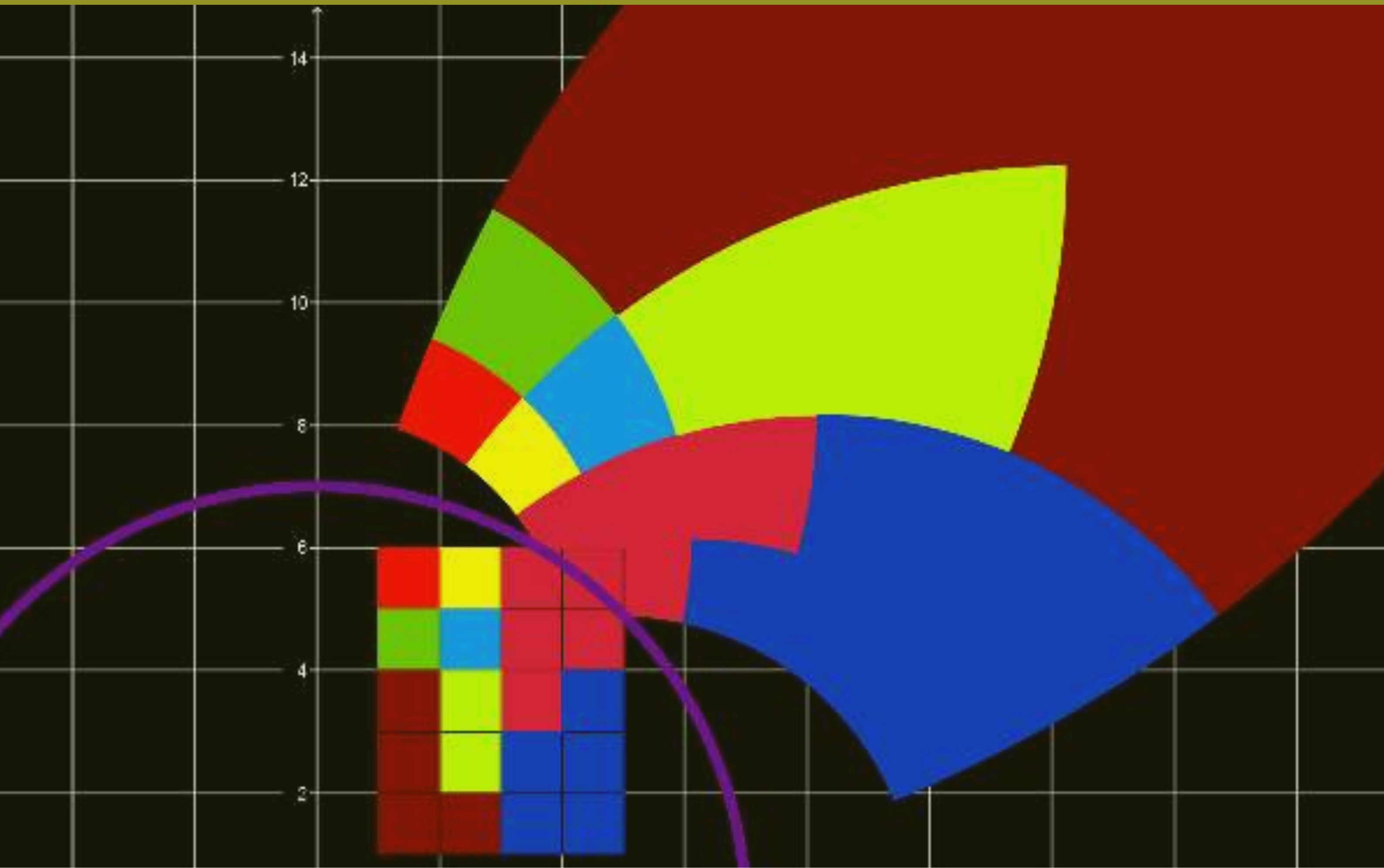
Προτυπο Πειραματικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης




# Όμιλος Μαθηματικών για την Α' Λυκείου

*Οι σημειώσεις των ετών 2013-2014 & 2014-2015*

*Ν.Σ. Μαυρογιάννης*
*Σωτήριος Χασάπης*

Σεπτέμβριος 2015

Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

---

Σημειώσεις από τον Όμιλο Μαθηματικών Α Λυκείου σχολικών ετών 2013-2014 και 2014-2015

---

*Καθηγητές:* Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Σωτήριος Χασάπης

---



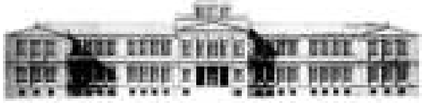
---

21 Σεπτεμβρίου 2015
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

## Προλεγομενα

Στις επόμενες σελίδες περιέχονται οι σημειώσεις που χρησιμοποιήσαμε κατά τα σχολικά έτη 2014-2015 και 2015-2016 στον όμιλο Μαθηματικών για μαθητές της Α΄ Λυκείου που λειτούργησε στο σχολείο μας τις Δευτέρες 14.30-16.00. Σε κάθε συνάντηση δίνονταν στα παιδιά ένα δισέλιδο που περιείχε τα κύρια σημεία όσων θα εξετάζονταν στην συνάντηση και κάποια δουλειά για το σπίτι. Οι σημειώσεις δεν περιλαμβάνουν άλλα θέματα που καλύφθηκαν στον όμιλο (έκτακτα θέματα, υλικά από συζητήσεις, συμπληρωματικό υλικό για ταινίες που είδαμε κ.α.).

Σεπτέμβριος του 2015
*Ν.Σ. Μαυρογιάννης*, Μαθηματικός (MSc,PhD )
*Σωτήριος Χασάπης*, Μαθηματικός (MSc)



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

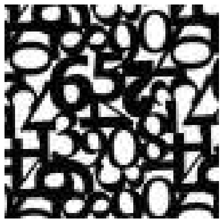
Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 1 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*



Η Μαθηματική Επαγωγή

# 1 Εισαγωγικά

Στα Μαθηματικά ο πειραματισμός μπορεί να προσφέρει ενδείξεις αλλά όχι αποδείξεις. Με άλλα λόγια δε μπορούμε να συνάγουμε την αλήθεια μιας πρότασης δοκιμάζοντας μερικές ειδικές περιπτώσεις. Φυσικά αυτό ισχύει και για προτάσεις που αναφέρονται σε θετικούς ακεραίους.

Ένα ιστορικό παράδειγμα είναι το τριώνυμο του Euler. Ο Euler για λίγο νόμισε ότι το τριώνυμο $\nu^2+\nu+41$ όταν το $\nu$ διατρέχει τους φυσικούς μας δίνει πρώτους αριθμούς.
Δοκιμάστε τιμές! Θα διαπιστώσετε ότι ο πράγματι έως την τιμή $\nu=39$ το τριώνυμο μας δίνει πρώτους αριθμούς. Αλλά για την τιμή $\nu=41$ μας δίνει αριθμό σύνθετο. Στη σημερινή συνάντηση θα ασχοληθούμε με μία αποδεικτική μέθοδο που μας δίνει την δυνατότητα να αποδεικνύουμε προτάσεις που εξαρτώνται για από κάποιον θετικό ακέραιο χωρίς να καταφεύγουμε στην (ανασφαλή) μέθοδο των δοκιμών.

Leonard Euler 1707-1783

**Άσκηση 1** Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+2+3+...+100$$

**Άσκηση 2** Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+2+3+...+1000$$

**Άσκηση 3** Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+2+3+...+\nu$$

**Άσκηση 4** Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$1+3$$

$$1+3+5$$

$$1+3+5+7$$

$$1+3+5+7+9$$

**Άσκηση 5** Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1+3+...+(2\nu-1)$$

**Ερώτηση 1** Είναι άραγε βέβαιον ότι η απάντηση που δώσατε στις ασκήσεις 3 και 5 είναι σωστή;

# 2 Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση που εξαρτάται από κάποιον θετικό ακέραιο $\nu$. Μία μέθοδος απόδειξης είναι η ακόλουθη.

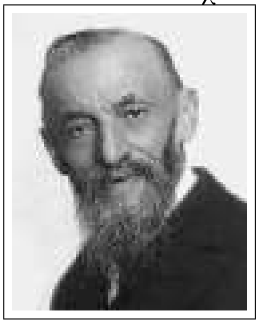
**Βήμα 1** Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=1$.

**Βήμα 2** Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=k$.

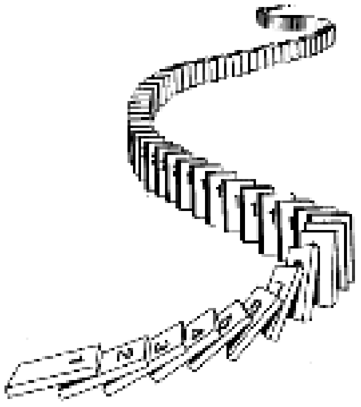
**Βήμα 3** Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu=k+1$.

Τότε η πρόταση αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους $\nu$.

Η ιδέα πίσω από την παραπάνω αρχή που οφείλεται στον Peano είναι η εξής: Στο Βήμα 3 ουσιαστικά έχουμε αποδείξει ότι αν η πρόταση ισχύει για ένα θετικό ακέραιο τότε ισχύει και για τον επόμενο του. Η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του 1 δηλαδή το 2. Ισχύει για τον 2. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 3. Ισχύει για τον 3. Άρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 4 κ.ο.κ.



Giuseppe Peano
1858-1932



**Άσκηση 6** Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 - \frac{1}{\nu+1}$$

**Άσκηση 7** Να αποδείξετε ότι

$$1^2 + 2^2 + ... + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

**Άσκηση 8** Να αποδείξετε αν $\nu$ αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 τότε ισχύει:

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_\nu) \geq 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu$$

**Άσκηση 9** Να αποδείξετε αν $\nu$ θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ έχουν γινόμενο 1 τότε το άθροισμα τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος τους δηλαδή ισχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu \geq \nu$$

---

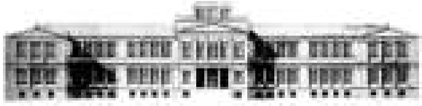
## Το πρόβλημα της εβδομάδας

---

Παίρνουμε ένα τριψήφιο αριθμό που δεν έχει όλα του τα ψηφία ίδια και σχηματίζουμε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο αριθμό χρησιμοποιώντας τα ψηφία του. Αφαιρούμε τους δύο αριθμούς και με τον αριθμό που θα βρούμε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

1. Τι παρατηρείτε;

2. Μπορείτε να δώσετε εξηγήσεις;



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος
Μαθηματικών
Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 2 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

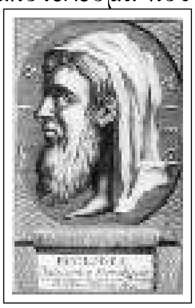
*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Η Ταυτότητα της Διαίρεσης

## 1 Εισαγωγή

Όλοι γνωρίζουμε να κάνουμε διαίρεση. Μαθαίνουμε ήδη από το Δημοτικό.

Η διαδικασία με την οποία κάνουμε τη διαίρεση είναι συγκεκριμένη ΚΑΙ ΠΑΝΤΑ οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα που αποτελείται από δύο αριθμούς: το **πηλίκο** και το **υπόλοιπο**.



Η διαδικασία που ακολουθείται περιλαμβάνει τις ίδιες σκέψεις - πράξεις για κάθε ψηφίο που υπολογίζουμε στο πηλίκο και τον ίδιο έλεγχο για το υπόλοιπο που προκύπτει σε κάθε βήμα.

Πρόκειται για έναν **αλγόριθμο**[1].

Φυσιολογικά, προκύπτουν τα ερωτήματα :

1) Γιατί υπάρχει πάντα λύση για κάθε ζεύγος αριθμών (διαιρετέου και διαιρέτη);

2) Γιατί όλοι βρίσκουμε την ίδια λύση όταν εκτελούμε τη διαδικασία της διαίρεσης;

## 2 Η ταυτότητα της Διαίρεσης

**Θεώρημα 2.1** (Ταυτότητα - Αλγόριθμος της διαίρεσης). *Αν $a, b \in \mathbb{N}$ με $b \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $p, y$, ώστε:*

$$a = p \cdot b + y, \quad 0 \leq y < b$$

*. Οι αριθμοί $p, y$ είναι μοναδικοί.*

*Απόδειξη.* Με επαγωγή επί του $a$. □

Μία δεύτερη απόδειξη μπορεί να γίνει με χρήση του παρακάτω λήμματος, το οποίο επίσης αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή.

**Λήμμα 2.1** (Αρχή Καλής Διάταξης). *Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο.*

**Παράδειγμα 2.1.** *Να γίνει η διαίρεση $a : b$, $a = 22$, $b = 5$.*

Στην επίλυση αυτής της διαίρεσης αναζητούμε τα πολλαπλάσια του 5, τα οποία δεν ξεπερνούν τον αριθμό 22. Δηλαδή κατασκευάζουμε το σύνολο :

$$S = \{22,\ 22 - 1 \cdot 5,\ 22 - 2 \cdot 5,\ 22 - 3 \cdot 5,\ 22 - 4 \cdot 5\} =$$

$$\{22,\ 17,\ 12,\ 7,\ 2\}$$

Από το οποίο σύνολο επιλέγουμε το ελάχιστο στοιχείο που είναι μεγαλύτερο του 0 και υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης. Ο μέγιστος αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το 5 (δηλ.τον διαιρέτη) είναι το πηλίκο.

Η ταυτότητα της διαίρεσης μπορεί να γενικευτεί και για ακέραιους αριθμούς.

**Θεώρημα 2.2** (Ταυτότητα διαίρεσης για ακέραιους). *Για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$, $\quad b \neq 0$ υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι $p, y$, ώστε : $a = b \cdot p + y, 0 \leq y < |b|$.*

**Άσκηση 1.** *Να γίνουν οι διαιρέσεις :*

[1]Ως **αλγόριθμος** ορίζεται μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο, που στοχεύουν στην επίλυση ενός προβλήματος. Πιο απλά αλγόριθμο ονομάζουμε μία σειρά από εντολές που έχουν αρχή και τέλος, είναι σαφείς και εκτελέσιμες που σκοπό έχουν την επίλυση κάποιου προβλήματος.

Η λέξη αλγόριθμος προέρχεται από μία μελέτη του Πέρση μαθηματικού του 8ου αιώνα μ.Χ. Αλ Χουαρίζμι (Abu Ja'far Mohammed ibn Musa Al-Khwarismi), η οποία περιείχε συστηματικές τυποποιημένες λύσεις αλγεβρικών προβλημάτων και αποτελεί ίσως την πρώτη πλήρη πραγματεία άλγεβρας. Πέντε αιώνες αργότερα η μελέτη μεταφράστηκε στα Λατινικά και άρχιζε με τη φράση "Algorithmus dixit ...." (ο Αλγόριθμος είπε...). Έτσι η λέξη αλγόριθμος καθιερώθηκε αργά τα επόμενα χίλια χρόνια με την έννοια «συστηματική διαδικασία αριθμητικών χειρισμών». Τη σημερινή της σημασία την οφείλει στη γρήγορη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών στα μέσα του 20ου αιώνα.

1. $a = 80,\ b = 6$
2. $a = 80,\ b = -6$
3. $a = -80,\ b = 6$
4. $a = -80,\ b = -6$

## 3 Εφαρμογές της ταυτότητας της διαίρεσης

**Άσκηση 2.** *Κάθε ακέραιος $a \in \mathbb{Z}$ γράφεται σε μία από τις μορφές : $a = 2k+1,\ a = 2k, \qquad k \in \mathbb{Z}$.*

**Άσκηση 3.** *Κάθε ακέραιος γράφεται ακριβώς σε μία από τις μορφές :*

$$a = 3k,\ a = 3k+1,\ a = 3k-1, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

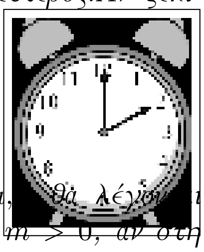
**Άσκηση 4.** *Για κάθε περιττό αριθμό $p \in \mathbb{N}$ ο αριθμός : $a = \frac{p^2-1}{4}$ είναι άρτιος.*

**Άσκηση 5.** *Για κάθε ακέραιο $a$ ο αριθμός: $\frac{a^2+a+3}{4} \notin \mathbb{Z}$.*

## 4 Ισοϋπόλοιποι αριθμοί

Είναι γνωστό ότι οι ακέραιοι μπορούν να χωριστούν με διάφορους τρόπους σε κατηγορίες. Για παράδειγμα : Πολλαπλάσια του 3 και μη πολλαπλάσια του 3 ή ακόμα άρτιοι και περιττοί. Παρόμοια με κριτήριο τη διαίρεση με το 3 μπορούμε να τους κατατάξουμε ανάλογα με το υπόλοιπο που αφήνουν.

**Άσκηση 6.** *Δύο ποδηλάτες κάνουν το γύρο της Ελλάδας σε $330h$ ο πρώτος και σε $342h$ ο δεύτερος. Αν ξεκινήσουν από την Ακρόπολη της Αθήνας στις $08:00$ και ποδηλατούν καθημερινά μέχρι τις $20:00$, να βρεθεί τι ώρα θα τερματίσει ο καθένας τους.*



**Ορισμός 4.1.** *Οι ακέραιοι αριθμοί $a$, $b$ θα λέγονται ισοϋπόλοιποι με μέτρο τον $m$ ή modulus $m > 0$, αν στη διαίρεση με τον $m$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο. Δηλαδή : $a = mk + y,\ b = ml + y, \qquad 0 \le y < m$. Συμβολίζουμε: $a \equiv b(mod m)$.*

*Η σχέση: $a \equiv b(mod m)$ λέγεται ισοτιμία.*

**Παράδειγμα 4.1.** $4 \equiv 6(mod 2), 3 \equiv 15(mod 2)$ *κ.ο.κ.*

**Άσκηση 7.** *Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.*

1. $3 \equiv 12(mod 3)$
2. $11 \equiv 12(mod 3)$
3. $13 \equiv 12(mod 3)$
4. $15 \equiv 3(mod 12)$
5. $15 \equiv 27(mod 12)$
6. $-3 \equiv 17(mod 10)$
7. $11 \equiv 68(mod 3)$
8. $-3 \equiv 0(mod 3)$

**Άσκηση 8.** *Αν $a \equiv b(mod m)$ μπορείτε να βρείτε μία σχέση που να συνδέει τους $m$ και $a-b$ ;*

**Άσκηση 9.** *Να βρεθούν οι διψήφιοι φυσικοί αριθμοί $a$, ώστε : $a \equiv 37(mod 41)$.*

**Άσκηση 10.** *Αν 4 Νοέμβρη είναι ημέρα Δευτέρα, τότε να βρεθεί ποια ημέρα της εβδομάδας του ίδιου έτους είναι οι : $12/11,\ 20/11,\ 17/11,\ 27/11$.*

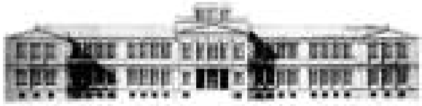
**Άσκηση 11.** *Θεωρούμε ένα κανονικό εξάγωνο $ABCDEF$ με κέντρο $O$. Αν το περιστρέψουμε γύρω από το κέντρο του 3 φορές κατά $60^o$ ή 9 φορές κατά $60^o$ να βρεθεί σε κάθε περίπτωση η νέα θέση των κορυφών του. Αν από την αρχική του θέση θεωρήσουμε το συμμετρικό του ως προς τη διαγώνιο $AD$ ποια θα είναι τότε η νέα θέση των κορυφών του;*

---

Το πρόβλημα της εβδομάδας

---

Ο Πλάτων στους Νόμους του χρησιμοποιεί ένα αριθμό μικρότερο του 10000 ο οποίος έχει διαιρέτες 10 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Βρείτε τον.



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 Φύλλο 3 Στοιχειοθετείται με το LaTeX

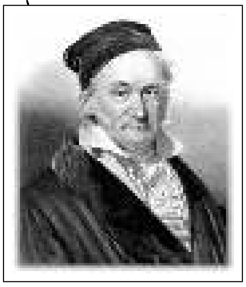
*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Η αριθμητική $\mod m$.

## 1 Η αριθμητική $\mod m$

Όλα τα προηγούμενα χρόνια δουλεύουμε με την συνηθισμένη αριθμητική των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των πραγματικών αριθμών. Και θα συνεχίσουμε να δουλεύουμε με αυτήν. Υπάρχουν όμως και άλλες αριθμητικές που έχουν την δική τους θεωρητική αξία και τις δικές τους εφαρμογές. Στη σημερινή συνάντηση θα συζητήσουμε μία από αυτές. Μελετήθηκε συστηματικά από τον Carl Friedrich Gauss[1] στο έργο του *Disquisitiones Arithmeticae* (Αριθμητικές Έρευνες).

Ονομάζεται *γνωμονική αριθμητική* (modular arithmetic). Στην αριθμητική αυτή επιλέγουμε ένα ακέραιο $m > 1$ και εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ ακεραίων με *γνώμονα* αυτόν τον ακέραιο ως εξής: προσθέτουμε αφαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε τους δύο ακεραίους και μετά ότι βρούμε το διαιρούμε δια $m$. Σαν αποτέλεσμα βάζουμε όχι τον αριθμό που βρήκαμε αλλά το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού που βρήκαμε δια $m$. Αν για παράδειγμα θέλουμε να προσθέσουμε τους 7 και 13 $\mod 8$ τότε



Carl Friedrich Gauss
1777-1855

- Θα προσθέσουμε τους 7 και 13 με τον συνηθισμένο τρόπο και θα βρούμε 20.
- Θα διαιρέσουμε το 20 δια του 8 και θα βρούμε πηλίκο 2 (που δεν μας ενδιαφέρει) και υπόλοιπο 4,
- το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των 7 και 13 όχι με τον συνηθισμένο τρόπο αλλά $\mod 8$ είναι 4. Γράφουμε $7 + 13 \equiv 4 (\mod 8)$.

Καθώς αντιλαμβάνεσθε στην αριθμητική $\mod 8$ τα αποτελέσματα που μπορούμε να βρούμε είναι υπόλοιπα διαίρεσης δια 8. Και αυτά είναι τα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Γενικά αν δουλεύουμε $\mod m$ τα αναμενόμενα αποτελέσματα είναι 0, 1, 2, ..., $m-1$. Είδαμε ότι

$$7 + 13 \equiv 4 (\mod 8)$$

Αλλά και

$$15 + 13 \equiv 4 (\mod 8)$$

$$15 + 21 \equiv 4 (\mod 8)$$

$$(-1) + 13 \equiv 4 (\mod 8)$$

$$(-1) + 5 \equiv 4 (\mod 8)$$

$$(-1) + 21 \equiv 4 (\mod 8)$$

Δεν είναι δύσκολο να δείτε ότι οποιοσδήποτε από τους αριθμούς 7, 15, $-1$ προστεθεί $\mod 8$ με οποιονδήποτε από τους αριθμούς 13, 21, 5 θα δώσει αποτέλεσμα 4. Αν προσέξουμε θα δούμε ότι όλοι οι αριθμοί 7, 15, $-1$ είναι ισοϋπόλοιποι $\mod 8$ (διαιρούμενοι με το 8 αφήνουν υπόλοιπο 7). Αλλά και οι 13, 21, 5 είναι ισοϋπόλοιποι $\mod 8$. Αυτός είναι και ο λόγος που παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι $\alpha + \beta = \gamma (\mod 8)$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο άλλους αριθμούς $\alpha', \beta'$ που είναι ισότιμοι με τους $\alpha, \beta$ $\mod 8$. Τότε $\alpha - \alpha' = 8k$ αλλά και $\beta - \beta' = 8k'$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \alpha' + \beta - \beta' = 8k + 8k'$ και επομένως $(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') = 8(k + k')$. Άρα οι αριθμοί $\alpha + \beta$ και $\alpha' + \beta'$ είναι ισοϋπόλοιποι $\mod 8$. και αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης $\alpha+\beta : 8$ είναι $\gamma$ και το υπόλοιπο της $\alpha'+\beta' : 8$ θα είναι $\gamma$. Επομένως θα είναι και $\alpha' + \beta' = \gamma (\mod 8)$. Αν κάνουμε τον ίδιο συλλογισμό αλλά αντί στην θέση του 8 φαντασθούμε τον $m$ θα έχουμε το:

**Θεώρημα 1.1** Αν $\alpha \equiv \alpha' (\mod m)$ και $\beta \equiv \beta' (\mod m)$ τότε $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' (\mod m)$.

