Τελική Έκθεση Αξιολόγησης, απολογισμός και παραδοτέα ομίλου Μαθηματικών Προτύπου ΓΕ.Λ. Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης 2020-21

Συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί:

Σωτήριος Χασάπης (ΠΕ03).

Εβδομαδιαίο ωράριο λειτουργίας:

Δύο ώρες εβδομαδιαίως, κάθε Πέμπτη 14:30 – 16:00 (25 συναντήσεις). Επιπλέον, για τους μαθητές με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στους διαγωνισμούς Μαθηματικών διεξάγονταν κάθε Παρασκευή 15:00 – 16:30, επιπλέον συναντήσεις των συμμετεχόντων στον όμιλο με στόχο τη συζήτηση και την επίλυση θεμάτων πανελληνίων και διεθνών διαγωνισμών (επιπλέον 24 συναντήσεις), εκτός διδακτικού ωραρίου. Σύμφωνα με τα έκτακτα μέτρα λειτουργίας των σχολείων για την αντιμετώπιση της πανδημίας του κορωνοϊού (COVID19), οι συναντήσεις του ομίλου, εκτός από τις δύο πρώτες που είχαν στόχο και να γνωριστούν τα μέλη της ομάδας, διεξήχθησαν διαδικτυακά.

Στόχοι – Χαρακτηριστικά ομίλου

- Ο Ομιλος Μαθηματικών λειτούργησε τη σχολική χρονιά 2020-21, σύμφωνα με τους νόμους 3966/2011,4623, 4692 και τις οδηγίες της ΔΕΠΠΣ, αφού εγκρίθηκε από το ΕΠΕΣ του σχολείου.
- Δοκιμασία νέων γνωστικών αντικειμένων περί τα μαθηματικά σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα που ακολουθεί.
- Ανάπτυξη γνώσεων και δεξιοτήτων περί τα σύγχρονα μαθηματικά και την έρευνά τους.
- Γνωριμία και συζήτηση με επιστήμονες του κλάδου, ανάπτυξη επιστημονικής περιέργειας, συμβολή στη δημιουργία προτύπων αριστείας για τους μαθητές. Πραγματοποιήθηκε μία συνάντηση με τον διευθυντή του Ινστιτούτου Υπολογιστικών Μαθηματικών του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας το Δεκέμβριο του 2020.
- Δοκιμή συνδυασμένων πρακτικών μάθησης: Βασική εκμάθηση λογισμικών μαθηματικών και χρήση τους για ανάπτυξη και διευρεύνηση μαθηματικών ερωτημάτων.
- Χρήση ως βοηθητικού μέσου επικοινωνίας της, κατάλληλα διαμορφωμένης, ηλεκτρονικής τάξης eclass.sch.gr, η οποία λειτούργησε και ως αποθετήριο του παραχθέντος υλικού.
- Χρήση ως βοηθητικού μέσου το ιστοημερολόγιο http://omilosmath.blogspot.gr/. Σε αυτήν τη θέση τέθηκαν κατά καιρούς διάφορα ερωτήματα και ενδιαφέρουσες μαθηματικές προσεγγίσεις, αλλά και σημειώσεις.

- Καλλιέργεια μαθηματικής ωριμότητας, μέσω κατάλληλης χρήσης του αναλυτικού προγράμματος.
- Συνεργασία με άλλους ομίλους του σχολείου στο πλαίσιο διεπιστημονικής ανάπτυξης της γνώσης.
- Εξοικείωση των μαθητών με θέματα διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και μικρή προετοιμασία για όσους ενδιαφέρονται για αυτούς.

Αναλυτικό πρόγραμμα ομίλου και υλοποίηση

Το αρχικό πρόγραμμα λειτουργίας του ομίλου ήταν το εξής:

- 0. Εισαγωγή, Οργάνωση υπαρχόντων γνώσεων. (Θα συγκεντρωθεί σε ένα σώμα το απαραίτητο υλικό και θα γίνουν κάποιες συμπληρώσεις) (**2 Συνεδρίες**)
- 1. Θεωρία Αριθμών (Επαγωγή, Διαιρετότητα, Ισοτιμίες, Πρώτοι Αριθμοί), Εξοικείωση με το Λογισμικό maxima (**5 Συνεδρίες**)
- 2. Γεωμετρία του Τριγώνου (Ευθεία και κύκλος του Euler, Ευθεία Simson, Σημείο Nagel, Σημείο Steiner, Σημείο Lemoine). Εμβάθυνση στο Λογισμικό Geogebra (**5 Συνεδρίες**)
- 3. Στοιχεία συνδυαστικής και Ανισότητες (Ανισότητα του Cauchy, Ανισότητα Cauchy-Schwarz, Μέγιστα ελάχιστα χωρίς απειροστικό λογισμό). (**5 Συνεδρίες**).
- 4. Σημειακοί Μετασχηματισμοί, Πέραν των γνωστών (συμμετρία, κατοπτρισμός) θα εξετασθούν η στροφή, η ομοιοθεσία και η αντιστροφή. Η συμμετρική ομάδα και εισαγωγή στις Ομάδες. (**5 Συνεδρίες**)
- 5. Αρχή της περιστεροφωλιάς και θεωρία παιγνίων δύο παικτών σε βασικό επίπεδο. (**2 Συνεδρίες**)

Υπήρξε μία μικρή διαφοροποίηση στη ροή του προγράμματος, λόγω της ανάγκης προσαρμογής του προγράμματος στις ημερομηνίες διεξαγωγής των διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Έτσι, διεξήχθησαν οι **προγραμματισμένες** και **έκτακτες** συγκεντρώσεις του ομίλου που αναφέρονται στο προσάρτημα Γ΄ παρακάτω. Συνολικά **29** τακτικές συναντήσεις και **19** έκτακτες συναντήσεις. Σύμφωνα με το παρουσιολόγιο που επισυνάπτεται 20 μαθητές του ομίλου συγκέντρωσαν περισσότερες από 20 παρουσίες στις τακτικές συναντήσεις και δικαιούνται έκδοσης βεβαίωσης παρακολούθησης. Στις έκτακτες ελάμβαναν μέρος και μη μόνιμα μέλη του ομίλου, προκειμένου να προετοιμαστούν για τους επικείμενους διαγωνισμούς.

Τα ***«μη μόνιμα μέλη»*** του ομίλου ήταν σε γενικές γραμμές μαθητές οι οποίοι δεν μπορούσαν να συμμετέχουν σε τακτική βάση, λόγω βεβαρημένου προγράμματος ή έλλειψης δυνατότητας παρακολούθησης τις Πέμπτες που διεξάγονταν οι τακτικές συναντήσεις και αναγράφονται στο παράρτημα Ε. Μαθητές με ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους, συμμετέχοντες στους αντίστοιχους όμιλους στην Α΄ λυκείου, αλλά όχι επαρκής αριθμός για τη συγκρότηση διαφορετικού ομίλου στη Β΄ και Γ΄ λυκείου. Οι συγκεκριμένοι, αφού είχαν παρακολουθήσει τον αντίστοιχο περυσινό όμιλο δεν ήταν απαραίτητο να δουν ξανά την ίδια θεματολογία, αλλά επιθυμούσαν να εκτεθούν σε νέα θέματα, γι' αυτό και παρακολουθούσαν τις έκτακτες συναντήσεις με ύλη αντίστοιχη. Οι μαθητές αυτοί δεν έλαβαν βεβαίωση συμμετοχής στον όμιλο.

Επίσης, έγιναν και κάποιες διαφοροποιήσεις στη διδαχθείσα ύλη, αφού προτιμήσαμε κάποιες φορές να εισάγουμε θέματα για τα οποία εκδήλωσαν ενδιαφέρον οι μαθητές, με αποτέλεσμα να μειωθούν οι προγραμματισμένες ώρες κάποιων θεματικών. Συγκεκριμένα, οι συνεδρίες που αφιερώθηκαν στη θεωρία αριθμών ήταν 8 αντί για 5, αλλά σε αυτές προστέθηκε μία σημαντική εφαρμογή της θεωρίας αριθμών στην καθημερινότητα, ο αλγόριθμος κρυπτογράφησης RSA. Ο χρόνος αυτός ανακτήθηκε με την προσθήκη δύο συναντήσεων σε σχέση με τον αρχικό προγραμματισμό και ελάττωση κατά δύο συνεδρίες της γεωμετρίας και των σημειακών μετασχηματισμών.

Συμμετέχοντες μαθητές – κανονικά μέλη του ομίλου

Η λειτουργία του ομίλου ξεκίνησε στις 8 Οκτωβρίου με 20 μαθητές και έληξε στις 27 Μαΐου 2021. Στο Προσάρτημα Ε΄ απεικονίζονται οι παρουσίες των συμμετεχόντων μαθητών Αναλυτικά.

Ερωτηματολόγιο αποτίμησης

Στο τέλος των συνεδριών οι συμμετέχοντες μαθητές, κλήθηκαν να συμπληρώσουν ερωτηματολόγιο σε ειδική φόρμα στην η-τάξη του ομίλου ανώνυμα, το οποίο επισυνάπτεται αυτούσιο στο προσάρτημα Β΄, μαζί με τα αποτελέσματά του. Στο ίδιο ερωτηματολόγιο υπάρχουν ερωτήσεις επί της διαδικασίας παρουσίασης των θεμάτων, αλλά και σχετικές με τον ενδιαφέρον τους για τη λειτουργία ομίλου την επόμενη χρονιά.

Στις απαντήσεις τους, που ήταν ανώνυμες(απήντησαν 10 μαθητές), χαρακτήρισαν ως ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσες τις περισσότερες θεματικές του προγράμματος, αν και κάποιες από αυτές μπορεί να τους δυσκόλεψαν αρκετά περισσότερο από τα μαθηματικά του σχολικού προγράμματος της τάξης τους. Επίσης, βρήκαν τις σημειώσεις του ομίλου, οι οποίες γενικά ήταν συμπυκνωμένες, κατανοητές και αρκετά ενδιαφέρουσες. Ακόμα, παρότι οι συμμετέχοντες μαθητές δεν είχαν το χρόνο να ασχοληθούν πολύ εκτός σχολείου με τα μαθηματικά του ομίλου, εμφανίστηκε το φαινόμενο να κάνουν χρήση αυτών σε άλλες δραστηριότητές τους εντός σχολείου, όπως σε άλλα μαθήματα ή να συζητούν και να ασχολούνται με αυτά στον ελεύθερο χρόνο τους. Επίσης, σημαντικό ποσοστό όσων απήντησαν φαίνεται να βοηθήθηκε από τον όμιλο.

Ως προς τη θεματολογία του ομίλου οι περισσότεροι διασκέδαση με την πολλαπλή θεματολογία του ομίλου, την οποία και προτιμούν. Επίσης, περίπου οι μισοί θα ενδιαφέρονταν και για έναν όμιλο ενισχυτικής διδασκαλίας για τα σχολικά Μαθηματικά.

Επίσης, φαίνεται ότι οι μαθητές δεν αξιοποίησαν πλήρως τα ηλεκτρονικά βοηθήματα του ομίλου (eclass, blog), αλλά αρκέστηκαν στις σημειώσεις και την επικοινωνία δια ζώσης και με μηνύματα ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, αλλά και στις σημειώσεις από τους πίνακες που ανέβαιναν στην η-τάξη μετά από κάθε συνάντηση..

Τέλος, η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών (εννιά στους δέκα) φαίνεται να επιθυμεί να συμμετέχει σε έναν αντίστοιχο όμιλο την επόμενη χρονιά με πολλαπλή Μαθηματική θεματολογία. Φυσικά, σχεδόν το σύνολο των μαθητών (9/10) σκέφτεται να ακολουθήσει τον θετικό προσανατολισμό στη Β΄ λυκείου ή Γ΄ λυκείου και μόνο ένας τις σχολές υγείας. Αναλυτικά οι απαντήσεις των μαθητών βρίσκονται στο προσάρτημα Β΄.

