό βήμα υποθέστε ότι ισχύει το αποτέλεσμα για n = m και όλα τα k < n. Τότε ${}^{m+1}C_k : {}^{m+1}C_{k+1} = ({}^mC_{k-1} + {}^mC_k) : ({}^mC_k + {}^mC_{k+1})$. Διαιρούμε τώρα αριθμητή και παρονομαστή δια του ${}^mC_k$, και χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες

$${}^mC_{k-1} : {}^mC_k = k : [n – (k – 1)] \text{ και } {}^mC_k : {}^mC_{k+1} = (k + 1) : (n – k).$$

6.12) Για το επαγωγικό βήμα υποθέστε ότι για κάθε θετικός ακέραιος x με $x \le a_k$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα διαφορετικών στοιχείων από τους $a_1, \ldots , a_{k-1}, a_k$. Τότε κάθε y με $a_k < y \le a_{k+1}$ μπορεί να γραφεί ως $y = a_k + x$ με $1 \le x \le a_{k+1} - a_k \le a_k$, και κατόπιν να εφαρμοστεί η επαγωγική υπόθεση στον x.

6.13) Μπορούμε εύκολα να συνθέσουμε επαγωγική απόδειξη από τις παρατηρήσεις: Η αναπαράσταση του 2n στο δυαδικό σύστημα είναι όμοια με του n εκτός από ένα 0 στο τέλος της. Η αναπαράσταση του 2n + 1 είναι όμοια με του 2n με εξαίρεση το τελευταίο ψηφίο που από 0 γίνεται 1.

6.14) Για σταθερό r θεωρήστε το P(n) = n(n + 1)(n + 2)...(n + r -1), που είναι γινόμενο r διαδοχικών ακεραίων. Είναι P(n + 1) - P(n) = r x (n + 1)(n + 2)...(n + r -1) = r φορές το γινόμενο r - 1 διαδοχικών ακεραίων. Με άλλα λόγια, αρκεί να αποδείξουμε την ανάλογη πρόταση αλλά για το γινόμενο r - 1 διαδοχικών ακεραίων. Το τελευταίο είναι απλό επαγωγικά, αρχίζοντας από το r = 1.

6.15) Ρουτίνα από την υπόδειξη στο κείμενο.

6.16) Το βήμα P(k) $\Rightarrow$ P(2k) γίνεται

$$\sqrt[2k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2k}}} \leq \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_{2k}}}{2} \leq$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}}{k}\right) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2k}}{2k}.$$

6.17) Η απόδειξη είναι σχεδόν αυτολεξεί, εκτός από τετριμμένες ρυθμίσεις, ίδια με την απόδειξη του Παραδείγματος 6.8, ακολουθώντας την πορεία P(k) $\Rightarrow$ P(2k) και μετά P(k) $\Rightarrow$ P(k - 1).

6.18) Εάν κανείς δεν είναι όσο προσεκτικός χρειάζεται, το επαγωγικό βήμα θα καταλέξει στην *ψευδή* ανισότητα $\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} < \frac{3k}{3k+3}$. Αυτό επιδιορθώνεται αν αποδείξουμε την ισχυρότερη ανισότητα $\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} < \frac{1}{3n+1}$, η οποία οδηγεί στο ορθό αποτέλεσμα μέσω της απλής ανισότητας $\frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} < \frac{3k+1}{3k+4}$.

6.19) Η ισχυρότερη ανισότητα $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ είναι απλή με χρήση επαγωγής.

6.20) Η ισχυρότερη ανισότητα $(1+\frac{1}{2^3})(1+\frac{1}{3^3}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{n^3}) \leq 3 - \frac{1}{n}$ είναι απλή με χρήση επαγωγής.

7.1) Η επαγωγική υπόθεση επί του n μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί ότι το δεξί μέλος είναι γινόμενο ακεραίων.