Οι αριθμοί που είναι μεταξύ τους ισότιμοι (ισοϋπόλοιποι) $\mod 8$ είναι «οργανωμένοι» σε σύνολα (λέγονται και κλάσεις):

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 0:
  $\dots - 16, -8, 0, 8, 16, 24, \dots$
- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 1:
  $\dots - 15, -7, 1, 9, 17, 25, \dots$
- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 2:
  $\dots - 14, -6, 2, 10, 18, 26, \dots$
- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 3:
  $\dots - 13, -5, 3, 11, 19, 27, \dots$

[1] Στα Ελληνικά υπάρχει η μυθιστορηματική βιογραφία του: *Καρλ Φρίντριχ Γκάους. Ο Πρίγκιπας των Μαθηματικών* της M. B. W. Tent σε μετάφραση Στάμου Τσιτσώνη από τις εκδόσεις ΤΡΑΥΛΟΣ, 2007

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 4:
  $... - 12, -4, 4, 12, 20, 28, ...$

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 5:
  $... - 11, -3, 5, 13, 21, 29, ...$

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 6:
  $... - 10, -2, 6, 14, 22, 30, ...$

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 7:
  $... - 9, -1, 7, 15, 23, 31, ...$

Αν προσθέτουμε $\mod 8$ όποιον αριθμό και αν πάρουμε από μία κλάση και όποιον αριθμό πάρουμε από μία άλλη το αποτέλεσμα που θα βρούμε θα είναι το ίδιο. Στην πρόσθεση $\mod 8$ όλες οι κλάσεις «εκπροσωπούνται» εξ' ίσου καλά όποιον αριθμό και αν διαλέξουμε να τις «εκπροσωπήσει». Ας συμβολίσουμε την πρώτη κλάση με $\mathbf{0}$ την δεύτερη με $\mathbf{1}$ κ.οκ. φθάνοντας στην όγδοη που θα συμβολίσουμε με $\mathbf{7}$.Η σχέση $7 + 13 \equiv 4 (\mod 8)$ που είδαμε πιο πριν ουσιαστικά μας λέει ότι όποιο αριθμό και αν προσθέσουμε από την κλάση $\mathbf{7}$ με όποιον αριθμό από την κλάση $\mathbf{5}$ (σε αυτήν ανήκει ο 13) θα πάρουμε αριθμό από την κλάση $\mathbf{4}$. Γράφουμε συμβολικά $\mathbf{7} + \mathbf{5} = \mathbf{4}$. Ουσιαστικά η νέα αριθμητική μας έχει 8 στοιχεία (:τις κλάσεις). Σε αυτήν $\mathbf{6} + \mathbf{5} = \mathbf{3}$ και $\mathbf{4} + \mathbf{4} = \mathbf{0}$!

**Άσκηση 1** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα «προπαίδειας» για την πρόσθεση $\mod 8$.

| + | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | | | | | | | |
| **1** | | | | | | | | |
| **2** | | | | | | | | |
| **3** | | | | | | | | |
| **4** | | | | | | | | |
| **5** | | | | | | | | |
| **6** | | | | | | | | |
| **7** | | | | | | | | |

Με εντελώς ανάλογο τρόπο ορίζεται και ο πολλαπλασιασμός $\mod m$: Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς και ότι βρούμε το διαιρούμε δια $m$. Το υπόλοιπο που προκύπτει είναι το γινόμενο τους $\mod m$. Ισχύει το ακόλουθο:

**Θεώρημα 1.2** Αν $\alpha \equiv \alpha' (\mod m)$ και $\beta \equiv \beta' (\mod m)$ τότε $\alpha \cdot \beta \equiv \alpha' \cdot \beta' (\mod m)$.

**Άσκηση 2** Να αποδείξετε το θεώρημα **;;**

**Άσκηση 3** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα «προπαίδειας» για τον πολλαπλασιασμό $\mod 8$.

| × | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | | | | | | | |
| **1** | | | | | | | | |
| **2** | | | | | | | | |
| **3** | | | | | | | | |
| **4** | | | | | | | | |
| **5** | | | | | | | | |
| **6** | | | | | | | | |
| **7** | | | | | | | | |

**Άσκηση 4** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα «προπαίδειας» για τον πολλαπλασιασμό $\mod 5$.

| × | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | | | | | |
| **1** | | | | | |
| **2** | | | | | |
| **3** | | | | | |
| **4** | | | | | |
| **5** | | | | | |

## 2 Η αριθμητική $\mathbb{Z}_m$

Με $\mathbb{Z}_m$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων $\mod m$ που τις συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$,..., $\mathbf{m-1}$. Προστίθενται και πολλαπλασιάζονται με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν. Στο $\mathbb{Z}_m$ μπορούμε να κάνουμε διάφορους υπολογισμούς, να λύνουμε εξισώσεις συστήματα κ.α. Ας δούμε μερικούς:

**Άσκηση 5** *Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης*

$$(\mathbf{2}+\mathbf{3})\,(\mathbf{5}+\mathbf{4})+\mathbf{2}$$

*στο* $\mathbb{Z}_8$.
*Κατόπιν να κάνετε το ίδιο στο* $\mathbb{Z}_{12}$.

**Άσκηση 6** Να βρείτε τον αντίθετο (: που έχει με αυτόν άθροισμα μηδέν) του $\mathbf{4}$:

1. Στο $\mathbb{Z}_{12}$
2. Στο $\mathbb{Z}_5$

**Άσκηση 7** Να βρείτε τον αντίστροφο (: που έχει με αυτόν γινόμενο ένα) του $\mathbf{4}$:

1. Στο $\mathbb{Z}_5$
2. Στο $\mathbb{Z}_{12}$

**Άσκηση 8** Να λύσετε στο $\mathbb{Z}_5$ την εξίσωση

$$\mathbf{2x}+\mathbf{3}=\mathbf{1}$$

.

**Άσκηση 9** Να λύσετε στο $\mathbb{Z}_7$ το σύστημα:

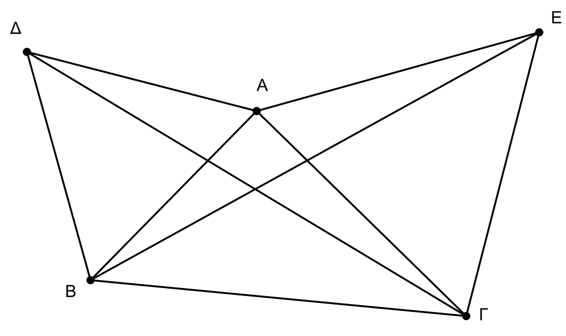
$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{2x}+\mathbf{y}=\mathbf{1}\\ \mathbf{x}-\mathbf{2y}=\mathbf{3}\end{array}\right\}$$

---

Το πρόβλημα της εβδομάδας

---

Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισόπλευρα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 4 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

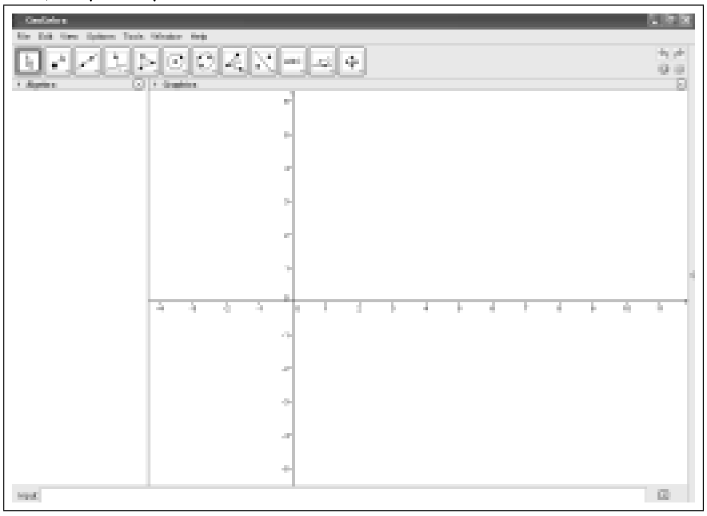
*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Γνωριμία με την GeoGebra

## 1 Η Geogebra

Η Geogebra είναι ένα μαθηματικό πρόγραμμα που διανέμεται δωρεάν (freeware) και σχεδιάσθηκε από τον Markus Hohenwarter για να συνδυάσει δύο μεγάλους κλάδους των Μαθηματικών: την Γεωμετρία (το Geo της Geogebra) και την Άλγεβρα (το gebra). Έχει πολλούς φίλους σε όλο τον κόσμο και η ιστοσελίδα της είναι η www.geogebra.org. Μπορείτε να συνδεθείτε και να εγκαταστήσετε την Geogebra πολύ εύκολα. Όταν ανοίξετε την την Geogebra θα δείτε (περίπου) την εξής εικόνα:

Markus Hohenwarter



Το παράθυρο του προγράμματος χωρίζεται σε τρία μέρη: Το παράθυρο της Άλγεβρας, το παράθυρο της Γεωμετρίας και την γραμμή εντολών[1] . Στην σημερινή συνάντηση θα ασχοληθούμε με το παράθυρο της Γεωμετρίας. Σε αυτό το παράθυρο μπορούμε να κάνουμε πλήθος γεωμετρικών κατασκευών που πολλές από αυτές γίνονται με τα εργαλεία που περιέχονται στις εργαλειοθήκες. Σημειώστε ότι κάνοντας δεξί κλικ σε ένα αντικείμενο αποκτάτε πρόσβαση σε επιλογές για τις ιδιότητες του αντικειμένου (μέγεθος, χρώμα, όνομα, κίνηση κ.α.). Η εργαλειοθήκη και οι επιλογές είναι πολύ σαφείς και έτσι σύντομα θα μπορέσετε να εξοικειωθείτε με αυτές.

## 2 Μερικές ασκήσεις

Στις επόμενες ασκήσεις ζητούνται μερικά απλά πράγματα που θα μπορείτε να κάνετε με την Geogebra και αφορούν γεωμετρικές κατασκευές.

**Άσκηση 1** Να κατασκευάσετε ένα σημείο. Να μεγαλώσετε τις διαστάσεις του, να το χρωματίσετε πράσινο και να το ονομάσετε με $W$.

**Άσκηση 2** Να κατασκευάσετε δύο σημεία και μετά μία ευθεία που διέρχεται από αυτά.

**Άσκηση 3** Να κατασκευάσετε δύο σημεία και την ευθεία που διέρχεται από αυτά. Κατόπιν να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν. Τέλος να αποκρύψετε την ευθεία τους.

**Άσκηση 4** Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα, μετά το μέσο του και μετά την μεσοκάθετο του

**Άσκηση 5** Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα να ονομάσετε $P$, $Q$. Κατόπιν:

1. Να βρείτε το συμμετρικό του $P$ ως προς $Q$.
2. Να περιστρέψετε το $Q$ γύρω από το $P$ κατά γωνία $+50°$. Το $+$ σημαίνει κατά την θετική φορά δηλαδή αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού.

[1] Περισσότερα μπορείτε να βρείτε στο «*Μαθηματικά με την Geogebra*» που υπάρχει στην διεύθυνση http://www.nsmavrogiannis.gr/geogebra/Geogebra_123.pdf

**Άσκηση 6** Να κατασκευάσετε μία ευθεία $\varepsilon$ και ένα σημείο $X$ εκτός αυτής. Στη συνέχεια να βρείτε το συμμετρικό του $X$ ως προς την $\varepsilon$.

**Άσκηση 7** Να κατασκευάσετε δύο ημιευθείες με κοινή αρχή, να να βρείτε το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν και να κατασκευάσετε την διχοτόμο αυτής της γωνίας.

**Άσκηση 8** Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, να μετρήσετε τις γωνίες του και να κατασκευάσετε το ύψος την διάμεσο και την διχοτόμο που άγονται από την κορυφή του $A$.

**Άσκηση 9** Να κατασκευάσετε ένα κύκλο μία χορδή του και το απόστημα της.

**Άσκηση 10** Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, να μετρήσετε τις γωνίες του και να μετά να γράψετε τους κύκλους $(A, AB)$ και $(B, AB)$. Να σημαιεώσετε τα κοινά σημεία τους.

**Άσκηση 11** Να κατασκευάσετε ένα κύκλο και μία ευθεία που δεν τον τέμνει. Κατόπιν να βρείτε το συμμετρικό του κύκλου ως προς την ευθεία.

**Άσκηση 12** Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, να μετρήσετε τις γωνίες του και να κατασκευάσετε το ύψος την διάμεσο και την διχοτόμο που άγονται από την κορυφή του $A$.

**Άσκηση 13** Να κατασκευάσετε ένα κύκλο με κέντρο $O$ ακτίνα 5. Πάνω στον κύκλο να πάρετε ένα σημείο $T$.

1. Να δώσετε για το $T$ ενεργή κίνηση.
2. Να σταματήσετε την κίνηση του $T$ και να βρείτε το μέσο $M$ του $OT$. Να δώσετε για το $M$ αποτύπωση ίχνους και να θέσετε πάλι το $T$ σε κίνηση. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να αποδείξετε αυτό που παρατηρείτε;
3. Χρησιμοποιώντας το κατάλληλο εργαλείο ζητείστε από την Geogebra να σας βρει τον γεωμετρικό τόπο του $M$.

**Άσκηση 14** Να ζωγραφίσετε στην Geogebra μία γάτα.

**Άσκηση 15** Να εισαγάγετε στην Geogebra εικόνα cat.jpg

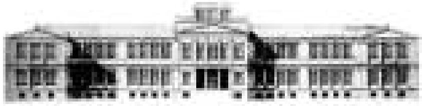
**Άσκηση 16** Μία «εκτός ύλης» προαιρετική ερώτηση: Ποια από τις δύο γάτες σας αρέσει;

---

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Τι γωνία σχηματίζουν ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης;

---



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 5 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Ο Αλγόριθμος του Ευκλείδη 

## 1 Διαιρετότητα

Αν έχουμε δύο ακέραιους αριθμούς $\alpha$ και $\delta$ λέμε ότι ο $\delta$ είναι διαιρέτης του $\alpha$ ή αλλιώς ότι ο $\delta$ διαιρεί τον $\alpha$ αν υπάρχει ακέραιος $k$ ώστε $\alpha = k\delta$. Γράφουμε συμβολικά $\delta|\alpha$. Στην περίπτωση αυτή ο $\alpha$ λέγεται πολλαπλάσιο του $\delta$. Επειδή ο $\delta = 0$ μπορεί να είναι διαιρέτης μόνο του 0 άρα δεν παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον εξαιρούμε την περίπτωση όπου $\delta = 0$ και ασχολούμεθα μόνο με τις περιπτώσεις όπου $\delta \neq 0$. Παρατηρούμε ότι:

- Θα είναι $\delta|\alpha$ αν και μόνο αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $\alpha : \delta$ είναι μηδέν δηλαδή η διαίρεση είναι τέλεια.
- Θα είναι $\delta|\alpha$ αν και μόνο αν ο ρητός αριθμός $\frac{\alpha}{\delta}$ είναι ακέραιος.

Στην περίπτωση όπου ο $\delta$ δεν διαιρεί τον $\alpha$ δηλαδή δεν υπάρχει ακέραιος $k$ ώστε $k\delta = \alpha$ γράφουμε συμβολικά $\delta \nmid \alpha$

**Άσκηση 1** Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές;

1. $2|12$
2. $2|21$
3. $12|144$
4. $144|12$
5. $13 \nmid 12$
6. $13 \nmid 130$
7. $13|13^2$
8. $13^2|13^3$

**Άσκηση 2** Οι $\alpha, \beta \neq 0$ είναι ακέραιοι. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές (εννοείται για όλες τις τιμές των $\alpha, \beta$);

1. $\alpha|\alpha$
2. $\alpha| - \alpha$
3. $\alpha|\alpha\beta$
4. $\alpha\beta|\alpha$
5. $1|\alpha$
6. $\alpha|1$
7. $\alpha^2|\alpha$
8. $\alpha\beta|\alpha\beta^2$

Ισχύουν οι επόμενες προτάσεις:

Πρόταση 1 *Αν $\alpha, \delta \in \mathbb{Z}$ και $\delta|\alpha$ τότε $|\delta| \leq |\alpha|$.*

Πρόταση 2 *Αν $\alpha, \alpha, \delta, p, q \in \mathbb{Z}$ και $\delta|\alpha$, $\delta|\beta$ τότε*

$$\delta|p\alpha + q\beta.$$

Η παράσταση $p\alpha + q\beta$ λέγεται και *γραμμικός συνδυασμός* των $\alpha, \beta$. Οπότε η πρόταση **;;** μας λέει ότι «*αν ένας αριθμός διαιρεί δύο άλλους διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους*».

**Άσκηση 3** Να αποδείξετε την πρόταση **;;**.

**Άσκηση 4** Να αποδείξετε ότι αν $\delta|\alpha$, $\delta|\beta$ τότε

$$\delta|\alpha \pm \beta.$$

## 2 Διαιρέτες και μέγιστος κοινός διαιρέτης

Αν ένας αριθμός $\delta$ είναι διαιρέτης του $\alpha$ τότε και ο αντίθετος του $-\delta$ είναι επίσης διαιρέτης του $\alpha$. Οι διαιρέτες λοιπόν ενός αριθμού $\alpha$ είναι ζεύγη αντιθέτων αριθμών. Ανάμεσα σε αυτούς συγκαταλέγονται οι $\pm 1$ και $\pm \alpha$. Για παράδειγμα οι διαιρέτες του 62 είναι οι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

**Άσκηση 5** Να γράψετε όλους τους διαιρέτες του 12.

Αν έχουμε δύο αριθμούς $\alpha$, $\beta$ τότε *κοινοί διαιρέτες* τους ονομάζονται οι αριθμοί που είναι συγχρόνως διαιρέτες και του $\alpha$ και $\beta$.

**Άσκηση 6** Να βρείτε τους κοινούς διαιρέτες των 8 και 12.

Ανάμεσα στους κοινούς διαιρέτες δύο μη μηδενικών ακεραίων $\alpha$, $\beta$ θα υπάρχει κάποιος που θα είναι μεγαλύτερος. Ονομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\alpha$, $\beta$ και συμβολίζεται με $(\alpha, \beta)$.

**Άσκηση 7** Να αιτιολογήσετε τον προηγούμενο ισχυρισμό δηλαδή ότι δύο μη μηδενικοί ακέραιοι έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη.

**Άσκηση 8** Να βρείτε τους $(20, 15)$, $(-20, 25)$, $(-7, -77)$.

**Άσκηση 9** Να αποδείξετε ότι $(\alpha, \beta) = (-\alpha, \beta) = (\alpha, -\beta) = (-\alpha, -\beta)$

Υπάρχει ένας «αυτοματοποιημένος» τρόπος για να βρίσκουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ακεραίων. Μας είναι γνωστός από το Γυμνάσιο. Για την περίπτωση του $(36, 64)$ φαίνεται παρακάτω:

| | |
|---|---|
| 36 | 64 |
| 36 | 28 |
| 8 | 28 |
| 8 | 4 |
| 0 | 4 |

Κάθε φορά διαιρούμε τον πιο μεγάλο από τους δύο αριθμούς που έχουμε με τον άλλο και τον αντικαθιστούμε με το υπόλοιπο της διαίρεσης που βρίσκουμε. Το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης. Εδώ $(36, 64) = 4$. Σχετικά έχουμε το θεώρημα:

**Θεώρημα 2.1** *(Αλγόριθμος του Ευκλείδη) Αν $\alpha > \beta$ είναι δύο θετικοί ακέραιοι σημειώνουμε με:*

- *$\upsilon_1$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $\alpha : \beta$*
- *$\upsilon_2$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $\beta : \upsilon_1$*
- *$\upsilon_3$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $\upsilon_1 : \upsilon_2$*
- *κ.ο.κ.*

*Η διαδικασία αυτή τερματίζεται μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων και το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $(\alpha, \beta)$ των $\alpha, \beta$.*

Αποδειξη: Κάθε ένα από τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $\alpha : \beta$, $\beta : \upsilon_1$, $\upsilon_1 : \upsilon_2$ κ.τ.λ. είναι μη αρνητικό και μικρότερο του διαιρέτη της αντίστοιχης διαίρεσης. Επομένως:

$$\beta > \upsilon_1 > \upsilon_2 > ... \geq 0.$$

Άρα κάποιο από τα υπόλοιπα θα γίνει μηδέν. Στην ενάντια περίπτωση θα είχαμε το απειροσύνολο φυσικών αριθμών $\{\upsilon_1, \upsilon_2, ...\}$ που δεν θα είχε ελάχιστο. Άρα η διαδικασία των διαιρέσεων τερματίζεται όταν για πρώτη φορά εμφανισθεί υπόλοιπο μηδέν. Θα έχουμε λοιπόν τις ταυτότητες:

$$\alpha = \beta\pi_1 + \upsilon_1$$

$$\beta = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2\pi_3 + \upsilon_3$$

$$....$$

$$\upsilon_{k-3} = \upsilon_{k-2}\pi_{k-1} + \upsilon_{k-1}$$

$$\upsilon_{k-2} = \upsilon_{k-1}\pi_k + \upsilon_k$$

$$\upsilon_{k-1} = \upsilon_k\pi_{k+1} + 0$$

Θα δείξουμε ότι ο $\delta = \upsilon_k$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\alpha, \beta$.
Βημα 1 Δείχνουμε πρώτα ότι ο $\delta$ διαιρεί τους $\alpha, \beta$. Πράγματι λόγω της τελευταίας σχέσης $\upsilon_{k-1} = \upsilon_k\pi_{k+1}$ ο $\delta$ διαιρεί το $\upsilon_{k-1}$. Άρα (δείτε και πρόταση ;; ) ο $\delta$ διαιρεί το β′ μέλος της προτελευταίας σχέσης $\upsilon_{k-2} = \upsilon_{k-1}\pi_k + \upsilon_k$ άρα και το πρώτο μέλος. Προχωρώντας με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στο ότι ο $\delta$ διαιρεί τους $\alpha, \beta$.
Βημα 2 Δείχνουμε ότι ο $\delta$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε άλλο θετικό κοινό διαιρέτη των $\alpha, \beta$. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι $m > 0$ είναι ένας κοινός διαιρέτης των $\alpha, \beta$. Τότε από την πρώτη σχέση που γράφεται και $\upsilon_1 = \alpha - \beta\pi_1$ έχουμε ότι ο $m$ είναι και διαιρέτης του $\upsilon_1$ (πάλι από πρόταση ;; ). Επίσης από την δεύτερη σχέση που γράφεται και $\upsilon_2 = \beta - \upsilon_1\pi_2$ έχουμε ότι ο $m$ είναι και διαιρέτης του $\upsilon_2$. Συνεχίζοντας έτσι φθάνουμε στο συμπέρασμα ότι ο $m$ είναι και διαιρέτης του $\upsilon_2 = \delta$. Άρα (πρόταση ;;) $|m| \leq |\delta|$ και αφού έχουμε θετικούς αριθμούς είναι $m \leq \delta$.