Αξιολόγηση επίτευξης στόχων – Διακρίσεις σε διαγωνισμούς – Διοργάνωση διαγωνισμών

Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν από τη μαθησιακή διαδικασία και την εισαγωγή σε σύγχρονα αντικείμενα των μαθηματικών. Η σύνδεση ερευνητικών ερωτημάτων του επιπέδου τους στα μαθηματικά με την τεχνολογία και τη χρήση λογισμικών, είτε δυναμικής γεωμετρίας (geogebra), είτε υπολογισμών (**C**omputer **Al**gebra **S**ystem: Maxima – wxMaxima) ήταν μία καλή εισαγωγή στη λογική της χρήσης επιπρόσθετων μέσων στην έρευνα.

Επίσης, αν και ο όμιλος δεν στόχευε αποκλειστικά και μόνο στη διαρκή προετοιμασία των μαθητών για συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, η μικρή προετοιμασία που έγινε στο πλαίσιο των τακτικών συναντήσεων για τους μαθητές της Α΄ λυκείου αλλά και σε επιπλέον συναντήσεις για μαθητές Β' και Γ' λυκείου βοήθησε τους μαθητές, ώστε 29 από αυτούς να προκριθούν στη δεύτερη φάση του διαγωνισμού «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Ο 81ος διαγωνσμός ο ΘΑΛΗΣ της Ε.Μ.Ε. διεξήχθη στο σχολείο μας την Παρασκευή 06/11/2020 με 79 μαθητές από το Λύκειο της Ευαγγελικής Σχολής. Η διεξαγωγή του διαγωνισμού, λόγω των έκτακτων μέτρων κατά του κορωνοϊού υπήρξε ιδιαίτερα απαιτητική, αφού δεν έπρεπε να αναμειχθούν οι μαθητές διαφορετικών τμημάτων. Ο διαγωνισμός ΘΑΛΗΣ ήταν ιδιαίτερα δύσκολος, αφού λόγω των έκτακτων μέτρων δε θα διεξαγόταν ο διαγωνισμός Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ και οι βραβευθέντες μαθητές θα συμμετείχαν αυτόματα στην 38η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα «Ο Αρχιμήδης». Η Εθνική Ολυμπιάδα διεξήχθη στις 05/06/2021 με εξεταστικό κέντρο το Πρότυπο ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης για όλους τους διαγωνιζόμενους που βραβεύθηκαν για τη Δ΄Αθήνας. Σε αυτόν συμμετείχαν 55 μαθητές από τη Δ΄Αθήνας, εκ των οποίων 11 ήταν βραβευθέντες μαθητές από το Λύκειο Ευαγγελικής και 29 από το Γυμνάσιο Ευαγγελικής. Από τους συμμετέχοντες του Λυκείου ο μαθητής Δημήτριος Εμμανουήλ κατέκτησε Χρυσό μετάλλιο και επιλέχθηκε για την Εθνική ομάδα, εκπροσωπώντας τη χώρα μας στην 62η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα με διοργανώτρια χώρα τη Ρωσία, όπου και κατέκτησε το Χάλκινο μετάλλιο. Επίσης, στην 38η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα κατέκτησε το χάλκινο μετάλλιο(http://www.hms.gr/?q=node/1790). Επισημαίνεται ότι οι διαγωνισμοί Μαθηματικών της ΕΜΕ αποτελούν τους ιστορικότερους και ανταγωνιστικότερους διαγωνισμούς για μαθητές που διεξάγονται στον Ελληνικό χώρο και συμμετέχουν σε αυτούς περισσότεροι από 12.000 μαθητές κάθε χρόνο.

Τα βοηθητικά μέσα ασύγχρονης τηλεκπαίδευσης και επικοινωνίας: Ηλεκτρονική τάξη και Διαδικτυακή Δημόσια Συζήτηση αξιοποιήθηκαν λιγότερο από το προσδωκόμενο και κυρίως ως αποθετήρια υλικού και ανεβάσματος λυμένων ασκήσεων από τους μαθητές και μόνο λίγο για ασύγχρονες συζητήσεις, αφού η διαρκής χρήση Η/Υ κατά τη διάρκεια της τηλεκπαίδευσης, μάλλον κούρασε υπερβολικά τους μαθητέ.ς. Τελικά, η εμβάθυνση σε πολλά σημεία των Μαθηματικών που εξετάσθηκαν σε πλήρεις αποδείξεις με λογική και συνέπεια βοήθησε τους μαθητές να εντοπίσουν ουσιαστικά σημεία της συνοχής του μαθηματικού οικοδομήματος, αλλά και να δουν πώς υπάρχει ενεργή έρευνα στα σύγχρονα Μαθηματικά, αλλά και ανοικτά ερωτήματα προς επίλυση.

Βασικές καινοτομίες του ομίλου

Θεματολογία από τους μαθητές

Έγινε μεγάλη προσπάθεια, ώστε να ωθηθούν οι μαθητές – πέρα από το αναλυτικό πρόγραμμα που τους παρουσιάστηκε στην αρχή του ομίλου και των θεμάτων Μαθηματικών διαγωνισμών – να συμμετέχουν θέτοντας Μαθηματικά θέματα που τους έχουν προβληματίσει σε διάφορες στιγμές του μαθητικού, αλλά και του καθημερινού περιβάλλοντός τους. Ως συνέπεια αυτού υπήρξαν ελαφρές διαφοροποιήσεις στο πρόγραμμα του ομίλου, όπου κάποια αντικείμενα συρρικνώθηκαν σε ώρες και αναδείχθηκαν έννοιες που δεν περιλαμβάνονταν αρχικά στο αναλυτικό πρόγραμμα. Θα αξιολογηθεί ποιες από αυτές ενδεχομένως μπορούν να γίνουν μόνιμες στο αναλυτικό πρόγραμμα ομίλου επόμενου σχολικού έτους. Τα επόμενα συνέβαλλαν σε αυτό.

Συνεργασία με άλλους ομίλους και διαθεματικότητα

Στο σχολείο λειτουργούν αρκετοί όμιλοι, κάποιοι από τους οποίους με επιστημονικά αντικείμενα, στα οποία εμπλέκονται αρκετά ενδιαφέροντα Μαθηματικά. Με αφορμή λοιπόν, μία ερώτηση δύο μαθητών, οι οποίοι παρακολουθούσαν τόσο τον όμιλο Μαθηματικών, όσο και αυτόν της Χημείας, ξεκίνησε μία συνεργασία των δύο ομίλων από τη σχολική χρονιά 2016-17, στη βάση πάντα της εισαγωγής στον όμιλο Μαθηματικών θεματολογίας από τους μαθητές. Η αφορμή αυτή στηρίχθηκε σε ένα πείραμα, στο οποίο οι μαθητές, αφού έκαναν μετρήσεις, έπρεπε να τις προσαρμόσουν σε ένα γραμμικό μοντέλο, όπως ήταν αναμενόμενο από τη θεωρία της Χημείας. Η προσαρμογή αυτή τους εξήγησε ο Χημικός ότι γίνεται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και τους παρέπεμψε στον όμιλο Μαθηματικών. Στο προσάρτημα Α΄ της αντίστοιχης έκθεσης του 2016-17, παρουσιάζεται ολόκληρη η διαδικασία που ακολουθήσαμε για την εξήγηση της μεθόδου, καθώς επίσης και γιατί δεν επιλέγεται μία μέθοδος αλγεβρικής παρεμβολής, αντί για παλινδρόμηση μέσω ελαχίστων τετραγώνων. Οι μαθητές ενδιαφέρθηκαν πολύ για το συγκεκριμένο θέμα, αφού επιθυμούν να βλέπουν πραγματικές εφαρμογές των Μαθηματικών σε ενδιαφέροντα προβλήματα.

Επιπλέον, έγιναν και δύο δειγματικές συν-διδασκαλίες με φιλολόγους για τη χρήση της ατελούς και της τέλειας επαγωγής σε διαφορετικά πλαίσια σκέψης.

Παιχνίδι της ημέρας

Επίσης, στο πλαίσιο της κίνησης του ενδιαφέροντος των μαθητών για τα Μαθηματικά και ως εισαγωγή στις συναντήσεις, τις περισσότερες φορές επιλέχθηκε η εισαγωγή με ένα *παιχνίδι της ημέρας ή γρίφο*. Αυτό μπορούσε να είναι σχετικό με τα θέματα που θα συζητούσαμε τη συγκεκριμένη ημέρα ή να αποτελούσε αφορμή για θέματα που θα θέλαμε να συζητήσουμε. Για παράδειγμα την ημέρα της συνάντησης της σχετικής με την Παρεμβολή ή παλινδρόμηση που περιγράφηκε παραπάνω, απεικονίστηκαν στον πίνακα μερικά σημεία και ζητήθηκε από όλους τους μαθητές με διαφορετικό χρώμα κιμωλίας να χαράξουν ο καθένας κατά τη δική του εκτίμηση, την ευθεία που πιστεύει ότι απεικονίζει καλύτερα τα δεδομένα. Με βάση αυτό έγινε συζήτηση και εισαγωγή στις μεθόδους που περιγράφηκαν. Άλλες φορές το παιχνίδι της ημέρας μπορεί να ήταν κάποιο παζλ ή κάποιο αριθμητικό παιχνίδι ή κάποιο παιχνίδι ελαχίστου δρόμου, που κάποτε μπορεί να σχετιζόταν με ό,τι ακολουθούσε στη συνάντηση, κάποτε πάλι μπορεί απλά να αποτελούσε την «προθέρμανση» - χαλάρωση από τη δύσκολη μέρα που είχαν στο σχολείο οι μαθητές. Σχετική βιβλιογραφία αποτελούν τα [Rotman], [Vajda], [Courant], [Halmos], [Gardner].

Παιχνίδι και Μαθηματικά

Μία οπτική του συντονιστή του ομίλου για τη χρήση και δημιουργία Μαθηματικών Παιχνιδιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών παρουσιάστηκε στο ***1ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ: Το εκπαιδευτικό παιχνίδι στην τυπική και μη τυπική μάθηση***, στο οποίο ο συντονιστής του ομίλου διεξήγε σχετικό εργαστήριο. Ταινία του εργαστηρίου εδώ **https://www.youtube.com/watch?v=KJoxsuXTLoY** και σημειώσεις στα πρακτικά εδώ **https://www.dropbox.com/s/m35cfl4tn3kfqc5/1%CE%BF%20%CE%A0%CE%B1%CE%BD%CE%B5%CE%BB%CE%BB%CE%AE%CE%BD%CE%B9%CE%BF%20%CE%A3%CF%85%CE%BD%CE%AD%CE%B4%CF%81%CE%B9%CE%BF%20-%20%CE%A4%CE%BF%20%CE%B5%CE%BA%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B4%CE%B5%CF%85%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C%20%CF%80%CE%B1%CE%B9%CF%87%CE%BD%CE%AF%CE%B4%CE%B9%20%CF%83%CF%84%CE%B7%CE%BD%20%CF%84%CF%85%CF%80%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%BA%CE%B1%CE%B9%20%CE%BC%CE%B7%20%CF%84%CF%85%CF%80%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%BC%CE%AC%CE%B8%CE%B7%CF%83%CE%B7%20-%20%CE%A0%CF%81%CE%B1%CE%BA%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20-%20%CE%A4%CF%8C%CE%BC%CE%BF%CF%82%20%CE%92%27.pdf?dl=0** .

