

Μαθηματικά παιχνίδια με αφόρμηση την τέχνη

Σωτήριος Δ. Χασάπης

Πρότυπο ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

shasapis@sch.gr

Περίληψη

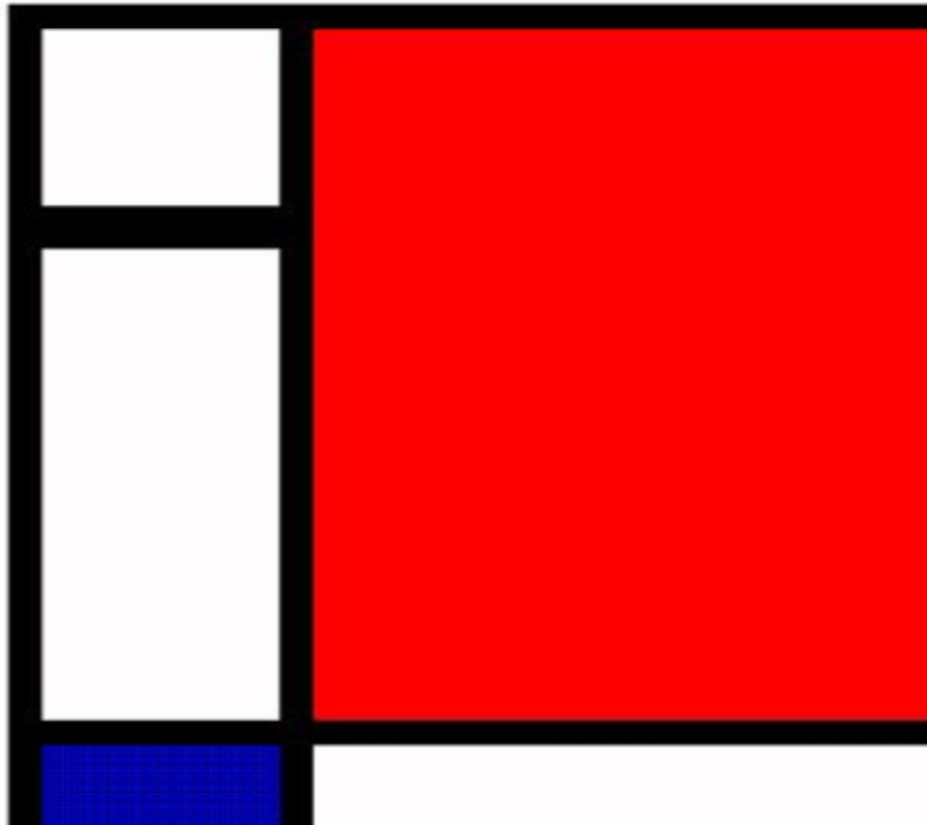
Η σύνδεση Μαθηματικών και Τέχνης στην Ελληνική εκπαίδευση υπάρχει διάσπαρτη μέσα σε διάφορες δραστηριότητες των μαθητών, ειδικά στις πρώτες τάξεις, όταν οι μαθητές καλούνται να εξοικειωθούν με έννοιες όπως χώρος, γραμμή, χρώμα κ.ά., οι οποίες εντάσσονται στο πρόγραμμα σπουδών και των Μαθηματικών, καθώς και άλλες προ-μαθηματικές δραστηριότητες. Στα νέα προγράμματα σπουδών (Ι.Ε.Π. 2021), η στόχευση, ως προς τα Μαθηματικά σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, περιλαμβάνει την ανάγκη εισαγωγής δραστηριοτήτων – προβλημάτων με τα οποία οι μαθητές με ομαδικό πνεύμα θα οδηγηθούν σε απαντήσεις – λύσεις, μέσω διεργασιών συζήτησης, καθημερινών αντικειμένων που θα οδηγήσουν σε αυξημένο ενδιαφέρον και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Η τέχνη του Piet Mondrian (Πίιτ Μόντριαν) εισήγε ένα νέο κύμα στη ζωγραφική, το Νέο-πλαστικισμό, όπου οι αφαιρετικές αναπαραστάσεις λαμβάνουν χώρα γεωμετρικά με έντονα χρώματα και με τη χρήση πολλών ορθογωνίων σχημάτων σε διάφορες διαστάσεις. Τα χρώματα δίνουν την ευκαιρία να αντιληφθούν οι μαθητές σε μικρές ηλικίες, την έννοια του εμβαδού στο επίπεδο σε απλά σχήματα, όπως τα ορθογώνια και να συγκρίνουν με τις αντίστοιχες περιμέτρους τους, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων. Σε μεγαλύτερες τάξεις στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, επίσης μπορούν να δημιουργηθούν δραστηριότητες – προβλήματα, είτε βασισμένα στην ύλη συγκεκριμένων τάξεων, που αφορά στην παραπάνω σύνδεση, είτε με διερευνητικές δραστηριότητες, μέσα από κατάλληλα διαμορφωμένα παιχνίδια. Ειδικά, για τη δευτεροβάθμια αναπτύσσεται ο γνωστός ως γρίφος του Mondrian (Mondrian riddle) και οι μαθητές μέσα από το παιχνίδι καλούνται να διατυπώσουν εικασίες, να διαγωνισθούν και να συνεργαστούν σε ευχάριστο κλίμα, κάνοντας τις υποθέσεις τους και συζητώντας τις στην τάξη. Δηλαδή, με αφορμή μία συζήτηση για τα έργα ενός σύγχρονου καλλιτέχνη, προτείνονται μερικές δραστηριότητες σε μορφή παιχνιδιού, ως αφόρμηση για τη διδασκαλία, τη σύνδεση και τη διερεύνηση συγκεκριμένων εννοιών, τόσο στην πρωτοβάθμια, όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Λέξεις-κλειδιά: Παιχνίδια, Μαθηματικά, Τέχνη.