**Θεώρημα 2.2** *Έστω $\delta = (\alpha, \beta)$ όπου $\alpha, \beta$ θετικοί ακέραιοι. Τότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $\kappa, \lambda$ τέτοιοι ώστε*

$$\delta = \kappa\alpha + \lambda\beta$$

*δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.*

Αποδειξη: Εργαζόμαστε με τις σχέσεις του θεωρήματος ;; ξεκινώντας από την τελευταία:

$$\delta = \upsilon_k = \upsilon_{k-2} - \pi_k\upsilon_{k-1} \tag{1}$$

Από την προτελευταία σχέση έχουμε

$$\upsilon_{k-1} = \upsilon_{k-3} - \upsilon_{k-2}\pi_{k-1}$$

Δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\upsilon_{k-1}, \upsilon_{k-2}$. Αντικαθιστώντας στην ;; βρίσκουμε:

$$\delta = \upsilon_{k-2} - \pi_k\left(\upsilon_{k-3} - \upsilon_{k-2}\pi_{k-1}\right)$$

οπότε έχουμε:

$$\delta = \left(1 + \pi_k\pi_{k-1}\right)\upsilon_{k-2} - \pi_k\upsilon_{k-3} \tag{2}$$

Δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης γράφεται τώρα ως γραμμικός συνδυασμός των $\upsilon_{k-2}, \upsilon_{k-3}$. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\alpha, \beta$.

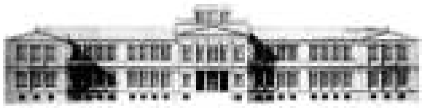
***Άσκηση* 10** Βρείτε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των 44 και 36 και να τον γράψετε ως γραμμικό συνδυασμό τους.

---

Το προβλημα της εβδομαδας

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{B}}'$. Δείξτε ότι οι γωνίες $\widehat{\Gamma}, \widehat{\Gamma}'$ θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

---



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

# Μαθηματικών

Α' Λυκείου

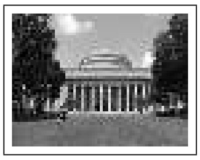
21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 6 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Το Υπολογιστικό Μαθηματικό Σύστημα Maxima

## 1 Ιστορική αναδρομή

Το Maxima είναι ένα υπολογιστικό μαθηματικό σύστημα (**C**omputer **A**lgebra **S**ystem), γραμμένο στην γλώσσα Lisp. Το Maxima παρήχθη από το σύστημα Macsyma, το οποίο αναπτύχθηκε από το Αμερικανικό Πανεπιστήμιο MIT από το 1968 ως το 1982 ως τμήμα του σχεδίου Project MAC. Το MIT έδωσε ένα αντίγραφο του πηγαίου κώδικα (source code) στο Τμήμα Ενέργειας το 1982.



Το κεντρικό κτήριο του M.I.T.

Η εκδοχή αυτή είναι γνωστή ως DOE Macsyma. Ένα αντίγραφο του DOE Macsyma έγινε αντικείμενο εργασίας του William F. Schelter, καθηγητή του Πανεπιστημίου του Texas, από το 1982 έως το θάνατό του το 2001. Το 1998 ο Schelter εξασφάλισε την άδεια από το Τμήμα Ενέργειας να δημοσιοποιήσει τον πηγαίο κώδικα του DOE Macsyma υπό την άδεια GNU Public License, και το 2000 ξεκίνησε το σχέδιο Maxima (Maxima project) στο SourceForge για την ανάπτυξη του DOE Macsyma, το καλούμενο τώρα Maxima. Το Maxima διατίθεται δωρεάν για Windows, Linux και Mac. Το Maxima υποστηρίζει μαθηματικούς υπολογισμούς όπως: παραγώγιση, ολοκλήρωση, σειρές Taylor, μετασχηματισμούς Laplace, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, συστήματα γραμμικών εξισώσεων, πολυώνυμα, διανύσματα, μητρώα, τανυστές κ.λπ. Η επίσημη ιστοσελίδα του προγράμματος βρίσκεται στην ηλεκτρονική διεύθυνση: http://maxima.sourceforge.net

## 2 Τα πρώτα βήματα

Κάθε εντολή που δίνεται στο Μ. πρέπει να τελειώνει με «;». Η εκτέλεση μίας εντολής γίνεται πατώντας το συνδυασμό πλήκτρων `Shift+Enter`.

**Άσκηση 1** Κάντε τους παρακάτω απλούς υπολογισμούς ανά γραμμή :
$144 \cdot 17 - 9$ πληκτρολογώντας: `144 * 17 - 9`
και $144^{25}$ πληκτρολογώντας: `144^ 25`

Παρομοίως μπορείς να εκτελέσεις οποιεσδήποτε πράξεις θες, όπως αυτές γίνονται και σε έναν υπολογιστή τσέπης. Φυσικά, στον υπολογιστή τσέπης δεν μπορείς να υπολογίσεις το $144^{25}$. Το μεγάλο πλεονέκτημα των C.A.S. είναι ότι μπορούν να κάνουν υπολογισμούς με μεταβλητές - σύμβολα.

### 2.1 Αριθμητική

**Άσκηση 2** Κάντε τους παρακάτω απλούς υπολογισμούς ανά γραμμή :
$(a+2b)^4$ πληκτρολογώντας: `(α+ 2*β)^ 4` και υπολογίστε το ανάπτυγμα χρησιμοποιώντας την εντολή `expand()` για το προηγούμενο εξαγόμενο `%` πληκτρολογώντας: `expand(%)`. 36 παραγοντικό, πληκτρολογώντας: `36!;`.

**Άσκηση 3** Μπορούμε να υπολογίσουμε ρίζες, χρησιμοποιώντας την εντολή: `sqrt(3)`. Για να μετατρέψουμε το αποτέλεσμα σε δεκαδική προσέγγιση χρησιμοποιούμε την εντολή `float(%)`.

**Άσκηση 4** Εισάγετε την έκφραση $(\sqrt{2}-1)^5$, πληκτρολογώντας την κατάλληλη εντολή. Στη συνέχεια βρείτε το ανάπτυγμα της **προηγούμενης** παράστασης, χρησιμοποιώντας την εντολή: `expand(%)`. Τέλος, υπολογίστε μία δεκαδική προσέγγιση του αποτελέσματος.

**Άσκηση 5** Υπολογίστε το άθροισμα: $9+12+15+\cdots+90$, χρησιμοποιώντας την εντολή αθροίσματος: `sum(3*n+6,n,1,28);` (σελ.130,ασκ.10)

**Άσκηση 6** [Απόδοση τιμών σε μεταβλητές] Αποδώστε στις μεταβλητές a,b τις τιμές 2013, $\frac{1}{2013}$ αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τον τελεστή ορισμού «:» με την έκφραση: `a:2013;b:1/2013;` και στη συνέχεια υπολογίστε την τιμή της παράστασης (σελ.52,άσκ.1):

$$A=\left[\left(x^2y^3\right)^{-2}\cdot\left(xy^3\right)^4\right]:\left(\frac{x^3}{y^{-1}}\right)^{-3}$$

### 2.2 Βασικές σταθερές και συναρτήσεις

Μπορούμε να αναφερθούμε σε ορισμένες μαθηματικές σταθερές ως εξής: `% e` - ο αριθμός e του Euler (2.7182)
`% pi` - ο αριθμός π (3.14159;)

% phi - ο χρυσός αριθμός $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
% i - η φανταστική μονάδα: $i^2 = -1$

Ορισμένες βασικές συναρτήσεις είναι οι εξής:

`sin` (ημίτονο), `cos` (συνημίτονο), `tan` (εφαπτομένη), `cot` (συνεφαπτομένη), `sqrt` (τετραγωνική ρίζα), `log` (φυσικός λογάριθμος), `exp` (εκθετική συνάρτηση). Οι συναρτήσεις πρέπει να διαχωριστούν εννοιολογικά από τις εντολές και τους τελεστές, όπως η εντολή `float` που είδαμε ήδη.

Για να ορίσουμε μία συνάρτηση χρησιμοποιούμε τον τελεστή «:» όπως για την απόδοση τιμής σε μία μεταβλητή.

**Άσκηση 7** Ορίστε τη συνάρτηση: $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$, πληκτρολογώντας την εντολή `f(x):= 3* x^ 2 - 5*x + 8;` και στη συνέχεια υπολογίστε το $f(2013)$.

**Άσκηση 8** Να ορίσετε την ακολουθία: $a_n = \frac{1}{n}$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα των εκατό πρώτων όρων της ακολουθίας δίνοντας την εντολή: `sum(a(n),n,1,100);`

## 2.3 Θεωρία αριθμών

**Άσκηση 9** Αναλύστε τον αριθμό 30! σε γινόμενο πρώτων παραγόντων χρησιμοποιώντας την εντολή: `factor(30!);`

**Άσκηση 10** Υπολογίστε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης 3520:25 χρησιμοποιώντας τις εντολές `quotient; remainder;`

**Άσκηση 11** Υπολογίστε το Ε.Κ.Π. των αριθμών $220, 234, 356$ χρησιμοποιώντας την εντολή: `lcm;` και τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους χρησιμοποιώντας την εντολή `gcd;`

## 2.4 Συμβολική άλγεβρα

Το λογισμικό αυτό μπορεί να βοηθήσει και όταν θέλουμε να ελέγξουμε αν το αποτέλεσμα που βρήκαμε σε μία άσκηση είναι σωστό.

**Άσκηση 12** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:
$a^3 - 2a^2 + a,\ a^2 - a$, χρησιμοποιώντας την εντολή `factor`.

**Άσκηση 13** Στη συνέχεια να απλοποιήσετε το πηλίκο: $\frac{a^3-2a^2+a}{a^2-a}$ (Βιβλίο σελ.53, άσκηση 1.), χρησιμοποιώντας την εντολή `radcan((a^ 3 - 2*a^ 2 + a)/(a^ 2 -a);`
Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο χρησιμοποιώντας τον κατάλογο (menu) Simplify → Simplify Expression.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα σε νέες εντολές και υπολογισμούς, ως εξής:
Η χρήση του % δίνει αναφορά στην τελευταία έκφραση.
Η χρήση του %i3 δίνει αναφορά στην 3η έκφραση που εισήγαμε.
Η χρήση του %o2 δίνει αναφορά στην 2η έκφραση με την οποία απάντησε ο επεξεργαστής.

**Άσκηση 14** Χρησιμοποιώντας τις αναφορές σε προηγούμενες εκφράσεις, εκτελέστε τις παρακάτω ενέργειες:
Στην τελευταία έκφραση προσθέστε τον αριθμό 1.
Εκτελέστε την απλοποίηση του κλάσματος με αριθμητή το εξαγόμενο της παραγοντοποίησης του $a^3 - 2a^2 + a,\ a^2 - a$ και παρονομαστή τον $a^2 - a$, χρησιμοποιώντας την εντολή `ratsimp`, χωρίς να πληκτρολογήσετε τις παραστάσεις.

**Άσκηση 15** Απλοποιήστε την παράσταση: $\frac{z^2-3z+2}{2z^2-3z-2}$ χρησιμοποιώντας την εντολή: `ratsimp;`(σελ.112,ασκ.2)

**Άσκηση 16** Αντικαταστήστε στην τελευταία απλοποιημένη έκφραση την τιμή της μεταβλητής $z$ με 2013.

Εάν θέλουμε να «καθαρίσουμε» τη μνήμη του maxima χρησιμοποιούμε την εντολή: `kill(all);`

**Άσκηση 17** Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 4x + 5 = 0$, χρησιμοποιώντας την εντολή `solve(x^ 2 - 4*x + 5=0,x);`

**Άσκηση 18** Να λυθεί η εξίσωση: $(a^2-1)x-a+1 = 0, a \in \mathbb{R}$, ως προς $x$, χρησιμοποιώντας την εντολή `solve;` (σελ.80, παράδειγμα.)

**Άσκηση 19** (σελ.84, ασκ.12) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

**Άσκηση 20** (σελ.94, ασκ.15) Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$.

**Άσκηση 21** (σελ.20, ασκ.4) Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y &= 14 \\ x + 3y &= 9 \end{cases}$, χρησιμοποιώντας την εντολή: `solve([x-2*y = 14, x+ 3*y =9],[x,y]);`

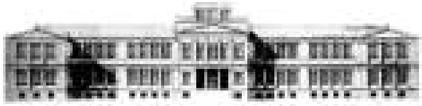
## 2.5 Σύνολα

Ένα σύνολο δηλώνεται με την εντολή `set;` ή με άγκιστρα.

**Άσκηση 22** Δηλώστε δύο σύνολα $A, B$, χρησιμοποιώντας τις εντολές: `A:set(a,b,1,2,3);B:{a,b,3,4,5,6,7 }` .

**Άσκηση 23** Υπολογίστε την τομή και την ένωση των δύο συνόλων χρησιμοποιώντας τις εντολές: `union, intersection`

**Άσκηση 24** Υπολογίστε τον πληθικό αριθμό και τη διαφορά των συνόλων $A, B$, χρησιμοποιώντας τις εντολές: `cardinality, setdifference`



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

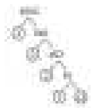
Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 Φύλλο 7 Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής



## 1 Σχετικά Πρώτοι Αριθμοί

Δύο αριθμοί λέγονται *σχετικά πρώτοι* ή *πρώτοι προς αλλήλους* αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι 1. Οι αριθμοί 14 και 45 είναι σχετικά πρώτοι ενώ οι αριθμοί 16 και 36 δεν είναι.

**Θεώρημα 1.1** *Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta$ είναι σχετικά πρώτοι και $\alpha|\beta\gamma$ τότε $\alpha|\gamma$.*

Απόδειξη. Υπάρχουν ακέραιοι $x$ και $y$ ώστε ο αριθμός $x\alpha+y\beta$ να είναι ίσος με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των $\alpha, \beta$. Επομένως υπάρχουν αριθμοί $x$ και $y$ ώστε

$$x\alpha + y\beta = 1 \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1) με $\gamma$ βρίσκουμε ότι: $x\alpha\gamma+y\beta\gamma = \gamma$ Επομένως

$$x\alpha\gamma + y\beta\gamma = \gamma \tag{2}$$

Βλέπουμε ότι ο $\alpha$ διαιρεί το πρώτο μέλος της (2) άρα διαιρεί και το δεύτερο. Επομένως ο $\alpha$ διαιρεί τον $\gamma$.

**Άσκηση 1** Να αποδείξετε ότι δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί είναι πάντοτε σχετικά πρώτοι.

**Άσκηση 2 Η συνάρτηση $\varphi$ του Euler.** Σε κάθε θετικό ακέραιο $x$ αντιστοιχίζουμε το *πλήθος* εκείνων των αριθμών από τους 1, 2, 3, ..., $x$ που είναι σχετικά πρώτοι προς τον $x$. Το συμβολίζουμε με Έτσι $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

| $x$ | $\varphi(x)$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 2 |
| 5 | 4 |
| 6 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |
| 11 | |
| 12 | |

## 2 Πρώτοι Αριθμοί

Ένας θετικός ακέραιος λέγεται *πρώτος* αν

- είναι διάφορος του 1
- οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του είναι ο εαυτός του και η μονάδα.

Αν ένας αριθμός διάφορος της μονάδας δεν είναι πρώτος τότε λέγεται *σύνθετος*. Η μονάδα δεν θεωρείται ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

**Θεώρημα 2.1** *Κάθε αριθμός $\alpha$ μεγαλύτερος της μονάδας ή είναι πρώτος είτε διαιρείται από ένα πρώτο.*

Απόδειξη. Αν ο $\alpha$ είναι πρώτος τότε δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε. Αν δεν είναι θα έχει και κάποιο θετικό διαιρέτη, ας τον πούμε $\alpha_1$ ο οποίος θα είναι διάφορος του $\alpha$ ή της μονάδας. Φυσικά θα είναι

$$\alpha > \alpha_1 > 1$$

Αν ο $\alpha_1$ είναι πρώτος η απόδειξη έχει τελειώσει: Ο $\alpha$ διαιρείται από τον πρώτο $\alpha_1$. Αν είναι σύνθετος θα έχει ένα διαιρέτη $\alpha_2$ που θα είναι διάφορος από τον $\alpha_1$ και το 1. Ο $\alpha_2$ θα διαιρεί τον $\alpha$ (γιατί;). Θα είναι

$$\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > 1$$

Η διαδικασία αυτή κάποτε θα τερματισθεί (γιατί;) με την εμφάνιση ενός πρώτου διαιρέτη του $\alpha$.

**Άσκηση 3** Να αποδείξετε ότι αν $p, q$ είναι δύο διάφοροι πρώτοι τότε είναι και σχετικά πρώτοι.

**Άσκηση 4** Να αποδείξετε ότι αν $p, q$ είναι δύο διάφοροι πρώτοι αριθμοί τότε οι $p^x, q^y$ ($x$, $y$ θετικοί ακέραιοι) είναι σχετικά πρώτοι.

**Θεώρημα 2.2** (Ευκλείδης) *Υπάρχουν άπειροι πρώτοι.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει και ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος πρώτων ας πούμε $n$. Ας συμβολίσουμε με $p_1, p_2, ..., p_n$ τους πρώτους αυτούς. Σχηματίζουμε τον αριθμό

$$\alpha = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$$

Ο αριθμός $\alpha$:

- Είναι μεγαλύτερος από όλους τους $p_1, p_2, ..., p_n$ και επομένως είναι διαφορετικός από όλους τους.
- Δεν διαιρείται από κανέναν από τους $p_1, p_2, ..., p_n$ (γιατί;)
- Αφού είναι διάφορος του 1 πρέπει να διαιρείται από κάποιον πρώτο.

Αλλά οι διαθέσιμοι πρώτοι είναι οι $p_1, p_2, ..., p_n$ που κανένας τους δεν διαιρεί τον $\alpha$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα υπάρχουν άπειροι πρώτοι.

Πρώτους μπορούμε να βρίσκουμε με το γνωστό κόσκινο του Ερατοσθένη. Υπάρχουν πίνακες όπου έχουν καταγραφεί πρώτοι αριθμοί. Οι πρώτοι 1000 πρώτοι είναι οι: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331 337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503 509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997.


Ερατοσθένης
276-194 π.Χ.

Για τους πρώτους υπάρχουν πολλά άλυτα προβλήματα (: δηλαδή που δεν έχει κατορθώσει να τα λύσει κανείς). Μερικά με απλή διατύπωση είναι τα ακόλουθα:

1. Δύο πρώτοι λέγονται *δίδυμοι πρώτοι* αν διαφέρουν κατά 2. Μερικά ζεύγη διδύμων πρώτων είναι το 3 και 5 το 5 και 7, το 11 και 13. Είναι άγνωστο αν υπάρχουν ή όχι άπειρα ζεύγη διδύμων πρώτων.
2. Ένας πρώτος $p$ λέγεται *πρώτος της Sophie Germain* αν και ο $2p+1$ είναι πρώτος. Οι αριθμοί $2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53$ είναι πρώτοι της Sophie Germain. Είναι άγνωστο αν υπάρχουν άπειροι πρώτοι αυτού του είδους.
3. *Αριθμοί του Fibonacci* λέγονται οι αριθμοί που σχηματίζονται ως εξής: Ξεκινάμε από τους 1 και 1 τους προσθέτουμε και παίρνουμε τον 2. Προσθέτουμε τον 1 με τον 2 και παίρνουμε τον 3. Προσθέτουμε τον 2 και τον 3 και παίρνουμε τον 5. Συνεχίζοντας κάθε φορά προσθέτοντας τους δύο τελευταίους αριθμούς που έχουμε πάρει κ.ο.κ. Κάποιοι από τους αριθμούς Fibonacci είναι πρώτοι και κάποιοι είναι σύνθετοι. Είναι άγνωστο αν υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί Fibonacci.
4. Η εικασία του Goldbach : Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων. Αναπόδεικτη από το 1742.

## 3 Το θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής

Πρόκειται για την θεωρητική τεκμηρίωση του γνωστού, από το Γυμνάσιο, γεγονότος ότι κάθε αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

**Θεώρημα 3.1** *Κάθε ακέραιος μεγαλύτερος του 1 γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών κατά μοναδικό τρόπο. Δηλαδή κάθε αριθμός $\alpha > 1$ γράφεται στην μορφή*

$$\alpha = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot ... \cdot p_n^{x_n}$$

*όπου οι $p_1, p_2, ..., p_n$ είναι πρώτοι και οι $x_1, x_2, ..., x_n$ θετικοί ακέραιοι. Επιπλέον αυτοί οι αριθμοί είναι μοναδικοί.*

Απόδειξη. Ο $\alpha$ σε κάθε περίπτωση έχει παράγοντα κάποιο πρώτο αριθμό (ενδεχομένως τον εαυτό του αν ο ίδιος είναι πρώτος). Τον διαιρούμε με αυτό τον πρώτο και γράφουμε $\alpha = p_1\beta$. Κάνουμε το ίδιο για το $\beta$ κ.ο.κ. Στο τέλος θα έχουμε γράψει τον $\alpha$ ως γινόμενο πρώτων όχι απαραιτήτως διαφορετικών. Συγκεντρώνουμε τους ίδιους πρώτους γράφουμε το γινόμενο τους υπό μορφή δύναμης θα έχουμε την μορφή:

$$\alpha = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot ... \cdot p_n^{x_n}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η ανάλυση αυτή είναι μοναδική. Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι αν συμβαίνει να είναι και

$$\alpha = q_1^{y_1} \cdot q_2^{y_2} \cdot ... \cdot q_m^{y_m}$$

με τους $q_1$, ..., $q_m$ να είναι πρώτοι και τους εκθέτες $y_1$, ..., $y_m$ θετικοί ακέραιοι τότε θα είναι:

- $n = m$ με άλλα λόγια θα έχουμε το ίδιο πλήθος πρώτων
- θα εμφανίζονται και στις δύο αναλύσεις οι ίδιοι πρώτοι και
- κάθε πρώτος θα εμφανίζεται και στις δύο αναλύεις με τον ίδιο εκθέτη

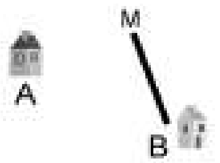
Θα έχουμε

$$p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot ... \cdot p_n^{x_n} = q_1^{y_1} \cdot q_2^{y_2} \cdot ... \cdot q_m^{y_m} \quad (*)$$

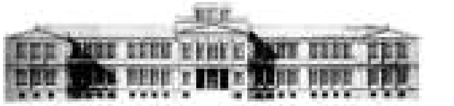
Ας αρχίσουμε από τον $p_n$. Αυτός διαιρεί το α′ μέλος άρα αναγκαστικά θα διαιρεί και το δεύτερο. Θα δείξουμε ότι θα συμπίπτει με κάποιον από τους πρώτους του β′ μέλους. Αν συμπίπτει με τον $q_1$ καλώς. Αν είναι διάφορος από τον $q_1$ τότε θα είναι πρώτος προς τον $q_1^{y_1}$ και επομένως θα διαιρεί το $q_2^{y_2} \cdot ... \cdot q_m^{y_m}$. Αν συμπίπτει με τον $q_2$ καλώς αν όχι θα διαιρεί τον $q_3^{y_2} \cdot ... \cdot q_m^{y_m}$. Αν συνεχίζοντας έτσι δεν βρούμε ότι ο $p_n$ είναι κάποιος από τους $q_1, q_2, ..., q_{m-1}$ θα φθάσουμε στο συμπέρασμα ότι θα διαιρεί τον $q_m^{y_m}$ και επομένως θα συμπίπτει με τον $q_m$. Τελικά ο $p_n$ εμφανίζεται ως παράγοντας και του β′ μέλους. Τον απλοποιούμε και από τα δύο μέλη. Διαλέγουμε ένα άλλο πρώτο από κάποιο μέλος, δεν έχει σημασία ποιο. Με την ίδια συλλογιστική θα υπάρχει παράγοντας και στο άλλο μέλος και επομένως μπορεί να απλοποιηθεί. Φυσικά δε μπορεί να «τελειώσουν» οι πρώτοι σε ένα μέλος (οπότε θα γίνει μονάδα) και στο άλλο μέλος να εξακολουθούν να υπάρχουν πρώτοι. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο θα απλοποιηθούν όλοι οι πρώτοι. Τελικά θα έχουμε διαγράψει τους ίδιους πρώτους και από τα δύο μέλη άρα $m = n$. Φυσικά αν ένας πρώτος $p_i$ εμφανίζεται $x_i$ φορές στο α′ μέλος θα εμφανίζεται και $x_i$ στο δεύτερο άρα και οι εκθέτες των ίδιων πρώτων στα δύο μέλη συμπίτουν.