7.2) Για $0 \le x < 1/n$ το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο. Υποθέτουμε τώρα ότι το αποτέλεσμα αληθεύει για όλα τα x με $k/n \le x < (k+1)/n$ και έστω y τυχαίος πραγματικός με $(k+1)/n \le y < (k+2)/n$. Για να αποδείξουμε την διατυπωθείσα ταυτότητα στην περίπτωση του y, εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση στον $x = y – 1/n$. Θα καταλήξουμε στην ζητούμενη ταυτότητα για το y με εξαίρεση τους δύο ακριανούς όρους. Αυτοί όμως μπορούν να τακτοποιηθούν από την ταυτότητα $[a + 1] = [a] + 1$. Για τα αρνητικά x εργαζόμαστε παρόμοια.

7.3) Για το επαγωγικό βήμα εργαζόμαστε ως εξής: Έστω ότι οι σταθμοί ανεφοδιασμού είναι k+1 τον αριθμό. Από τις αρχικές συνθήκες είναι σαφές ότι υπάρχει σταθμός, ας τον ονομάσουμε A, του οποίου η βενζίνα επαρκεί για να μας μεταφέρει στον επόμενο σταθμό πηγαίνοντας, φερ' ειπείν, με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Εάν κουβαλήσουμε την βενζίνα του A στον επόμενο σταθμό και καταργήσουμε τον A, τότε θα έχουμε k σταθμούς οπότε, από την επαγωγική υπόθεση, μπορεί να ολοκληρωθεί το σιρκουί. Έστω ότι αυτή η ολοκλήρωση του σιρκουί ξεκινά από τον σταθμό B και προχωρά με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Είναι τώρα σαφές ότι αν επιστρέψουμε την βενζίνα πίσω στον σταθμό A, το σιρκουί μπορεί να ολοκληρωθεί, με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ξεκινώντας από τον B, και μαζεύοντας την βενζίνη από τον A όταν τον διασχίσουμε.

8.1) Για το επαγωγικό βήμα παρατηρείστε ότι αν $n^2 + n < k \le (n + 1)^2 + (n + 1)$ τότε $n^2 + n + ¼ < k < (n + 1)^2 + (n + 1) + ¼$ (η πρώτη ανισότητα ισχύει επειδή ο k είναι *ακέραιος* μεγαλύτερος του *ακεραίου* $n^2 + n$). Άρα $(n + ½)^2 < k < (n + 1 + ½)^2$, οπότε $\{\sqrt{k}\} = n + 1$, από όπου έπεται ότι η συμβολή των νέων όρων στο άθροισμα είναι $\sum_{k=n^2+n+1}^{(n+1)^2+(n+1)} \{\sqrt{k}\} = (n+1)[(n+1)^2 + (n+1) - (n^2+n)] = 2(n+1)^2$, όπως θέλουμε.

8.2) Η περίπτωση n = 1 είναι άμεση. Υποθέτουμε ότι για n = k χρειαζόμαστε τουλάχιστον k + 1 γραμμές για να καλύψουμε τα ακέραια σημεία που περιγράφονται στην άσκηση. Τότε για n = k + 1 έχουμε α) εάν μία από τις ευθείες είναι η $x + y = k + 1$, τότε χρειάζονται, εξ υποθέσεως, τουλάχιστον k + 1 ευθείες για να καλυφθούν τα υπόλοιπα σημεία. Σύνολο: k + 2. β) Αν, αντίθετα, η ευθεία $x + y = k + 1$ δεν συμπεριλαμβάνεται, τότε τα k + 2 ακέραια σημεία πάνω της απαιτούν τουλάχιστον άλλες k + 2 ευθείες για να καλυφθούν.

8.3) Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $N \ge 999$ τότε $N – 1 \ge s(N)$ διότι $N – s(N) = \sum_{k=1}^{n} a_k(10^k - a_k) + a_0(1 - a_0) \ge 1.(10^2 – 9) + 9.(1 – 9) > 0$. Έστω τώρα ότι διαδοχικές εφαρμογές της s σε κάθε k με $k \le n$ (όπου $n \ge 999$) είτε καταλήγει στον αριθμό 1 ή στον αναφερόμενο κύκλο. Τότε για τον n+1 έχουμε $n \ge s(n + 1)$. Άρα οι διαδοχικές εφαρμογές του s στον s(n + 1) καταλήγουν στην συμπεριφορά που αναφέρθηκε.