1. Εισαγωγή

Οι μαθητές θα προσεγγίσουν μέσω μίας σύντομης ιστορικής αναδρομής στα ρεύματα της ζωγραφικής και τις βασικές τεχνικές, όπως αυτές εξελίχθηκαν, τη σύγχρονη τέχνη, την ιδέα της καλλιτεχνικής αφαίρεσης, προσπαθώντας παράλληλα στις μεγαλύτερες ηλικίες να γίνουν συνδέσεις και με την αφαίρεση στα Μαθηματικά. Η τέχνη προέρχεται ετυμολογικά, στην αρχική της θεώρηση από τα αρχαία χρόνια, από το ρήμα «τίκτω», που σημαίνει γεννώ, με την έννοια του δημιουργώ (Χιωτίνης, 2016). Η σύγχρονη ερμηνεία της λέξης προέρχεται ως σημασιολογικό δάνειο από τη Γαλλική λέξη Art, εκ του λατινικού Ars που σημαίνει επιδεξιότητα. Δηλαδή, ένας καλλιτέχνης, όπως και ένας επιστήμονας ή Μαθηματικός είναι

ένας δημιουργός, ο οποίος φροντίζει, με επιδεξιότητα, να κατασκευάσει ένα δημιούργημα άρτιο αισθητικά. Εξάλλου, κατά τον Poincare «ένας επιστήμονας άξιος του ονόματός του, έχει τα ίδια συναισθήματα στη δουλειά του με έναν καλλιτέχνη». Οπότε, εφόσον η δημιουργία είναι αυτή που γεννά θετικά συναισθήματα ανεξαρτήτως τομέα, αυτά, αν συνδεθούν κατάλληλα με έναν τομέα μπορούν να δημιουργήσουν προϋποθέσεις για την εστίαση και τη συγκέντρωση σε έναν άλλο τομέα. Η εισαγωγή μίας δραστηριότητας μέσω της τέχνης, μπορεί να προδιαθέσει τους μαθητές στην αρτιότητα μίας ανακάλυψης, στην έναρξη ενός διαλόγου με τους συμμαθητές στην τάξη και στην επέκταση της διερεύνησης, μέσω μία κοινωνικής διαδικασίας, η οποία έχει ήδη εγκαθιδρυθεί δια της τέχνης. Οι πίνακες του Mondrian αποτελούν εξαιρετική ευκαιρία για την προσέγγιση των μαθητών, καθώς τα έντονα – πλούσια βασικά χρώματα που χρησιμοποιεί μπορούν να τονίσουν την έννοια του εμβαδού και του «χώρου» που καταλαμβάνει στο επίπεδο ένα σχήμα, ώστε να έρθουν οι μαθητές πιο κοντά σε αυτό, να αναγνωρίσουν τα χαρακτηριστικά του και να δημιουργήσουν ευκολότερα συνδέσεις μεταξύ αυτών (βλ.Εικόνα 1 Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944) Σύνθεση II σε Κόκκινο, Μπλε και Κίτρινο, 1930 (Γαβρίλης, 2018).

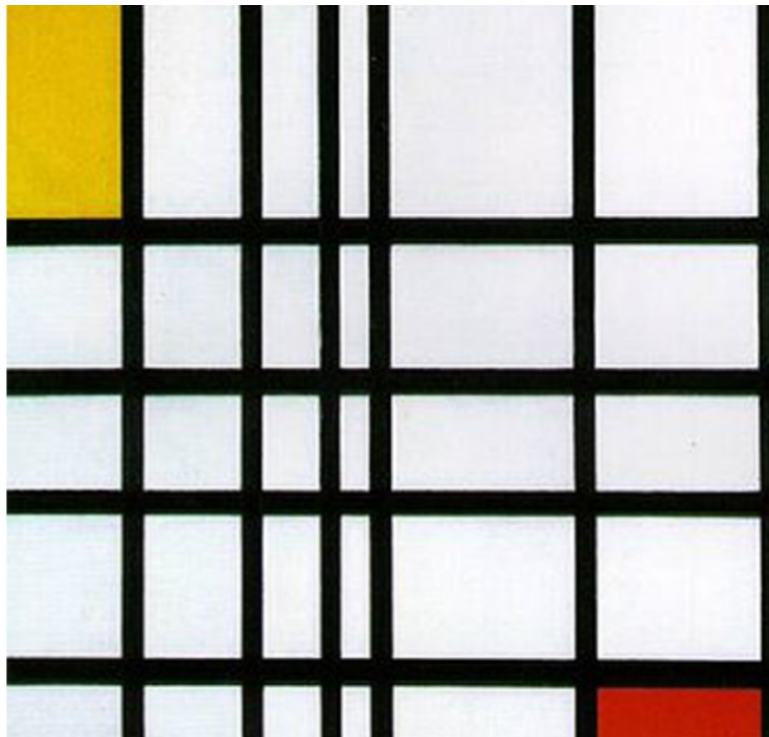


Εικόνα 1 Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944) Σύνθεση II σε Κόκκινο, Μπλε και Κίτρινο, 1930 (Γαβρίλης, 2018).