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Ξεκινάει κάποιος από το σημείο $M$ και κινείται προς το σπιτάκι $B$ σε ευθεία γραμμή και διαπιστώνει ότι η απόσταση του από το σπιτάκι $A$ να αυξάνεται.




Που βρίσκονται όλα τα σημεία $M$ που έχουν αυτή την ιδιότητα;



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 8 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

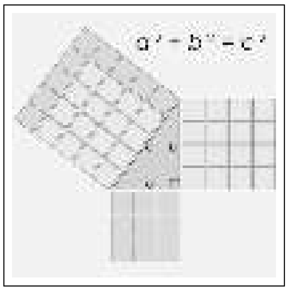


*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*


# Πυθαγόρειες τριάδες και ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

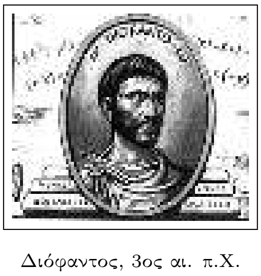
## 1 Ιστορική αναδρομή

Η ισχύς του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τον 6ο αι. π.Χ. οδήγησε σε λύσεις για την κατασκευή κάθετων ευθυγράμμων τμημάτων ως πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με κατάλληλα ακέραια μήκη πλευρών. Η σχέση $a^2+b^2=c^2$ που αποδίδεται στον Πυθαγόρα μάλλον ήταν ήδη γνωστή στους Βαβυλώνιους από την εποχή του Χαμουραμπί (18ος π.Χ. αι.). Το «γνωστότερο» ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών τους θετικούς ακέραιους αριθμούς (3,4,5) είναι πιθανό να χρησιμοποιήθηκε ακόμα και για την κατασκευή κάθετων πλευρών σε διάφορες κατασκευές.



Τρίγωνο με πλευρές 3,4,5

Η αναζήτηση ακέραιων λύσεων σε εξισώσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές δίνει εξισώσεις που καλούνται **Διοφαντικές** προς τιμήν του Έλληνα Μαθηματικού **Διόφαντου** από την Αλεξάνδρεια του 3ου αι. μ.Χ. Η διοφαντική ανάλυση αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων διοφαντικών εξισώσεων και συνήθως αναζητά απαντήσεις σε ερωτήματα όπως : Υπάρχουν λύσεις; Υπάρχουν λύσεις πέρα από τις προφανείς που ενδεχομένως μπορούμε να βρούμε με απλή παρατήρηση; Υπάρχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος λύσεων; Μπορούν να βρεθούν όλες θεωρητικά ή να υπολογιστούν πρακτικά; Ειδικότερα, η λύση της Διοφαντικής εξίσωσης:



Διόφαντος, 3ος αι. π.Χ.

$$x^2+y^2=z^2$$

είναι ισοδύναμη με την εύρεση ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές $x,y,z$, όπως στην πρώτη εικόνα. Ήδη ο Πυθαγόρας είχε βρει έναν τύπο για την κατασκευή άπειρων τέτοιων τριγώνων:

$$x=2n+1,\ y=2n^2+2n,\ z=2n^2+2n+1,\qquad n\in\mathbb{N}$$

Εκτός λοιπόν από την προφανή μηδενική λύση της εξίσωσης, αλλά και τις λύσεις στις οποίες κάποιος από τους $x,y$ είναι μηδέν και ο άλλος ίσος με $z$, στις οποίες φυσικά δεν αντιστοιχούν ορθογώνια τρίγωνα, ο παραπάνω τύπος του Πυθαγόρα δίνει άπειρες ακόμα λύσεις της εξίσωσης. Είναι όμως όλες;

## 2 Πυθαγόρειες Τριάδες

**Ορισμός 2.1.** *Μία **Πυθαγόρεια Τριάδα** είναι τρεις ακέραιοι αριθμοί $x,y,z$, ώστε: $x^2+y^2=z^2$ και θα λέγεται **πρωταρχική(Primitive)**, αν ισχύει ότι: Μ.Κ.Δ.$(x,y,z)=1$*

**Παράδειγμα 2.1.** *Παραδείγματα Πυθαγορείων τριάδων αποτελούν οι: $(3,4,5),(5,12,13),(12,35,37),(9,40,41)$ αλλά και οι $(6,8,10),(9,12,15),\ldots$*

**Άσκηση 1.** Αν $(x,y,z)$ πρωταρχική Πυθαγόρεια τριάδα, τότε κάθε πολλαπλάσιό της: $(kx,ky,kz),k\in\mathbb{Z}$ είναι επίσης Πυθαγόρεια τριάδα.

Δηλαδή, οι πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες παράγουν όλες τις υπόλοιπες, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο μη μηδενικό ακέραιο.

**Λήμμα 2.1.** *Αν $(x,y,z)$ πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα, τότε ένας από τους $x,y$ είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*

*Απόδειξη.* Με απαγωγή σε άτοπο υποθέτοντας ότι και οι δύο $x,y$ είναι άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. ☐

Από το προηγούμενο Λήμμα προκύπτει ότι δεν υπάρχει πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα $(x,y,z)$ που να αποτελείται μόνο από πρώτους αριθμούς. Βέβαια, υπάρχουν πυθαγόρειες τριάδες με δύο πρώτους: $(3,4,5),(11,60,61),(19,180,181)$, αλλά είναι άγνωστο αν αυτές είναι άπειρες στο πλήθος. Απαραίτητο επίσης στον καθορισμό όλων των πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων είναι και το επόμενο:

**Λήμμα 2.2.** *Αν $ab=c^n$ με $(a,b)=1$, τότε οι $a,b$ είναι $n-$οστές δυνάμεις ακεραίων. Δηλαδή, υπάρχουν ακέραιοι $k,l$, ώστε: $a=k^n,\ b=l^n$.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής για τις παραγοντοποιήσεις των $a,b,c$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. ☐

**Θεώρημα 2.1.** *Κάθε λύση της Πυθαγόρειας εξίσωσης:*

$$x^2+y^2=z^2,$$

*ώστε: $(x,y,z)=1$, $x$ άρτιος και $x,y,z>0$ δίνεται απο τις σχέσεις:*

$$x=2st,\qquad y=s^2-t^2,\qquad z=s^2+t^2,$$
$$s>t>0,\qquad s,t\in\mathbb{Z},\qquad s\neq t(mod2)$$

**Άσκηση 2.** Παρατηρήστε στον παρακάτω πίνακα παραγωγής πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων τους ακεράιους $x, y$ :

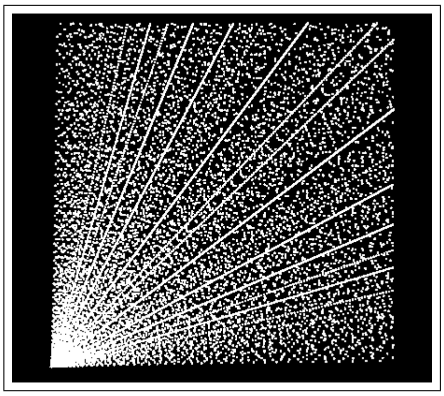
| $s$ | $t$ | $x = 2st$ | $y = s^2 - t^2$ | $s^2 + t^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 3 | 5 |
| 3 | 2 | 12 | 5 | 13 |
| 4 | 1 | 8 | 15 | 17 |
| 4 | 3 | 24 | 7 | 25 |
| 5 | 2 | 20 | 21 | 29 |
| 5 | 4 | 40 | 9 | 41 |
| 6 | 1 | 12 | 35 | 37 |
| 6 | 5 | 60 | 11 | 61 |
| 7 | 2 | 28 | 45 | 53 |

**Ορισμός 2.2.** ***Πυθαγόρειο τρίγωνο*** *λέγεται κάθε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος κάποιον ακέραιο.*

**Άσκηση 3.** [Το πρόβλημα του νέου έτους] Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ενός Πυθαγόρειου τριγώνου είναι πάντα ακέραιος αριθμός.

**Γραφική κατανομή πυθαγόρειων τριάδων**

Αν παρασταθούν τα μήκη των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου σε ένα σύστημα αξόνων παίρνουμε ένα γράφημα όπως το διπλανό.



Ακέραια μήκη κάθετων πλευρών

Στην κατανομή στο γράφημα μπορούν να παρατηρηθούν ορισμένες κανονικότητες:

1) Αν $(x, y)$ τα μήκη των κάθετων στο γράφημα στους δύο άξονες, τότε όλα τους τα πολλαπλάσια εμφανίζονται επίσης στο γράφημα. Αποτέλεσμα αυτού είναι να σχηματίζονται ευθείες γραμμές από την αρχή των αξόνων.

2) Επίσης μέσα στο γράφημα εμφανίζονται τμήματα παραβολικών καμπυλών με υψηλή πυκνότητα σημείων, γεγονός που επίσης εξηγείται από τη μορφή των πυθαγόρειων τριάδων. Συγκεκριμένα, όταν ο αριθμός $\frac{x^2}{4n}$ είναι ακέραιος, τότε η τριάδα: $(x, |n - \frac{x^2}{4n}|, n + \frac{x^2}{4n})$ είναι πυθαγόρεια τριάδα, οπότε δημιουργούνται ομάδες παραβολών.

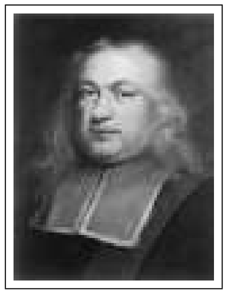
# 3 Ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

## 3.1 Αναδρομή

Τι συμβαίνει αν η πυθαγόρεια διοφαντική εξίσωση μετατραπεί σε βαθμού $n$; Δηλαδή, πότε επαληθεύεται η εξίσωση:

$$x^n + y^n = z^n, \ n \in \mathbb{Z}, \ n > 2$$

Το ερώτημα αυτό γεννήθηκε από έναν σημαντικό ερασιτέχνη μαθηματικό - δικηγόρο στο επάγγελμα - τον **Pierre de Fermat** τον 17ο αι.(1637), διατυπώθηκε ως εικασία από τον ίδιο και έμεινε αναπόδεικτο έως το 1995. Ο Φερμά έκανε λίγες μαθηματικές δημοσιεύσεις, καθώς προτιμούσε να στέλνει τις ανακαλύψεις του σε επαγγελματίες μαθηματικούς με αλληλογραφία ή απλά τις κρατούσε σε προσωπικές σημειώσεις. Μελετώντας, λοιπόν, ένα αντίγραφο του έργου: *Αριθμητικά* του Διόφαντου που κατείχε σε μετάφραση του Bachet έκανε διάφορες σημειώσεις στα περιθώρια του βιβλίου. Μία από αυτές - γραμμένη το 1637 - έλεγε ότι δεν μπορεί να γραφεί ένας κύβος ως άθροισμα δύο άλλων κύβων ακεραίων με μη τετριμμένο τρόπο και αντίστοιχα κάθε $n-$οστή δύναμη, ως άθροισμα $n-$οστών δυνάμεων.[1].



Pierre de Fermat(1601-1665)

Έμεινε στην ιστορία ως **τελευταίο θεώρημα του Fermat** αν και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του 1990 δεν είχε αποδειχθεί και ουσιαστικά αποτελούσε μία εικασία.

## 3.2 Η εικασία που έγινε θεώρημα

**Wiles**, Hasse, Weil, Taniyama, Ribet, Galois, Langlands, Tunnell, Eichler, Shimura, Deligne, Carayol, Serre, Hida, Mazur, Dirichlet, Birch, Swinnerton-Dyer, Iwasawa, Poitou, Tate, Faltings, Frey, Boston, Ramakrishna, Kunz, Rubin, Kolyvagin, Coates, Schmidt, Flach, de Shalit, R.Taylor, N. Katz, Illusie, Bloch, Kato, Raynaud, Schlessinger, Nakayama, Diamond, Kuyk, Lenstra, Boston, Rapoport, Dickson, Fontaine, Hellegouarch, Linve, Schoof, Wintenberger, είναι μερικοί μόνο από τους σύγχρονους μαθηματικούς του 20ου αι. κυρίως οι οποίοι συνέβαλλαν στην απόδειξη της εικασίας από τον Andrew Wiles. Η παρουσίαση της απόδειξής του έγινε σε ένα άρθρο 109 σελίδων στο διάσημο **Annals of Mathematics (http://annals.math.princeton.edu/), 142, 1995.**

Andrew Wiles(1953 Cambridge)

**Θεώρημα 3.1** (Τελευταίο Θεώρημα Fermat)**.** *Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $x, y, z$ οι οποίοι να ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$x^n + y^n = z^n, \ n > 2$$

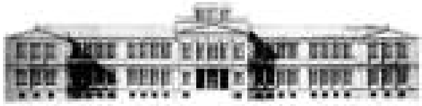
## 3.3 Επίλογος

Εφόσον παρακολουθήσετε την ιστορία του θεωρήματος Fermat θα διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχουν εύκολοι δρόμοι, χωρίς συνεργασίες. Η επιστήμη κτίζεται πετραδάκι - πετραδάκι.

**Άσκηση 4.** [Κόκκος 1] Να αποδειχθεί ότι ο κύβος κάθε ακέραιου αριθμού γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο ακέραιων αριθμών.

**Άσκηση 5.** [Κόκκος 2] Μπορείς να βρεις φυσικούς αριθμούς $x, y, z, w$, ώστε: $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$;

[1] Μάλιστα σημείωσε ότι είχε μία θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο ήταν πολύ μικρό για να την χωρέσει. Αυτή η τελευταία φράση της πρότασης μάλλον ήταν αληθής... Σε άλλη του σημείωση στο περιθώριο είχε γράψει ότι για κάθε ακέραιο $n > 1$ υπάρχουν $n$ το πλήθος πυθαγόρεια τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν και διαφορετικές υποτείνουσες.



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

# Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 9 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

Ανισότητες

## 1 Υπενθύμισεις

Υπενθυμίζουμε μερικές βασικές ιδιότητες της διάταξης:

**Μεταβατική ιδιότητα:** $x > y,\ y > z \Rightarrow x > z$

**Πρόσθεσης κατά μέλη:** $x > y,\ z > w\ \Rightarrow x + y > z + w$

**Πρόσθεσησ-Διαγραφής:** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

**Πολλαπλασιασμού :** $x > y > 0,\ w > z > 0 \Rightarrow xw > yz$

**Πολλαπλασιασμού με θετικό:** $x < y, z > 0 \Rightarrow xz > yz$

**Πολλαπλασιασμού με αρνητικό:** $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$

**Αντιστρόφων:** $x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

**Δυνάμεων:** $x > y > 0 \Rightarrow x^n > y^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

**Δυνάμεων άρτιων:** $x^{2n} < y^{2n} \Leftrightarrow |x| < |y|$

**Δυνάμεων περιττών:** $x^{2n+1} < y^{2n+1} \Leftrightarrow x < y$

**Άσκηση 1** Με $\alpha, \beta, \gamma$ θετικούς να αποδείξετε τις ανισότητες (κάποιες τις έχετε ξαναδεί)

1. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$
2. $2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \geq (\alpha + \beta)^2$
3. $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$
4. $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$
5. $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$
6. $\sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$
7. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$
8. $\gamma + \frac{1}{\gamma} \geq 2$

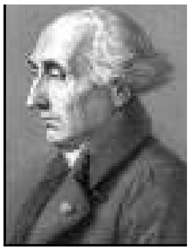
Προσπαθήστε τώρα να αποδείξετε τις ίδιες ανισότητες ακολουθώντας τα βελάκια. Όπου μπορείτε να κάνετε κάποια κατάλληλη αντικατάσταση στην σχέση που βρίσκεσθε για να προκύψει η ανισότητα που δείχνει το βελάκι

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x^2 \geq 0 & & \\
 & & \downarrow^{(1)} & & \\
\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} & \overset{(2)}{\leftarrow} & \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta & \overset{(3)}{\rightarrow} & \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \\
\downarrow^{(4)} & & \downarrow^{(5)} & & \downarrow^{(6)} \\
\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} & & 2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \geq (\alpha+\beta)^2 & & \gamma + \frac{1}{\gamma} \geq 2 \\
\downarrow^{(7)} & & \downarrow^{(8)} & & \\
\sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} & & \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} & &
\end{array}$$

## 2 Η ταυτότητα του Lagrange

**Άσκηση 2** *Η ταυτότητα του Lagrange.* Να αποδείξετε ότι

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$



Joseph Louis Lagrange

1736 - 1813

**Άσκηση 3** Κάποιοι φυσικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν άθροισμα τετραγώνων δύο άλλων φυσικών και κάποιοι όχι. Για παράδειγμα οι 13 και 25 μπορούν αφού $13 = 2^2 + 3^2$ και $25 = 3^2 + 4^2$ ενώ οι 7 και 11 δε μπορούν (δοκιμάστε τιμές). Να αποδείξετε ότι αν δύο φυσικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν άθροισμα τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών τότε και το γινόμενο τους μπορεί.
Υποδειξη: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα του Lagrange.

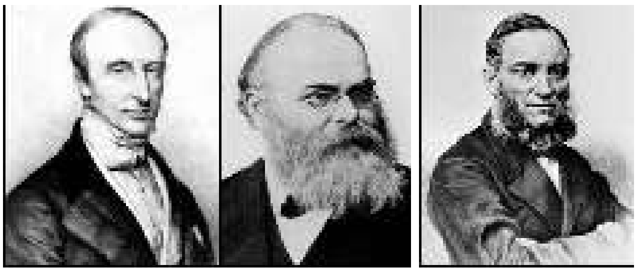
**Άσκηση 4** *Η γενική μορφή της ταυτότητας του Lagrange.* Στην άσκηση **;;** είδαμε την ταυτότητα του Lagrange που μπορεί και να γραφεί και :

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = (ax + by)^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2$$

όπου
$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ay - bx$$
είναι η ορίζουσα με γραμμές τις $a, b, x, y$. Να αποδείξετε ότι
$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) =$$
$$= (ax+by+cz)^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2$$
Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι:
$$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\ldots+\beta_{\nu-1}^2+\beta_\nu^2\right) =$$
$$\left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}+\alpha_\nu\beta_\nu\right)^2 +$$
$$+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \ldots$$
$$+\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{\nu-1} \\ \beta_1 & \beta_{\nu-1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_\nu \\ \beta_1 & \beta_\nu \end{vmatrix}^2 +$$
$$+\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_{\nu-1} \\ \beta_2 & \beta_{\nu-1} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_\nu \\ \beta_2 & \beta_\nu \end{vmatrix}^2 + \ldots$$
$$+\begin{vmatrix} \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu \\ \beta_{\nu-1} & \beta_\nu \end{vmatrix}^2$$

# 3 Η ανισότητα Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky.

**Άσκηση 5** Να αποδείξετε ότι
$$(ax+by)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right).$$



Cauchy, 1789-1857, Schwarz, 1843-1921, Bunyakovsky 1804-1889

**Άσκηση 6** *Η ανισότητα Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky.* Με την βοήθεια της ταυτότητας του Lagrange να αποδείξετε ότι:
$$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\ldots+\beta_{\nu-1}^2+\beta_\nu^2\right) \ge$$
$$\left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}+\alpha_\nu\beta_\nu\right)^2$$

**Άσκηση 7** Να αποδείξετε ότι αν $xyz \ne 0$ τότε
$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \ge 9$$

# 4 Η ανισότητα Cauchy.

**Άσκηση 8** Να αποδείξετε αν $\nu$ θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ έχουν γινόμενο 1 τότε το άθροισμα τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος τους δηλαδή ισχύει:
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu \ge \nu$$

**Άσκηση 9** Να για τους θετικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ισχύει:
$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n \ge a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$$
ή ισοδύναμα:
$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$$
και το ίσο ισχύει όταν οι αριθμοί είναι ίσοι.

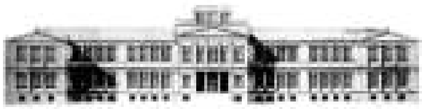
**Άσκηση 10** Το άθροισμα τριών μεταβλητών θετικών αριθμών είναι 7. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενο τους;

---

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Υποθέτουμε ότι $a^2+b^2=1$ και $c^2+d^2=1$. Να αποδείξετε ότι
$$ac+bd \in [-1,1].$$

---



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

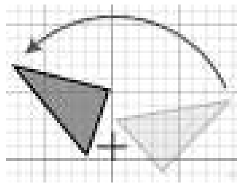
Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

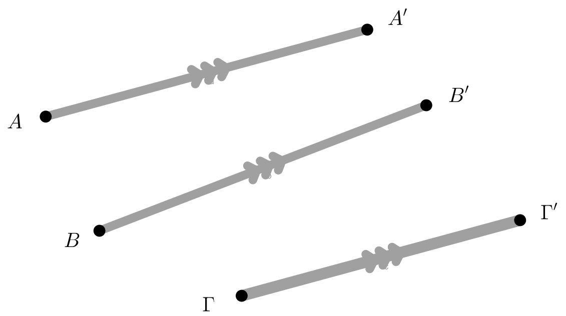
21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 10 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

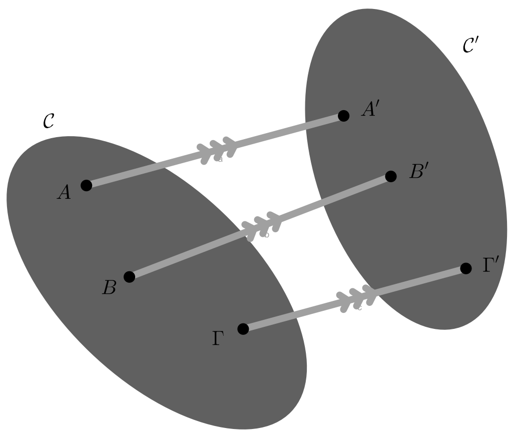
Σημειακοί Μετασχηματισμοί Ι 

# 1 Τι είναι ένας σημειακός μετασχηματισμός

Είναι μία διαδικασία με την οποία σημεία του επιπέδου αντιστοιχίζονται σε σημεία. Ακολουθώντας ένα κανόνα: Σε κάθε σημείο αντιστοιχίζεται ένα μόνο σημείο.



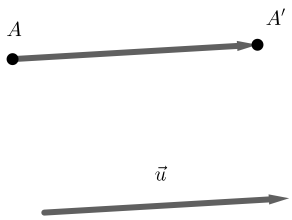

Ένας σημειακός μετασχηματισμός λοιπόν «δρα» σε σημεία με την βοήθεια τος φτιάχνει νέα σημεία. Αν τώρα ένας μετασχηματισμός «δράσει» σε όλα τα σημεία που απαρτίζουν ένα σχήμα θα προκύψει ένα νέο σχήμα που μπορεί η μορφή του να μην είναι ίδια με του αρχικού. Το σχήμα μετασχηματίστηκε σε ένα άλλο. *Σημειακός* λοιπόν διότι δρα σε σημεία και **μετασχηματισμός** γιατί μετασχηματίζει τα σχήματα.




Στους μετασχηματισμούς δίνουμε ονόματα $T$, $S$, $L$ κ.τ.λ. Αν ένας μετασχηματισμός $T$ αντιστοιχίζει το σημείο $A$ στο $A'$ γράφουμε αντί για $A'$ το $T(A)$ και αν μετασχηματίζει το σχήμα $\mathcal{C}$ στο $\mathcal{C}'$ γράφουμε αντί για $\mathcal{C}'$ το $T(\mathcal{C})$.

# 2 Η μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{u}$

Δίνεται ένα διάνυσμα $\vec{u}$. *Μεταφορά κατά διάνυσμα* $\vec{u}$ είναι ο μετασχηματισμός που σε κάθε σημείο $A$ αντιστοιχίζει ένα σημείο $A'$ ώστε $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.




**Άσκηση 1** Στην Geogebra να κατασκευάσετε ένα διάνυσμα, ένα σημείο, ένα κύκλο και ένα τετράγωνο. Μετά να μεταφέρετε κατά το διάνυσμα τον σημείο τον κύκλο και το τετράγωνο.

