

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{και} \quad x_0 \in \mathbf{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + a_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbf{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \text{εφόσον} \quad Q(x_0) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— Κάθε πολωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής ,

Απόδειξη. Άμεσο, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

— Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής ,

Απόδειξη. Άμεσο, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta.$$

Ενεργοποιήστε τα Windows
Μετάβαση στις ρυθμίσεις για ενεργοποίηση

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι :

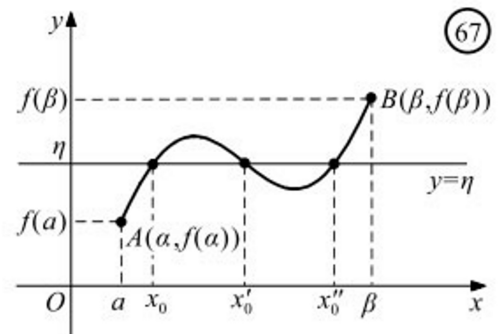
- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $g(a) < 0$, $g(\beta) > 0$,

αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \quad \text{και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



Ενεργο
Μετάβαση

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

- Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$(c)' = 0$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$(x)' = 1$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή

$$(x^v)' = vx^{v-1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του \mathbf{R} , τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1},$$

δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$. ■

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} .$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacksquare$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R}^* και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbf{R}^*$ έχουμε :

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}. \quad \blacksquare$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$. Επομένως, αν $\kappa \in \mathbf{Z} - \{0,1\}$, τότε

$$(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = \mathbf{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in R_1$ έχουμε :

$$\begin{aligned} (\epsilon\phi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = ax^{a-1}$, δηλαδή

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad (1)$$

Πράγματι, αν $y = x^a = e^{a \ln x}$ και θέσουμε $u = a \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

- Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Πράγματι, αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbf{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R}^* και ισχύει

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

Πράγματι.

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει :

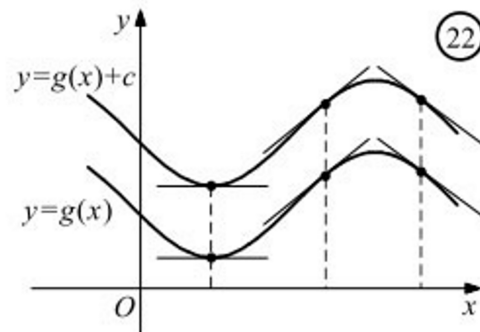
$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) (x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε :

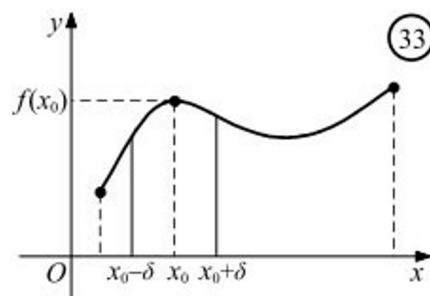
$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (Σχ. 35γ).

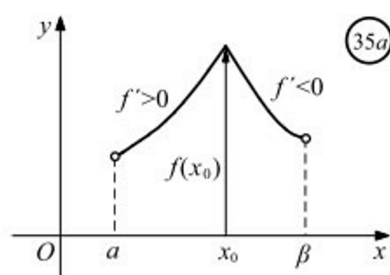
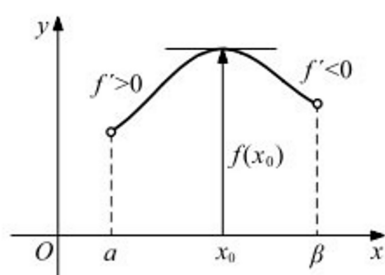
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$



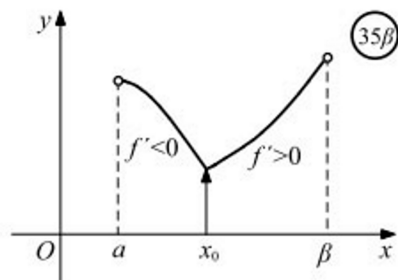
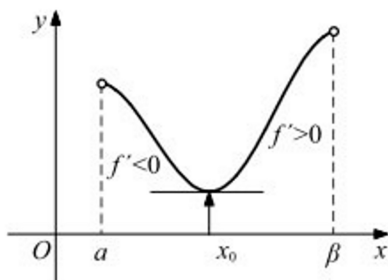
Ενεργ
Μετάβο
Window

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει :

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \text{για κάθε } x \in (a, \beta),$$

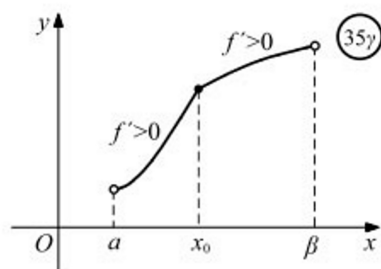
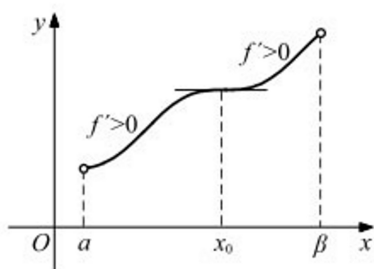
που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι

$$f'(x) > 0, \quad \text{για κάθε } (a, x_0) \cup (x_0, \beta).$$



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα $f(x_0)$ το δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■