8.4) Οι λίγοι πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι 1, 1, 1, 2, 3, 7, 11, 26, 41, ... Μαντεύει κανείς ότι η ακολουθία αυτή ικανοποιεί επίσης την αναδρομική σχέση $a_{n+2} = 4a_n - a_{n-2}$ $(n \ge 1)$. Το τελευταίο αποδεικνύεται εύκολα επαγωγικά από την δοθείσα σχέση:

$$a_{n+3} = (1 + a_{n+1}a_{n+2})/a_n = [1 + a_{n+1}(4a_n - a_{n-2})]/a_n = 4 a_{n+1} + (1 - a_{n+1}a_{n-2})/ a_n =$$

$$= 4 a_{n+1} + [1 - (1 + a_n a_{n-1})]/ a_n = 4 a_{n+1} - a_{n-1} .$$

Το γεγονός ότι η (a_n) αποτελείται από ακεραίους είναι τώρα προφανές από την νέα αναδρομική σχέση.

8.5) Κάνουμε επαγωγή ως προς τον m. Για το επαγωγικό βήμα, στον όρο $a_m = \frac{(mn)!}{m!(n!)^m}$, για σταθερό n, έχουμε

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{(mn+1)(mn+2)...(mn)...(mn+n)}{(m+1)n!} = \frac{(mn+1)(mn+2)...(mn)...(mn+n-1)}{(n-1)!}.$$

Παρατηρείστε ότι ο αριθμητής είναι γινόμενο n-1 διαδοχικών όρων, άρα είναι πολλαπλάσιο του παρονομαστή (το τελευταίο αποδεικνύεται με διάφορους τρόπους, παραδείγματος χάριν επαγωγικά).

8.6) Το επαγωγικό βήμα, από το n = m στο n = m + 1, ανάγεται στο να αποδείξουμε ότι

$$a_{m+1}(b_1 + b_2 + ... + b_m) + b_{m+1}(a_1 + a_2 + ... + a_m)$$
$$\leq (a_1b_1 + a_2 b_2 + ... + a_mb_m) + (m+1)\, a_{m+1}\, a_{m+1}\, .$$

Αυτό όμως έπεται αν αθροίσουμε το k από 1 έως m τις εύκολα αποδείξιμες ανισότητες

$$a_{m+1}\, b_k + a_k\, b_{m+1} \leq a_{m+1}\, b_{m+1} + a_k\, b_k \quad (1 \leq k \leq m).$$

Η αντίστοιχη ανισότητα όταν τα (a_n), (b_n) είναι αύξουσες ακολουθίες είναι απλούστατα η ίδια η Chebychev με μόνη διαφορά ότι η φορά της είναι από την άλλη κατεύθυνση. Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη της προηγούμενης με εξαίρεση ότι αντιστρέφουμε το "≤".

8.7) Έστω $S_n = \{x_1, x_2, ... , x_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$). Μία διάταξη των υποσυνόλων του S_1 όπως ζητά η άσκηση είναι η $\emptyset$, $\{x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2\}$. Για το επαγωγικό βήμα, έστω ότι τα υποσύνολα του S_n έχουν διαταχθεί με τον τρόπο που περιγράφεται στην άσκηση, και έστω ότι τα αριθμούμε ως $\emptyset = A_1, A_2, ... , A_{2^n}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ακόλουθη διάταξη των 2^{n+1} υποσυνόλων του S_{n+1} ικανοποιεί τις ζητούμενες συνθήκες:

$$\emptyset = A_1, A_2, ... , A_{2^n}, \{x_{n+1}\}\cup A_{2^n}, \{x_{n+1}\}\cup A_{2^n-1}, \{x_{n+1}\}\cup A_{2^n-2}, ... , \{x_{n+1}\}\cup A_1 .$$

8.8) Για το επαγωγικό βήμα, με 2n + 2 σημεία, επιλέγουμε οποιαδήποτε δύο συνδέονται με ευθύγραμμο τμήμα. Αν υπάρχει τρίτο σημείο που συνδέεται με αυτά τα δύο, τελειώσαμε. Αλλιώς, τα υπόλοιπα 2n συνδέονται με τα συγκεκριμένα δύο με το πολύ 2n ευθύγραμμα τμήματα (επειδή κάθε ένα από τα υπόλοιπα συνδέεται με το πολύ ένα από τα δύο). Άρα, τα υπόλοιπα 2n σημεία συνδέονται με τουλάχιστον $(n + 1)^2 - 2n = n^2 + 1$ ευθύγραμμα τμήματα. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από την υπόθεσή μας.