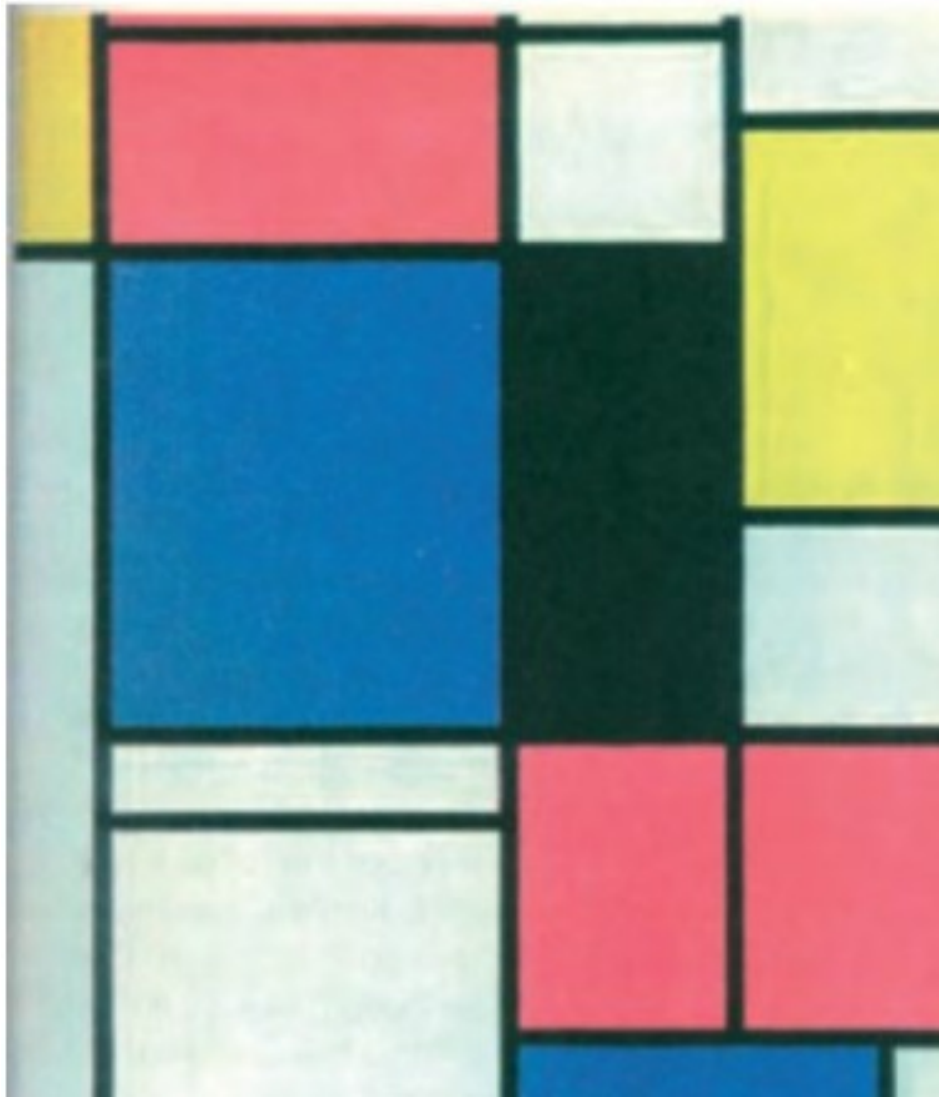
Ο Πικάσο έλεγε ότι όταν φτιάχνεις μία ζωγραφιά, δεν την καταστρώνεις από τα πριν, ούτε την καθορίζεις από την αρχή. Καθώς ζωγραφίζεις, η εικόνα αλλάζει, όπως και οι σκέψεις μας και όταν τελειώσει, συνεχίζει να αλλάζει σύμφωνα με την ψυχολογική διάθεση του θεατή. Μία ζωγραφιά είναι ζωντανή, όπως ένα ζωντανό πλάσμα και υπόκειται μέρα με τη μέρα στις αλλαγές που μας επιβάλλονται από τη ζωή. Αυτό δε θα πρέπει να μας ξαφνιάζει, διότι μία ζωγραφιά ζει μόνο μέσα από αυτόν που την κοιτάζει (Χασάπης, 2011). Οι μαθητές, καθώς οικοδομούν τη γνώση και προσπαθούν να κατανοήσουν τον κόσμο, ακόμα και μέσα από τα Μαθηματικά, αυτό το επιτυγχάνουν καλύτερα συν-διαχειριζόμενοι το πρόβλημα με τους συμμαθητές τους, καθώς το διαπραγματεύονται μέσα στην τάξη. Η κατανόηση που

έχουν για αυτό το πρόβλημα μπορεί να αλλάζει και μάλλον να ολοκληρώνεται, καθώς ανταλλάσσουν απόψεις, διατυπώνουν και επαληθεύουν ή απορρίπτουν εικασίες. Μέσα από ένα παιχνίδι, με αφόρμηση στην τέχνη, δημιουργείται ένα παιγνιώδες περιβάλλον, στο οποίο δημιουργούν στρατηγικές νίκης με συναγωνισμό, αλλά και συνεργασίες με τους συμμαθητές τους, το οποίο θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν σε βάθος την προς διαπραγμάτευση έννοια και να την ενσωματώσουν κατάλληλα και ευχάριστα. Επιπλέον, υπάρχουν στην ιστορία παραδείγματα εξαιρετικών καλλιτεχνών που δημιούργησαν έργα υψηλής γεωμετρικής αφαίρεσης, είτε άλλα με ιδιαιτέρως δύσκολα κατανοητές γεωμετρικές έννοιες σε θεωρητικό επίπεδο, χωρίς να τα κατάφερναν ποτέ στο παρελθόν να ανταποκριθούν ικανοποιητικά στα σχολικά Μαθηματικά, όπως έχει ομολογήσει ο ίδιος ο M.C.Escher (Μιχαηλίδης, 2019). Επιπλέον, τα Μαθηματικά είναι αφαίρεση. Κάθε αριθμός αποτελεί την, κατά τα Μαθηματικά, αφαιρετική αναπαράσταση του ενός αντικειμένου ή της μίας ιδέας, η οποία επεκτείνεται στις διέπουσες σχέσεις των αντικειμένων – μοντέλων, τα οποία όλα αναπαρίστανται μέσω της γλώσσας των Μαθηματικών. Ακόμα, μπορεί να γίνει αναφορά ιστορικά σε περιόδους με υψηλή ανάπτυξη Μαθηματικών, στις οποίες υπάρχει και υψηλή ανάπτυξη της τέχνης (πχ 5^{ος} αι. π.Χ.), αλλά και σε σύγχρονες έρευνες (Σταθοπούλου-Καμπύλη, 2017), σύμφωνα με τις οποίες, πέρα από τη θετική στάση που αναπτύσσεται από τους μαθητές σχετικά με τη χρήση μορφών τέχνης στη διδασκαλία μαθηματικών εννοιών, η διείσδυση και ενασχόλησή τους με κάποια μορφή τέχνης οξύνει το ενδιαφέρον των μαθητών και καθηλώνει την προσοχή τους.

Γενικότερα, λοιπόν, διαφαίνεται ότι μέσα από την αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Τέχνης αναδεικνύεται η συμπληρωματικότητα της ανθρώπινης σκέψης, με στόχο την κατανόηση και αναπαράσταση του κόσμου που ζει ο άνθρωπος. Συνεπώς, ως τέτοια έρχεται, να υποβοηθήσει την κατανόηση και ενσωμάτωση μαθηματικών εννοιών.



Εικόνα 2 Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944). Σύνθεση με κίτρινο, μπλε και κόκκινο , 1937-1942, λάδι σε μουσαμά, 72,5 x 69 cm, Tate Gallery. Λονδίνο (Γαβρίλης, 2018).



Εικόνα 3 Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944),
Πίνακας II, λάδι σε καμβά, 1921 - 1925

Συλλογή Max Bill, Ζυρίχη, στο (Αργυρόπουλος, Βλάμος, Κατσούλης, Μαρκάτης & Σιδέρης, 2021).