2ο Μαθηματικό Συμπόσιο

Ο συντονιστής του ομίλου συμμετείχε στην διοργάνωση του 2ου Μαθηματικού Συμποσίου μαζί με τα ΠΕΚΕΣ Αττικής, υπό την αιγίδα της Περιφερειακής Διεύθυνσης Εκπαίδευσης Αττικής https://pdeattikis.gr/index.php/pde-cooperations/maths-symposium/2st-maths-symposium στο οποίο μαθητές του ομίλου θα έβαζαν τους επισκέπτες σε Μαθηματική εγρήγορση, βοηθώντας τους να λύσουν κατάλληλα προβλήματα, όπως είχε γίνει και στο αντίστοιχο 1ο Μαθηματικό Συμπόσιο. Δυστυχώς, λόγω των μέτρων αντιμετώπισης του κορωνοϊού, ανεστάλησαν οι εργασίες του συμποσίου.

Οπτικές των Μαθηματικών

Με βάση και πάλι τις ιδέες των μαθητών, υπάρχει μία άποψη σχετικά με τις οπτικές των Μαθηματικών που μπορεί να ανακαλύψει κανείς σε διάφορα τυχαία γεγονότα ή επιστήμες. Για παράδειγμα μέσα στις διάφορες μεθόδους που χρησιμοποιούνται στον προγραμματισμό, υπάρχουν αλγόριθμοι. Σε αυτούς πάντα εμπεριέχεται μία Μαθηματική Θεωρία ή λογική. Εξάλλου, ο πρώτος γνωστός αλγόριθμος είναι αυτός του Ευκλείδη για τον υπολογισμό του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη δύο αριθμών. Είναι μία οπτική των Μαθηματικών. Η μέθοδος της παλινδρόμησης που χρησιμοποιείται στη Στατιστική είναι μία διαφορετική οπτική των Μαθηματικών. Τέτοια στοιχεία που εμφανίζονται συγκεκαλυμμένα σε πολλές περιπτώσεις αποτελούν καλές αφορμές για όμορφα Μαθηματικά, που αφήνουν το μαθητή να δει τις διαφορετικές οπτικές τους και να εμβαθύνει σε αυτά.

Παραδοτέα

Στα παραδοτέα του ομίλου περιλαμβάνονται σημειώσεις και άρθρα που χρησιμοποιήθηκαν και βρίσκονται στη σχετική βιβλιογραφία του προσαρτήματος Δ΄. ΔΕΝ έχουν ψηφιοποιηθεί ακόμα χειρόγραφες σημειώσεις που χρησιμοποιήθηκαν σε νέα θέματα και ερωτήματα των μαθητών, καθώς και για την εισαγωγή δραστηριότητα του ομίλου *Παιχνίδι ημέρας*. Επίσης, στα παραδοτέα περιλαμβάνεται και η ιστοθέση http://omilosmath.blogspot.gr όπου οι μαθητές, μεταξύ άλλων – όπως περιγράφηκε παραπάνω- μπορούν να βρουν και φωτογραφίες από κάποιους πίνακες συναντήσεων, οι οποίοι βέβαια δεν απεικονίζουν την πλήρη συζήτηση και διερεύνηση των θεμάτων που έγιναν στην τάξη. Σε αυτήν τη θέση βρίσκονται και σαρωμένες σε φωτογραφίες κάποιες από τις χειρόγραφες σημειώσεις. Αναλυτικές σημειώσεις που χρησιμοποιήθηκαν από προηγούμενα έτη περιλαμβάνονται στην ιστοθέση: https://ylikodidaskalias.files.wordpress.com/2019/01/mathcircles2013-2015-isbn-1.pdf ενώ περισσότερο υλικό από αυτό που χρησιμοποιήθηκε βρίσκεται εδώ:

https://ylikodidaskalias.wordpress.com/category/%ce%bc%ce%b1%ce%b8%ce%b7%ce%bc%ce%b1%cf%84%ce%b9%ce%ba%ce%bf%ce%af-%cf%8c%ce%bc%ce%b9%ce%bb%ce%bf%ce%b9/

Μη δημοσιοποιημένες, δακτυλογραφήμενες σημειώσεις του ομίλου περιλαμβάνονται στο Προσάρτημα Ζ΄ της παρούσης έκθεσης.

Προγραμματισμός – Σκέψεις για την επόμενη σχολική χρονιά

Συνοψίζοντας, κρίνεται ως επιτυχής η καινοτομία της εισαγωγής θεμάτων στον όμιλο από τους μαθητές, είτε μέσω παιχνιδιών, είτε με αφορμή άλλους ομίλους και μαθήματα. Μάλλον, μπορεί να επεκταθεί η ιδέα των συνεργιών με άλλους ομίλους και να αντληθεί ενδιαφέρουσα θεματολογία για τους μαθητές. Όσον αφορά τώρα τη συμμετοχή μαθητών από τις Β΄ και κυρίως τη Γ΄ λυκείου φαίνεται ότι οι μαθητές είναι ιδιαίτερα επιφορτισμένοι με άλλες υποχρεώσεις και δεν μπορούν να παρακολουθούν επαρκώς και με συνέπεια έναν όμιλο. Εξάλλου, περισσότεροι από το 80% των μαθητών των ομίλων του σχολείου προέρχονται από την Α΄ λυκείου. Δοθέντος όμως από το σχετικό ερωτηματολόγιο αξιολόγησης ότι 9 από τους υπάρχοντες μαθητές εκδήλωσαν ενδιαφέρον, κρίνεται σκόπιμο να υπάρξει ένας όμιλος με προχωρημένα θέματα για αυτούς. Συνεπώς, την επόμενη σχολική χρονιά ο όμιλος Μαθηματικών θα συνεχίσει να λειτουργεί εκτός από τις τακτικές υποχρεωτικές συναντήσεις στο δίωρο της Πέμπτης και σε έκτακτες συναντήσεις – προαιρετικές και εκτός διδακτικού ωραρίου, σε δίωρο την Παρασκευή.

Ο υπεύθυνος καθηγητής

Σωτήριος Δ. Χασάπης

Προσάρτημα Α – Περίληψη Εργασίας, υποβληθείσας στο 1ο Συνέδριο Το εκπαιδευτικό παιχνίδι στην τυπική και μη τυπική μάθηση

Εργαστήριο: Δημιουργώντας Μαθηματικά παιχνίδια για μαθητές της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Περίληψη και λέξεις κλειδιά (έως 300 λέξεις) *

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματικά, Παιχνίδι, Ανάπτυξη Στρατηγικής, Μοντελοποίση, Δευτεροβάθμια εκπαίδευση, Διδασκαλία.

Η σύγχρονη σχολική πραγματικότητα απαιτεί διαφοροποιημένους τρόπους για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, με δραστηριότητες σχετικές με έννοιες, οι οποίες είτε αφορούν το τυπικό πρόγραμμα σπουδών, είτε όχι, ώστε αφενός να προκληθεί το ενδιαφέρον όσο το δυνατόν περισσότερων μαθητών για τα Μαθηματικά, αφετέρου να δοθούν περισσότερες οπτικές και ευκαιρίες για εποικοδόμηση της γνώσης καθενός μαθητή με το ιδιαίτερο δικό του τρόπο. Αν και οι απόψεις εκπαιδευτικών, μαθητών και γονέων για τα Μαθηματικά Παιχνίδια στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση μπορεί να διαφέρουν ριζικά μεταξύ τους [Σκουμπουρδή 2015 - https://repository.kallipos.gr/handle/11419/1295] , εντούτοις γενικά θεωρούν ότι το εκπαιδευτικό παιχνίδι μπορεί να βοηθήσει στη γνωστική, κοινωνική και συναισθηματική ανάπτυξη των παιδιών. Επιπλέον, η εμπειρία (προσωπική αλλά και άλλων συναδέλφων, όχι μόνο Μαθηματικών) στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δείχνει ότι, επιπροσθέτως κατάλληλα παιχνίδια μπορούν να δημιουργούν μία αίσθηση ευχαρίστησης, αλλά και να βοηθήσουν την καλύτερη ανάπτυξη των σχέσεων σε μία τάξη. Στο εργαστήριο που προτείνουμε για εκπαιδευτικούς δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (κυρίως Μαθηματικούς αλλά όχι μόνο), θα προσπαθήσουμε να δείξουμε, με συγκεκριμένα παραδείγματα, πώς μπορούμε να βρούμε υλικό (σε μερικές περιπτώσεις και να επινοήσουμε), σχετικό τόσο με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες ή γενικότερες στρατηγικές σκέψης. Ο γενικότερος στόχος είναι η προσαρμογή και χρήση ενός παιχνιδιού, είτε για την ανάπτυξη γενικότερα μίας στρατηγικής επίλυσης από το μαθητή, για την οποία θα απαιτηθεί να εντάξει το πρόβλημα του παιχνιδιού στο γνωστικό του πεδίο. Οπότε θα προσπαθήσει να βρει κατάλληλο πρακτικό μοντέλο μοντέλο που θα οδηγήσει στην, έστω και μερική ενδεχομένως, επίλυση του προβλήματος - παιχνιδιού, την οποία θα προσπαθήσει να γενικεύσει, κάνοντας υποθέσεις και αποδεικνύοντάς τις. Ένα από τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν είναι μία ομάδα παιχνιδιών τύπου ΝΙΜ (περιοδικό ΜΕΛΕΤΗ, τ.5ο, σελ.79, http://www.mathematica.gr/meleti/meleti5.pdf) με χρήση καπακιών ανακύκλωσης. Ένα άλλο θα έχει ως θεωρητική αφετηρία τη διαιρετότητα των αριθμών (Δημοτικό-Γυμνάσιο), τους ισοϋπόλοιπους αριθμούς (Λύκειο), θα είναι πάλι παιχνίδι δύο παικτών με καπάκια ανακύκλωσης, στο οποίο ένας από αυτούς μπορεί να έχει στρατηγική νίκης. Το πρώτο παιχνίδι είναι γνωστό από τους Αρχαίους χρόνους, ενώ το δεύτερο αποτελεί παραλλαγή ενός προβλήματος Ελληνικού Διαγωνισμού Μαθηματικών. Πολλά άλλα παιχνίδια μπορούν να χρησιμοποιηθούν ομοίως, ανάλογα με το διαθέσιμο χρόνο του εργαστηρίου. Αυτό το μέρος του εργαστηρίου θα διεξαχθεί με παιχνίδι ρόλων, στο οποίο οι συνάδελφοι μπορούν να χωριστούν σε «καθηγητές» και «μαθητές» και σε ομάδες, οι οποίοι θα διερευνήσουν τον τρόπο παιχνιδιού ως «μαθητές» και τον τρόπο σκέψης και καθοδήγησης των μαθητών ως «καθηγητές».

Παρουσίαση εδώ: https://shasapis.sites.sch.gr/images/biography/%CE%95%CE%BA%CF%80%CE%B1%CE%B9%CE%B4%CE%B5%CF%85%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AC%20%CE%A0%CE%B1-3%CF%84%CE%B5%CE%BB%CE%B9%CE%BA%CF%8C.pdf

Πρακτικά εδώ: https://ekedisy.gr/praktika-1oy-panellinioy-synedrioy-to-ekpaideytiko-paichnidi-stin-typiki-kai-mi-typiki-mathisi/

Προσάρτημα Β΄ - Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης Ομίλου

Το ερωτηματολόγιο κλήθηκαν να συμπληρώσουν οι μαθητές στην η-τάξη. Σε αυτήν μπαίνουν οι μαθητές πιστοποιημένοι με τους κωδικούς τους και μπορούν να απαντήσουν μία και μοναδική φορά. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε στην η-τάξη απαίτησε να ανωνυμοποιηθούν τα ερωτηματολόγια, ενώ ο συντονιστής καθηγητής δεν γνωρίζει ούτε ποιοι απήντησαν σε αυτά. Έτσι απήντησαν στο ερωτηματολόγιο μόνο 10 μαθητές. Αναζητείται τεχνικά η δυνατότητα να γίνει υποχρεωτική η απάντηση του ερωτηματολογίου και να εκδίδεται αυτόματα η βεβαίωση συμμετοχής για όσους έχουν παρακολουθήσει τον απαραίτητο αριθμό συναντήσεων. Παρακάτω παρατίθενται οι ερωτήσεις με τις απαντήσεις τους.