**Άσκηση 2** Στην Geogebra να εισαγάγετε μία εικόνα. Κατασκευάστε ένα διάνυσμα και κατόπιν να μετεφέρετε την εικόνα κατά το διάνυσμα.

**Άσκηση 3** Στην Geogebra κατασκευάστε δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Να μεταφέρετε ένα σημείο $A'$ κατά το $\vec{u}$. Θα πάρετε το σημείο $A'$. Στη συνέχεια να μεταφέρετε το σημείο $A'$ κατά το $\vec{v}$. Θα πάρετε το σημείο $A''$. Σχηματίστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AA''}$. Έχει καμία σχέση με τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$; Σχολιάστε!

**Άσκηση 4** Στην Geogebra κατασκευάστε ένα διάνυσμα και ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να μεταφέρετε το ευθύγραμμο τμήμα κατά το διάνυσμα. Συγκρίνετε το αρχικό τμήμα και την μεταφορά του. Τι συμπεραίνετε;

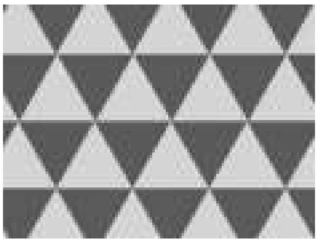
**Άσκηση 5** Στην Geogebra κατασκευάστε ένα διάνυσμα και ένα τρίγωνο. Να μεταφέρετε το τρίγωνο κατά το διάνυσμα. Συγκρίνετε το αρχικό τρίγωνο και την μεταφορά του. Τι συμπεραίνετε;

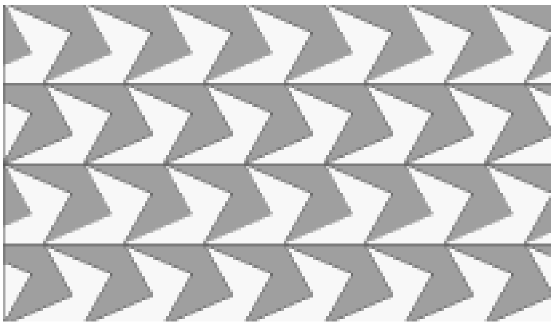
**Άσκηση 6** Στην Geogebra κατασκευάστε ένα διάνυσμα και μία γωνία. Να μεταφέρετε την γωνία κατά το διάνυσμα. Συγκρίνετε την αρχική γωνία και την μεταφορά της. Τι συμπεραίνετε;

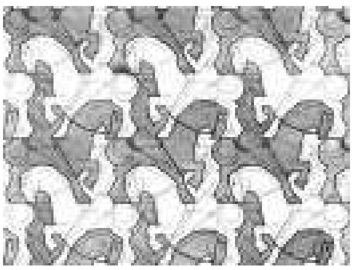
**Άσκηση 7** Στην Geogebra κατασκευάστε ένα διάνυσμα και μία ευθεία. Να μεταφέρετε την ευθεία κατά το διάνυσμα. Συγκρίνετε την αρχική ευθεί και την μεταφορά της. Τι συμπεραίνετε;

**Άσκηση 8** Να κατασκευάστε ένα κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ και με κέντρο $O$. Να μεταφέρετε το εξάγωνο κατά τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}$. Επαναλάβετε τις μεταφορές στα εξάγωνα που θα προκύψουν.

**Άσκηση 9** Λέμε ότι ένα σχήμα *έχει συμμετρία* ως προς μία μεταφορά κατά ένα διάνυσμα $\vec{u}$ αν όταν το μεταφέρουμε κατά το διάνυσμα $\vec{u}$ το αποτέλεσμα της μεταφοράς συμπέσει με το αρχικό σχήμα. Για τα παρακάτω σχήματα (θεωρείστε ότι εκτείνονται επ' άπειρον) βρείτε διανύσματα ως προς τα οποία έχουν συμμετρία ως προς την μεταφορά κατά αυτά τα διανύσματα.

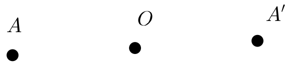






# 3 Η συμμετρία ως προς σημείο.

Δίνεται ένα σημείο $O$. *Συμμετρία ως προς κέντρο* $O$ είναι ο μετασχηματισμός που σε κάθε σημείο $A$ αντιστοιχίζει ένα σημείο $A'$ ώστε το $O$ να είναι μέσο του $AA'$.




**Άσκηση 10** Στην Geogebra να κατασκευάσετε ένα σημείο $O$ και διάφορα σχήματα. Κατόπιν να βρείτε τα συμμετρικά τους ως προς $O$.

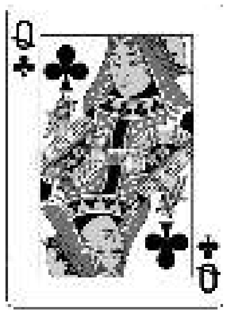
**Άσκηση 11** Να συγκρίνετε

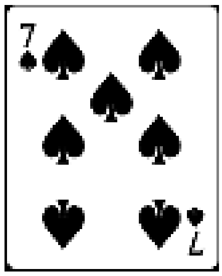
1. Ένα ευθύγραμμο τμήμα,
2. Μία ευθεία,
3. Ένα τρίγωνο.

με τα συμμετρικά τους ως προς $O$.

**Άσκηση 12** Στην Geogebra κατασκευάστε ένα διάνυσμα και μία ευθεία. Να μεταφέρετε την ευθεία κατά το διάνυσμα. Συγκρίνετε την αρχική ευθεία και την μεταφορά της. Τι συμπεραίνετε;

**Άσκηση 13** Λέμε ότι ένα σχήμα *έχει συμμετρία* ως προς κέντρο $O$ αν το συμμετρικό του ως προς $O$ συμπέσει με το αρχικό σχήμα. Το $O$ λέγεται κέντρο συμμετρίας του σχήματος. Ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας



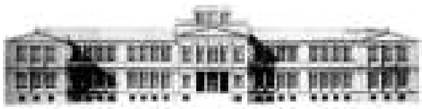

---

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Πως μπορούμε στην Geogebra να μεταφέρουμε ένα σημείο ως προς κάποιο διάνυσμα χρησιμοποιώντας μόνο

- το εργαλείο εύρεσης μέσου
- το εργαλείο εύρεσης συμμετρικού ως προς σημείο;

---



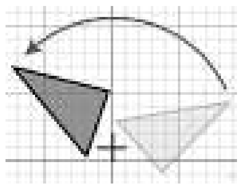
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 11 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

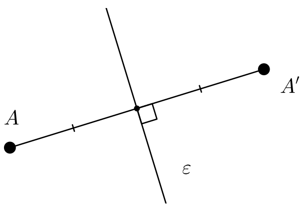
*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Σημειακοί Μετασχηματισμοί ΙΙ



## 1 Η συμμετρία (κατοπτρισμός) ως προς ευθεία

Δίνεται μία ευθεία $\varepsilon$. *Συμμετρία ως προς* $\varepsilon$ είναι ο μετασχηματισμός που σε κάθε σημείο $A$ αντιστοιχίζει ένα σημείο $A'$ ώστε η $\varepsilon$ να είναι μεσοκάθετος του $AA'$.



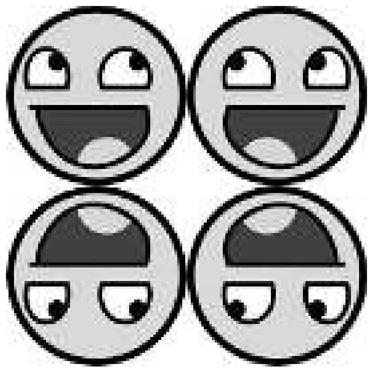

**Άσκηση 1** Στην Geogebra να κατασκευάσετε μία ευθεία $\varepsilon$ και διάφορα σχήματα. Κατόπιν να βρείτε τα συμμετρικά τους ως προς $\varepsilon$.

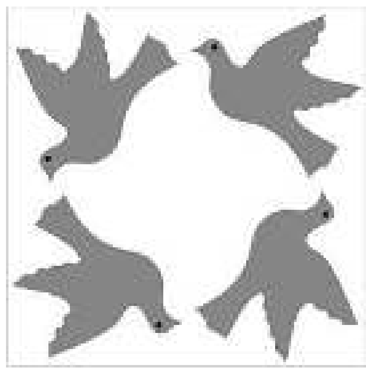
**Άσκηση 2** Να συγκρίνετε

1. Ένα ευθύγραμμο τμήμα,
2. Μία ευθεία,
3. Ένα τρίγωνο.

με τα συμμετρικά τους ως προς $\varepsilon$.

**Άσκηση 3** Λέμε ότι ένα σχήμα *έχει συμμετρία* ως προς άξονα $\varepsilon$ αν το συμμετρικό του ως προς $\varepsilon$ συμπέσει με το αρχικό σχήμα. Η $\varepsilon$ λέγεται άξονας συμμετρίας του σχήματος. Ποια από τα παρακάτω σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας;



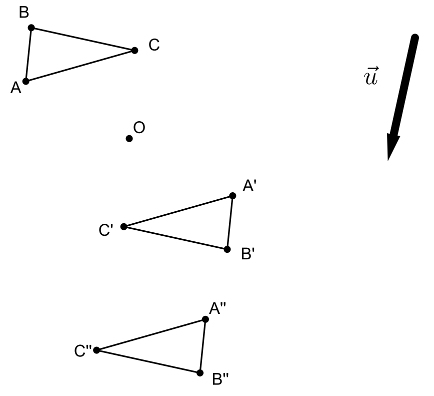


## 2 Σύνθεση (γινόμενο) σημειακών μετασχηματισμών

Αν δουλεύουμε με πολλούς σημειακούς μετασχηματισμούς μπορούμε, για να τους ξεχωρίζουμε, να χρησιμοποιούμε ονόματα γι' αυτούς. Και τα πιο συνηθισμένα ονόματα που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά είναι τα γράμματα. Μπορούμε λοιπόν να συμβολίζουμε τους μετασχηματισμούς μας με $S$, $T$ κ.τ.λ. Αν ο μετασχηματισμός $S$ δρα στο $A$ και δίνει το σημείο $A'$ γράφουμε $A' = S(A)$. Αν έχουμε δύο σημειακούς μετασχηματισμούς ας πούμε τους $S$ και $T$ τότε μπορούμε να αφήσουμε να δράσει πρώτα ο $S$ και μετά, πάνω στα «αποτελέσματα» που επιφέρει ο $S$ να δράσει ο $T$. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε μία σύνθετη ενέργεια:

$$A \overset{\text{δρα ο } S}{\longrightarrow} A' \overset{\text{δρα ο } T}{\longrightarrow} A''$$

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται το τρίγωνο $ABC$ που πρώτα μετασχηματίστηκε στο $A'B'C'$ με μία συμμετρία ως προς $O$ και μετά στ $A''B''C''$ με μία μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{u}$.




Όταν δρουν διαδοχικά δύο μετασχηματισμοί $S$ (πρώτα) και $T$ (μετά) σχηματίζεται ένας νέος μετασχηματισμός που λέγεται σύνθεση (αλλά και γινόμενο) του $S$ με τον $T$ και συμβολίζεται με $T \circ S$.Γράφουμε $(T \circ S)(A)$ ή και $T(S(A))$ για να δηλώσουμε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού αυτού στο $A$ και $(T \circ S)$(όνομα σχήματος) ή $T(S$(όνομα σχήματος)) για να δηλώσουμε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού αυτού σε κάποιο σχήμα.

**Άσκηση 4** Στην Geogebra να κατασκευάσετε

1. Μία ευθεία $\varepsilon$
2. Ένα σημείο $K$
3. Ένα διάνυσμα $\vec{u}$
4. Ένα τρίγωνο $ABC$.

Ας συμβολίσουμε με:

- $S$ την συμμετρία ως προς $\varepsilon$
- $T$ την συμμετρία ως προς $K$
- $L$ την μεταφορά κατά $\vec{u}$

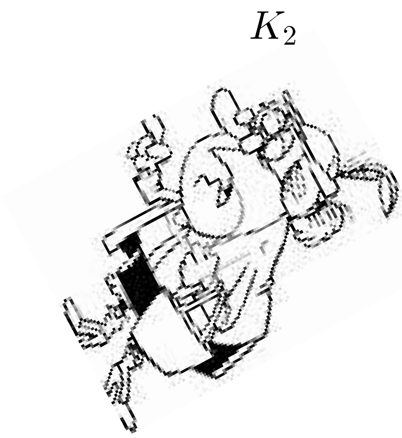
Να σχηματίσετε τα

1. $T(S(ABC))$
2. $S(T(ABC))$
3. $(T \circ L)(ABC)$
4. $(L \circ T)(ABC)$
5. $((T \circ L) \circ S)(ABC)$
6. $(T \circ (L \circ S))(ABC)$

**Άσκηση 5** Να σχολιάσετε τα τέσσερα τελευταία ερωτήματα της προηγούμενης άσκησης.

**Άσκηση 6** Στην Geogebra να κατασκευάσετε εργαλεία που να εκτελούν τους μετασχηματισμούς $T \circ S$, $T \circ L$, $S \circ L$ της άσκησης **;;**.

**Άσκηση 7** Πως στην Geogebra, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς που ξέρουμε, μπορούμε από την εικόνα $K_1$ να φτιάξουμε την εικόνα $K_2$;

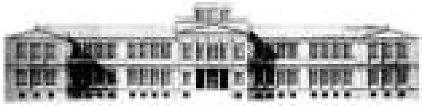

---

Το προβλημα της εβδομαδας

Ένα σημείο $A$ λέγεται σταθερό ή αναλλοίωτο σημείο ενός σημειακού μετασχηματισμού $L$ αν $L(A) = A$.

1. Βρείτε ποια είναι τα σταθερά σημεία των τριών μετασχηματισμών που έχουμε εξετάσει μέχρι στιγμής.
2. Δίνεται ένας ρόμβος $ABCD$. Έστω $T$ η συμμετρία ως προς την ευθεία $AC$ και $S$ η μεταφορά κατά το διάνυσμα $\overrightarrow{BD}$. Ποια είναι τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού $T \circ S$;

---



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

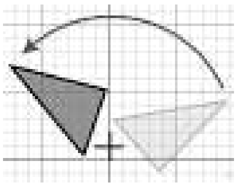
Όμιλος

# Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 12 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*



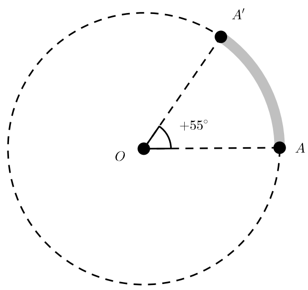
# Σημειακοί Μετασχηματισμοί III

## 1 Η στροφή γύρω από σημείο

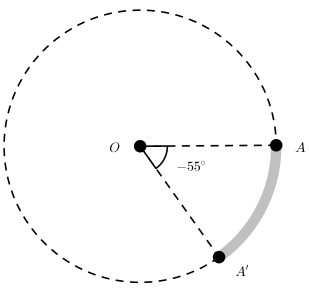
Δίνεται ένα σημείο $O$. *Στροφή ως προς $O$ κατά γωνία* $\varphi$ είναι ο μετασχηματισμός που σε κάθε σημείο $A$ αντιστοιχίζει ένα σημείο $A'$ ώστε:

- $OA = OA'$
- $\widehat{AOA'} = \varphi$

Εδώ την γωνία την χρησιμοποιούμε διαφορετικά απ' ότι στα μαθήματα Γεωμετρίας: Η γωνία θεωρείται προσανατολισμένη που σημαίνει ότι αν έχει πρόσημο + τότε διαγράφεται κατά την θετική φορά (αντίθετα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού) ενά αν έχει πρόσημο + διαγράφεται κατά την αρνητική φορά δηλαδή κατά την δορά των δεικτών το ρολογιού.




Στροφή του $A$ γύρω από το O κατά $+55°$




Στροφή του $A$ γύρω από το O κατά $-55°$

**Άσκηση 1** Στην Geogebra να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο και να το περιστρέψετε γύρω από το κέντρο του κατά $30°$ και κατά $-30°$.

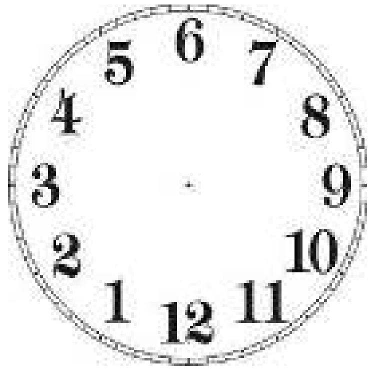
**Άσκηση 2** Να συγκρίνετε

1. Ένα ευθύγραμμο τμήμα,
2. Ένα τρίγωνο.
3. Μία γωνία

με την στροφή τους γύρω από το $O$ κατά γωνία $\varphi$.

**Άσκηση 3** Στην Geogebra να κατασκευάσετε ένα κανονικό εξάγωνο με κέντρο $O$ και ένα δρομέα $t$ εύρους $0-360$. Περιστρέψτε το εξάγωνο κατά $t°$ κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού. Δώστε στον δρομέα ενεργή κίνηση. Να κάνετε το ίδιο αλλά αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού.

**Άσκηση 4** Να εισαγάγετε στην Geogebra την εικόνα clock1.jpg.

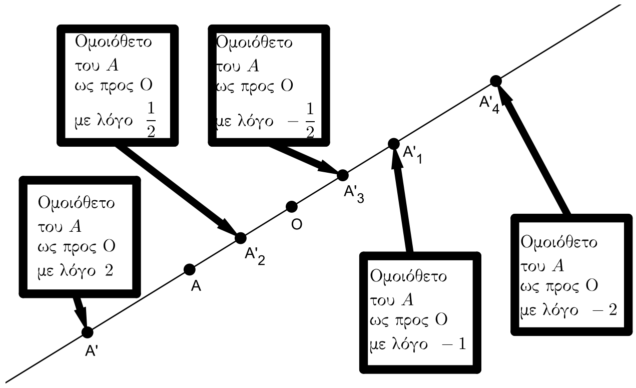



Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε ως βάση την εικόνα για να φτιάξετε ένα ρολόϊ. Σε πρώτη φάση δοκιμάστε μεγάλες ταχύτητες για τους δείκτες.

Σημειωση Αν δώσουμε στον δρομέα ταχύτητα 1 τότε θα χρειασθεί 10 δευτερόλεπτα για να διατρέξει το διάστημα που του έχουμε ορίσει. Με βάση αυτό το στοιχείο μπορείτε να υπολογίσετε τις ταχύτητες ώστε το ρολόϊ να «δουλεύει» σε πραγματικό χρόνο.

## 2 Ομοιοθεσία

Ομοιοθεσία με κέντρο $O$ και λόγο $\lambda$ λέγεται ο σημειακός μετασχηματισμός που στο $A$ αντιστοιχίζει σημείο $A'$ ώστε $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$. Το $A'$ λέγεται *ομοιόθετο* του $A$ ως προς $O$ με λόγο $\lambda$.




**Άσκηση 5** Να συγκρίνετε ένα ευθύγραμμο τμήμα με το ομοιόθετο του.

**Άσκηση 6** Να συγκρίνετε ένα τρίγωνο και μία γωνία με τα ομοιόθετα τους.

**Άσκηση 7** Να συγκρίνετε ένα ευθύγραμμο τμήμα με το ομοιόθετο του.

**Άσκηση 8** Να συγκρίνετε ένα τρίγωνο και μία γωνία με τα ομοιόθετα τους.

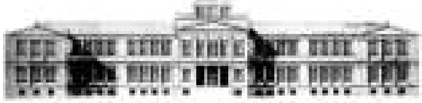
**Άσκηση 9** Να εισαγάγετε στην Geogebra την εικόνα sylvester.png. Κατόπιν να πάρετε ένα σημείο $O$ και ένα δρομέα $m$. Να βρείτε το ομοιόθετο του Συλβέστρου ως προς $O$ με λόγο $m$. Ενεργοποιείστε την κίνηση του δρομέα.
Να κάνετε το ίδιο με ένα τρίγωνο στο οποίο έχετε δώσει ενεργό ίχνος.

---

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Κόψτε σε χαρτόνι δύο ίσα τρίγωνα και τοποθετείστε τα σε ένα τραπέζι. Βρείτε ποιούς από τους μετασχηματισμούς από αυτούς που έχετε μάθει πρέπει να εφαρμόσετε διαδοχικά στο ένα τρίγωνο ώστε να συμπέσει με το άλλο. Δοκιμάστε να ελέγξετε τα συμπεράσματα σας στην Geogebra.
Να κάνετε το ίδιο στην Geogebra με δύο όμοια τρίγωνα.

---



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

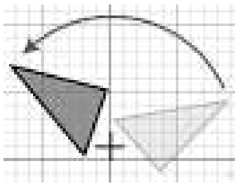
Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 13 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*



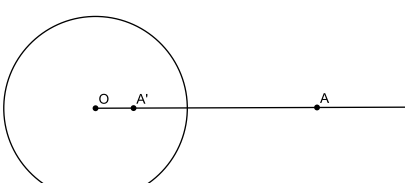
Σημειακοί Μετασχηματισμοί ΙΙΙ

# 1 Αντιστροφή ως προς κύκλο

Δίνεται ένας κύκλος με κέντρο $O$ και ακτίνα $\rho$. *Αντιστροφή ως προς τον κύκλο* $(O, \rho)$ είναι ο μετασχηματισμός που σε κάθε σημείο $A$ διάφορο του $O$ αντιστοιχίζει ένα σημείο $A'$ ώστε:

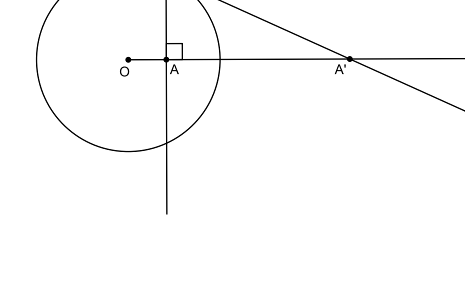
- Το $A'$ ανήκει στην ημιευθεία $OA$.
- $OA' \cdot OA = \rho^2$ ή αλλιώς $OA' = \frac{\rho^2}{OA}$.

Ο κύκλος $(O, \rho)$ ονομάζεται κύκλος αντιστροφής.

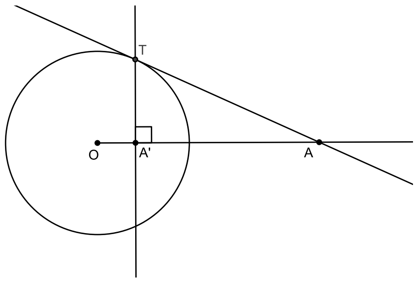



Υπάρχει ένας απλός τρόπος για να κατασκευάζουμε το αντίστροφο ενός σημείου ως προς δοθέντα κύκλο.

- Αν το σημείο $A$ είναι *εσωτερικό* του κύκλου τότε ενώνουμε το $A$ με το $O$, φέρνουμε κάθετη στην $OA$ που τέμνει τον κύκλο στο $T$. Τέλος φέρνουμε την εφαπτομένη στο $T$ που τέμνει την $OA$ στο $A'$.




- Αν το σημείο $A$ είναι *εξωτερικό* του κύκλου τότε φέρνουμε την εφαπτομένη $OT$ και από το $T$ φέρνουμε κάθετη $OA'$ στην $OA$.




**Άσκηση 1** Χρησιμοποιώντας γνώσεις από τα όμοια τρίγωνα να αποδείξετε ότι πράγματι οι δύο παραπάνω κατασκευές μας οδηγούν στο αντίστροφο $A'$ του $A$.

**Άσκηση 2** Ποιο είναι το αντίστροφο ενός σημείου που ανήκει στον κύκλο αντιστροφής.

**Άσκηση 3** Στην Geogebra να κατασκευάσετε ένα κύκλο $(O, \rho)$ και να βρείτε το αντίστροφο ως προς $(O, \rho)$:

1. Μιας ευθείας που διέρχεται από το $O$.
2. Μιας ευθείας που δεν διέρχεται από το $O$.
3. Ενός κύκλου που διέρχεται από το $O$.
4. Ενός κύκλου που δεν διέρχεται από το $O$.

