80+1 αιτιολογήσεις του ψευδούς

Συναρτήσεις

1. Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση οποιαδήποτε συνάρτησης το πολύ σε ένα σημείο

2. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι συναρτήσεις:

$$f \cdot g \text{ και } \frac{f}{g}$$

εφόσον ορίζονται, έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού

3. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει:

$$f \circ g = g \circ f$$

4. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

5. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων για τις οποίες η συνάρτηση $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

6. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων για τις οποίες ορίζεται η συνάρτηση $f + g$, ορίζεται και η συνάρτηση $f \circ g$

7. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $f \cdot g$ ισχύει:

$$f \circ g \neq f \cdot g$$

8. Κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

9. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 είναι γνησίως μονότονη στο σύνολο $\Delta_1 \cup \Delta_2$

10. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση δεν παρουσιάζει ακρότατα

11. Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει μέγιστη τιμή M, υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = M$$

12. Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία έχει την ιδιότητα:

$$\mu \leq f(x) \leq M \text{ για κάθε } x \in A$$

ισχύει ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το μ και η μέγιστη τιμή της είναι το M

13. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι 1-1

14. Κάθε περιττή συνάρτηση είναι 1-1

15. Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης που είναι 1-1, τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία σε ένα μόνο σημείο

16. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ με $A \cap B = \varnothing$ οι οποίες είναι 1-1, τότε η συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

είναι 1-1

17. Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι 1-1, είναι γνησίως μονότονη

(ημερήσια και εσπερινά, 2018)

18. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων οι οποίες δεν είναι 1-1 και ορίζεται η συνάρτηση $f + g$, τότε η συνάρτηση $f + g$ δεν είναι 1-1

19. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων οι οποίες δεν είναι 1-1 και ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ δεν είναι 1-1

20. Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^{-1} \neq f$$

21. Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, εφόσον αυτά υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$

22. Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x \text{ για κάθε } x \in A$$

Όρια-συνέχεια

23. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ έχει όριο στο x_0

24. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ τότε δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια της f στο x_0

25. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ και ισχύει $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$$

26. Για κάθε συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \le \frac{1}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0$$

τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

27. Για κάθε συνάρτηση f για την οποία υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

28. Για κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \ell > 0$$

ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \text{ ή } \lim_{x\to x_0} f(x) = -\ell$$

29. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f και g για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ και } g(x) > 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = +\infty$$

30. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f και g για τις οποίες υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$$

τότε υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$

31. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες υπάρχουν και είναι μη πεπερασμένα τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x)$$

τότε υπάρχει το όριο στο x_0 της συνάρτησης $f + g$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

32. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

33. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες υπάρχουν και είναι μη πεπερασμένα τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to x_0} g(x)$$

τότε υπάρχει το όριο στο x_0 της συνάρτησης $\dfrac{f}{g}$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

34. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = 0$$

35. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$$

36. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$$

τότε $\lim_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = 0$

(ημερήσια-εσπερινά επαναληπτικές και ομογενείς, 2018)

37. Για κάθε συνάρτηση f με $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ ή } \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

(ημερήσια και εσπερινά-παλαιό σύστημα, 2020)

38. Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0

(ημερήσια και εσπερινά, 2019)

39. Για κάθε συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in A$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

40. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο x_0, η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0

41. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο x_0, η συνάρτηση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

42. Για κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι αντιστρέψιμη, η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.

43. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε:

$$f(\alpha)f(\beta) < 0$$

44. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 0$, τότε $f(\beta) > 0$

45. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)f(\beta) > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει λύση στο (α, β)

46. Κάθε συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

47. Κάθε συνάρτηση f που δεν μηδενίζεται σε ένα διάστημα Δ, διατηρεί πρόσημο στο Δ

48. Κάθε συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

49. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω κάθε συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

50. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών είτε το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$ είτε το διάστημα $[f(\beta), f(\alpha)]$

51. Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή

Παράγωγος

52. Κάθε συνάρτηση f για την οποία υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0

53. Κάθε συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν:

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

54. Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0 είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό

(ημερήσια και εσπερινά, 2017)

55. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η συνάρτηση:

$$g(x) = |f(x)|$$

είναι παραγωγίσιμη στο x_0

56. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

57. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$$

58. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο x_0 με $g(x_0) \neq 0$ ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{g^2(x_0)}$$

59. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο x_0, η συνάρτηση $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0

60. Η γραφική παράσταση κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει οριζόντια εφαπτόμενη ευθεία

61. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

62. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

τότε ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$

63. Για κάθε συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

64. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

65. Για κάθε συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

66. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει:

$$f(x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

67. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in A$$

τότε η f είναι σταθερή στο A

(ημερήσια και εσπερινά, 2019)

68. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σύνολο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = g'(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

τότε ισχύει:

$$f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in A$$

69. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : A \to \mathbb{R}$, αν η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες

70. Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(ημερήσια και εσπερινά-νέο σύστημα, 2020)

71. Για κάθε συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει τοπικά μέγιστα, το μεγαλύτερο από αυτά είναι ολικό μέγιστο.

72. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ισχύει $f'(x_0) = 0$

73. Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει:

$$f'(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

74. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 το οποίο είναι εσωτερικό του Δ, αν $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0

75. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες παρουσιάζουν τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε η συνάρτηση $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο

76. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε η συνάρτηση $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής

77. Για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της C_f

(ημερήσια-εσπερινά επαναληπτικές και ομογενείς, 2017)

78. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, ισχύει:

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(ημερήσια και εσπερινά επαναληπτικές-παλαιό σύστημα, 2020)

79. Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης f η οποία έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $(\epsilon) : x = 0$ δεν τέμνει την ευθεία (ϵ)

80. Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης που έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $(\epsilon): y = x$ τέμνει την ευθεία (ϵ) το πολύ σε ένα σημείο

81. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 και ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και
- $g'(x) \neq 0$ κοντά στο x_0

τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ενδεικτικές απαντήσεις

1. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 - 1$$

Έχουμε:

$$f(-1) = f(1) = 0$$

Επομένως ο άξονας $x'x$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία τα $M(-1, 0)$ και $N(1, 0)$

2. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x \text{ και } g(x) = x - 1$$

Η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ενώ η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$

3. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 2x - 1 \text{ και } g(x) = 2x + 1$$

Επειδή $A_f = A_g = \mathbb{R}$ έχουμε:

$$A_{f\circ g} = A_{g\circ f} = \mathbb{R}$$

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(2x + 1) - 1 = 4x + 1 \text{ και:}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(2x - 1) + 1 = 4x - 1$$

Επειδή:

$$f(g(0)) = 1 \text{ και } g(f(0)) = -1$$

προκύπτει ότι $f \circ g \neq g \circ f$

4. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x + 1 \text{ και } g(x) = x - 1$$

Επειδή $A_f = A_g = \mathbb{R}$ έχουμε:

$$A_{f\circ g} = A_{g\circ f} = \mathbb{R}$$

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x - 1) + 1 = x \text{ και:}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1) - 1 = x$$

Επομένως έχουμε $f \circ g = g \circ f$

5. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ με } x \geq 0 \text{ και } g(x) = x^2 \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Όμως η συνάρτηση $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ αφού:

$$A_{f\circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}$$

6. Ο ισχυρισμός δεν ισχύει, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = 0$$

Για τις συναρτήσεις f και g ορίζεται η συνάρτηση $f+g$ με πεδίο ορισμού το R^* και τύπο:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x}$$

Όμως η συνάρτηση $f \circ g$ δεν ορίζεται αφού:

$$A_{f\circ g} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \in \mathbb{R}^*\} = \varnothing$$

7. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = 0 \text{ και } g(x) = x$$

Για τις συναρτήσεις f και g έχουμε:

$$A_{f\cdot g} = A_{f\circ g} = \mathbb{R}$$

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

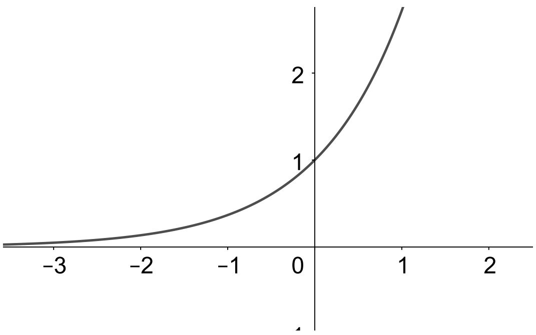
$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = 0 \text{ και}$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 0$$