Ποια τάξη τελείωσες μόλις;

9/10 Α΄λυκείου 1/10 Β΄ή Γ΄λυκείου

Πόσο συχνά παρακολούθησες τον όμιλο: (1= ελάχιστες φορές , 5= Σχεδόν όλες τις φορές)

4/5 έξι μαθητές, 5/5 δύο μαθητές και 3/5 δύο μαθητές.

Παρακολουθούσες κυρίως

Μόνο τις Πέμπτες (τακτικές συναντήσεις) 8 μαθητές

Μόνο τις Παρασκευές (έκτακτες συναντήσεις) 1 μαθητής της Β΄ή Γ΄λυκείου

Πέμπτες και Παρασκευές 1 μαθητής

Επέλεξες να παρακολουθήσεις τον όμιλο κυρίως:

Για να δεις διάφορα Μαθηματικά προβλήματα που δεν υπάρχουν στα μαθήματα του κανονικού προγράμματος του σχολείου, απήντησαν 4 μαθητές.

Για να βοηθηθείς στην αντίληψή σου για τα Μαθηματικά του Σχολείου: 5 μαθητές.

Για προετοιμασία για τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς: 1 μαθητής.

Τι θα ήθελες να αλλάξει ή προστεθεί στον όμιλο του χρόνου;

Πρόκειται για ανοικτή ερώτηση στην οποία ως προς το περιεχόμενο πρότειναν να υπάρχουν περισσότερα προβλήματα με γρίφους και σπαζοκεφαλιές, πέρα από το συνηθισμένο τρόπο σκέψης. Ακόμα, ζητήθηκε περισσότερο γεωμετρία και λιγότερο άλγεβρα. Ως προς τη μεθοδολογία πρότειναν ακόμα περισσότερο ομαδική συζήτηση και επίλυση προβλημάτων, παρόλο που όπως επισήμαναν ήδη γίνεται σε μεγάλο βαθμό. Επισημαίνεται εδώ ότι στη μεθοδολογία του ομίλου ακολουθείται πλήρως η τακτική του καθηγητή – συντονιστή. Επίσης, στα περισσότερα προβλήματα οι λύσεις των μαθητών συνήθως ήταν εκτός της πορείας λύσης που είχε ο καθηγητής – συντονιστής του ομίλου. Εξάλλου πολλά από τα προβλήματα, εκ φύσεως, δέχονται διαφορετικές προσεγγίσεις σε διάφορα επίπεδα βάθους και πλάτους γνώσεων.

Στις επόμενες ερωτήσεις ζητήθηκε από τους μαθητές να αξιολογήσουν το ενδιαφέρον που τους προκάλεσε καθεμία από τις θεματικές του ομίλου ξεχωριστά και ελήφθησαν οι απαντήσεις παρακάτω.

Πόσο σου άρεσαν τα παιχνίδια που χρησιμοποιήθηκαν στον όμιλο; (1=λίγο έως 5=Πάρα πολύ)

Με 5/5 βαθμολόγησαν 8 μαθητές και 2 με 4/5.

Πόσο σου άρεσε η Θεματική Θεωρία Αριθμών (Μαθηματική Επαγωγή, διαιρετότητα, ισοϋπόλοιποι αριθμοί, Κρυπτογραφία); (1=λίγο έως 5=Πάρα πολύ)

Με 5/5 βαθμολόγησαν ένας μαθητής, επτά με 4/5 και δύο με 3/5.

Πόσο σου άρεσε η Θεματική Συνδυαστικής απαρίθμησης (Συνδυασμοί, διατάξεις, μέτρηση κλπ); (1=λίγο έως 5=Πάρα πολύ)

Με 5/5 βαθμολόγησαν ένας μαθητής, έξι με 4/5 και δύο με 3/5, ενώ ένας δεν έμεινε ικανοποιημένος και βαθμολόγησε με 2/5.

Πόσο σου άρεσε η Θεματική της Γεωμετρίας; (Γεωμετρία, Εγγράψιμα σχήματα, Γεωμετρικές κατασκευές, Γεωμετρικοί τόποι) (1=λίγο έως 5=Πάρα πολύ)

Με 5/5 βαθμολόγησαν τρεις μαθητές, έξι με 4/5 και ένας με 3/5.

Πόσο σου άρεσε η Θεματική της Άλγεβρας (Ταυτότητες, ανισότητες, Συστήματα, αποδείξεις); (1=λίγο έως 5=Πάρα πολύ)

Με 5/5 βαθμολόγησαν έξι μαθητές, τρεις με 4/5 και ένας με 3/5.

Στην επόμενη ενότητα ερωτήσεων, ζητήθηκε η γνώμη για τη λειτουργία του ομίλου. Αναλυτικά οι ερωτήσεις στη συνέχεια.

Πόσο εύκολα σου φάνηκαν τα θέματα που διαπραγματευτήκαμε στον όμιλο; (1=Παιχνιδάκι! έως 5=Κινέζικα εντελώς!)

Με 3/5 βαθμολόγησαν 9 μαθητές, δηλαδή ούτε εύκολα, ούτε δύσκολα και με 2/5, δηλαδή κάπως εύκολα ένας μαθητής.

Οι σημειώσεις που πήρες (όπου υπήρχαν) ήταν 1=Χειρότερες δε γίνονται έως 5=ΟΥΑΟΥΥ ! Τέλειες λέμε...

Στους μαθητές μοιράστηκαν δακτυλογραφημένες σημειώσεις για τις περισσότερες από τις συναντήσεις, οι οποίες υπάρχουν στο παράρτημα. Με 4/5 τις βαθμολόγησαν 5 μαθητές, με 3/5 τέσσερεις μαθητές και με 2/5, δηλαδή όχι και τόσο καλές ένας μαθητής.

Πόσο συχνά ασχολήθηκες με Μαθηματικά του ομίλου εκτός των ωρών του ομίλου; (1=ΠΟΤΕ! έως 5=Κάθε μέρα φυσικά!)

Με 4/5 δηλαδή πολύ συχνά απήντησε ένας μαθητής, με 3/5, δηλαδή συχνά περίπου μία φορά την εβδομάδα, απήντησαν πέντε μαθητές ενώ με 2/5, δηλαδή σπάνια, περίπου μία φορά το μήνα, απήντησαν τέσσερεις μαθητές. Οι εργασίες που ανατέθηκαν στους μαθητές ήταν προαιρετικές και ο συνολικός τους αριθμός ξεπέρασε τις σαράντα. Συνήθως, ήταν ερωτήματα που δεν προλάβαμε να τα επεξεργαστούμε πλήρως στις συναντήσεις.

Πόσο πιστεύεις ότι σε βοήθησαν τα Μαθηματικά του ομίλου στο μάθημα της Άλγεβρας ή Κατεύθυνσης; (1=Καμία σχέση! έως 5=Πάρα πολύ!)

Με 4/5, δηλαδή πολύ, βαθμολόγησαν 5 μαθητές, με 3/5, δηλαδή ούτε λίγο ούτε πολύ τρεις μαθητές, ενώ λίγο, δηλαδή 2/5, απήντησαν δύο μαθητές.

Πόσο συχνά χρησιμοποίησες τις ηλεκτρονικές παροχές (eclass, ιστοσελίδα omilosmath.blogspot.gr, email) του ομίλου ; (1=ΠΟΤΕ! έως 5=μετά από κάθε μάθημα).

Με 5/5, δηλαδή σε κάθε συνάντηση, απήντησε ένας μαθητής, με 4/5, δηλαδή πολύ συχνά, βαθμολόγησαν δύο μαθητές, με 3/5, δηλαδή συχνά πέντε μαθητές, ενώ λιγότερο συχνά, δηλαδή 2/5, απήντησαν δύο μαθητές.

Θα προτιμούσες ο τρόπος διεξαγωγής του ομίλου να είναι (1=περισσότερο να λύνει ο καθηγητής, 3=Όπως γινόταν με αρκετή συζήτηση μεταξύ μας , 5=Με περισσότερη συζήτηση μεταξύ των μαθητών)

Η πλειοψηφία των μαθητών, επτά, απήντησαν 3/5, δηλαδή ότι υπήρξαν ικανοποιημένοι με τον τρόπο διεξαγωγής, ένας θα ήθελε λίγο περισσότερη συζήτηση μεταξύ των μαθητών 4/5, ενώ δύο επιθυμούσαν πολύ περισσότερη συζήτηση και επέλεξαν 5/5. Να επισημανθεί βέβαια ότι η διάδραση και η ταυτόχρονη συζήτηση πολλών ατόμων ταυτόχρονα στην τηλεκπαίδευση δεν είναι εύκολα εφικτή γιατί δεν ακούγονται καλά όλοι οι συνδιαλεγόμενοι.

Πόσο ικανοποιημένος/η είσαι από τις προσδοκίες που είχες για τον όμιλο ; (1=καθόλου έως 5=πλήρως)

Οκτώ μαθητές απήντησαν 4/5 ικανοποιημένοι σε σχέση με τις προσδοκίες τους, ένας 5/5 και ένας 3/5. Θα είχε ίσως ενδιαφέρον να προστεθεί σε επόμενη αξιολόγηση ερώτηση, ως προς το τι περίμεναν περισσότερο.

Το τελευταίο μέρος του ερωτηματολογίου, αφορούσε γενικά στις σκέψεις των μαθητών για το μέλλον και πώς τυχόν ο όμιλος συνέβαλλε σε αυτές. Συγκεκριμένα, οι ερωτήσεις ήταν οι ακόλουθες:

Τι προσανατολισμό θα ακολουθήσεις; (το πιθανότερο σενάριο)

Εννέα στους δέκα μαθητές απήντησαν θετικό προσανατολισμό και ένας σχολών υγείας.

Η παρακολούθηση του ομίλου συνέβαλε στην επιλογή προσανατολισμού για του χρόνου (1=Ελάχιστα έως 5= Υπήρξε καθοριστική);

Τρεις μαθητές απήντησαν 1/5, δηλαδή ο όμιλος δεν συνέβαλε καθόλου στην επιλογή τους κατεύθυνσης, σχεδόν καθόλου, δηλαδή 2/5 απήντησαν δύο μαθητές, τέσσερεις μαθητές απήντησαν 3/5, ενώ ένας 5/5 και επέλεξε τον θετικό προσανατολισμό. Εκείνος ο μαθητής που επέλεξε σχολές υγείας ήταν ένας από τους τρεις μαθητές που βαθμολόγησαν με 1/5.

Την επόμενη σχολική χρονιά σκέφτεσαι να συμμετέχεις στον όμιλο;

Εννέα στους δέκα μαθητές από την Α΄λυκείου απήντησαν ότι σκοπεύουν να συμμετέχουν στον όμιλο την επόμενη χρονιά και ένας στους δέκα, αυτός που ήταν στη Β΄ ή Γ΄λυκείου απήντησε όχι.

Για να συμμετέχεις του χρόνου στον όμιλο θα προτιμούσες να έχει θεματολογία κυρίως:

Η ερώτηση ήταν πολλαπλής επιλογής και εννιά στους δέκα μαθητές διάλεξαν *Πολλαπλή θεματολογία όπως φέτος*, *Ενισχυτική για τα μαθήματα του σχολείου/εξετάσεις* επέλεξαν έξι μαθητές και *Προετοιμασία Μαθηματικών διαγωνισμών*, επέλεξαν τρεις μαθητές.

Ανάφερε θέματα Μαθηματικών που θα ήθελες να δεις του χρόνου στον όμιλο:

Οι απαντήσεις εδώ είχαν μία ποικιλία προτάσεων, όπως περισσότερους γρίφους, Στατιστική, περισσότερη γεωμετρία και ανισότητες, θεωρία παιγνίων και συνδυαστική, ενώ ένας απήντησε συζητήσεις πάνω σε άλυτα προβλήματα Μαθηματικών.