**Άσκηση 4** Στην Geogebra να κατασκευάσετε ένα κύκλο $(O, \rho)$ και να βρείτε το αντίστροφο ως προς $(O, \rho)$:

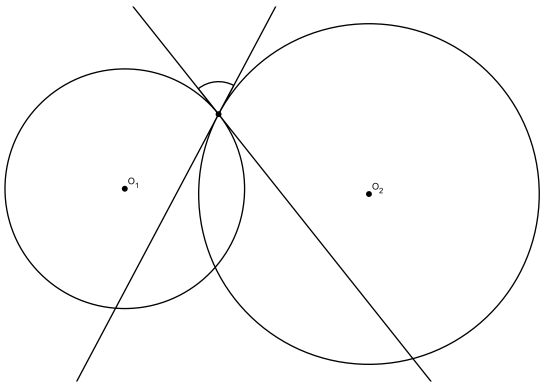
1. Ενός τριγώνου.
2. Ενός τετραγώνου.
3. Ενός εξαγώνου.

**Άσκηση 5** Στην Geogebra να κατασκευάσετε ένα κύκλο $(O, \rho)$ και ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (όλες οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου). Μετά να βρείτε το αντίστροφο του τετραγώνου.

**Άσκηση 6** Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο και τον εγγεγραμμένο κύκλο του (εφάπτεται στις πλευρές του τετραγώνου). Μετά να βρείτε το αντίστροφο του τετραγώνου ως προς τον κύκλο.

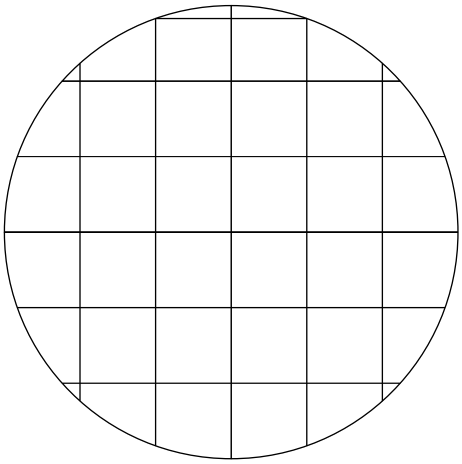
**Άσκηση 7** Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο και τον εγγεγραμμένο κύκλο του (εφάπτεται στις πλευρές του τετραγώνου). Μετά να βρείτε το αντίστροφο του τετραγώνου ως προς τον κύκλο.

**Άσκηση 8** *Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων* ονομάζεται οι γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτομένες τους σε ένα από τα δύο σημεία τομής των κύκλων.

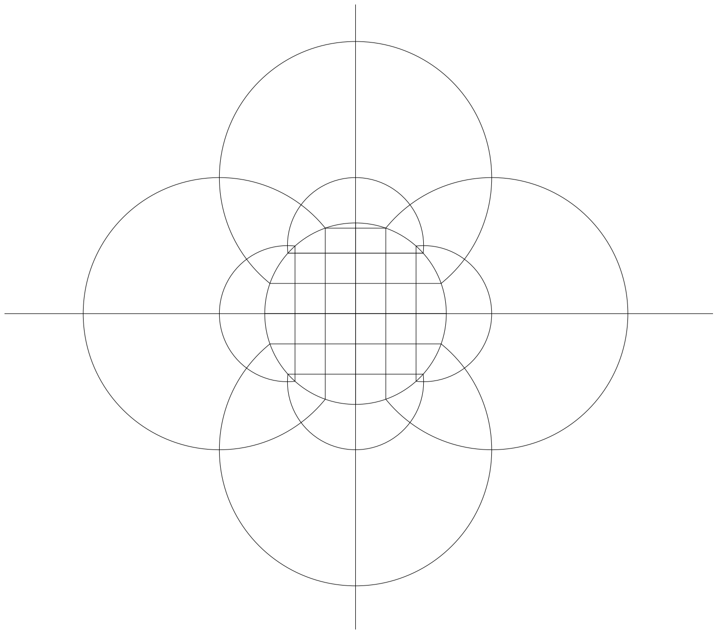



Δίνεται κύκλος $(O, \rho)$. Να βρείτε την γωνία δύο κύκλων που δεν διέρχονται από το $O$ και να την συγκρίνετε με την γωνία που σχηματίζουν οι αντίστροφοι των κύκλων ως προς $(O, \rho)$.

**Άσκηση 9** Στην Geogebra να γράψετε ένα κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Με την βοήθεια του πλέγματος να αποτυπώσετε στο εσωτερικό του κύκλου με ευθύγραμμα τμήματα το μέρος του πλέγματος που βρίσκεται μέσα στον κύκλο.



Μετά να αντιστρέψετε το πλέγμα ως προς τον κύκλο.
Προσοχη: Τα αντίστροφα των τμημάτων που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου η Geogebra δεν τα δίνει. Βρείτε τα μόνοι σας!
Απαντηση:



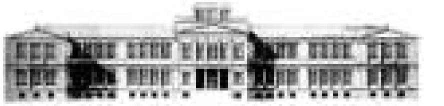
**Άσκηση 10** Η αντιστροφή ως προς κύκλο εφαρμόζεται σε όλα τα σημεία του επιπέδου εκτός από ένα: το κέντρο του κύκλου. Αν έπρεπε να αντιστοιχίσετε στο κέντρο του κύκλου το αντίστροφο του τι θα έπρεπε να είναι αυτό;

---

Το προβλημα της εβδομαδας

Στην Geogebra να πάρετε δύο σημεία $A$, $A'$. Βρείτε κύκλο ώστε το αντίστροφο του $A$ ως προς τον κύκλο να είναι το $A'$. Να κάνετε το ίδιο στην Geogebra με δύο όμοια τρίγωνα.

---



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος
Μαθηματικών
Α' Λυκείου

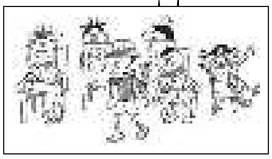
21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 14 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Μουσικές καρέκλες, περιστέρια και άλλα παιχνίδια

## 1 Η αρχή του Diriclet

Ένα από τα αγαπημένα παιχνίδια σε πολλές παρέες που συνδυάζει κίνηση, ευελιξία, αντανακλαστικά και σκέψη είναι οι *μουσικές καρέκλες*. Σε αυτό τα παιδιά που συγκροτούν την παρέα τοποθετούν καρέκλες σε κύκλο με την πλάτη προς το εσωτερικό του κύκλου. Το πλήθος τους είναι αρχικά κατά ένα μικρότερο από το πλήθος των παικτών.



Μουσικές καρέκλες

Οι παίκτες αρχίζουν να τρέχουν γύρω από τις καρέκλες, ακούγοντας μουσική. Κάποια στιγμή η μουσική σταματά και όλοι πρέπει να κάτσουν σε μία καρέκλα. Χάνει όποιος δεν προλάβει να καθίσει. Θα υπάρχει ηττημένος; Στη συνέχεια του παιχνιδιού η μουσική ξαναρχίζει και οι παίκτες και πάλι αρχίζουν να τρέχουν γύρω γύρω από τις καρέκλες, οι οποίες αυτήν τη φορά έχουν μειωθεί κατά μία, ενώ και στις επόμενες φορές μειώνονται κατά μία κάθε φορά. Κερδίζει αυτός που θα προλάβει να καθίσει πρώτος στον τελευταίο γύρο του παιχνιδιού στην τελευταία καρέκλα που θα έχει απομείνει. Θα υπάρχει νικητής;

Πέρα από την εμπειρία μας, η απάντηση επιβεβαιώνεται και από μία παρατήρηση που πρώτος συστηματοποίησε και κατέγραφε Göttingen [1]Είχε σημαντική συμβολή στην α- αυστηρά ο P.G.L. Dirichlet περί το 1834 και έκτοτε φέρει το όνομά του. Ο P.G.L. Dirichlet (1805-1859) υπήρξε σημαντικός Γερμανός μαθηματικός, που σπούδασε στο Παρίσι και θήτευσε ως καθηγητής και συνεχιστής του C.F. Gauss στο διάσημο Πανεπιστήμιο του ναλυτική θεωρία αριθμών, στις σειρές Fourier και στην ανάλυση γενικότερα.

P.G.L. Dirichlet

**Θεώρημα 1.1** (Αρχή Dirichlet ή Αρχή περιστεροφωλιάς). *Αν $n+1$ περιστέρια καθίσουν σε $n$ φωλιές, τότε σε μία τουλάχιστον φωλιά θα καθίσουν 2 περιστέρια.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι καμία από τις περιστεροφωλιές δεν περιέχει 2 περιστέρια ή περισσότερα. Τότε οι $k$ περιστεροφωλιές θα περιέχουν συνολικά το πολύ $k$ περιστέρια, το οποίο είναι άτοπο, διότι υπάρχουν τουλάχιστον $k+1$ περιστέρια. □

**Άσκηση 1.** Σε οποιοδήποτε κείμενο της Ελληνικής γλώσσας, σε μία σειρά από 26 λέξεις τουλάχιστον 2 αρχίζουν από το ίδιο γράμμα.

**Θεώρημα 1.2** (Ισοδύναμη διατύπωση). *Έστω φυσικός αριθμός $k$ και $k+1$ ή περισσότερα αντικείμενα τοποθετούνται σε $k$ κουτιά. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί, το οποίο περιέχει δύο ή περισσότερα αντικείμενα.*

**Άσκηση 2.** Σε ολόκληρη την Αττική υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που έχουν ακριβώς το ίδιο πλήθος από τρίχες στο κεφάλι τους.

**Άσκηση 3.** Στο σχολείο μας (Γυμνάσιο και Λύκειο) υπάρχουν τουλάχιστον δύο μαθητές που έχουν την ίδια ημέρα γενέθλια.

**Άσκηση 4.** Αν επιλέξουμε πέντε αριθμούς από τους ακέραιους $1-8$, τότε δύο από αυτούς έχουν άθροισμα 9.

**Παράδειγμα 1.1.** *Μία αντιστοίχιση των $k+1$ ή περισσοτέρων στοιχείων ενός συνόλου $A$ στα $k$ στοιχεία ενός συνόλου $B$ δεν μπορεί να γίνει ένα προς ένα στοιχείο.*

**Παράδειγμα 1.2.** *Για παράδειγμα όταν συγκρίνουμε δύο τρίγωνα αναζητούμε να αντιστοιχίσουμε στοιχεία ένα προς ένα και αντίστοιχα μεταξύ τους. Ας υποθέσουμε τρεις πλευρές. Αν θέλαμε να συγκρίνουμε τρίγωνο με τετράπλευρο η αντιστοίχιση των πλευρών δεν θα μπορούσε να γίνει μία προς μία.*

Ας εξετάσουμε τώρα κάποιους γενικούς κανόνες που μπορούμε να συνάγουμε για τη χρήση της αρχής.

- Σε πρώτη φάση προσδιορίζουμε τους ρόλους. Δηλαδή ποια αντικείμενα έχουν το ρόλο των «περιστεριών» και ποια αντικείμενα το ρόλο της «περιστεροφωλιάς». Τα αντικείμενα «περιστέρια» και «φωλιές» είναι εντελώς αφηρημένα και μπορεί να αντικαθίστανται σχεδόν από οτιδήποτε βολικό.
- Φυσιολογικά φροντίζουμε ώστε οι περιστεροφωλιές να είναι λιγότερες από τα περιστέρια.

[1] Μεταξύ άλλων στο ίδιο Πανεπιστήμιο φοίτησαν ή δίδαξαν προσωπικότητες όπως οι: Arthur Schopenhauer, οι αδελφοί Grimm, Otto von Bismarck, Edmund Husserl, Max Weber, Jurgen Habermas, Gerhard Schröder, Max Planck, Werner Heisenberg, J. Robert Oppenheimer, Enrico Fermi, Wolfgang Pauli και μαθηματικοί όπως οι: Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, David Hilbert, Felix Klein, Richard Courant, Emmy Noether, Constantin Carathéodory, John von Neumann, Bolyai, Freudenthal, Haar, Hamel, Hecke, Hurwitz, κ.ά. Έως σήμερα 45 βραβεία Nobel είχαν συμμετοχή αποφοίτων ή καθηγητών του. Τα περισσότερα από αυτά στο πρώτο μισό του 20ου αιώνα.

- Φτιάχνουμε έναν κανόνα τοποθέτησης των περιστεριών στις φωλιές τους.

  Το συμπέρασμα της αρχής της περιστεροφωλιάς ισχύει για οποιαδήποτε τοποθέτηση περιστεριών σε φωλιές, οπότε επιλέγουμε τον κανόνα αντιστοίχισης, ώστε «αρκετά» από τα περιστέρια να βρίσκονται στην ίδια περιστεροφωλιά που δίνει τη ζητούμενη ιδιότητα.

- Εφαρμόζουμε την Α.Π.Φ. με βάση τα παραπάνω.

Ας εξετάσουμε τώρα μία λύση της άσκησης 4: Θα επιλέξουμε αριθμούς μεταξύ των 1-8. Προφανώς οι 5 αριθμοί που θα επιλέξουμε θα είναι τα «περιστέρια». Οι περιστεροφωλιές θα πρέπει να είναι τέσσερεις το πολύ. Δηλαδή, θα χωρίσουμε τους αριθμούς σε ομάδες, ώστε αριθμοί από διαφορετικές ομάδες να δίνουν άθροισμα 9.

Επιλέγουμε $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}$ τις περιστεροφωλιές. Τότε από τους 5 αριθμούς που επιλέχθηκαν τουλάχιστον δύο θα έχουν άθροισμα 9.

**Άσκηση 5.** Να αποδειχθεί ότι ανάμεσα σε 52 θετικούς ακέραιους αριθμούς υπάρχουν δύο των οποίων η διαφορά ή το άθροισμα διαιρείται με από το 100.

**Άσκηση 6.** Να αποδειχθεί ότι ανάμεσα σε 4 αριθμούς υπάρχουν 2, ώστε η διαφορά τους να διαιρείται από το 3.

**Άσκηση 7.** Να αποδειχθεί ότι ανάμεσα σε $n+1$ ακεραίους υπάρχουν δύο, των οποίων η διαφορά διαιρείται με $n$.

# 2 Γενικευμένη αρχή της περιστεροφωλιάς

Σε αρκετές περιπτώσεις η χρήση της αρχής του Dirichlet γίνεται ευκολότερα με χρήση μίας διαφορετικής διατύπωσης:

**Θεώρημα 2.1** (Γενικευμένη αρχή περιστεροφωλιάς). *Αν $n$ περιστέρια καθίσουν σε $k$ περιστεροφωλιές, όπου $n>k$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία περιστεροφωλιά με τουλάχιστον $\frac{n}{k}$ περιστέρια.*

Αν για παράδειγμα υπάρχουν 5 περιστέρια που κάθονται σε 2 περιστεροφωλιές, τότε μία από αυτές πρέπει να έχει $\frac{5}{2}=2,5$ περιστέρια. Προφανώς, εφόσον ο αριθμός των περιστεριών πρέπει να είναι ακέραιος, προκύπτει ότι τουλάχιστον μία θα έχει τρία περιστέρια.

*Απόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει περιστεροφωλιά με $\frac{n}{k}$ περιστέρια. Τότε κάθε περιστεροφωλιά θα έχει λιγότερα από $\frac{n}{k}$ περιστέρια, οπότε ο συνολικός αριθμός περιστεριών στις $k$ περιστεροφωλιές θα είναι μικρότερος του $\frac{n}{k}\cdot k=n$ το οποίο είναι άτοπο αφού ο αριθμός των περιστεριών είναι ακριβώς $n$. Συνεπώς, υπάρχει περιστεροφωλιά με $\frac{n}{k}$ περιστέρια τουλάχιστον. □

**Παράδειγμα 2.1.** *Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν 50 καλάθια με πορτοκάλια. Αν κάθε καλάθι περιέχει το πολύ 24 πορτοκάλια, τότε υπάρχουν 3 τουλάχιστον καλάθια, τα οποία περιέχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό πορτοκαλιών.*

Εδώ τα «περιστέρια» είναι τα καλάθια και τα τοποθετούμε στις 24 «περιστεροφωλιές» ανάλογα με το πόσα πορτοκάλια περιέχει το καθένα. Έτσι ο λόγος $\frac{n}{k}$ των περιστεριών προς τις περιστεροφωλιές είναι $\frac{50}{24}=2+\frac{2}{24}$. Οπότε από τη γενικευμένη αρχή της περιστεροφωλιάς υπάρχουν τουλάχιστον τόσα καλάθια με το ίδιο πλήθος πορτοκαλιών, δηλαδή τουλάχιστον 3 καλάθια.

**Άσκηση 8.** Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n$ υπάρχει αριθμός που αποτελείται από τα ψηφία 5 και 0 και διαιρείται από τον $n$.

**Άσκηση 9.** Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς 2 και πέντε εσωτερικά σε αυτό σημεία. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον δύο από τα σημεία έχουν απόσταση μικρότερη από 1.

**Άσκηση 10.** Αν επιλεχθούν 51 ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 100, τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο συνεχόμενοι.

**Θεώρημα 2.2** (Ισοδύναμη διατύπωση). *Αν περισσότερα από $n\cdot k$ αντικείμενα τοποθετηθούν σε $n$ κελιά, τότε κάποιο κελί περιέχει περισσότερα από $k$ αντικείμενα.*

Διαφορετικά διατυπωμένο: Αν $nk+1$ αντικείμενα τοποθετηθούν σε $n$ κελιά, τότε κάποιο κελί θα περιέχει $k+1$ αντικείμενα.

**Άσκηση 11.** Σε ένα διαγωνισμό ΠΡΟΠΟ με 13 αγώνες κάποιος θέλει να πετύχει τουλάχιστον 5 σωστές προβλέψεις σε μία τουλάχιστον στήλη του δελτίου του. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός στηλών που πρέπει να συμπληρώσει.

**Άσκηση 12.** Αν μία τράπουλα έχει 52 φύλλα να βρεθεί πόσα φύλλα πρέπει να επιλεχθούν, ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον 3 κάρτες του ίδιου συμβόλου στην επιλογή.

**Θεώρημα 2.3** (Γνήσια αρχή της περιστεροφωλιάς). *Για κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο αριθμών ο μεγαλύτερος είναι τουλάχιστον ίσος με τη μέση τιμή τους.*

**Άσκηση 13.** Την καθαρά Δευτέρα ο Δήμος Αθηναίων θα εορτάσει στο Ολυμπιακό Στάδιο, για το οποίο έχουν δοθεί 70.000 ατομικές προσκλήσεις. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον 192 άτομα από αυτούς που θα συμμετέχουν στη γιορτή θα έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

**Άσκηση 14.** Οι αλγόριθμοι συμπίεσης χωρίς απώλεια δεδομένων δεν επιτυγχάνουν συμπίεση για όλα τα σύνολα δεδομένων. Για λύση δες *εδώ*.

# 3 Παιχνίδια

Αντί εισαγωγής ας ξεκινήσουμε με ένα παιχνίδι:

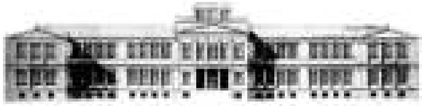
**Άσκηση 15.** Δύο από εσάς τοποθετούν σε ένα θρανίο 22 πετρούλες και στη συνέχεια εναλλάξ ο καθένας παίρνει μία, δύο ή τρεις πετρούλες. Κερδίζει το παιχνίδι όποιος πάρει τελευταίος.

Ποια είναι τα θέματα που πρέπει να εξεταστούν;

1. Υπάρχει πάντα νικητής;
2. Μπορεί ένας από τους δύο παίκτες να βρει στρατηγική, ώστε να κερδίζει πάντα;

Προβλήματα όπως το προηγούμενο έχουν την ιδιαιτερότητα ότι τα δεδομένα τους αλλάζουν, ανάλογα με τις επιλογές των παικτών και εντάσσονται σε έναν κλάδο γνωστό ως **Game Theory** ή **Θεωρία Παιγνίων**. Εμπνευστής και δημιουργός της υπήρξε ο Ούγγρος μαθηματικός *JohnVonNeumann*, ο οποίος επίσης σχετίζεται με το πανεπιστημίο του Göttingen αφού μέρος της θεωρίας του περί της κβαντικής φυσικής αναπτύχθηκε εκεί.


John von Neumann



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Όμιλος
Μαθηματικών
Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 Φύλλο 15 Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

Παιχνίδια και θεωρία παιγνίων

# 1 Παιχνίδια

Αντί εισαγωγής ας ξεκινήσουμε με ένα παιχνίδι:

**Άσκηση 1.** Δύο από εσάς τοποθετούν σε ένα θρανίο 22 πετρούλες και στη συνέχεια εναλλάξ ο καθένας παίρνει μία, δύο ή τρεις πετρούλες. Κερδίζει το παιχνίδι όποιος πάρει τελευταίος.

Ποια είναι τα θέματα που πρέπει να εξεταστούν;

1. Υπάρχει πάντα νικητής;
2. Μπορεί ένας από τους δύο παίκτες να βρει στρατηγική, ώστε να κερδίζει πάντα;

Προβλήματα όπως το προηγούμενο έχουν την ιδιαιτερότητα ότι τα δεδομένα τους αλλάζουν, ανάλογα με τις επιλογές των παικτών και εντάσσονται σε έναν κλάδο γνωστό ως **Game Theory** ή **Θεωρία Παιγνίων**. Εμπνευστής και δημιουργός της υπήρξε ο Ούγγρος μαθηματικός *John Von Neumann*, ο οποίος συνέγραψε μαζί με τον Oskar Morgenstern(γερμανός οικονομολόγος) το βιβλίο Theory of Games and Economic Behaviour (Θεωρία παιγνίων και οικονομική συμπεριφορά), σχετικό με παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος και στόχο την ανάλυση αποφάσεων σε παιχνίδια (= γενικότερες καταστάσεις) στρατηγικής αλληλεπίδρασης.

John von Neumann

# 2 Θεωρία παιγνίων

## 2.1 Θεωρία λήψης αποφάσεων

Μία από τις αρχαιότερες τέχνες είναι η λήψη της καλύτερης απόφασης, σύμφωνα με διάφορα κριτήρια. Αποτελεί τη σημαντικότερη δεξιότητα είτε παίζεις ποδόσφαιρο, είτε αποφασίζεις τον τρόπο μεταφοράς, είτε ακόμα και σε γενικότερα οικονομικού τύπου θέματα. Στη θεωρία αποφάσεων ένα πρόβλημα για το οποίο καλείται κάποιος να αποφασίσει αποτελείται από τα εξής: α) ένα μοντέλο, το οποίο αποτελεί αφαιρετική παρουσίαση μίας πραγματικής κατάστασης και μέσω του οποίου θα ληφθούν οι αποφάσεις, β) ένα υποσύνολο μεταβλητών, οι τιμές των οποίων καθορίζουν τις πιθανές λύσεις από τις οποίες πρέπει να επιλεχθεί η απόφαση, γ) Μία συνάρτηση των μεταβλητών αυτών, ώστε η μέγιστη τιμή της να δίνει και τη βέλτιστη απόφαση. Οι τέσσερεις κύριες κατηγορίες της θεωρίας αποφάσεων είναι: α) Η θεωρία παιγνίων (Game Theory), β) η θεωρία γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming), γ) η θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού (Dynamic Programming) και δ) η θεωρία αποφάσεων στη Στατιστική(Statistical Decision Theory). Εδώ θα ασχοληθούμε με βασικά προβλήματα της **Θεωρίας Παιγνίων** χωρίς να εμβαθύνουμε.