Επομένως έχουμε: $f\cdot g = f\circ g$

8. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = e^x$$

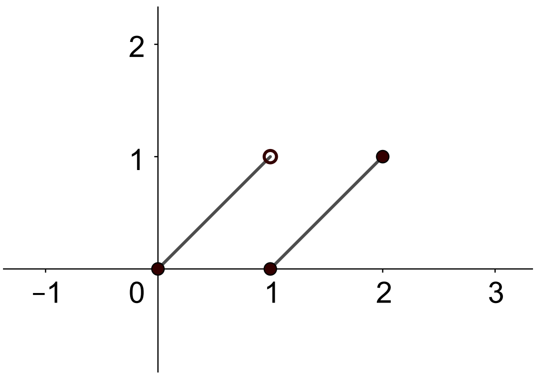


Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όμως έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$

9. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1)$ και $[1, 2]$. Όμως η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ αφού:

$$\frac{1}{2} < 1 \text{ αλλά } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > f(1) = 0$$

10. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = x$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $f(0) = 0$ και μέγιστη τιμή την $f(1) = 1$

11. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \etaμx \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 1, όμως έχουμε:

$$\etaμx = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

12. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = x \text{ με } x \in (0, 1)$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε:

$$0 \le f(x) \le 1$$

Όμως η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, διότι είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε:

$$0 < f(x) < 1$$

13. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = x^2$$

Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική, όμως δεν είναι 1-1 αφού:

$$-1 \neq 1 \text{ αλλά } f(-1) = f(1) = 1$$

14. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 0$$

Η συνάρτηση f είναι περιττή διότι:

• Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $-x \in \mathbb{R}$

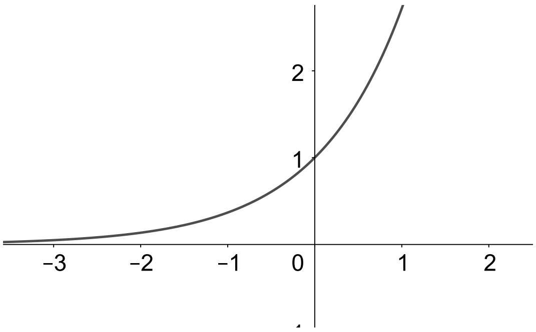
• Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = 0 = -f(x)$$

Όμως η f δεν είναι 1-1 αφού είναι σταθερή.

15. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = e^x$$



Η f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως είναι 1-1. Όμως η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) δεν τέμνει την C_f

16. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x \text{ με } x \in [0, 1) \text{ και } g(x) = x - 1 \text{ με } x \in [1, 2]$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1. Όμως η συνάρτηση:

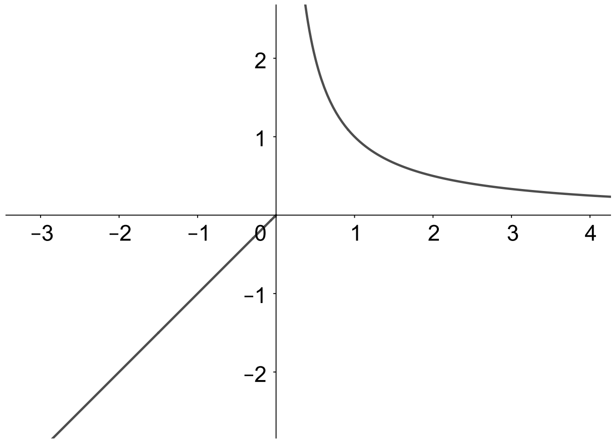
$$h(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

δεν είναι 1-1, αφού $f(0) = f(1) = 0$

17. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η f είναι 1-1 αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την C_f σε ένα ακριβώς σημείο. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως δεν είναι γνησίως μονότονη

18. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = x - x^2$$

Οι συναρτήσεις f και g δεν είναι 1-1 αφού:

$$-1 \neq 1 \text{ και } f(-1) = f(1) = 1 \text{ και}$$

$$0 \neq 1 \text{ και } g(0) = g(1) = 0$$

Όμως η ορίζεται η συνάρτηση $f + g$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(f + g)(x) = x^2 + x - x^2 = x$$

Η συνάρτηση $f + g$ είναι 1-1

19. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = |x| \text{ με } x > -2 \text{ και}$$

$$g(x) = x^2 \text{ με } |x| \geq 2$$

Οι συναρτήσεις f και g δεν είναι 1-1 αφού:

$$f(-1) = f(1) = 1 \text{ και } g(-2) = g(2) = 4$$

Η συνάρτηση $g \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα:

$$A_{g \circ f} = \{x \in A_f \mid f(x) \in A_g\} =$$

$$= \{x > -2 \mid |x| \geq 2\} = [2, +\infty)$$

Επίσης ο τύπος της συνάρτησης $g \circ f$ είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |x|^2 = x$$