8.9) Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα αν n = k. Έστω A υποσύνολο του {1, 2, … , 2k + 1, 2k + 2} με k + 2 στοιχεία. Αν $2k + 2 \notin A$ τότε (τουλάχιστον) k + 1 στοιχεία του A είναι στο {1, 2, … , 2k} και το συμπέρασμα έπεται από την επαγωγική υπόθεση. Έστω λοιπόν $2k + 2 \in A$. Παρατηρούμε ότι είτε k +

$1 \in A$ είτε $k + 1 \notin A$. Στην πρώτη περίπτωση, τελειώσαμε, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε την δεύτερη. Θεωρούμε το σύνολο B που αποτελείται από τα στοιχεία του A αλλά με το $k + 1$ στη θέση του $2k + 2$. Παρατηρούμε ότι το B έχει (τουλάχιστον) $k + 1$ στοιχεία στο $\{1, 2, \dots , 2k\}$ (διότι έχει $k + 2$ στοιχεία στο $\{1, 2, \dots , 2k + 1\}$). Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν x, y στο B τέτοια ώστε $x \mid y$. Αν $x \neq k + 1 \neq y$, τελειώσαμε. Αλλιώς έχουμε $y = k + 1$ (δεν μπορεί $x = k + 1$ διότι τότε $2k + 2 \geq y \geq 2x = 2k + 2$, ενώ $2k + 2 \notin B$). Αλλά τότε $x \mid 2y$.

8.10) Στη περίπτωση n = 2, μας κάνουν οποιαδήποτε δύο σημεία που απέχουν απόσταση 1 μεταξύ τους. Έστω ότι για n = k υπάρχει πεπερασμένο σύνολο A_k όπως περιγράφτηκε και έστω $\vec{u}$ οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου διαφορετικό από τα (πεπερασμένα το πλήθος) διανύσματα που συνδέουν τα σημεία του A_k. Ορίζουμε το A_{k+1} ως τα σημεία του A_k μαζί με τα ίδια αυτά σημεία μετατοπισμένα κατά $\vec{u}$. Είναι σαφές ότι κάθε σημείο του A_{k+1} απέχει απόσταση 1 από k+1 σημεία του A_{k+1} (k από τα οποία έχουν την ιδιότητα αυτή επειδή την κληρονόμησαν από το A_k αλλά υπάρχει και ένα νέο, λόγω του $\vec{u}$).

8.11) Για n = 2 μπορεί πολύ απλά να γράψει κανείς τέτοιο πίνακα, με μονάδες κατά μήκος της διαγωνίου. Αν κατασκευάσει κανείς ένα πίνακα (a_{ij}) με την περιγραφείσα ιδιότητα για for n = k, αλλά με την επιπλέον ιδιότητα να έχει μονάδες κατά μήκος της διαγωνίου, μπορεί να κατασκευάσει έναν ανάλογο 2kx2k πίνακα (b_{ij}) ως εξής: Για $0 \leq i, j \leq n$, θέτουμε a) $b_{i,j} = a_{i,j}$, b) $b_{i+n,j+n} = a_{i,j}$; c) $b_{i,j+n} = a_{i,j} + 2n$, d) $b_{i+n,i} = 2n$ και $b_{i+n,j} = a_{i,j} + 2n$ για i διαφορετικό του j.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο (b_{ij}) έχει τις ζητούμενες ιδιότητες (και, επιπροσθέτως, μονάδες στη διαγώνιο). Παρατηρείστε ότι η διαδικασία που περιγράψαμε κατασκευάζει πίνακες τάξης $2^m \times 2^m$, για κάθε m.