2. Η διδακτική πρόταση

Η ποικιλία μεθόδων, ιδεών, υλικών και μέσων αποτελεί σημαντικό μέρος της οργάνωσης της διδασκαλίας σε πολλά προγράμματα σπουδών σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης (πχ NCTM 2000). Ειδικότερα, για τα παιδιά της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης το παιχνίδι, ως μέσο εξερεύνησης και επαφής με διάφορες έννοιες των Μαθηματικών έχει ιδιαίτερη σημασία (Σκουμπουρδή, 2015). Και για τις δύο διδακτικές προτάσεις που ακολουθούν, τόσο για την πρωτοβάθμια, όσο και για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές θα μάθουν μέσω φύλλου πληροφοριών ή θα ερευνήσουν με χρήση του διαδικτύου, συζητώντας στην τάξη, σχετικά με την μετεξέλιξη της τέχνης, ειδικότερα της ζωγραφικής, στον 20^ο αι. Κυρίως όσον αφορά στο ρεύμα του Νέο-πλαστικισμού που καθιέρωσε ο Piet Mondrian, ώστε να ταξινομήσουν την έννοια της αφαίρεσης στην τέχνη και ενδεχομένως να προβούν σε συσχετισμούς της γεωμετρικής αφαίρεσης στην τέχνη με την αφαίρεση στα Μαθηματικά. Η διερεύνηση θα γίνει σε όσο βάθος επιτρέπει η ωριμότητα των μαθητών. Για αυτόν το λόγο θα παρουσιαστούν διάφορα έργα του Mondrian, της περιόδου 1920-1936, όπως αυτά που

φαίνονται στις Εικόνες 1,2,3 και 7. Επιπρόσθετος στόχος είναι η Μαθηματική ανάγνωση των έργων τέχνης, αλλά και η δημιουργία καλλιτεχνικών έργων μέσα από τα προτεινόμενα παιχνίδια ως εφαρμογή συγκεκριμένων μαθηματικών κανόνων (Χασάπης, 2011).

2.1 Στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση

2.1.1 Στόχοι – επιδιώξεις

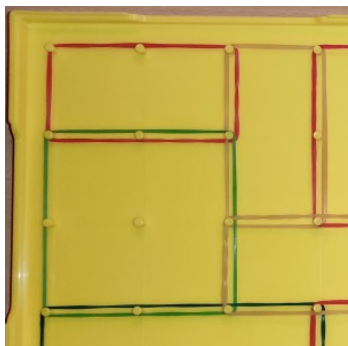
Όπως αναφέρθηκε, οι στόχοι μπορούν να προσαρμοστούν κατάλληλα, ανάλογα με την τάξη που θα γίνει η εφαρμογή. Παρακάτω εμφανίζονται μερικοί στόχοι ως παράδειγματα, που μπορούν φυσικά να εμπλουτιστούν ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης. Μερικοί τέτοιοι είναι:

- α) Παρατήρηση διαφορετικών σχημάτων και ονομασία αυτών.
- β) Χρήση γεωμετρικών οργάνων για μέτρηση.
- γ) Χρήση γεωμετρικών οργάνων για χάραξη ευθειών και δημιουργία άλλων σχημάτων.
- δ) Προσδιορισμός εμβαδού ορθογωνίου από τις διαστάσεις των πλευρών του.
- ε) Διερεύνηση σύνδεσης – διαχωρισμού εμβαδού και περιμέτρου ενός ορθογωνίου.
- στ) «Οπτική» αίσθηση μεγαλύτερου ορθογωνίου.

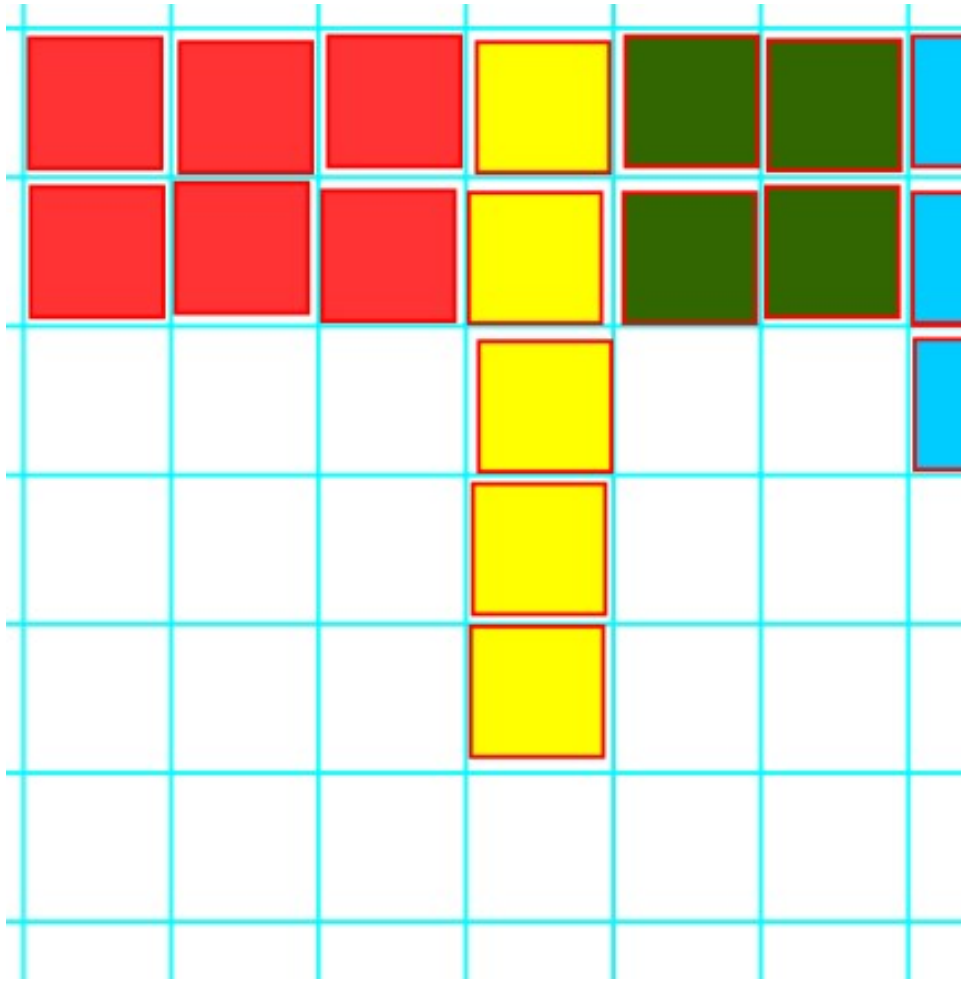
2.1.2 Μεθοδολογία – Υλικό

Στους μαθητές δίνονται φωτοτυπίες από πραγματικά έργα του Mondrian, όπως υπάρχουν είτε σε διάφορα σχολικά βιβλία, είτε από φωτογραφίες στο διαδίκτυο. Μπορεί να γίνει συζήτηση και να κληθούν οι μαθητές να ονομάσουν τα σχήματα που περιλαμβάνονται σε αυτά τα έργα, να κάνουν μετρήσεις σε αυτά, να υπολογίσουν περιμέτρους ή εμβαδά, σε κάθε περίπτωση ανάλογα με το διδακτικό στόχο που είναι επιθυμητός και κατάλληλος για τη συγκεκριμένη τάξη. Στη συνέχεια οι μαθητές θα κληθούν να χωριστούν σε ομάδες έως τεσσάρων ατόμων και να παίξουν.