Η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1, διότι είναι γνησίως αύξουσα

20. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ με } x \neq 0$$

Η συνάρτηση f είναι 1-1 και έχει αντίστροφη συνάρτηση:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \text{ με } x \neq 0$$

Επομένως ισχύει $f^{-1} = f$

21. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = -x$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επομένως είναι αντιστρέψιμη και ισχύει:

$$f^{-1}(x) = -x \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε $f = f^{-1}$ όμως μόνο το σημείο $O(0, 0)$ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$

22. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = e^x \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη με:

$$f^{-1}(x) = \ln x \text{ με } x > 0$$

Η σχέση:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

ισχύει για κάθε $x > 0$

23. Η πρόταση είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{x \to 1+} f(x) = 1$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

24. Η πρόταση είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Για την f υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο 0 αφού:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (x - 1) = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (x + 1) = 1$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) \neq \lim_{x \to 0+} f(x)$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

25. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = 2x^2$$

Με x κοντά στο 0 έχουμε:

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2x^2 = -x^2 < 0$$

Οπότε έχουμε:

$$f(x) < g(x) \text{ με } x \text{ κοντά στο } 0$$

Για τις συναρτήσεις f και g υπάρχουν τα όρια στο 0 αφού έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2\right) = 0 \text{ και:}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(2x^2\right) = 0$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

26. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = -x \text{ με } x > 0$$

Για την συνάρτηση f ισχύει:

$$f(x) = -x < 0 \leq \frac{1}{x^2} \text{ για κάθε } x > 0$$

Όμως δεν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ αφού:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

27. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ με } x \neq 1$$

Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Όμως δεν ισχύει $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0$ αφού το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι:

- $\lim\limits_{x\to1-} f(x) = \lim\limits_{x\to1-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to1+} f(x) = \lim\limits_{x\to1+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

28. Η πρόταση είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|f(x)| = 1$ επομένως:

$$\lim_{x\to0} |f(x)| = 1$$

Όμως δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ αφού:

$$\lim_{x\to0-} f(x) = -1 \text{ και } \lim_{x\to0+} f(x) = 1$$

29. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \text{ και } g(x) = |x|$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Επίσης έχουμε:

$$g(x) = |x| > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$f(x)g(x) = \frac{1}{|x|} \cdot |x| = 1$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to0}(f(x)g(x)) = 1$

30. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ και } g(x) = -\frac{1}{x}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to0}(f(x) + g(x)) = 0$. Όμως δεν υπάρχουν τα όρια των f και g στο 0 αφού:

$$\lim_{x\to0\pm} f(x) = \lim_{x\to0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty \text{ και:}$$

$$\lim_{x\to0\pm} g(x) = \lim_{x\to0\pm} \frac{-1}{x} = \mp\infty$$

31. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ και } g(x) = -\frac{1}{x^4}$$

Για τις συναρτήσεις f και g υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to0} g(x)$ αφού:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και:}$$

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{-1}{x^4} = -\infty$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x\to0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = \lim_{x\to0}\left[\left(x^2 - 1\right) \cdot \frac{1}{x^4}\right] =$$

$$= (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Υπάρχει επομένως το όριο στο 0 της συνάρτησης $f+g$, υπάρχουν και τα όρια στο 0 των f και g, όμως δεν μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{x \to 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 0} g(x)$$

διότι το δεύτερο μέλος της σχέσης αυτής είναι η απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$

32. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x + 1 \text{ και } g(x) = x$$

Πράγματι έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \text{ και } \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) \cdot \lim_{x \to 0} g(x) = 1 \cdot 0 = 0$$

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) - \lim_{x \to 0} g(x) = 1 - 0 = 1$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x)) \neq \lim_{x \to 0} f(x) - \lim_{x \to 0} g(x)$$

33. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ και } g(x) = -\frac{1}{x^4}$$

Για τις συναρτήσεις f και g υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ αφού:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ και:}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^4} = -\infty$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \left(-x^2\right) = 0$$

Υπάρχει επομένως το όριο στο 0 της συνάρτησης $\frac{f}{g}$, υπάρχουν και τα όρια στο 0 των f και g, όμως δεν μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