## 2.2 Θεωρία παιγνίων

**Ορισμός 2.1.** ***Παίγνιο*** *είναι ένα σύνολο παικτών που συναγωνίζονται με βάση ένα προκαθορισμένο σύνολο κανόνων. Οι παίκτες πρέπει να πάρουν αποφάσεις σε συνθήκες συναγωνισμού/ανταγωνισμού λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανές κινήσεις των αντιπάλων.*

Από τα διασκεδαστικά παιχνίδια πρώτος το 1913 ο Γερμανός μαθηματικός Ernest Zermelo απέδειξε ότι το σκάκι έχει λύση από οποιαδήποτε κατάσταση, ενώ το 1928 ο John von Neumann απέδειξε ότι μια σημαντική κατηγορία παιχνιδιών, τα παιχνίδια μηδενικού αθροίσματος(παιχνίδια δύο παικτών στα οποία ό,τι χάνει ο ένας ακριβώς το ίδιο κερδίζει ο άλλος), έχουν πάντα λύση. Αν οι παίκτες συναγωνίζονται είναι δύο, τότε έχουμε τα **παιχνίδια δύο παικτών**. Η εφαρμογή της θεωρίας παιγνίων μπορεί να εκτείνεται σε πολλές καταστάσεις: ανταγωνισμός εταιρειών, πολιτικές καταστάσεις(σχέσεις μεταξύ κρατών, μεταξύ πολιτικών μίας χώρας κ.ά.), εξέλιξη συμπεριφοράς διδύμων, λειτουργία μίας οποιασδήποτε ομάδας και γενικότερα σε κοινωνικά, πολιτικά και οικονομικά αντικείμενα.

## 2.3 Παίγνια σε στρατηγική μορφή - Δίλημμα Φυλακισμένου

Σε ένα παίγνιο σε στρατηγική μορφή διακρίνονται: α) ένα σύνολο παικτών, β) για κάθε παίκτη ένα σύνολο δυνατών κινήσεων-αποφάσεων, γ) για κάθε παίκτη ένα σύνολο στρατηγικών, το οποίο είναι ένα υποσύνολο των κινήσεων αυτών που έχει διαθέσιμες.

Ένα από τα πρώτα χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελεί το **δίλημμα του φυλακισμένου** (Prisoner's Dilemma) το δείχνει γιατί δύο άτομα δεν μπορούν να συνεργαστούν, ακόμα κι αν αυτό αποτελεί κοινό τους συμφέρον. Τέθηκε καταρχήν τη δεκατία του '50 από τους Αμερικανούς Merrill Flood και Melvin Dresher

**Παράδειγμα 2.1** (Δίλημμα Φυλακισμένου). *Δύο κρατούμενοι είναι συνένοχοι και κατηγορούνται για κάποια εγκλήματα. Οι δικαστικές αρχές έχουν ελλιπή αποδεικτά στοιχεία και έτσι μπορούν να τους τιμωρήσουν μόνο με 1 χρόνο φυλάκιση τον καθένα. Αν αποδειχθούν όλες οι κατηγορίες τότε θα τιμωρηθούν για 4 χρόνια ο καθένας. Έτσι, οι δικαστικές αρχές καλούνται τον καθένα να συνεργαστεί, βεβαιώνοντας ότι αν το κάνει θα τιμωρηθεί με 1 χρόνο λιγότερο από τον άλλον. Έτσι αν συνεργαστούν και οι δύο τότε θα τιμωρηθούν με 3 χρόνια φυλάκιση ο καθένας, αν ένας από τους δύο συνεργαστεί τότε αυτός θα απαλλαχθεί και ο άλλος θα τιμωρηθεί με το μέγιστο της ποινής, δηλαδή 4 χρόνια.*

Πρόκειται για παιχνίδι δύο παικτών και οι πιθανές στρατηγικές είναι 2 για κάθε παίκτη, οπότε υπάρχουν τελικά συνολικά 4 σενάρια. Πρόκειται για μία απλή περίπτωση από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας του προβλήματος. Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι τα εξής:

Πώς θα επιλέξει ο καθένας την καλύτερη δυνατή στρατηγική για τον ίδιο· Είναι σαφές ότι μία ικανοποιητική λύση είναι να μη συνεργαστεί κανένας με τις δικαστικές αρχές, οπότε θα τιμωρηθούν με μόλις έναν χρόνο φυλάκισης ο καθένας. Όμως δεν μπορούν να γνωρίζουν ο καθένας αν ο άλλος συνεργαστεί. Ένας πίνακας στρατηγικών του προβλήματος είναι ο εξής:

| A/B | B Συνεργάζεται | B Δεν συνεργάζεται |
|---|---|---|
| A Συνεργάζεται | (3,3) | (0,4) |
| A Δεν συνεργάζεται | (4,0) | (1,1) |

Πώς όμως θα επιλέξουν στρατηγική τελικά οι δύο παίκτες· Θεωρώντας ότι έχουν **ορθολογική συμπεριφορά**, δηλαδή ο καθένας επιλέγει τη βέλτιστη κίνησή του με βάση τις δυνατότητες που έχει, ας δούμε πώς θα σκεφτόταν ο παίκτης A.

**1η περίπτωση:** Αν ο B δε συνεργαστεί, τότε:

Εαν δεν συνεργαστώ και εγώ (ο A) τότε τιμωρούμαι 1 χρόνο.
Εάν εγώ συνεργαστώ, τότε τιμωρούμαι $0(0 < 1)$ χρόνια.

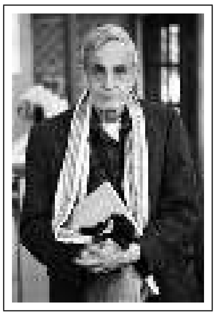
**2η περίπτωση:** Αν ο B συνεργαστεί με τις αρχές, τότε:

Εάν δεν συνεργαστώ εγώ τότε τιμωρούμαι 4 χρόνια.
Εά συνεργαστώ και εγώ, τότε τιμωρούμε $3(3 < 4)$ χρόνια.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση με συμφέρει να συνεργαστώ. Τι νομίζετε λοιπόν· Συμφέρει σε κάθε περίπτωση να συνεργαστούν· Τι θα γίνει αν και οι δύο ακολουθήσουν την ορθολογική συμπεριφορά·

# 3 Ισορροπία Nash(Nash Equilibrium)

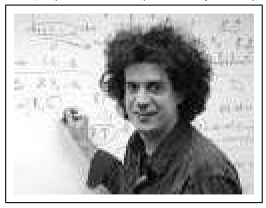
Ο *John Nash* γεννήθηκε στην Αμερική το 1928 και είναι μαθηματικός με εργασίες στη θεωρία παιγνίων, τη διαφο-[1] ρική γεωμετρία και τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Ως καθηγητής του Princeton βραβεύθηκε το 1994 με το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών επιστημών, διότι οι εφαρμογές της εργασίας του στη θεωρία παιγνίων ήταν σημαντικές στις οικονομικές επιστήμες. Ο Nash είχε γράψει για την ισορροπία Nash ήδη από το διδακτορικό του το 1950. Για την επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης στρατηγικής σε ένα παιχνίδι, υποθέτουμε πάντα ότι οι παίκτες έχουν *ορθολογική συμπεριφορά* και άρα ο καθένας επιλέγει την καλύτερη δυνατή κίνηση σε κάθε περίπτωση, φυσικά λαμβάνοντας υπόψη και το τι θα επιλέξουν οι υπόλοιποι παίκτες. Άρα πρέπει να έχει και μία εκτίμηση για τις κινήσεις των άλλων παικτών.



John Forbes Nash

**Ορισμός 3.1.** *Μία **ισορροπία Nash** είναι μία κατάσταση του παιχνιδιού, στην οποία κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει τη θέση του επιλέγοντας μία άλλη κίνηση, με την προϋπόθεση ότι κανένας από τους υπόλοιπους παίκτες δεν θα αλλάξει την κίνησή του.*

Δηλαδή, οι παίκτες βρίσκονται σε ένα παιχνίδι σε ισορροπία Nash, αν καθένας λαμβάνει την καλύτερη δυνατή απόφαση, λαμβάνοντας υπόψη τις αποφάσεις των άλλων.
Η θεωρία του Nash έχει αποτελέσματα και σε παιχνίδια μη μηδενικού μήκους. Το ερώτημα βέβαια είναι πώς μπορεί να υπολογιστεί μία τέτοια θέση ισορροπίας; Λύση ως προς την πολυπλοκότητα εύρεσης μίας τέτοιας θέσης έδωσε ο **Κωνσταντίνος Δασκαλάκης**[2] το 2008 στη διδακτορική του διατριβή, όπου διατύπωσε ότι το πρόβλημα εύρεσης της ισορροπίας είναι υπολογιστικά αδύνατο, δηλαδή δεν είναι εφικτό να βρεθεί αυτή η ισορροπία.



Κ.Δασκαλάκης

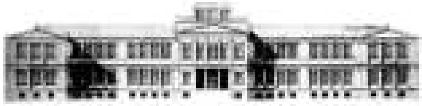
# 4 Μερικά παιχνίδια ακόμα

**Άσκηση 2.** [NIM] Υπάρχουν δύο σωροί από σπίρτα και δύο παίκτες A και B, οι οποίοι παίζουν εναλλάξ, ενώ ξεκινά ο A. Σε κάθε κίνηση ο παίκτης μπορεί να αφαιρέσει όσα σπίρτα θέλει από έναν από τους σωρούς και κερδίζει ο παίκτης που αφαιρεί το τελευταίο σπίρτο.

**Άσκηση 3.** Δύο μαθητές ο Γιώργος και η Ελένη παίζουν το εξής παιχνίδι: Ο Γιώργος επιλέγει έναν μη μηδενικό ακέραιο αριθμό α, η Ελένη τον ακέραιο β και ο Γιώργος τον α. Αν οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι ακέραιοι αριθμοί τότε κερδίζει ο Γιώργος· διαφορετικά κερδίζει η Ελένη. Έχει κάποιος από τους δύο μαθητές στρατηγική νίκης;

**Άσκηση 4.** [Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. - Αρχιμήδης 2000] Στον πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί $1 - 500$. Δύο μαθητές A και B παίζουν το εξής παιχνίδι: με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλον διαγράφουν από έναν αριθμό. Το παιχνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δύο αριθμοί. Νικητής είναι ο B, αν το άθροισμά τους διαιρείται με το 3, διαφορετικά νικητής είναι ο A. Αν ο A αρχίζει πρώτος, τότε ο B έχει στρατηγική νίκης;

[1] Nash, JF, *Equilibrium Points in N-person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences **36**
[2] Ο Κ.Δασκαλάκης (1981), απόφοιτος του Ε.Μ.Π., τώρα είναι αναπληρωτής καθηγητής στο M.I.T.



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 16 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Στοιχεία Συνδυαστικής Ι

Η συνδυαστική είναι με λίγα λόγια η «τέχνη» του να βρίσκουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου χωρίς να τα μετρήσουμε ένα προς ένα.

**Παράδειγμα 1** *Σε ένα συνέδριο μετέχουν 100 σύνεδροι και χαιρετιούνται όλοι με όλους δια χειραψίας. Πόσες χειραψίες έγιναν;*

## 1 Η πολλαπλασιαστική αρχή

Μας επιτρέπει να «μετρήσουμε» το κατά πόσους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί μία εργασία που αποτελείται από δύο ή περισσότερα «μέρη» που το κάθε ένα πραγματοποιείται ανεξάρτητα από το άλλο κατά ένα, γνωστό, αριθμό τρόπων.

**Παράδειγμα 2** *Σε ένα φάστφουντ διατίθενται 3 είδη χάμπουργκερ, 4 είδη αναψυκτικών και 2 τύποι μερίδας από πατάτες. Πόσα διαφορετικά μενού μπορεί κάποιος να φτιάξει επιλέγοντας χάμπουργκερ, αναψυκτικό, πατάτες;*

Τυπικά η πολλαπλασιαστική αρχή διατυπώνεται με όρους διατεταγμένων ζευγών, τριάδων, τετράδων κ.τ.λ. που μπορούμε να φτιάξουμε παίρνοντας για κάθε θέση στοιχεία από ένα συγκεκριμένο σύνολο.

**Παράδειγμα 3** *Το σύνολο $A$ έχει $\mu$ και το σύνολο $B$ έχει $\nu$ στοιχεία. Πόσα διατεταγμένα ζεύγη $(\alpha, \beta)$ μπορούμε να φτιάξουμε με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$*

Γενικά ισχύει το ακόλουθο: Α

**Θεώρημα 1** *Αν τα σύνολα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ έχουν $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_\nu$ στοιχεία αντιστοίχως τότε το πλήθος των διατεταγμένων ν-άδων $(x_1, x_2, ..., x_{\nu-1}, x_\nu)$ με $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_{\nu-1} \in A_{\nu-1}, x_\nu \in A_\nu$ είναι $\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot ... \cdot \pi_\nu$.*

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} (x_1 & x_2 & ... & x_{\nu-1} & x_\nu) \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ A_1 & A_2 & & A_{\nu-1} & A_\nu \end{array}}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή.

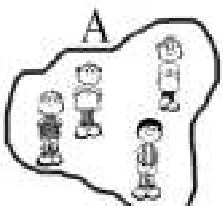
***Άσκηση 1*** Πόσα γινόμενα $\alpha\beta$ μπορούμε να σχηματίσουμε με $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ και $\beta \in \{-2, -3, -4\}$;

***Άσκηση 2*** Πόσες λύσεις $(x, y)$ με $x, y$ μη αρνητικά έχει η εξίσωση $x + y = 12$;

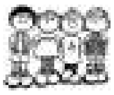
## 2 Μεταθέσεις.

Όταν αναφερόμαστε σε σύνολα μας ενδιαφέρουν τα στοιχεία τους και όχι κάποια σειρά που ενδεχομένως έχουν. Ωστόσο υπάρχουν και περιπτώσεις που η σειρά των στοιχείων έχει σημασία:

***Άσκηση 3*** Ας θεωρήσουμε το σύνολο $A$ που απαρτίζεται από τέσσερα παιδιά:



Ας υποθέσουμε τώρα ότι τοποθετούμε τα παιδιά του συνόλου $A$ σε μία σειρά. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να γίνει αυτό λ.χ. ένας είναι ο:



1. Να βρείτε **όλους** τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούν τα παιδιά του συνόλου $A$ να μπουν σε μία σειρά.

2. Αν για να απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα δοκιμάσατε όλους τους τρόπους ένα-ένα σκεφθείτε μήπως θα μπορούσατε να βρείτε την απάντηση πιο γρήγορα. Κατά πόσους τρόπους θα μπορούσαν να τοποθετηθούν σε μία σειρά τα στοιχεία του $A$ αν είχαμε 5 αντί για 4 παιδιά;

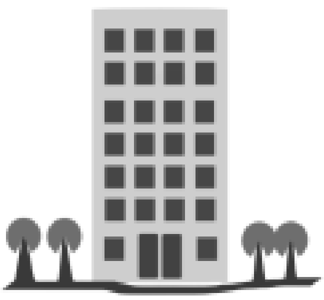
Έστω ένα σύνολο με $\nu$ στοιχεία. Κάθε τοποθέτηση των στοιχείων του συνόλου σε μία σειρά λέγεται *μετάθεση* των στοιχείων του. Το πλήθος των όλων των δυνατών μεταθέσεων ενός συνόλου με $\nu$ στοιχεία συμβολίζεται με $M_\nu$.

**Θεώρημα 2** *Το πλήθος των μεταθέσεων $\nu$ στοιχείων είναι $\nu!$. Δηλαδή*

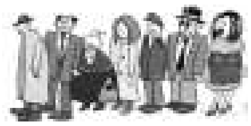
$$\boxed{M_\nu = \nu!} \tag{1}$$

## 3 Διατάξεις.

**Άσκηση 4** Σε μια πολυκατοικία κατοικούν 21 ένοικοι.



Οι ένοικοι της πολυκατοικίας συχνά εξυπηρετούνται από διάφορα καταστήματα που είναι τριγύρω. Μία ημέρα στην κοντινή τράπεζα βρίσκονται σε μία σειρά 7 ένοικοι της πολυκατοικίας.



Αφού η πολυκατοικία έχει 21 ενοίκους θα μπορούσαν να βρεθούν σε μία σειρά 7 ατόμων άλλα άτομα. Επίσης θα μπορούσαν να είναι μεν τα ίδια αλλά σε διαφορετική σειρά. Βρείτε πόσες διαφορετικές «ουρές» μπορούμε να έχουμε από τα 21 άτομα της πολυκατοικίας. Για το τελικό αποτέλεσμα μπορείτε να «αναθέσετε» τις πράξεις σε υπολογιστή, κινητό κτλ.

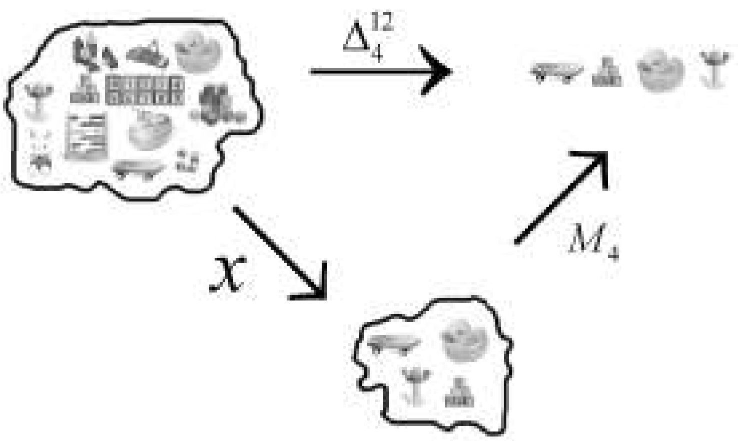
Γενικά από ένα σύνολο $\nu$ στοιχείων φτιάχνουμε μία σειρά με $\kappa$ από αυτά. Κάθε τέτοια σειρά λέγεται μία *διάταξη των $\nu$ ανά $\kappa$*. Το συνολικό πλήθος των διατάξεων των $\nu$ ανά $\kappa$ συμβολίζεται με $\Delta_\kappa^\nu$.

**Θεώρημα 3** *Ισχύει:*

$$\boxed{\Delta_\kappa^\nu = \nu \cdot (\nu-1) \cdot \ldots \cdot (\nu-(\kappa-1))} \tag{2}$$

## 4 Συνδυασμοί.

**Άσκηση 5** Ένα παιδάκι έχει 12 παιγνίδια.




Βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει 4 από αυτά. Το σχήμα περιέχει και μία υπόδειξη.

Από ένα σύνολο που έχει $\nu$ στοιχεία διαλέγουμε $\kappa$. Μία τέτοια επιλογή ονομάζεται *συνδυασμός $\nu$ ανά $\kappa$*. Το πλήθος **όλων** των συνδυασμών των $\nu$ ανά $\kappa$ συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$.

**Θεώρημα 4** *Ισχύει:*

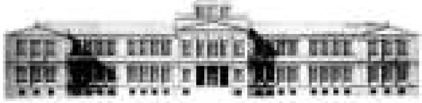
$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta_\kappa^\nu}{M_\kappa} = \frac{\nu \cdot (\nu-1) \cdot \ldots \cdot (\nu-(\kappa-1))}{\kappa!}} \tag{3}$$

**Άσκηση 6** Εξάσκηση στους συνδυασμούς. *Να συμπληρώσετε τον πίνακα:*

| | | $\nu$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $\kappa$ | 0 | $\binom{1}{0}=$ | $\binom{2}{0}=$ | $\binom{3}{0}=$ | $\binom{4}{0}=$ | $\binom{5}{0}=$ | $\binom{6}{0}=$ | $\binom{7}{0}=$ |
| | 1 | $\binom{1}{1}=$ | $\binom{2}{1}=$ | $\binom{3}{1}=$ | $\binom{4}{1}=$ | $\binom{5}{1}=$ | $\binom{6}{1}=$ | $\binom{7}{1}=$ |
| | 2 | | $\binom{2}{2}=$ | $\binom{3}{2}=$ | $\binom{4}{2}=$ | $\binom{5}{2}=$ | $\binom{6}{2}=$ | $\binom{7}{2}=$ |
| | 3 | | | $\binom{3}{3}=$ | $\binom{4}{3}=$ | $\binom{5}{3}=$ | $\binom{6}{3}=$ | $\binom{7}{3}=$ |
| | 4 | | | | $\binom{4}{4}=$ | $\binom{5}{4}=$ | $\binom{6}{4}=$ | $\binom{7}{4}=$ |
| | 5 | | | | | $\binom{5}{5}=$ | $\binom{6}{5}=$ | $\binom{7}{5}=$ |
| | 6 | | | | | | $\binom{6}{6}=$ | $\binom{7}{6}=$ |
| | 7 | | | | | | | $\binom{7}{7}=$ |

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Πόσα διαφορετικά δεκαπενταμελή συμβούλια του σχολείου μας μπορούν να προκύψουν. Υπολογίστε την δύναμη του σχολείου μας σε 290. Πόσα από αυτά μπορούν να έχουν 5 μαθητές από την Α΄ τάξη, 4 μαθητές από την Β΄ Τάξη και 6 μαθητές από την Γ΄ Τάξη;



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 — Φύλλο 17 — Στοιχειοθετείται με το LaTeX

*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

Στοιχεία Συνδυαστικής ΙΙ 

# 1 Ιδιότητες των Συνδυασμών

**Άσκηση 1** Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}.$$

**Άσκηση 2** Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}.$$

**Άσκηση 3** Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{\kappa+1} = \binom{\nu}{\kappa}\frac{\nu-1}{\kappa+1}.$$

**Άσκηση 4** Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa}\binom{\kappa}{\lambda} = \binom{\nu}{\lambda}\binom{\nu-\lambda}{\kappa-\lambda}.$$

# 2 Το τρίγωνο του Pascal

**Άσκηση 5** Προσέξτε τον παρακάτω πίνακα.

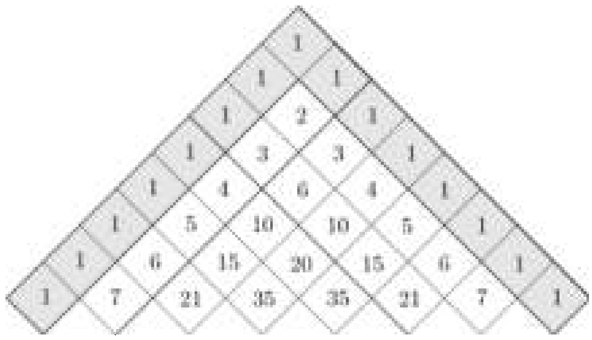
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| | | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 |
| | | | 1 | 5 | 15 | 35 |
| | | | | 1 | 6 | 21 |
| | | | | | 1 | 7 |
| | | | | | | 1 |

Προσπαθήστε να βρείτε με ποιο τρόπο συμπληρώνονται τα λευκά τετραγωνάκια. Με άλλα λόγια βρείτε ένα *ειρμό* (pattern) που αν τον ακολουθήσουμε μπορούμε να συμπληρώσουμε όλα τα τετραγωνάκια.