Για το παιχνίδι μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτοιμα φύλλα παιχνιδιού (όπως για παράδειγμα αυτό στην Εικόνα 5. Φύλλο παιχνιδιού, όπου έχουν ζωγραφιστεί οι θέσεις ενός γύρου παιχνιδιού τεσσάρων μαθητών.), αποτελούμενα από τετράγωνα χωρισμένα σε τετραγωνάκια του ενός εκατοστού. Εναλλακτικό, αλλά περισσότερο περιορισμένο «φύλλο παιχνιδιού», μπορεί να αποτελέσει ένας γεωπίνακας, που θα χρησιμοποιηθεί όπως στην Εικόνα 4. Γεωπίνακας που έχει χωριστεί σε ορθογώνια με λαστιχάκια. Θα χρησιμοποιηθούν ακόμα: α) τέσσερα ζάρια, β) τέσσερις διαφορετικού χρώματος μαρκαδόροι, γ) φύλλο βαθμολογιών παικτών.



Εικόνα 4. Γεωπίνακας που έχει χωριστεί σε ορθογώνια με λαστιχάκια



Εικόνα 5. Φύλλο παιχνιδιού, όπου έχουν ζωγραφιστεί οι θέσεις ενός γύρου παιχνιδιού τεσσάρων μαθητών.

2.1.3 Η δραστηριότητα και η εφαρμογή της

Προτείνεται στους μαθητές να παρατηρήσουν σε μικρές ομάδες τα έργα προς παρατήρηση και να συζητήσουν αν διακρίνουν κάποια σχέση ανάμεσα στο εμβαδόν και την περίμετρο των επιμέρους ορθογωνίων.

Το παιχνίδι

Η προτεινόμενη υλοποίηση προέρχεται από προσαρμογή της αντίστοιχης των Johnston & Ward (2018). Κάθε παιχνίδι παίζεται από 2-4 παίκτες ή ομάδες. Καθένας παίκτης ή ομάδα παικτών επιλέγει το χρώμα με το οποίο θα ζωγραφίζει τα τετράγωνα και οι παίκτες συμφωνούν μεταξύ τους αν θέλουν να επιτύχουν ελάχιστο ή μέγιστο εμβαδόν ή ελάχιστη ή μέγιστη περίμετρο.

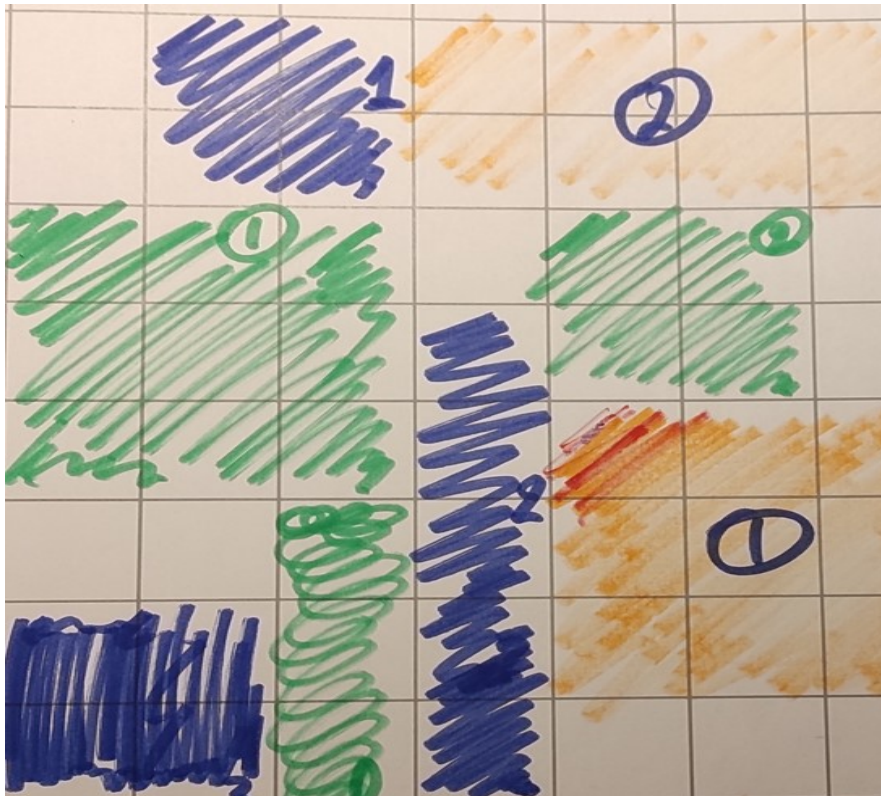
Κάθε παίκτης με τη σειρά του, ρίχνει τα ζάρια και δημιουργεί ένα ορθογώνιο, μέσα στο τετράγωνο του παιχνιδιού, το οποίο να έχει ως περίμετρο ή εμβαδόν το άθροισμα των ενδείξεων των τεσσάρων ζαριών. Στο ορθογώνιο που θα χρωματίσει δίνει τον αύξοντα αριθμό του γύρου του παιχνιδιού (1, 2, κλπ). Στη συνέχεια σημειώνει στο φύλλο βαθμολόγησης, τον αριθμό του γύρου του παιχνιδιού, το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών και το εμβαδόν και την περίμετρο του ορθογωνίου που χρωμάτισε. Στο τέλος, όσων γύρων παιχνιδιού έχει συμφωνηθεί να υπάρξουν στην αρχή από τους παίκτες (ανάλογα και με το μέγεθος του διατιθέμενου φύλλου παιχνιδιού) ή αν κανένας παίκτης στη σειρά του δεν μπορεί να ζωγραφίσει ορθογώνιο των υποδεικνυόμενων από τα ζάρια διαστάσεων το παιχνίδι λήγει.