Στην τελευταία ανοικτή ερώτηση του ερωτηματολογίου

Πρόσθεσε οποιαδήποτε άλλη παρατήρηση θες!

Όσοι συμπλήρωσαν ανέφεραν ότι τους άρεσε πολύ η πολλαπλή θεματολογία του ομίλου και τα προβλήματα και το βρήκαν ιδιαίτερα διασκεδαστικό.

Προσάρτημα Γ΄ - Πρόγραμμα που εκτελέστηκε αναλυτικά

Ημερολόγιο **Συναντήσεων 2020-21**

1η Συνάντηση: Πέμπτη 8 Οκτωβρίου 2020

Εισαγωγή. Διευρεύνηση γνώσεων και ενδιαφερόντων των μαθητών. Ενημέρωση σχετικά με το πρόγραμμα διεξαγωγής του ομίλου. Μέθοδοι απόδειξης Μαθηματικών προτάσεων. Εφαρμογές και παραδείγματα.

Ένας χάρτης θεματολογίας των Μαθηματικών

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 09/10/2020

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

2η Συνάντηση: Πέμπτη 15 Οκτωβρίου 2020

Παιχνίδι ημέρας. Μέθοδοι παραγοντοποίησης στους πραγματικούς αριθμούς. Βασικές ταυτότητες και εφαρμογές. Εισαγωγή σε ασκήσεις διαγωνισμών Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Εισαγωγή στο Λογισμικό Geogebra.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 16/10/2020

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών και εφαρμογές.

3η Συνάντηση: Πέμπτη 22 Οκτωβρίου 2020

Παιχνίδι ημέρας. Μέθοδοι παραγοντοποίησης στους πραγματικούς αριθμούς. Ταυτότητες υπό συνθήκη. Ταυτότητα Euler, παραγοντοποίηση τριωνύμου, Μέθοδος συμπλήρωσης τετραγώνου, παραγοντοποίηση παραστάσεων, Θέματα διαγωνισμών ΕΜΕ «Ο Θαλής».

4η Συνάντηση: Πέμπτη 29 Οκτωβρίου 2020

Θέματα Μαθηματικών Διαγωνισμών

5η Συνάντηση: Πέμπτη 5 Νοεμβρίου 2020

Παιχνίδι ημέρας. Αποδεικνύοντας **ανισότητες**- Προβλήματα.

6η Συνάντηση: Πέμπτη 12 Νοεμβρίου 2020

Επίλυση θεμάτων ΘΑΛΗ και προβλήματα.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 13/11/2020

Λύσεις και σχολιασμός Θεμάτων ΘΑΛΗ Γεωμετρίας 2020 από τους μαθητές του ομίλου εδώ.

7η Συνάντηση: Πέμπτη 19 Νοεμβρίου 2020

Παιχνίδι ημέρας. Λύσεις και σχολιασμός θεμάτων Άλγεβρας Β΄λυκείου ΘΑΛΗ 2020

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 20/11/2020

Επίλυση θεμάτων Θαλής 2020 των τάξεων Β και Γ εκτός Γεωμετρίας εδώ.

8η Συνάντηση: Πέμπτη 26 Νοεμβρίου 2020

Το παιχνίδι της ημέρας. Η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης στους ακεραίους.

Σάββατο 6 Νοεμβρίου 2020: 81ος Μαθηματικός Διαγωνισμός Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας **«Ο Θαλής»**. Διεξαγωγή στο Πρότυπο ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής με 250 περίπου συμμετέχοντες μαθητές από τα Γυμνάσια και Λύκεια Ευαγγελικής και σχολεία της Δ΄Αθήνας.

9η Συνάντηση: Πέμπτη 3 Δεκεμβρίου 2020

Παιχνίδι ημέρας. Πρώτοι αριθμοί. Παραγωγή πρώτων αριθμών. Διερεύνηση. Θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής. Προβλήματα μικρών αριθμών και τύπων που δεν επεκτείνονται. Αναγκαιότητα απόδειξης. Ιδιότητες διαιρετότητας - Πράξεις με ισοϋπόλοιπους αριθμούς.

10η Συνάντηση: Πέμπτη 10 Δεκεμβρίου 2020

Παιχνίδι ημέρας. Κανόνες διαιρετότητας. Κλάσεις υπολοίπων. Άρτιοι και περιττοί αριθμοί. Αποδείξεις ιδιοτήτων. Γενικές ιδιότητες. Συνδυαστικές ασκήσεις με Μαθηματική Επαγωγή.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 11/12/2020

Προβλήματα συνδυαστικής γεωμετρίας και θεωρίας αριθμών.

11η Συνάντηση: Πέμπτη 17 Δεκεμβρίου 2020

Παιχνίδι ημέρας. Ισοϋπόλοιποι αριθμοί mod. Πράξεις με ισοϋπόλοιπους αριθμούς. Ιδιόητες. Εφαρμογές και θέματα διαγωνισμών. Βλ. Τρίτο Φύλλο εργασίας.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 18/12/2020

Προβλήματα συνδυαστικής γεωμετρίας και θεωρίας αριθμών. Συνέχεια.

12η Συνάντηση: Πέμπτη 14 Ιανουαρίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Διαγωνισμός γεωμετρικών κατασκευών. Η μέθοδος της ανάλυσης και της σύνθεσης.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 15/01/2021

Προχωρημένες γεωμετρικές κατασκευές.

13η Συνάντηση: Πέμπτη 21 Ιανουαρίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Διαγωνισμός γεωμετρικών κατασκευών μέρος 2ο. Η μέθοδος της ανάλυσης και της σύνθεσης. Σήμερα είδαμε τις κατασκευές των μαθητών Δ.Κ. Δ.Ε. και Γ.Μ. στο πρόβλημα 1

Εντελώς διαφορετικές μεταξύ τους με λίγο δημοφιλέστερη την πρώτη κατασκευή! Συγχαρητήρια και στους τρεις, μας κάνουν όλους υπερήφανους για τις προσπάθειές τους και το χρόνο που διέθεσαν.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 22/01/2021

Προχωρημένες ανισότητες **για διαγωνισμούς** https://eclass.sch.gr/modules/document/file.php/EL526249/%CE%A0%CE%AF%CE%BD%CE%B1%CE%BA%CE%B5%CF%82/1320%CE%B2-22012021.pdf

14η Συνάντηση: Πέμπτη 28 Ιανουαρίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Διαγωνισμός γεωμετρικών κατασκευών μέρος 3ο. Δείτε τις σημειώσεις εδώ.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 29/01/2021

Θέματα Διαγωνισμών. Ομογενείς ανισότητες και ανισώσεις.

15η Συνάντηση: Πέμπτη 4 Φεβρουαρίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Προβλήματα ανισώσεων και μία ανισότητα σε τρίγωνα. Επανάληψη στις ισοτιμίες για χρήση την επόμενη φορά από τις σημειώσεις εδώ.

16η Συνάντηση: Πέμπτη 11 Φεβρουαρίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Θεωρία Αριθμών - Ισοτιμίες - ΤΟ μικρό θεώρημα του Fermat

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 12/02/2021

Προβλήματα προταθέντα από τον Waclaw Sierpinski.

17η Συνάντηση Παρασκευή 19/02/2021

Θέματα Διεθνών Μαθηματικών Διαγωνισμών. Σημειώσεις από τα προβλήματα της Παρασκευής 19/02/2021.

18η Συνάντηση: Πέμπτη 25 Φεβρουαρίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Πυθαγόρειες τριάδες και το τελευταίο θεώρημα του Fermat. Δακτυλογραφημένες Σημειώσεις Και εδώ οι πλήρεις αποδείξεις.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 26/02/2021

Θέματα Διεθνών Μαθηματικών Διαγωνισμών.Σημειώσεις ομίλου.

19η Συνάντηση Πέμπτη 4 Μαρτίου 2021.

Παιχνίδι ημέρας. Συνέχεια εφαρμογές θεωρίας αριθμών και ισοϋπόλοιπων αριθμών. Συνάρτηση φ Euler και ιδιότητες – εφαρμογές. Θεώρημα Fermat.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 05/03/2021

Θέματα Διεθνών Μαθηματικών Διαγωνισμών.

20η Συνάντηση: Πέμπτη 11 Μαρτίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Θεώρημα Euler. Εισαγωγή και παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου κρυπτογράφησης RSA.

21η Συνάντηση: Πέμπτη 18 Μαρτίου 2021.

Παιχνίδι ημέρας. Εφαρμογή θεωρήματος Euler. Σημειώσεις εδώ.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 19/03/2021

Προβλήματα ομίλου Παρασκευής εδώ.

22η Συνάντηση: Πέμπτη 25 Μαρτίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Μαθηματικά θέματα απ’ όλον τον κόσμο. Ενόψη διαγωνισμού ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ.

https://eclass.sch.gr/modules/document/file.php/EL526249/%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82/%CE%8C%CE%BC%CE%B9%CE%BB%CE%BF%CF%822120b-19032021b.pdf

23η Συνάντηση: Πέμπτη 1 Απριλίου 2021

Παιχνίδι ημέρας. Πώς μετράμε; Συνδυαστική απαρίθμηση. Βασικές αρχές απαρίθμησης. Διατάξεις.Συνδυασμοί. Μεταθέσεις και κιγκλιδώματα. Εισαγωγή σε συνδυαστικές αποδείξεις με παραδείγματα και αντίστοιχες αλγεβρικές αποδείξεις.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 02/04/2021

Προβλήματα συνδυαστικής γεωμετρίας.

https://eclass.sch.gr/modules/document/file.php/EL526249/%CE%A0%CE%AF%CE%BD%CE%B1%CE%BA%CE%B5%CF%82/2320%CE%B2-2021-04-02-Note-16-54.pdf

24η Συνάντηση: Πέμπτη 8 Απριλίου 2021

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί. Στροφή, ομοιοθεσία, αντιστροφή. Συμμετρική ομάδα.

25η Συνάντηση: Πέμπτη 15 Απριλίου 2021

Πολλαπλασιαστική αρχή της συνδυαστικής απαρίθμησης. Μεταθέσεις πλήθους ν – αντικειμένων. Πίνακες εδώ.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 16/04/2021

Καταμέτρηση και στρατηγικές. Πίνακες εδώ.

26η Συνάντηση: Πέμπτη 22 Απριλίου 2021

Διατάξεις αντικειμένων, Συνδυασμοί αντικειμένων, Επαναληπτικές μεταθέσεις ν αντικειμένων. Αρχή περιστεροφωλιάς, μουσικές καρέκλες και άλλα παιχνίδια.Διωνυμικό θεώρημα. Συνδυαστικός τρόπος απόδειξης.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 23/04/2021

Παιχνίδια και θεωρία παιγνίων – Μία εισαγωγή με βάση το παιχνίδι της ημέρας.

27η Συνάντηση: Πέμπτη 13 Μαΐου 2021

Εφαρμογή του τριγώνου του Pascal. Γραφήματα ορισμός και το πρόβλημα των γεφυρών του Konigsberg. Μονοκονδυλιές, μονοπάτια και κύκλοι Euler. Προβλήματα προετοιμασίας για διαγωνισμό ΕΜΕ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ».

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 14/05/2021

Προχωρημένα προβλήματα προετοιμασίας για διαγωνισμό ΕΜΕ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ».

28η Συνάντηση: Πέμπτη 20 Μαΐου 2021

Εγγεγραμμένα-Εγγράψιμα και το σχήμα Vecten.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 21/05/2021

Προβλήματα διεθνών διαγωνισμών

29η Συνάντηση: Πέμπτη 27 Μαΐου 2021

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα. Εγγραφή τετραγώνου σε τρίγωνο.