Blaise Pascal

1623 - 1662

**Άσκηση 6** Αν αλλάξουμε μορφή στον πίνακα της άσκησης **;;** θα έχουμε το παρακάτω σχήμα (γνωστό ως τρίγωνο του Pascal):



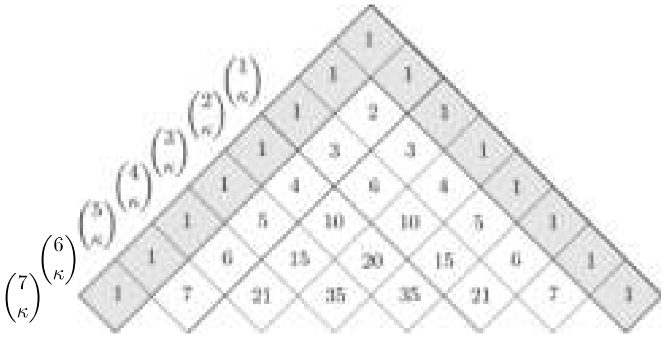

Στην άσκηση **;;** φάνηκε ένας τρόπος με τον οποίο θα συμπληρώσουμε τον πίνακα. Αν τον προσαρμόσουμε στο παραπάνω τρίγωνο γίνεται:

«Κανόνας: *ο αριθμός σε κάθε τετραγωνάκι είναι το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα δυο τετραγωνάκια που βρίσκονται πάνω από αυτό*»

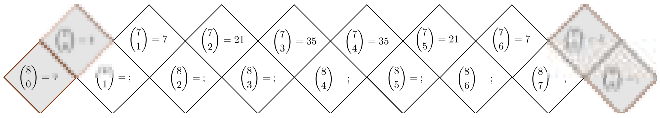
Αν δούμε τον πίνακα προσεκτικά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στα τετραγωνάκια του περιέχονται συνδυασμοί και για τον σχηματισμό του χρησιμοποιείται ο τύπος

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}$$

που είδαμε πιο πριν. Τα στοιχεία του πίνακα *είναι* συνδυασμοί:




Μπορούμε να συνεχίσουμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα ακολουθώντας τον παραπάνω κανόνα. Θα είναι όμως και οι νέοι αριθμοί που θα προκύψουν συνδυασμοί; Συμπληρώστε την επόμενη γραμμή με δύο τρόπους



1. Ακολουθώντας τον κανόνα.
2. Υπολογίζοντας απ΄ ευθείας τους συνδυασμούς $\binom{8}{\kappa}$.

## 3 Το Διωνυμικό Θεώρημα του Νεύτωνα.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$(\alpha+\beta)^4 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$$

Για να κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο της πρώτης παρένθεσης με κάθε στοιχείο της δεύτερης και με κάθε στοιχείο της τρίτης και της τέταρτης. Θα πάρουμε κάποια γινόμενα στα οποία μετά θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων. Έτσι θα πάρουμε τα γινόμενα (η σειρά δείχνει από ποια παρένθεση παίρνουμε τι):
$\alpha\alpha\alpha\alpha \quad = \alpha^4$ 1 όρος
$\alpha\alpha\alpha\beta = \alpha\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha\alpha = \beta\alpha\alpha\alpha = \alpha^3\beta$ 4 όροι
$\alpha\alpha\beta\beta = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta\beta\alpha = \beta\beta\alpha\alpha = \beta\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\alpha\beta = \alpha^2\beta^2$ 6 όροι
$\beta\beta\beta\alpha = \beta\beta\alpha\beta = \beta\alpha\beta\beta = \alpha\beta\beta\beta = \alpha\beta^3$ 4 όροι
$\beta\beta\beta\beta = \beta^4$ 1 όρος Όταν κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων θα έχουμε

$$(\alpha+\beta)^4 = \mathbf{1}\cdot\alpha^4 + \mathbf{4}\cdot\alpha^3\beta + \mathbf{6}\cdot\alpha^2\beta^2 + \mathbf{4}\cdot\alpha\beta^3 + \mathbf{1}\cdot\beta^4$$

Στην περίπτωση τυχόντα εκθέτη είναι:

$$(\alpha+\beta)^\nu = \underbrace{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}_{\nu}$$

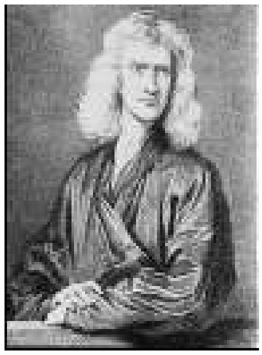
Από κάθε παρένθεση παίρνουμε ένα $\alpha$ ή ένα $\beta$ και θα προκύψουν γινόμενα της μορφής:

$$\alpha^{\text{πόσα } \alpha \text{ πήραμε}}\beta^{\text{πόσα } \beta \text{ πήραμε}}$$

Ας πούμε ότι πήραμε $\kappa$ από τα $\alpha$ από $\kappa$ παρενθέσεις. Από τις υπόλοιπες παρενθέσεις που είναι $\nu-\kappa$ θα πάρουμε $\beta$. Άρα θα πάρουμε $\nu-\kappa$ από τα $\beta$. Ο αντίστοιχος όρος θα είναι:

$$\alpha^\kappa\beta^{\nu-\kappa}$$

Θα υπάρχουν δε τόσοι προσθετέοι της παραπάνω μορφής όσοι τρόποι υπάρχουν για να διαλέξουμε τις $\kappa$ παρενθέσεις από τις οποίες θα πάρουμε τα $\alpha$.



Sir Isaac Newton
1643-1727

**Άσκηση 7** Να αποδείξετε ότι(γνωστό και ως *θεώρημα του Νεύτωνα ή δυωνυμικό θεώρημα*):

$$(\alpha+\beta)^\nu = \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{\nu-2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \binom{\nu}{2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \binom{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{0}\beta^\nu$$

και στη συνέχεια ότι

$$\boxed{(\alpha+\beta)^\nu = \binom{\nu}{0}\alpha^\nu + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu-2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\beta^\nu} \quad (1)$$

**Άσκηση 8** Να βρείτε ποιος είναι ο συντελεστής του $\alpha^8\beta^2$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^{10}$

**Άσκηση 9** Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu} = 2^\nu$$

**Άσκηση 10** *Έστω ότι*

$$x = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \qquad y = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad z = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}$$

*Να αποδείξετε ότι*

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

**Άσκηση 11** *Με την βοήθεια της (;;) να επιβεβαιώσετε τον παρακάτω τρόπο για να βρίσκουμε τους συντελεστές του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^\nu$:*

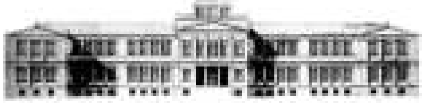
- *Ο πρώτος συντελεστής είναι* 1
- *Ο $m$-ος συντελεστής προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον προηγούμενο συντελεστή επί $\nu-m+2$ και διαιρέσουμε δια $m-1$.*

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Έστω $p$ πρώτος αριθμός.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $k = 1, 2, ..., p-1$ ο $p$ διαιρεί τον $\binom{p}{k}$.
2. Να αποδείξετε ότι στο $\mathbb{Z}_p$ ισχύει η ταυτότητα

$$(\alpha+\beta)^p = \alpha^p + \beta^p.$$



Προτυπο Πειραματικο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 18 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

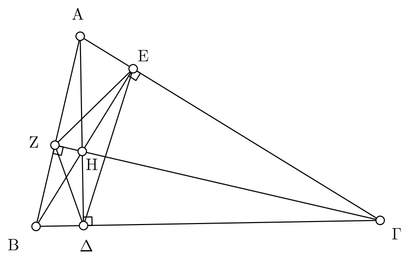
*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

# Στοιχεία από την Γεωμετρία του Τριγώνου Ι

## 1 Ορθοκεντρική τετράδα, Ορθικό τρίγωνο

Τέσσερα σημεία αποτελούν *ορθοκεντρική τετράδα* αν κάθε τρία από αυτά είναι κορυφές τριγώνου και το τέταρτο είναι το ορθόκεντρο του. *Ορθικό τρίγωνο* ενός τριγώνου ονομάζεται το τρίγωνο που έχει κορυφές τα ίχνη των υψών του.

**Άσκηση 1** Έστω τρίγωνο $Α, Β, Γ$ και $Η$ το ορθόκεντρο του. να αποδείξετε ότι τα $Α, Β, Γ$ και $Η$ αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα.




**Άσκηση 2** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ και το ορθόκεντρο του Η. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα

1. ΑΖΗΕ, ΒΔΗΖ ΓΕΗΔ και
2. ΒΓΕΖ, ΓΑΖΔ, ΑΒΔΕ

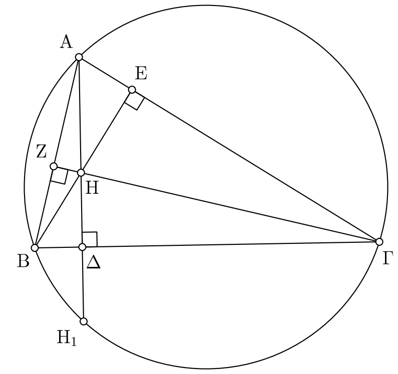
είναι εγγράψιμα.

**Άσκηση 3** Να αποδείξετε ότι

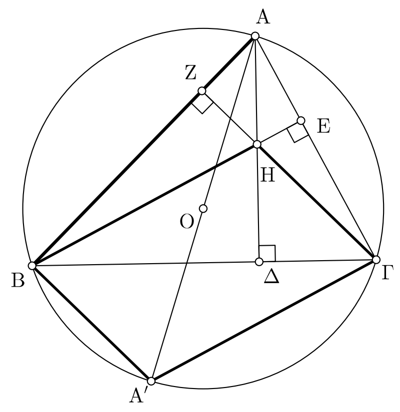
1. Τα ύψη ενός τριγώνου είναι διχοτόμοι του ορθικού του.
2. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι εξωτερικές διχοτόμοι του ορθικού του.

## 2 Η ευθεία του Euler

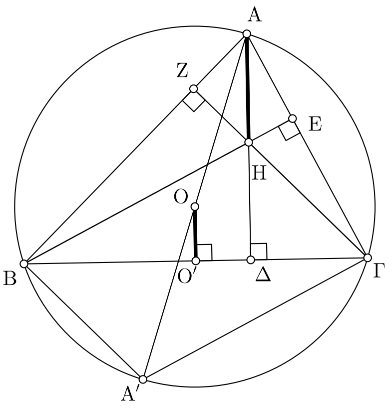
**Άσκηση 4** Να αποδείξετε ότι τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ενός τριγώνου ως προς τις πλευρές του ανήκουν στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.



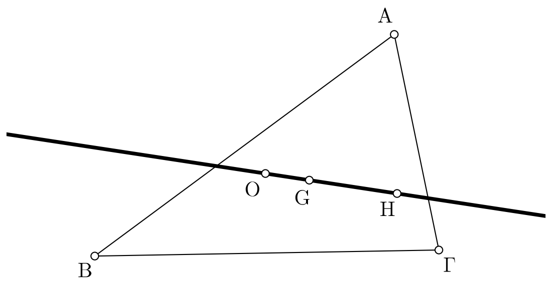

**Άσκηση 5** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές δύο κορυφές ενός τριγώνου, το ορθόκεντρο του και το συμμετρικό της τρίτης κορυφής ως προς το περίκεντρο είναι παραλληλόγραμμο.



**Άσκηση 6** Να αποδείξετε ότι η απόσταση του ορθοκέντρου από μία κορυφή είναι διπλάσια από την απόσταση του περικέντρου από την πλευρά που βρίσκεται απέναντι σε αυτή την κορυφή.




**Άσκηση 7** Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο το κέντρο βάρους του G, το ορθόκεντρο του H και το περίκεντρο του O ανήκουν στην ίδια ευθεία (ευθεία Euler του τριγώνου) και ισχύει HG = 2GO.

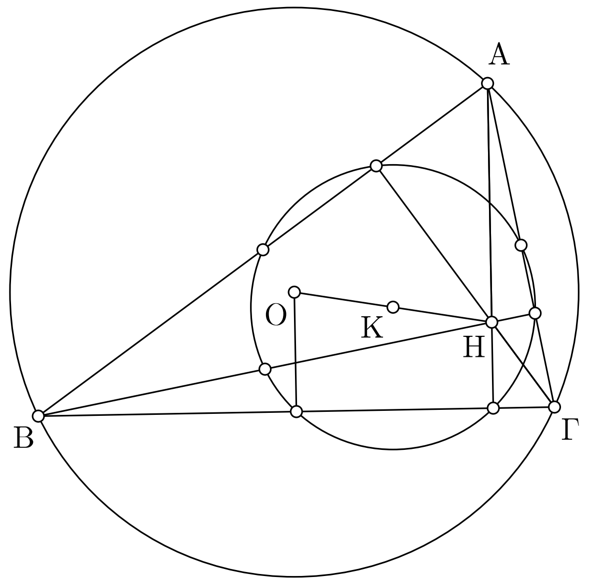



## 3 Ο κύκλος του Euler

**Άσκηση 8** Να αποδείξετε σε κάθε τρίγωνο:

- Τα μέσα των πλευρών του,
- Τα ίχνη των υψών του και
- Τα μέσα των τμημάτων που συνδέουν το ορθόκεντρο με τις κορυφές του τριγώνου

είναι σημεία του ίδιου κύκλου (*κύκλος του Euler* ή *κύκλος εννέα σημείων* του οποίου το κέντρο είναι το μέσο του τμήματος που συνδέει το περίκεντρο με το ορθόκεντρο και η ακτίνα του είναι το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.




**Άσκηση 9** Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο το κέντρο βάρους του G, το ορθόκεντρο του H και το περίκεντρο του O ανήκουν στην ίδια ευθεία (ευθεία Euler του τριγώνου και ισχύει HG = 2GO.

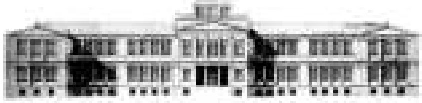
**Άσκηση 10** Να αποδείξετε ότι τα 4 τρίγωνα που ορίζονται από τα σημεία μίας ορθοκεντρικής τετράδας έχουν τον ίδιο κύκλο του Euler.

**Άσκηση 11** Τι έχετε να πείτε για την ευθεία και τον κύκλο του Euler

1. ενός ορθογωνίου τριγώνου,
2. ενός ισοπλεύρου τριγώνου;

Το ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Να αποδείξετε ότι ο κύκλος του Euler ενός τριγώνου είναι ομοιόθετος του περιγεγραμμένου κύκλου του ως προς την ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο και λόγο $\frac{1}{2}$. Τίνων σημείων είναι ομοιόθετα τα 9 σημεία του κύκλου·




Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

21 Σεπτεμβρίου 2015 | Φύλλο 19 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX



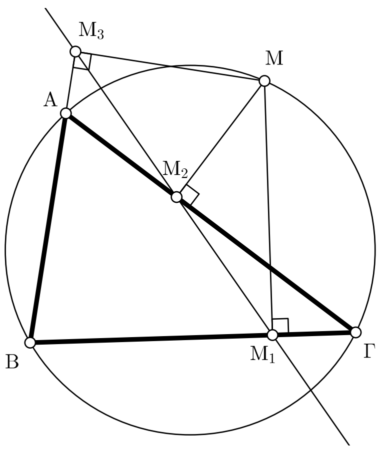
*Καθηγητές: Ν.Σ. Μαυρογιάννης, www.nsmavrogiannis.gr , Σωτήριος Χασάπης, http://users.sch.gr/shasapis*

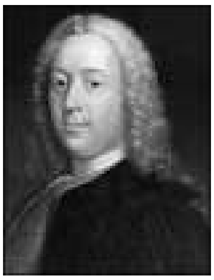

# Στοιχεία από την Γεωμετρία του Τριγώνου II

## 1 Η ευθεία Simson - Wallace.

William Wallace, 1768-1843

**Άσκηση 1** Έστω τρίγωνο $A, B, \Gamma$ και $\mathcal{C}$ ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Έστω M ένα οποιοδήποτε σημείο του $\mathcal{C}$ και $M_1$, $M_2$ και $M_3$ οι προβολές του M στις ευθείες ΒΓ, ΓΑ και $A, B$. Να αποδειχθεί ότι τα $M_1$, $M_2$, $M_3$ ανήκουν στην ίδια ευθεία (ευθεία Simson - Wallace του M ως προς $A, B, \Gamma$.



Robert Simson, 1687-1768

**Άσκηση 2** Έστω τρίγωνο $A, B, \Gamma$ και M ένα σημείο του επιπέδου. Να αποδειχθεί ότι αν οι προβολές $M_1$, $M_2$ και $M_3$ του M στις ευθείες ΒΓ, ΓΑ και $A, B$ είναι σημεία συνευθειακά τότε το M ανήκει στον περιγραμμένο κύκλο του τριγώνου

**Άσκηση 3** Στην άσκηση ;; ποια είναι η ευθεία Simson - Wallace όταν το M συμπέσει με μία κορυφή του τριγώνου;

**Άσκηση 4** Στην άσκηση ;; μπορείτε αν ξέρετε το τρίγωνο και το σημείο $M_1$ να βρείτε την ευθεία Simson - Wallace;

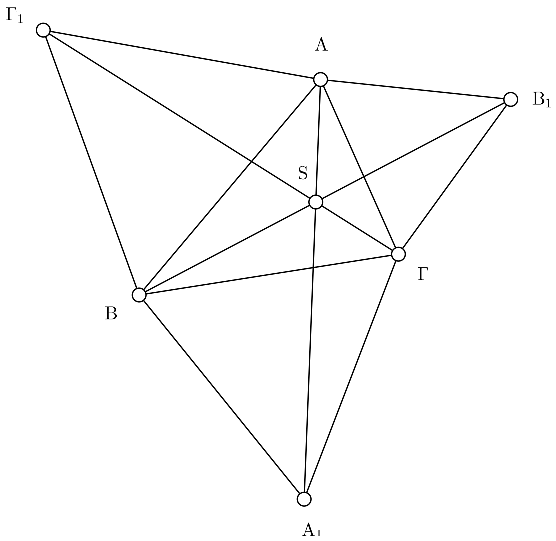
## 2 Το σημείο του Steiner.

**Άσκηση 5** Θεωρούμε τρίγωνο $A, B, \Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A_1B, \Gamma$, $AB_1\Gamma$, $AB\Gamma_1$. Να αποδειχθεί ότι:

1. Τα τμήματα $AA_1$, $BB_1$, $\Gamma\Gamma_1$ είναι ίσα.
2. Οι ευθείες $AA_1$, $BB_1$, $\Gamma\Gamma_1$ διέρχονται από το ίδιο σημείο S που ονομάζεται σημείο Steiner του τριγώνου[1].

[1] χρησιμοποιείται και η ονομασία σημείο του Fermat ή και σημείο του Torricelli

3. Υποθέτουμε ότι καμία γωνία του τριγώνου $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ δεν υπερβαίνει τις $120°$, Να αποδειχθεί ότι $\widehat{\mathrm{B}S\Gamma} = \widehat{\Gamma S\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{A}S\mathrm{B}}$.




Jakob Steiner 1796-1863

## 3 Το σύστημα Vecten

***Άσκηση 6*** Θεωρούμε τρίγωνο $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $\mathrm{B}\Gamma\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\Gamma\mathrm{A}\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$, $\mathrm{A}\mathrm{B}\Gamma_1\Gamma_2$. Σημειώνουμε με $\mathrm{O}_1$, $\mathrm{O}_2$, $\mathrm{O}_3$ τά κέντρα των τριών τετραγώνων αντιστοίχως.

1. Τα τμήματα $\mathrm{B}\mathrm{B}_1$, $\Gamma\Gamma_2$ είναι ίσα.

2. Τα τετράπλευρα $\mathrm{B}\mathrm{T}\mathrm{A}\Gamma_2$, $\mathrm{A}\mathrm{T}\Gamma\mathrm{B}_1$ είναι εγγράψιμα.

3. Οι ευθείες $\mathrm{B}\mathrm{B}_1$, $\Gamma\Gamma_2$ είναι κάθετες.

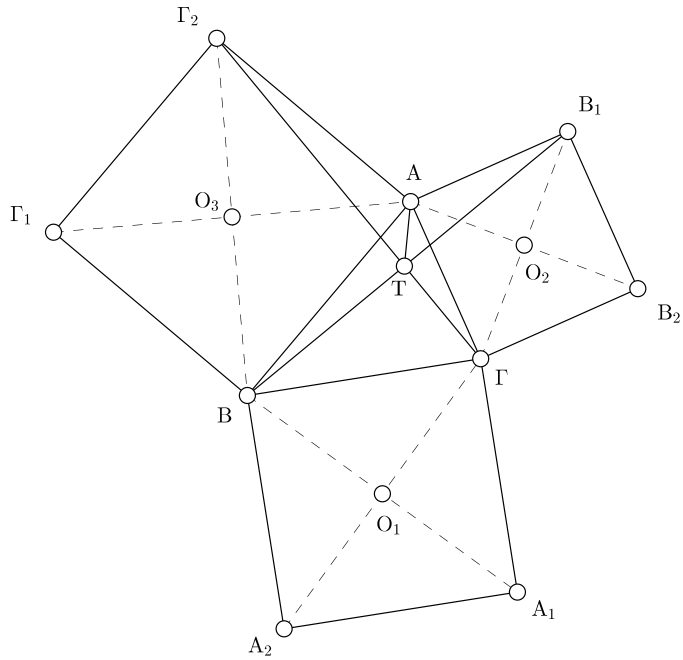
4. Τα τετράπλευρα $\mathrm{B}\mathrm{T}\Gamma_2\Gamma_1$, $\Gamma\mathrm{T}\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ είναι εγγράψιμα.

5. Τα σημεία $\Gamma$, $\mathrm{T}$, $\mathrm{B}_2$ είναι συνευθειακά.

6. Τα σημεία $\mathrm{A}$, $\mathrm{T}$, $\mathrm{O}_1$ είναι συνευθειακά.

7. Οι ευθείες $\mathrm{A}\mathrm{O}_1$, $\mathrm{B}_2\Gamma_1$ είναι κάθετες.

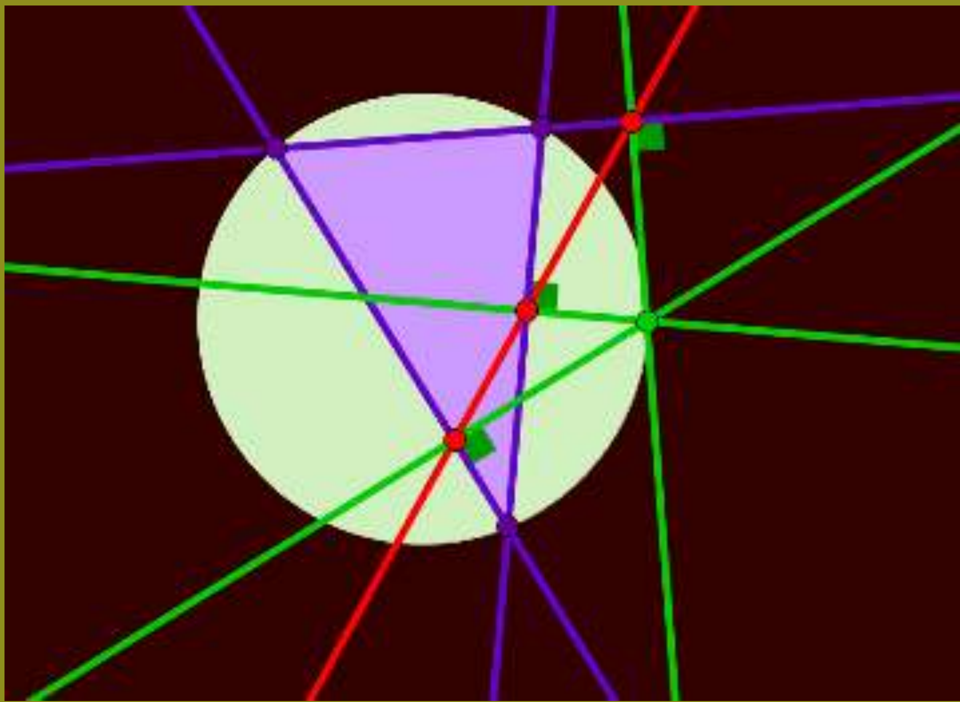
8. Οι ευθείες $\mathrm{A}\mathrm{O}_1$, $\mathrm{B}\mathrm{O}_2$, $\Gamma\mathrm{O}_3$ συντρέχουν.




Το προβλημα της εβδομαδας

5

https://www.youtube.com/watch?v=2dgmgub8mHw



Οι όμιλοι του προτύπου
Πριραματικού Λυκείου
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
απευθύνονται στους μαθητές του
Λυκείου μας αλλά και στους μαθητές
άλλων Λυκείων της ΔΙΔΕ Δ' Αθήνας.
Πληροφορίες για τους ομίλους κάθε χρονιάς
υπάρχουν στο
http://epesevageliki.blogspot.gr/
και στην διεύθυνση http://lyk-evsch-n-smyrn.att.sch.gr

Σχολικό Έτος 2014-2015