Νικητής ανακηρύσσεται, όποιος παίκτης έχει επιτύχει το σκοπό που τέθηκε στην αρχή. Αν είναι επιθυμητό στους στόχους να γίνει διερεύνηση της περιμέτρου ενός ορθογωνίου σε σχέση με το εμβαδόν του (σε περισσότερο προχωρημένες τάξεις του Δημοτικού για παράδειγμα ή στο Γυμνάσιο), τότε μπορεί να τεθεί ως στόχος του παιχνιδιού να ζωγραφίζεται κάθε φορά ορθογώνιο περιμέτρου της ενδείξεως των ζαριών και μέγιστου δυνατού εμβαδού ή το αντίστροφο. Οπότε, οι μαθητές σε αυτήν την περίπτωση έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν, για παράδειγμα από όλα τα ορθογώνια ίδιας περιμέτρου, αν υπάρχει κάποιο που να έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδό. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να ενταχθεί και στο Λύκειο, όπου οι μαθητές δύνανται να αποδείξουν στο πλαίσιο της διερεύνησης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή της, όταν αυτή διαμορφωθεί κατάλληλα ώστε να περιγράφει το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους μίας πλευράς του. Οι μαθητές του Δημοτικού μπορούν να δημιουργήσουν, με τη βοήθεια και των σχεδίων στα φύλλα παιχνιδιού πίνακες με όλα τα ορθογώνια συγκεκριμένης περιμέτρου (ακέραιας, αφού πρόκειται για άθροισμα ενδείξεων ζαριών σε ακέραιο έτοιμο πλέγμα) και των αντίστοιχων εμβαδών, ώστε να παρατηρήσουν τελικά ότι το τετράγωνο ή όποιο ορθογώνιο έχει διαστάσεις περισσότερο κοντά σε τετράγωνο είναι αυτό με το μέγιστο εμβαδόν.

2.1.4 Αξιολόγηση

Η δραστηριότητα – παιχνίδι που προτάθηκε παραπάνω μπορεί να διαβαθμιστεί, ανάλογα με τις ανάγκες των μαθητών της τάξης που θα χρησιμοποιηθεί. Μάλιστα, είναι δυνατόν σε διαφορετικές ομάδες μαθητών να δοθούν διαφορετικοί στόχοι – κανόνες νίκης, οι οποίοι θα οδηγήσουν σε διαφορετικές συζητήσεις μέσα στις ομάδες και άρα σε διαφορετικές προκλήσεις. Στο τέλος της δραστηριότητας(στην Εικόνα 6. Συμπληρωμένο φύλλο παιχνιδιού 3 παικτών, 3 γύρων. βλέπουμε ένα συμπληρωμένο φύλλο παιχνιδιού), οι μαθητές των ομάδων μπορούν να συζητήσουν στην ολομέλεια της τάξης τα συμπεράσματά τους και από τις ενδεχομένως διαφορετικές στοχεύσεις, ώστε να καταλήξουν σε κοινά συμπεράσματα. Σε κάθε περίπτωση, το παιχνίδι αυτό όπου έχει εφαρμοστεί οδηγεί σε ενδιαφέρουσες συζητήσεις, οι οποίες μπορούν, με κατάλληλες κάθε φορά ερωτήσεις διερεύνησης, να εξυπηρετήσουν τους στόχους των προγραμμάτων σπουδών με ουσιώδη τρόπο μέσα σε ένα παιγνιώδες και ευχάριστο κλίμα. Μερικές τέτοιες ερωτήσεις, ως παράδειγμα είναι οι εξής:

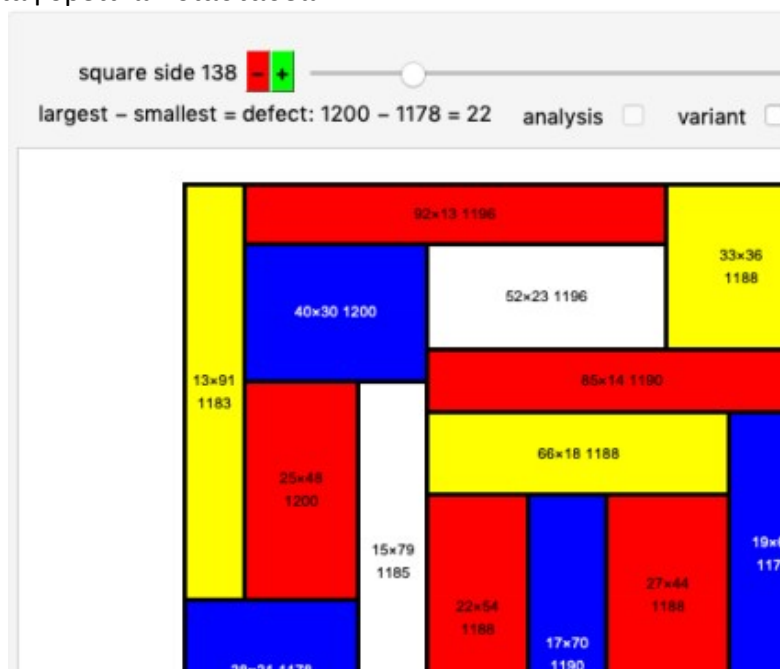
- α. Κατασκευάσατε όλα τα δυνατά ορθογώνια σε περίμετρο στο δοθέν πλαίσιο;
- β. Κατασκευάσατε όλα τα δυνατά ορθογώνια σε εμβαδόν στο δοθέν πλαίσιο;
- γ. Υπάρχουν ορθογώνια με ίδιο εμβαδόν και διαφορετική περίμετρο;
- δ. Υπάρχουν ορθογώνια με ίδια περίμετρο και διαφορετικό εμβαδόν;
- ε. Από όλα τα ορθογώνια με ίδια περίμετρο υπάρχει κανόνας που να ζωγραφίζεται κάποιο ορθογώνιο με μέγιστο εμβαδόν;



Εικόνα 6. Συμπληρωμένο φύλλο παιχνιδιού 3 παικτών, 3 γύρων.

2.2 Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Στις μεγαλύτερες τάξεις (τέλος γυμνασίου ή λύκειο) ή αν γενικότερα δεν υπάρχει επαρκής χρόνος να διατεθεί για τη δραστηριότητα – παιχνίδι, είναι πιθανό, να περιοριστεί η διερεύνηση και η επίδειξη έργων του Mondrian. Μία κατάλληλη εναλλακτική παρέχεται από το διαδικτυακό λογισμικό wolframalfa στο Pegg (2021), στιγμιότυπο του οποίου φαίνεται στην Εικόνα 7. Mondrian Art. Σε αυτό μπορεί να παρουσιαστεί στους μαθητές ένα ψηφιακό τετράγωνο, το οποίο μπορεί να χωριστεί με πολλούς τρόπους και χρωματισμούς σε ορθογώνια διαφορετικών διαστάσεων.