Πρόσθετη συνάντηση Παρασκευή 28/05/2021

Προβλήματα διεθνών διαγωνισμών

Προσάρτημα Δ΄ - Σημειώσεις και υλικό που αξιοποιήθηκε – Αναφορές

[Courant] *Courant R., Robbins H., Stewart I.*, **What is Mathematics?,** 2nd edition, Oxford University Press, 1996.

[Gardner] *Gardner*, M., **Το πανηγύρι των Μαθηματικών,** Τροχαλία.

[Guy] *Guy, Richard K.*, **The strong law of small Numbers,** Dep.of Math and Statistics, Calgary, Canada.

[Halmos] *Halmos, P.R.*, **Προβλήματα για Μαθηματικούς Μικρούς και Μεγάλους**, Ευρύαλος Απόλλων.

[Tikhomirov] *Tikhomirov, V.*, **Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα**(από τους αρχαίους γεωμέτρες στη θεωρία βέλτιστου ελέγχου), Κάτοπτρο, Αθήνα, 1999.

[Vajda] *Vajda,Steven*, **Mathematical Games and How to Play Them**, Dover, Mineola, 1992.

[Καλυκάκης] *Καλυκάκης, Δ.*, **Το Ισοπεριμετρικό πρόβλημα και ο Μύθος της Διδούς**, http://mathlab.mysch.gr/teaching/maths/geometry/Dido.pdf

[ΜαυρΧασ] *Μαυρογιάννης, Ν.Σ., Χασάπης, Σ.*, **Σημειώσεις Ομίλων Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης 2013-15,** https://mathbooksgr.blogspot.gr/2017/03/2013-15.html , http://users.sch.gr/shasapis/autosch/joomla15/index.php/mathmenu/129-mathbib/376-shmeivseisomiloy2013-15 , http://www.nsmavrogiannis.gr/ooc/mathcircle/MathCircles2013-2015.pdf.

[Πίπης 2017] *Πίπης, Χ.*, **Θεωρία Γράφων και Κύκλοι Euler,** Περιοδικό Μελέτη τεύχος 2-2017, εκδόσεις www.mathematica.gr.

[Χασάπης 2017] *Χασάπης, Σ.*, **Ανισότητες Cauchy-Buniakowski-Schwarz και εσωτερικό γινόμενο στη Β΄ Λυκείου**, προς κρίση για το συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

[ΧΑΣΠΟΥ] *Χασάπης Σ., Πουλούδη Μ.,* **Παρεμβολή ή παλινδρόμηση;**, Πρακτικά 9ης Μαθηματικής εβδομάδας, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2017.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, **Θέματα Διαγωνισμών, ΘΑΛΗΣ, ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ.**

Πούλος Α., Συνδυαστική Απαρίθμηση και Συνδυαστική Γεωμετρία, Ξένος 2011.

Θέματα διαγωνισμών από διαγωνισμούς σε όλον τον κόσμο.

Sierpinski W., **250 Θέματα θεωρίας αριθμών,** Κάτοπτρο.

Halmos P., **Προβλήματα για Μαθηματικούς, Μικρούς και Μεγάλους,** ΜΑΑ.

Μαραγκάκης Μ., Μεταξάς Μ., **Ουσιώδη Μαθηματικά**.

Σημειώσεις διαγωνισμών που διατίθενται ελεύθερα στο διαδίκτυο από πολλούς συναδέλφους.

Ιστοσελίδα *www.mathematica.gr*.

Περιοδικό ΜΕΛΕΤΗ τεύχη 1-6, *www.mathematica.gr*.

Προσάρτημα Ε΄ - Παρουσιολόγια τακτικών συναντήσεων ομίλου.

[redacted]

Αα	Επώνυμο	Όνομα	Χρήστης	Παρουσίες	Βεβαίωση
1	[redacted]	[redacted]	[redacted]	21/25	1
2	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	2
3	[redacted]	[redacted]	[redacted]	25/25	3
4	[redacted]	[redacted]	[redacted]	23/25	4
5	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	5
6	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	6
7	[redacted]	[redacted]	[redacted]	25/25	7
8	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	8
9	[redacted]	[redacted]	[redacted]	25/25	9
10	[redacted]	[redacted]	[redacted]	23/25	10
11	[redacted]	[redacted]	[redacted]	24/25	11
12	[redacted]	[redacted]	[redacted]	25/25	12
13	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	13
14	[redacted]	[redacted]	[redacted]	22/25	14
15	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	15
16	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	16
17	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	17
18	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	18
19	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	19
20	[redacted]	[redacted]	[redacted]	20/25	20

Επίσης δόθηκε η ευκαιρία σε 8 ακόμα μαθητές να παρακολούθησουν κάποιες από τις διαδικτυακές συναντήσεις ως παρατηρητές σε επιπλέον ώρες για την προετοιμασία τους για συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς, οι οποίοι ήταν:

21	[redacted]	[redacted]	11/25
22	[redacted]	[redacted]	12/25
23	[redacted]	[redacted]	15/25
24	[redacted]	[redacted]	15/25
25	[redacted]	[redacted]	18/25
26	[redacted]	[redacted]	2/25
27	[redacted]	[redacted]	5/25
28	[redacted]	[redacted]	5/25

Προσάρτημα ΣΤ΄– Εικόνες από τη διεξαγωγή της 38ης Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» στο σχολείο μας.

Προσάρτημα Ζ΄– Δακτυλογραφήμενες σημειώσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

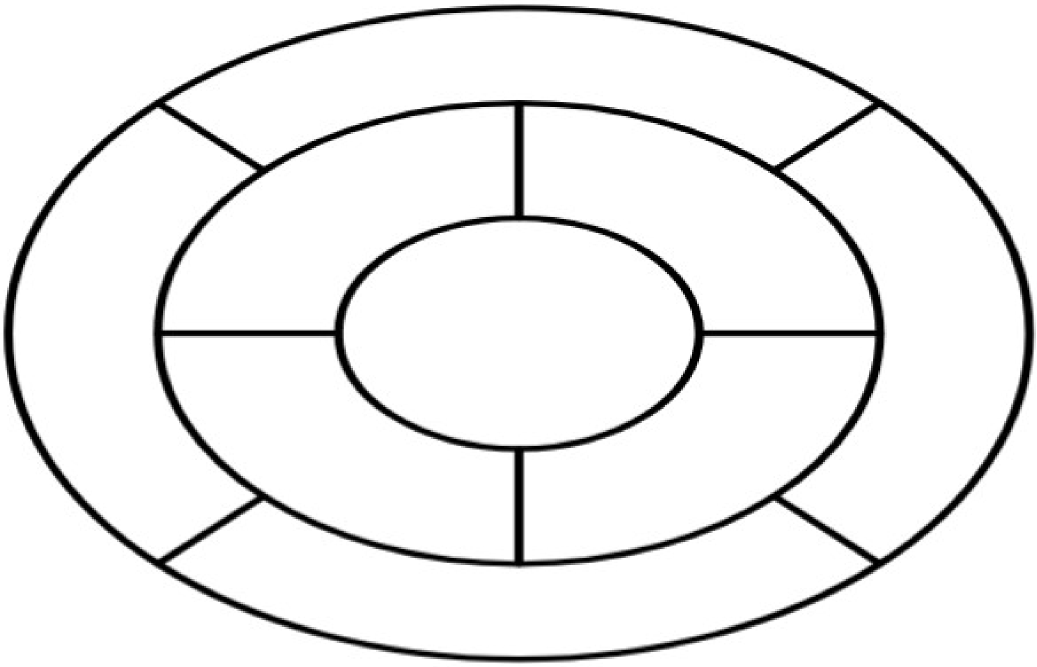
Στις σελίδες που ακολουθούν επισυνάπτονται οι πρόσθετες δακτυλογραφημένες σημειώσεις που χρησιμοποιήθηκαν την τρέχουσα σχολική χρονιά 2020-21 για τον όμιλο, πέρα από το δημοσιευμένο βιβλίο που διατίθεται ελεύθερα προς τους συναδέλφους εδώ:

https://ylikodidaskalias.files.wordpress.com/2019/01/mathcircles2013-2015-isbn-1.pdf

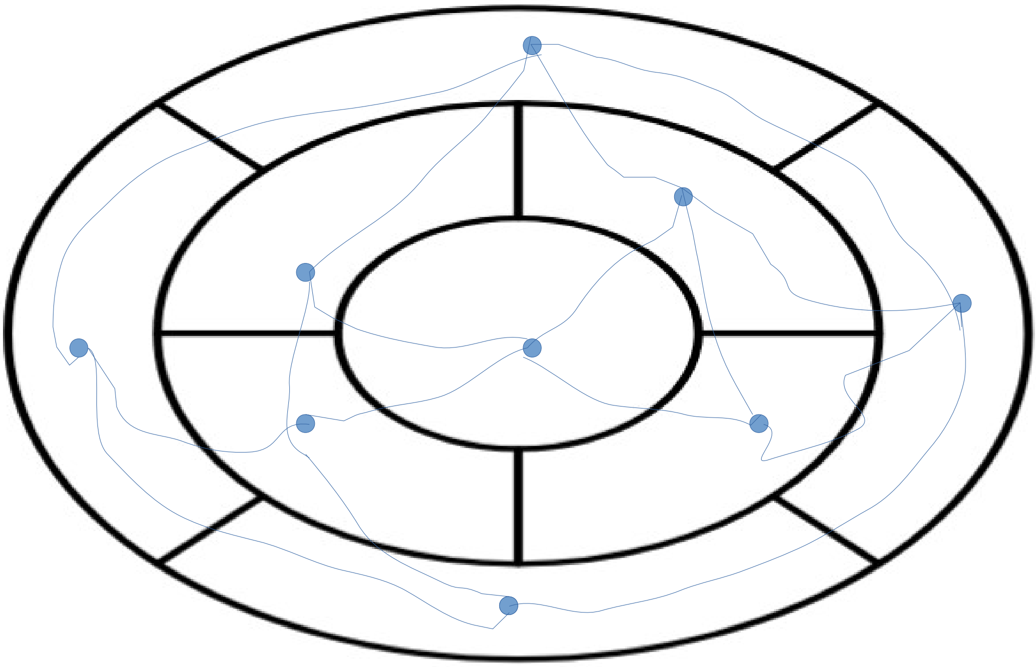
Τι θα κάνουμε σε αυτόν τον όμιλο;

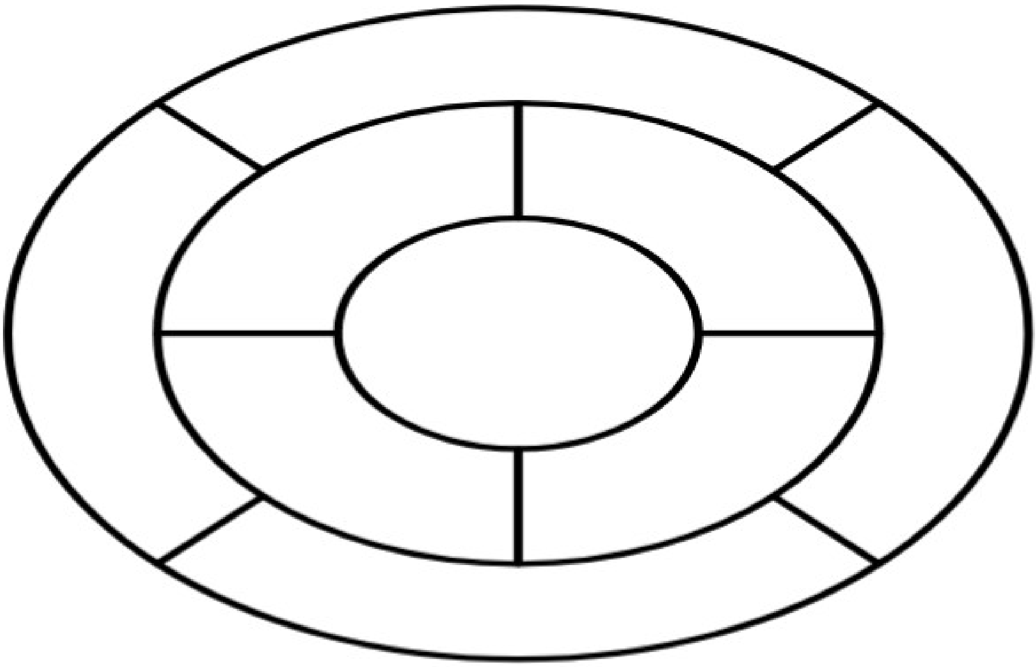
1.