διότι το δεύτερο μέλος της σχέσης αυτής είναι η απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{-\infty}$

34. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x^4}$$

Πράγματι έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2\right) = 0 \text{ και:}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \cdot \frac{1}{x^4}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

35. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x \text{ και } g(x) = x^3$$

Πράγματι έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^3\right) = 0$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

36. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x)=\frac{1}{x} \text{ και } g(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Πράγματι έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty \text{ και:}$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{-1}{x^2}=-\infty$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{x-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}(x-1)\cdot\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}=(-1)\cdot(+\infty)=-\infty$$

37. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f(x)=x^3$. Πράγματι έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^3\right)=0$$

Όμως το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει, αφού:

- $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ και:
- $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^3}=+\infty$

38. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Για την f υπάρχει το όριο στο $x_0=0$, αφού:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x)=0$$

Όμως η τιμή της f στο 0 είναι 1

39. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Έχουμε $f(0)=1$ και η f δεν είναι συνεχής στο 0 αφού:

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Η σχέση:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$$

δεν ισχύει, διότι η f δεν έχει όριο στο 0 αφού επιπλέον έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty$$

40. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f(x)=x+1 \text{ και } g(x)=x$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο 0 ως πολυωνυμικές, όπως η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ δεν ορίζεται στο 0

41. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x)=x+1 \text{ με } x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$g(x)=\begin{cases} x-1, & x<1\\ x+1, & x\geq 1\end{cases}$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο 0 ως πολυωνυμικές.

• Αν $g(x)=x-1$ με $x<1$ έχουμε:

$$A_{gof}=\{x\in A_f \mid f(x)\in A_g\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid x+1<1\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}=(-\infty,0)$$

Επομένως έχουμε:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x+1)-1=x$$

• Αν $g(x)=x+1$ με $x\geq 1$ έχουμε:

$$A_{gof}=\{x\in A_f \mid f(x)\in A_g\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\mid x+1\geq 1\}=$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Επομένως έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1) + 1 = x + 2$$

Οπότε η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $h = g \circ f$ δεν είναι συνεχής στο 0 αφού:

$$\lim_{x \to 0-} h(x) = \lim_{x \to 0-} (x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 0+} h(x) = \lim_{x \to 0+} (x+2) = 2$$

42. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x - 1, & x \in (2, 3] \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα αντιστρέψιμη. Επίσης έχουμε:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ x + 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

Η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι συνεχής στο 1, αφού:

$$\lim_{x \to 1-} f^{-1}(x) = \lim_{x \to 1-} (x) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 1+} f^{-1}(x) = \lim_{x \to 1+} (x+1) = 2$$

43. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = x^2$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία λύση, αφού:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Όμως έχουμε:

$$f(-1) \cdot f(1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$$

44. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = -x^2$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και ισχύει:

$$f(-1) = -(-1)^2 = -1$$

Επίσης η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία λύση, αφού:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Όμως έχουμε:

$$f(1) = -1^2 = -1 < 0$$

45. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και ισχύει:

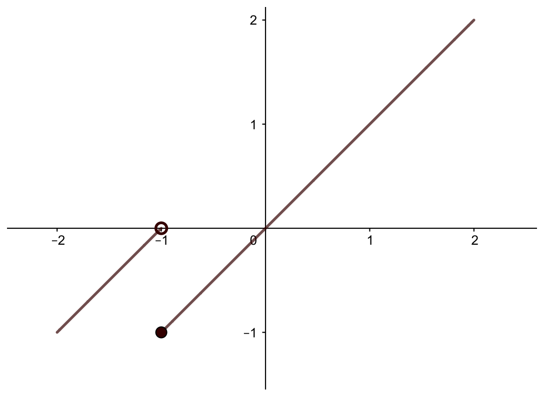
$$f(-1) \cdot f(1) = 1 \cdot 1 = 1 > 0$$

Όμως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία λύση, αφού:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

46. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -2 \leq x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$f(-2)f(2) = -1 \cdot 2 = -2 < 0$$

Επίσης έχουμε $f(0) = 0$
Όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ αφού:

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = 0 \neq -1 = \lim_{x \to -1+} f(x)$$

47. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ αφού:
• Με $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = x + 1 > 1$$

• Με $x \leq 0$ έχουμε:

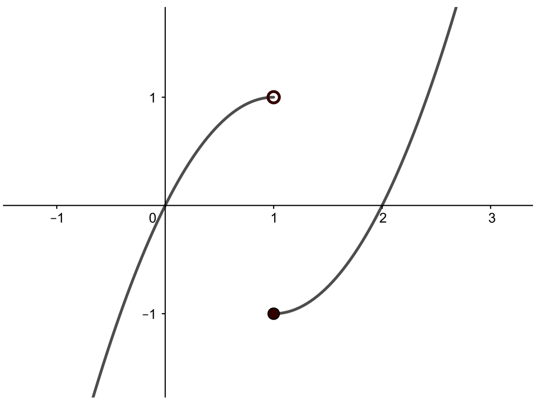
$$f(x) = x - 1 \leq -1$$

Όμως η f δεν διατηρεί πρόσημο αφού:

$$f(0) = -1 < 0 \text{ και } f(1) = 2 > 0$$

48. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x < 1 \\ x^2 - 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$



Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$$

Όμως στο διάστημα $(0, 2)$ η f δεν διατηρεί πρόσημο αφού:
• Με $x \in (0, 1)$ έχουμε $f(x) > 0$ και
• Με $x \in (1, 2)$ έχουμε $f(x) < 0$

49. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2$$

Η f είναι συνεχής, όμως το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbb{R}) = \{2\}$

50. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \text{ με } f(x) = x^2$$

Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$[f(-1), f(1)] = [f(1), f(-1)] = \{1\}$$

Όμως το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f([-1, 1]) = [0, 1]$$

51. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι ορισμένη στο $[0, 1]$ και συνεχής στο $(0, 1]$ όμως δεν παρουσιάζει μέγιστη τιμή αφού:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

52. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ με } x \geq 0$$

Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Επομένως υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

53. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Για την συνάρτηση f έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$$

όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

54. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x)=|x| \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

Η f είναι συνεχής στο σημείο 0, όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, διότι:

- $$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|-0}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1 \text{ και}$$

- $$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-0}{x-0}=$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

55. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x)=x \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$, όμως όπως είδαμε στο θέμα 54 η συνάρτηση:

$$g(x)=|f(x)|=|x|$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

56. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2 \text{ και } g(x)=x$$

Επειδή $f'(x)=2x$ και $g'(x)=1$ έχουμε:

$$f'(1)g(1)-f(1)g'(1)=2\cdot 1-1\cdot 1=1$$

Επίσης έχουμε:

$$(f\cdot g)(x)=x^3 \text{ άρα } (f\cdot g)'(x)=3x^2$$

Επομένως έχουμε:

$$(f\cdot g)'(1)=3$$

Άρα έχουμε:

$$(f\cdot g)'(1)\neq f'(1)g(1)-f(1)g'(1)$$

57. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2 \text{ και } g(x)=x$$

Επειδή $f'(x)=2x$ και $g'(x)=1$ έχουμε:

$$f'(1)g'(1)=2\cdot 1=2$$

Επίσης έχουμε:

$$(f\cdot g)(x)=x^3 \text{ άρα } (f\cdot g)'(x)=3x^2$$

Επομένως έχουμε:

$$(f\cdot g)'(1)=3$$

Άρα έχουμε:

$$(f\cdot g)'(1)\neq f'(1)g'(1)$$

58. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = x$$

Επειδή $f'(x) = 2x$ και $g'(x) = 1$ έχουμε:

$$\frac{f(1)g'(1) - f'(1)g(1)}{g^2(1)} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{1^2} = -1$$

Επίσης έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x \text{ με } x \neq 0$$

Επομένως έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = 1$$

Άρα έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) \neq \frac{f(1)g'(1) - f'(1)g(1)}{g^2(1)}$$

59. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x + 1 \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο 0 ως πολυωνυμικές.
• Αν $g(x) = x - 1$ με $x < 1$ έχουμε:

$$A_{g \circ f} = \{x \in A_f \mid f(x) \in A_g\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 < 1\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$$

Επομένως έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1) - 1 = x$$

• Αν $g(x) = x + 1$ με $x \geq 1$ έχουμε:

$$A_{g \circ f} = \{x \in A_f \mid f(x) \in A_g\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 1\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Επομένως έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

Οπότε η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση $h = g \circ f$ δεν είναι συνεχής στο 0 αφού:

$$\lim_{x \to 0-} h(x) = \lim_{x \to 0-} (x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \to 0+} h(x) = \lim_{x \to 0+} (x + 2) = 2$$

Επειδή η h δεν είναι συνεχής στο 0, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

60. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 + x \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

Η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτόμενη ευθεία, διότι θα έπρεπε να κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ να έχουμε:

$$f'(x_0) = 0$$

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

61. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = \eta\mu x$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ και ισχύει $f(0) = f(2\pi) = 0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Η παραπάνω τιμή του ξ δεν είναι μοναδική στο $(0, 2\pi)$ αφού έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\xi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{\pi}{2} \text{ ή } \xi = \frac{3\pi}{2}$$

62. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 \text{ με } x \in [-1, 2]$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$. Επίσης υπάρχει $\xi \in (-1, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Πράγματι, έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$$

Όμως δεν ισχύει $f(-1) = f(2)$ αφού:

$$f(-1) = 1 \text{ και } f(2) = 4$$

63. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-1, 1] \\ 2, & x = -1 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[-1, 1]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$. Επίσης υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Πράγματι, έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$$

Όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ αφού:

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1+} \left(x^2\right) = 1 \neq 2 = f(1)$$

64. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = x + \text{ημ}x \text{ με } x \in [-\pi, \pi]$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\pi, \pi)$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, \pi)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi - (-\pi)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = 1$$

Η τιμή του ξ δεν είναι μοναδική στο $(-\pi, \pi)$ αφού:

$$f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow 1 + \text{συν}\xi = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\xi = 0 \Leftrightarrow \xi \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

65. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, 2] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$. Επίσης υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

Πράγματι, έχουμε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\xi = \frac{4 - 1}{2 - 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{3}{4}$$

Όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[0, 2]$ αφού:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(x^2\right) = 0 \neq 1 = f(0)$$

66. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x \text{ και } g(x) = x + 1$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = g'(x) = 1$$

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) \neq g(x)$

67. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Με $x < 0$ έχουμε $f'(x) = 0$ και με $x > 0$ έχουμε επίσης $f'(x) = 0$, επομένως έχουμε:

$$f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αφού $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$

68. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

και $g(x) = -f(x)$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 = g'(x)$$

Όμως έχουμε $f = -g$

69. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = -2x$$

Για την συνάρτηση $h = f + g$ έχουμε:

$$h'(x) = 2(x - 1) > 0 \text{ με } x > 1$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα. Όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα

70. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f(x) = x^3$. Πράγματι, επειδή $f'(x) = 3x^2$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

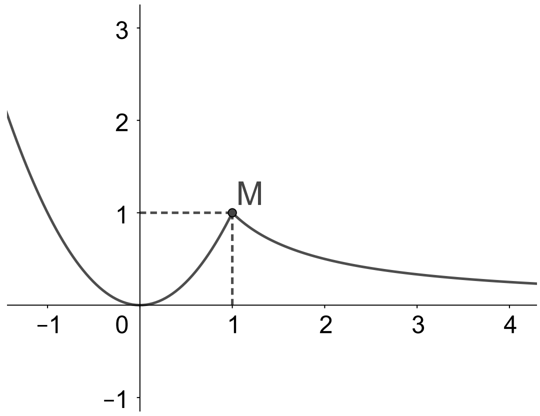
Επίσης για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχοντας $f'(0) = 0$

71. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$



Η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ τοπικό μέγιστο με τιμή $f(1) = 1$ όμως δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο, αφού:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

72. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^2$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ επομένως παρουσιάζει μέγιστη τιμή στη θέση $x_0 = 1$. Όμως έχουμε:

$$f'(1) = 2 \neq 0$$

73. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f(x) = x^3$. Πράγματι, επειδή $f'(x) = 3x^2$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Επίσης για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν παρουσιάζει ακρότατα. Έχουμε όμως $f'(0) = 0$

74. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f(x) = x^3$. Πράγματι, επειδή $f'(x) = 3x^2$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Επίσης για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 3x^2 > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης έχουμε $f'(0) = 0$ αλλά η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο 0

75. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ και

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις f και g παρουσιάζουν τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = 0$. Όμως για την συνάρτηση $h = f \cdot g$ έχουμε:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot x, & x \neq 0 \\ 0 \cdot (-1), & x = 0 \end{cases} =$$

$$= x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Όπως είδαμε στο θέμα 74 η συνάρτηση h δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 = 0$

76. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = x^3 \text{ και } g(x) = -x^3$$