Εικόνα 7. Mondrian Art

2.2.1 Στόχοι – επιδιώξεις

Και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης και τους στόχους του προγράμματος σπουδών, μπορούν να τεθούν πολλά από τα ερωτήματα και τις επιδιώξεις που αναφέρθηκαν στο αντίστοιχο παιχνίδι για την πρωτοβάθμια. Ένας γενικότερος στόχος που μπορεί να τεθεί είναι η επίλυση ενός προβλήματος (αυτού που θέτει το παιχνίδι που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια), μέσω διερευνητικών δραστηριοτήτων του παιχνιδιού, η εμπειρική επίλυση του προβλήματος για μικρές διαστάσεις, η ανάλυση όλων των δυνατών καταστάσεων και η ανάπτυξη επαγωγικά αλγορίθμων – στρατηγικών νίκης στο παιχνίδι.

2.2.2 Μεθοδολογία – Υλικό

Εφόσον προηγηθούν οι εισαγωγικές δραστηριότητες, σχετικά με την τέχνη, την αφαίρεση, τις μεθόδους του Mondrian και το ρεύμα του νέο-πλαστικισμού που ανέπτυξε με έναν από τους προτεινόμενους τρόπους, απαιτείται στη συνέχεια να δοθεί σε κάθε ομάδα μαθητών ένα φύλλο παιχνιδιού. Αυτό είναι ένα τετράγωνο χωρισμένο σε ακέραιο πλήθος τετραγώνων με ακέραιες διαστάσεις.

2.2.3 Η δραστηριότητα και η εφαρμογή της

Καθένας μαθητής ή ομάδα μαθητών έχει στη διάθεσή του ένα φύλλο παιχνιδιού με σχεδιασμένο τετράγωνο ίδιων διαστάσεων για όλες τις ομάδες. Στόχος είναι κάθε τετράγωνο να ζωγραφιστεί με ορθογώνια διαφορετικών χρωμάτων, ώστε:

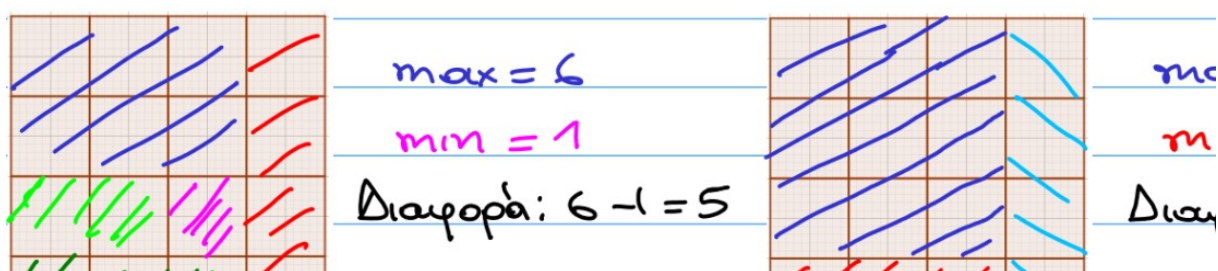
- όλα τα ορθογώνια να είναι διαφορετικών διαστάσεων
- τα ορθογώνια δεν επικαλύπτονται
- τα ορθογώνια καλύπτουν ολόκληρο το τετράγωνο

Σκοπός του παιχνιδιού, του **γρίφου του Mondrian**, είναι, αφού χωριστεί το τετράγωνο σε ορθογώνια, σύμφωνα με τους παραπάνω κανόνες, να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά μεταξύ του μικρότερου εμβαδού των ορθογωνίων από το μεγαλύτερο εμβαδό των ορθογωνίων.

Στην Εικόνα 8. Δύο φύλλα παιχνιδιού διαστάσεων 4X4, συμπληρωμένα από δύο ομάδες., απεικονίζονται δύο συμπληρωμένα φύλλα παιχνιδιού διαστάσεων 4X4 τετραγώνων, τα οποία έχουν συμπληρωθεί από δύο ομάδες, σύμφωνα με τους κανόνες του γρίφου του Mondrian.

Στο αριστερό φύλλο παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το μπλε με διαστάσεις 2X3 και εμβαδόν 6, ενώ το μικρότερο ορθογώνιο είναι το μωβ με διαστάσεις 1X1 και εμβαδόν 1. Οπότε, η βαθμολογία Mondrian αυτής της ομάδας είναι $6-1 = 5$.

Στο δεξί φύλλο παρατηρούμε ότι το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν είναι το μπλε με διαστάσεις 3X3 και εμβαδόν 9, ενώ το μικρότερο ορθογώνιο είναι το κόκκινο με διαστάσεις 1X3 και εμβαδόν 3. Οπότε, η βαθμολογία Mondrian αυτής της ομάδας είναι $9-3 = 6$. Νικήτρια ομάδα μεταξύ αυτών των δύο είναι η πρώτη ομάδα που έχει βαθμολογία Mondrian $5 < 6$ της δεύτερης ομάδας.



Εικόνα 8. Δύο φύλλα παιχνιδιού διαστάσεων 4X4, συμπληρωμένα από δύο ομάδες.

Το πρόβλημα αυτό, ως προς τη στρατηγική του νίκης δεν είναι απλό, όταν οι διαστάσεις του φύλλου παιχνιδιού γίνουν μεγαλύτερες από έναν αριθμό της τάξης του 10X10 και δύο ενδιαφέρουσες αναλύσεις υπάρχουν στα (Bassen, 2016) και (Dalfo, Fiol & Lopez, 2020).

2.2.4 Αξιολόγηση

Η διερεύνηση των μαθητών μπορεί να περιοριστεί σε τετράγωνα διαστάσεων μικρότερων του 10X10, ξεκινώντας από το 4X4, όπως στο παράδειγμα. Η συζήτηση και η ανάπτυξη μίας στρατηγικής, η οποία αρχικά συνήθως είναι η καταγραφή όλων των δυνατών περιπτώσεων ορθογώνιων και ποια μπορούν να είναι αυτά, ώστε να πληρούνται οι κανόνες του παιχνιδιού, δίνει στην πράξη μία ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα ευκαιρία για διερεύνηση, συζήτηση, συνεργασίες και ανάπτυξη στρατηγικών, οι οποίες θα γίνει προσπάθεια να προσαρμοστούν κάθε φορά στο νέο, μεγαλύτερων διαστάσεων, φύλλο παιχνιδιού, όποτε αυτό είναι δυνατό.