Μπορείς να χρωματίσεις τον παρακάτω χάρτη με όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα; Πόσα; (φύλλο εργασίας στο τέλος).



Αντίστοιχο Γράφημα





2. Ο γρίφος της εβδομάδας 1

Στο νησί των ιπποτών και των απατεώνων οι ιππότες λένε πάντα αλήθεια και οι απατεώνες λένε πάντα ψέμματα. Όταν ένας επισκέπτης συνάντησε τρεις ντόπιους, τον Α, τον Β και τον Γ, θέλησε να μάθει ποιος είναι ιππότης. Ρώτησε λοιπόν τον Α: «Ο Β και ο Γ είναι και οι δύο ιππότες;»
- «ΝΑΙ!», απάντησε ο Α. Στη συνέχεια ρώτησε:
- « Ο Β είναι ιππότης;»
- « Όχι »

Τότε ο επισκέπτης μπόρεσε να συμπεράνει αν ο Γ είναι ιππότης ή απατεώνας. Πώς;

3. Ο γρίφος του βέβαιου θανάτου της Σάρα (Λογική 2ης τάξης)

https://www.youtube.com/watch?v=2dgmgub8mHw

Η Σάρα επιθυμεί να πάει στο κάστρο, έχει όμως χάσει τα σημάδια που είχε βάλει για να βρει το δρόμο της προς αυτό. Βρίσκεται μπροστά σε δύο πόρτες, εκ των οποίων η μία οδηγεί στο κάστρο και η άλλη στο θάνατο. Σε κάθε μία από αυτές βρίσκεται ένας φύλακας ο Π1 στην Πόρτα 1 και ο Π2 στην πόρτα 2. Στη συνέχεια λαμβάνει χώρα ο εξής διάλογος:

Π2: Ένας μας λέει ψέματα και ένας αλήθεια. Ο Π1 λέει ψέματα.
Π1: Δεν λέω ψέματα. Λέω αλήθεια.
Σάρα (απευθυνόμενη προς τον φύλακα Π1): Ο Π2 θα μου έλεγε ότι η Π1 οδηγεί στο κάστρο;
Π1: Ναι.

Μετά από αυτό η Σάρα ισχυρίζεται ότι γνωρίζει ποια πόρτα οδηγεί στο Κάστρο και ποια στο θάνατο, εξηγεί και τη σκέψη της και μπαίνει στην Πόρτα 2. Τι λέτε θα σωθεί;

Ο πλήρης διάλογος:

Guards: “The only way out of here is to try one of these doors.”

“One of them leads to the castle in the center of the Labyrinth. And the other one leads to… *bumBumBUM**BUMMM**… Certain Death*!”

“*Ooooohhhhh*!”

Sarah: “Which one is which?”

Guard: “Ehh, we can’t tell you.”

Sarah: “Why not?”

Guards: “Umm, (*mumbles a bit*) we don’t know. But they do.” (Referring to other guards.)

Sarah: “Oh, then I’ll ask them.”

Guards: “Uh, no. You can’t ask us. You can only ask ***one*** of us.”

“Mm-hm, it’s in the rules. And I should warn you that one of us always tells the truth, and one of us always lies. That’s a rule too, *he* always lies.”

“I do not! I tell the truth!”

“Oooh, what a lie!” (*snickering and laughing*)

Sarah: “Alright, answer yes or no. Would he [the opposite guard] tell me that this door leads to the castle?”

Guard: (*mumbles to his cohort then answers*) “Yes..”

Sarah: “Then, the other door leads to the castle, and this door leads to certain death.”

Guard: “Ooooh, how do you know? He could be telling the truth.”

Sarah: “But then *you* wouldn’t be. So, if you told me that he said ‘yes’ i know the answer is no.”

Guard: “But *I* could be telling the truth!”

Sarah: “But then *he* would be lying. So, if you told me that he said ‘yes’ I know the answer would still be no.”

Guards: “Wait a minute, is that right?”

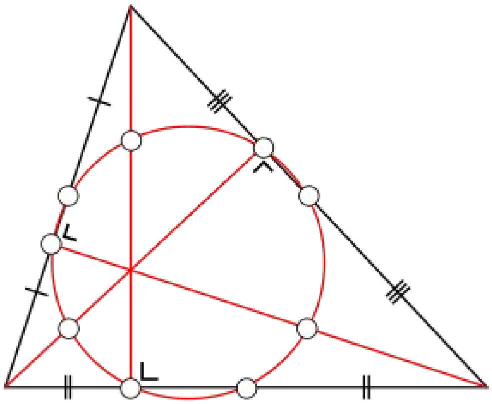
“I don’t know, I never understood it.”

Μαθηματικές Διερευνήσεις

4. Αν $x, y, z \in \mathbb{N}$ να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος: $(\Sigma)\begin{cases} x+y^2+z^3=3 \\ y+z^2+x^3=3 \\ z+x^2+y^3=3 \end{cases}$.

5. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του μεγαλύτερου ημικυκλίου που μπορεί να εγγραφεί σε ένα τετράγωνο πλευράς 1.

6. Κύκλος και Ευθεία euler σε τρίγωνο

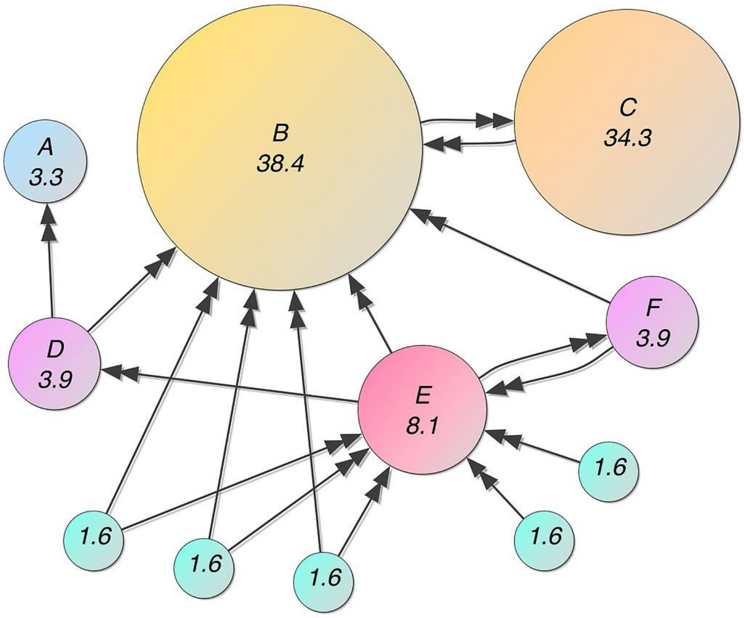


Εργασίες και παρουσιάσεις

7. http://www.mathematica.gr/meleti/meleti2.pdf

8. www.mathwiki.gr

9. Pagerank και SEO



10. Συλλογισμοί που παραπλανούν.

Ισχύει ότι 1=0, διότι:

$$x=1\Rightarrow x^2=x\Rightarrow x^2-1=x-1\Rightarrow (x-1)(x+1)=x-1\Rightarrow x+1=\frac{(x-1)}{(x-1)}\Rightarrow x+1=1\Rightarrow x=0\Rightarrow 1=x=0.$$

11. «Μηχανή» παραγωγής πρώτων αριθμών:

Η ακολουθία αριθμών $a_n=n^2+n+41$ παράγει πρώτους αριθμούς για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Για να δούμε μία ανάλυση με κώδικα στο λογισμικό maxima.

12. Επίλυση προβλήματος - Στρατηγική σε παιχνίδια.

Παραδείγματα.

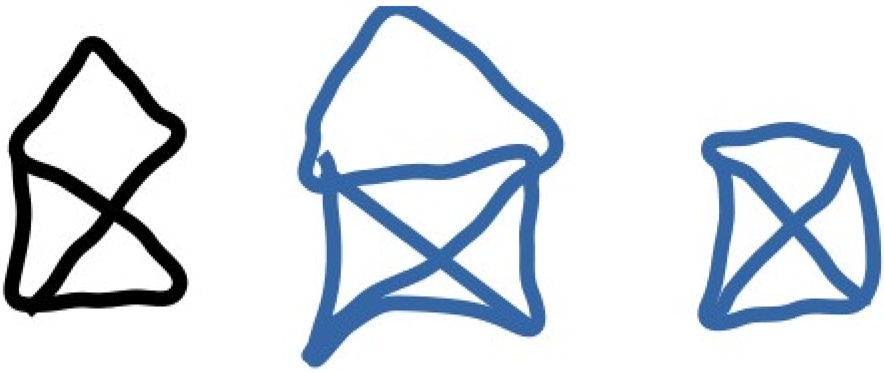
13. Λογισμικά διερεύνηση στα Μαθηματικά.

a. wxmaxima

b. geogebra

14. Ένα παιχνίδι από το Δημοτικό.

Μπορείτε να ζωγραφίσετε «μονοκονδυλιά» τα επόμενα σχήματα;



Ποιο είναι το κριτήριο;

15. Επίσημη Στατιστική – Διαγωνισμός

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/sankey/sankey.html?geos=EU28&year=2017&unit=KTOE&fuels=TOTAL&highlight=_&nodeDisagg=0101000000000&flowDisagg=false&translateX=0&translateY=0&scale=1&language=EN

Ελληνική Στατιστική Αρχή.

16. Ηλεκτρονική Τάξη

Θα σας έρθει μήνυμα για την εγγραφή σας στην ηλεκτρονική τάξη.

Θέματα wiki.

17. Πλακοστρώσεις στο επίπεδο (Tilings)

Το πρόβλημα της κάλυψης ενός επιπέδου με κανονικά ή τυχαία πολύγωνα καλείται **πλακόστρωση(tiling ή tesselation)**

Πλακοστρώσεις με κανονικά πολύγωνα

Αν θεωρήσουμε ότι θέλουμε να κάνουμε πλακόστρωση με κανονικά πολύγωνα μίας μορφής, τότε είναι κατάλληλα όλα τα κανονικά πολύγωνα;

18. Δικά σας Θέματα.

Αν κάτι σας ενδιαφέρει και το έχετε ακούσει μπορείτε να το προτείνετε και να δούμε πώς μπορούμε να το εντάξουμε στο πρόγραμμα.

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή 16-10-2020.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 A

Θέμα Α′ (AB1). *Να βρεθεί το άθροισμα* $S = 3 + 33 + 333 + \cdots + \underbrace{333\ldots3}_{2016}$.

1.1 Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Άσκηση 1. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Άσκηση 2. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$$

Άσκηση 3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \nu$$

Άσκηση 4. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$1^2 + 3^2$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2$$
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$$

Άσκηση 5. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2\nu - 1)^2$$

Είναι άραγε βέβαιον ότι η απάντηση που δώσατε στις ασκήσεις 3 και 5 είναι σωστή;

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση που εξαρτάται από κάποιον θετικό ακέραιο ν. *Μία μέθοδος απόδειξης είναι η ακόλουθη.*

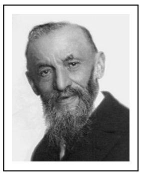
Βήμα 1 *Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για* $\nu = 1$.