Οι C_f και C_g παρουσιάζουν καμπή στο σημείο $O(0, 0)$ όμως για την συνάρτηση $h = f \cdot g$ έχουμε:

$$h''(x) = -30x^4 \leq 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$-$	
$h(x)$		$\frown$		$\frown$	

Η συνάρτηση h δεν παρουσιάζει καμπή στο $O(0, 0)$ αφού είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$

77. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f(x) = x^4$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = 12x^2$, επομένως έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Επίσης για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f''(x) > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\smile$		$\smile$	

Επομένως η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, άρα δεν παρουσιάζει καμπή στο σημείο $O(0, 0)$

78. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση $f(x) = x^4$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f''(x) = 12x^2$, επομένως έχουμε:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

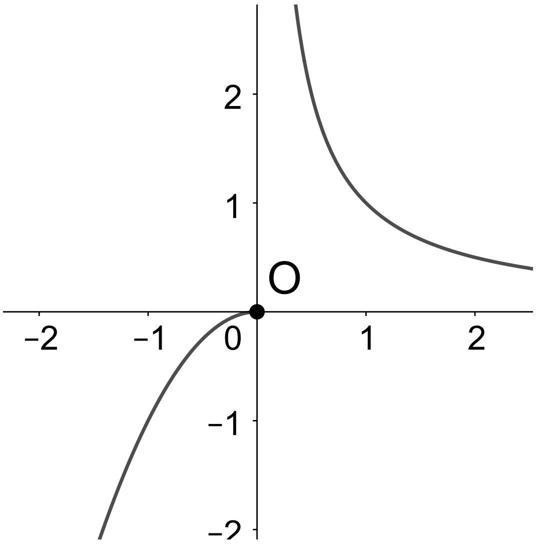
Επίσης για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $f''(x) > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\smile$		$\smile$	

Επομένως η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

79. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$



Η C_f έχει ασύμπτωτη ευθεία την ευθεία $x = 0$, αφού:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Όμως η C_f τέμνει την ευθεία $x = 0$ στην αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων.

80. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για την συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{\eta\mu x}{x} \text{ με } x \neq 0$$

Η ευθεία $(\epsilon) : y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αφού:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

Όμως η C_f και η ευθεία (ϵ) έχουν άπειρα κοινά σημεία. Πράγματι:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{\eta\mu x}{x} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}^*$$

81. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αφού δεν ισχύει για τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 \eta\mu\frac{1}{x} \text{ και } g(x) = \eta\mu x$$

Για τις συναρτήσεις f και g έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

Πράγματι:

• Με x κοντά στο 0 έχουμε:

$$-1 \leq \eta\mu\frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 \leq x^2\eta\mu\frac{1}{x} \leq x^2$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \left(-x^2\right) = \lim_{x \to 0} \left(x^2\right) = 0$$

άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$$

• Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} (\eta\mu x) = 0$$

• Επίσης έχουμε:

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \text{ κοντά στο } 0$$

• Επιπλέον έχουμε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{0}{1} = 0 \text{ αφού:}$$

► $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και

► Με x κοντά στο 0 έχουμε:

$$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq$$

$$\leq |x| \cdot 1 = |x|$$

Επομένως κοντά στο 0 έχουμε:

$$-|x| \leq x\eta\mu\frac{1}{x} \leq |x|$$

Όμως έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}(-|x|) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$$

Όμως το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

δεν υπάρχει. Πράγματι, αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

τότε με x κοντά στο 0 έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\sigma\upsilon\nu x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} = 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

Επομένως θα είχαμε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x} - \frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu x\right) =$$

$$= 2\cdot 0 - \ell\cdot 1 = -\ell$$

Θέτουμε $\frac{1}{x} = u$ άρα με $x \to 0+$ έχουμε $u \to +\infty$. Επομένως θα είχαμε:

$$\lim_{u\to +\infty}(\sigma\upsilon\nu u) = -\ell$$

Όμως δεν υπάρχει στο $+\infty$ το όριο της συνάρτησης $h(u) = \sigma\upsilon\nu u$ διότι είναι περιοδική με περίοδο 2π

28 του Απρίλη, 2021

Ευχαριστώ τους αγαπητούς φίλους **Νικολόπουλο Αθανάσιο** και **Χασάπη Γεώργιο** για τις πολύτιμες και εύστοχες παρατηρήσεις τους, οι οποίες συνέβαλαν τα μέγιστα για την διαμόρφωση αυτού του αρχείου.

επιμέλεια: **Νίκος Σκομπρής**
skobris@gmail.com