Άλλα ερωτήματα που μπορούν να προηγηθούν του παιχνιδιού ενδέχεται να επιλεχθούν:

- α. Μπορείτε να γεμίσετε το πλαίσιο με ορθογώνια, όλα διαφορετικών διαστάσεων;
- β. Από όλα τα ορθογώνια με ίδιο εμβαδόν υπάρχει κάποιο που έχει ελάχιστη περίμετρο;
- γ. Μπορείτε να παρατηρήσετε αν υπάρχουν «χρυσά ορθογώνια» στους πίνακες του Mondrian;

Τα «χρυσά ορθογώνια» είναι εκείνα, των οποίων ο λόγος των διαστάσεών τους είναι αυτός της χρυσής τομής, την οποία οι μαθητές διδάσκονται στη Β' λυκείου στο μάθημα της γεωμετρίας. Συνεπώς, μπορεί μέσω αυτού του παιχνιδιού να επιτευχθεί ο στόχος της αναγνώρισης του λόγου της χρυσής τομής στους πίνακες του Mondrian. Μάλιστα, υπάρχει η Μαθηματική ανάλυση των Winston, Murphy & Parajon (2020), η οποία δίνει στοιχεία, σύμφωνα με τα οποία ο Mondrian είχε μία φυσική τάση να χρησιμοποιεί χρυσά ορθογώνια στη ζωγραφική του. Συγκεκριμένα, καταλήγουν ότι υπάρχει πιθανότητα 99.53% να μην χρησιμοποιούσε ορθογώνια τυχαίου μεγέθους στο έργο του.

Συμπεράσματα

Η ανάπτυξη δεξιοτήτων των μαθητών για την αξιοποίηση της γνώσης και την προσαρμογή αυτής σε νέα δεδομένα και προβλήματα, η προώθηση της ενεργούς συμμετοχής τους, της συνεργατικής δράσης, της διερευνητικής μάθησης και της επίλυσης προβλήματος μέσα σε μία μαθησιακή δραστηριότητα στην τάξη, για οποιαδήποτε βαθμίδα, αποτελούν μερικούς από τους γενικότερους στόχους στη σύγχρονη εκπαίδευση. Η Τέχνη και τα Μαθηματικά αποτελούν διαφορετικές προσεγγίσεις ερμηνείας του κόσμου που μας περιβάλλει και μπορούν να συμπληρώνουν σε κατάλληλα διαμορφωμένες δραστηριότητες τις διαφορετικές μεθόδους απεικόνισης της πραγματικότητας. Η εφαρμογή τέτοιων δραστηριοτήτων στη σχολική τάξη συντείνει στην ενσωμάτωση και βαθιά κατανόηση μαθηματικών εννοιών και ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης ενός προβλήματος. Ειδικότερα το έργο του Piet Mondrian, με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του που αναφέρθηκαν (γεωμετρική αφαίρεση, έντονες χρωματικές απεικονίσεις) μπορεί να ενδυναμώσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να ενισχύσει την έμπνευση των δασκάλων για τη δημιουργία κατάλληλων δραστηριοτήτων – παιχνιδιών που θα συμβάλλουν σε ευχάριστες προσεγγίσεις των παραπάνω στόχων.

Αναφορές

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Γ. & Σιδέρης, Π. (2021). *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, Τεύχος Β', ΙΤΥΕ Διόφαντος.

- Γαβρίλης, Κ. (2018). <http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5867> διαδραστικό περιεχόμενο του βιβλίου γεωμετρίας β' λυκείου. Ανακτήση 25/11/2021.
- Μιχαηλίδης, Τ. (2019). Τέχνη & Μαθηματικά, Χάρτης, 6, 2019. Ανακτήθηκε από <https://www.hartismag.gr/hartis-6/eikastika/teanh-maohmatika>
- Bassen, H. (2016). *Further Insight into the Mondrian Art Problem*. Ανακτήθηκε 25/11/2021 από <https://mathpickle.com/mondrian-art-puzzles-solutions/>
- Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (2021). *Οι Βασικές Αρχές των Προγραμμάτων Σπουδών*. Ανακτήθηκε 25/11/2021 από <http://iep.edu.gr/el/nea-programmata-spoudon-arxiki-selida>
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston.
- Dalfo, C., Fiol, M.A. & Lopez, N. (2020). *New results for the Mondrian art problem*. Discrete applied mathematics, 15 April 2021, vol. 293, p. 64-73. Ανακτήθηκε 25/11/2021 από <https://arxiv.org/pdf/2007.09639.pdf>
- Pegg, E.Jr. (2016). *Mondrian Art Problem*, Wolfram Demonstrations Project, Ανακτήθηκε στις 25/11/2021 από <https://demonstrations.wolfram.com/MondrianArtProblem/>.
- Σκουμπουρδή, Χ. (2015). *Το παιχνίδι στη Μαθηματική εκπαίδευση των μικρών παιδιών*. Αθήνα: Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών. Ανακτήθηκε 25/11/2021 από: <http://hdl.handle.net/11419/1295>.
- Σταθοπούλου-Καμπύλη Μ. (2017). *Τέχνη και Μαθηματικά: Διαθεματικές προσεγγίσεις μέσα από την Ιστορία της Τέχνης*, Πτυχιακή εργασία, Παιδαγωγικό τμήμα δημοτικής εκπαίδευσης, Παιδαγωγική Σχολή Φλώρινας, Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας, Φλώρινα. Ανακτήθηκε 25/11/2021 από <https://dspace.uowm.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/585/Stathopoulou-Kampyli%20Maria.pdf;jsessionid=336D1A1C7849F334D7278A4CD41876C4?sequence=1>
- Johnston, E. & Ward, E.K., (2018). *Mondrian Math: An Artful Exploration of Area and Perimeter*, *Ohio Journal of School Mathematics*, Spring 2018. Ανακτήθηκε 25/11/2021 από <https://library.osu.edu/ojs/index.php/OJSM/article/view/6093/4863>.
- Winston, Murphy, Parajon (2020). *Math and Mondrian*. University of Pennsylvania. Ανακτήθηκε 25/11/2021 από https://www2.math.upenn.edu/~ted/210S17/Projects/Sample/Paper4.pdf?fbclid=IwAR1otBQS_Tyz57L8Rvve1vCBf3vuJp8a89M_edhJfvZ634Y0ZP4ovGg5dl
- Χασάπης, Δ., (Επιμ.). (2011). *Πρακτικά 9^{ου} Δημέρου διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Χιωτίνης, Ν. (2016). *Η πλάνης Τέχνη και η Art Brut*. Συνέδριο Εταιρείας Μελετών Πολιτισμικής Ετερότητας με θέμα «Art Brut», 10 Μαΐου 2016. Ανακτήθηκε 25/10/2020 από τη σελίδα του συγγραφέα <https://ia.uniwa.gr/profile/chiotinis-nikitas/>