Βήμα 2 *Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για* $\nu = k$.

Βήμα 3 *Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για* $\nu = k + 1$.

Τότε η πρόταση αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

Η ιδέα πίσω από την παραπάνω αρχή που οφείλεται στον Peano είναι η εξής: Στο Βήμα 3 ουσιαστικά έχουμε αποδείξει ότι αν η πρόταση ισχύει για ένα θετικό ακέραιο τότε ισχύει και για τον επόμενο του. Η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$. *’ρα ισχύει και για τον επόμενο του 1 δηλαδή το 2. Ισχύει για τον 2. ’ρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 3. Ισχύει για τον 3. ’ρα ισχύει και για τον επόμενο του τον 4 κ.ο.κ.*
Μπορείτε να βρείτε για το άθροισμα: $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ *ένα γενικό τύπο; Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε Μαθηματική επαγωγή για να τον αποδείξετε;*



Giuseppe Peano 1858-1932

Θεμα Β′ (A1). *Να αποδείξετε ότι*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

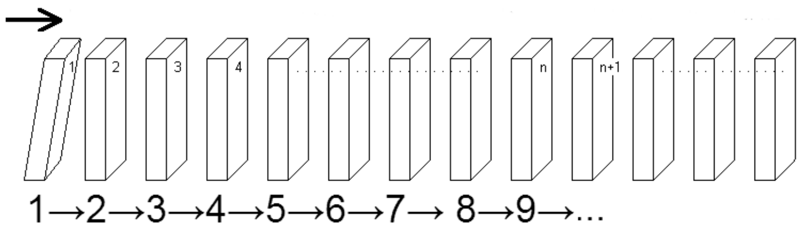
Θεμα Γ′ (A2). *Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 - \frac{1}{\nu+1}$$

Θεμα Δ′ (A3). *Να αποδείξετε ότι*

$$1^2 + 2^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

Η ιδέα της Μαθηματικής Επαγωγής είναι ότι έχουμε ένα καλοστημένο ντόμινο, για το οποίο έχουμε αποδείξει ότι κάθε ντόμινο μπορεί να ρίξει το επόμενό του(αν ισχύει για n, τότε θα ισχύει και για $n+1$), οπότε αν σπρώξουμε ένα από αυτά (το n_0),τότε θα πέσουν και όλα τα επόμενα .



2 B

Θέμα Ε′ (B1)**.** *Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει γεωμετρική πρόοδος με όρους τους τους αριθμούς* $100, 101, 102$*. (Διαγωνισμός Kolmogorov)*

2.1 Ιδιότητες ακολουθιών

Ορισμός 1. *Μονότονες ακολουθίες*

Ορισμός 2. *Φραγμένες ακολουθίες*

Πρόταση 1. *Κάθε συγκλινουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $a_n \to a$. Τότε για $\varepsilon = 1$ έχουμε ότι $|a_n - a| < 1, \forall n \geq n_0$.
Θέτουμε $m = \max|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, |a| + 1$, οπότε θα ισχύει ότι

$$|a_n| \leq m, \forall n \in \mathbb{N}$$

. □

Συνεπώς μία μη φραγμένη ακολουθία δεν είναι συγκλίνουσα.

Πρόταση 2. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

Άσκηση 6. *Αν ισχύει ότι* $0 < \lambda < 1$ *τότε να αποδειχθεί ότι:* $\lambda^n \to 0$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα, διότι:

$$\lambda^n > 0 \Rightarrow \lambda^n = \lambda^{n-1} \cdot \lambda < \lambda^{n-1}$$

Δηλαδή:

$$n - 1 < n \Rightarrow \lambda^{n-1} > \lambda^n$$

Επιπλέον, η ακολουθία είναι και κάτω φραγμένη πχ από το 0, οπότε θα συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό $l \in \mathbb{R}$. Από ιδιότητες ορίων ακολουθιών έχουμε:

$$\lambda^n \to l \geq 0 \Rightarrow \lambda^n \cdot \lambda \to l \cdot \lambda \Rightarrow \lambda^{n+1} \to l \cdot \lambda$$

Όμως οι λ^n, λ^{n+1} είναι η ίδια ακολουθία, οπότε θα συγκλινουν στον ίδιο αριθμό, από μοναδικότητα του ορίου θα είναι:

$$\lambda \cdot l = l \Rightarrow l = 0 \text{ (αφού } \lambda \neq 1)$$

□

Θέμα Ϛ′ (B2)**.** *Δίνεται η ακολουθία* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ώστε:*

$$x_1 = 1 \qquad x_n = \sqrt{2x_{n-1}}, n \geq 2$$

1. *Να αποδειχθεί ότι η* x_n *είναι αύξουσα.*
2. *Να αποδειχθεί ότι η* x_n *είναι άνω φραγμένη. Υπάρχει καλύτερο(;) άνω φράγμα ;*
3. *Να βρεθεί το όριο της* x_n.

Θέμα Ζ′ (B3)**.** *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία* $a_n = \eta\mu(n)$ *αν και είναι φραγμένη, δεν συγκλίνει.*

Θέμα Η′ (B4-Προσεγγίσεις...)**.** *Δίνεται η ακολουθία*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{S}{a_n}\right)$$

Αν $S = 2, a_0 = 3$*, να υπολογιστούν 4 όροι της ακολουθίας.*

Θέμα Θ′ (AB)**.** *Δίνεται η ακολουθία* $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$*. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των* n *πρώτων όρων της είναι:* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

Θέμα Ι′ (AB)**.** *Δίνεται η ακολουθία* $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$*. Να υπολογιστεί το άθροισμα των* n *πρώτων όρων της :* $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Θέμα ΙΑ′ (AB)**.** *Αν* $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}, x \neq 0$ *και* $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$*, τότε και η* $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή 16-10-2020.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 Α

1.1 Η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής- υπενθύμιση

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση που εξαρτάται από κάποιον θετικό ακέραιο ν. Μία μέθοδος απόδειξης είναι η ακόλουθη.

Βήμα 1 Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = 1$.

Βήμα 2 Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k$.

Βήμα 3 Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $\nu = k + 1$.

Τότε η πρόταση αληθεύει για όλους τους θετικούς ακεραίους ν.

Θέμα Α΄ (Πρόβλημα επαγωγής πχ πλήθος περιοχών στο επίπεδο από ευθείες)**.** *περιεχόμενο...*

Θέμα Β΄ (Δεύτερο πρόλβημα επαγωγής)**.** *Να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

1.2 Πλακοστρώσεις στο επίπεδο

Μία **πλακόστρωση(tiling-tesselation)** είναι ένας τρόπος για να καλυφθεί το επίπεδο με κανονικά ή τυχαία πολύγωνα ή άλλα σχήματα.

Θα διερευνήσουμε εδώ πώς μπορεί να καλυφθεί με ίσα κανονικά πολύγωνα ν πλευρών το καθένα.

2 B

2.1 Ιδιότητες ακολουθιών

Ορισμός 1. *Μονότονες ακολουθίες*

Ορισμός 2. *Φραγμένες ακολουθίες*

Πρόταση 1. *Κάθε συγκλινουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Συνεπώς μία μη φραγμένη ακολουθία δεν είναι συγκλίνουσα.

Πρόταση 2. *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

Θέμα Γ′ (B2). *Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε:*

$$x_1 = 1 \qquad x_n = \sqrt{2x_{n-1}}, n \geq 2$$

1. *Να αποδειχθεί ότι η x_n είναι αύξουσα.*
2. *Να αποδειχθεί ότι η x_n είναι άνω φραγμένη. Υπάρχει καλύτερο(;) άνω φράγμα ;*
3. *Να βρεθεί το όριο της x_n.*

Θέμα Δ′ (B3). *Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = \eta\mu(n)$ αν και είναι φραγμένη, δεν συγκλίνει.*

Θέμα Ε′ (B4-Προσεγγίσεις...). *Δίνεται η ακολουθία*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{S}{a_n}\right)$$

Αν $S = 2, a_0 = 3$, να υπολογιστούν 4 όροι της ακολουθίας.

Θέμα Ϛ′ (AB). *Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι: $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.*

Θέμα Ζ′ (AB). *Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. Να υπολογιστεί το άθροισμα των n πρώτων όρων της : $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.*

Θέμα Η′ (AB). *Αν $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}, x \neq 0$ και $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, τότε και η $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.*

2.2 Αναλογίες και προβλήματα

Θέμα Θ′ (A1). *Αν $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{3a^2 - 4b^2}{3c^2 - 4d^2}$$

Λύση.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \Rightarrow$$
$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{3a^2}{3c^2} = \frac{-4b^2}{-4d^2} = \frac{3a^2 - 4b^2}{3c^2 - 4d^2}$$

□

Θέμα Ι′ (B1). *Δίνονται οι θετικοί ρητοί αριθμοί $a, b, c \in \mathbb{Q}$" ∗", για τους οποίους ισχύει ότι:*

$$\frac{a}{2b+3c} = 2\frac{b}{a+3c} = 3\frac{c}{a+2b}$$

Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Θεμα ΙΑ′ (Γ1). *Να βρεθούν οι φυσικοί αριθμοί a, b, c για τους οποίους ισχύουν:*

$$\begin{cases} \frac{2a+3b}{13} = \frac{2a+c}{11} = \frac{3b+c}{16} \\ a \cdot b \cdot c = 336 \end{cases}$$

Θεμα ΙΒ′ (Δ1- Ε1998Α1). *Αν $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ ώστε $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = abc$, τότε να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $A = (a^2b^2+1)(b^2c^2+1)(c^2a^2+1)$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.*

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Αποδεικνύοντας ανισότητες .

1 Εισαγωγή

Οι ανισότητες είναι ένα μέρος της Άλγεβρας της Α'λυκείου που δυσκολεύουν σε αρκετές περιπτώσεις εξαιτίας έλλειψης εξοικείωσης με τις διαφορές που υπάρχουν στην εργασία με αυτές σε σχέση με τις ισότητες. Οι ασκήσεις αυτές έχουν στόχο να καλύψουν, σε συνέχεια των μαθημάτων στην τάξη αυτό το κενό.

2 Υπενθύμιση βασικών ιδιοτήτων

Ορισμός 1. *Αν $a, b \in \mathbb{R}$ θα λέμε ότι ο a* ***είναι μεγαλύτερος του*** *b ή ότι* ***ο*** *b* ***είναι μικρότερος του*** *a και θα γράφουμε $a > b$ αν ισχύει ότι $a - b > 0$.*

Αξιωμα 1.
- $a > 0$ *και* $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$.
- $a < 0$ *και* $b < 0 \Rightarrow a + b < 0$.

Αξιωμα 2.
- a, b *ομόσημοι αν και μόνο αν* $a \cdot b > 0$.
- a, b *ετερόσημοι αν και μόνο αν* $a \cdot b < 0$.

Προταση 1 (Μεταβατική ιδιότητα).

$$\boxed{a > b \text{ και } b > c \Rightarrow a > c}$$

Απόδειξη. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ και $b > c \Leftrightarrow b - c > 0$ [1].

Θα δημιουργήσουμε το $a - c$. Έχουμε: $a - c = a - b + b - c$.

Όμως $a - b > 0$ και $b - c > 0$ οπότε από αξίωμα 1 ισχύει: $a - b + b - c > 0 \Rightarrow a - c > 0$. □

[1] Σκέφτομαι ότι για να δείξω $a > c \Leftrightarrow a - c > 0$

Προταση 2 (Πρόσθεση Αριθμού και στα δύο μέλη).

$$\boxed{a > b \Leftrightarrow a + c > b + c, \forall a, b, c \in \mathbb{R}}$$

Απόδειξη. $a > b \Leftrightarrow a-b > 0 \Leftrightarrow a+c-c-b > 0 \Leftrightarrow (a+c)-(c+b) > 0 \Leftrightarrow a+c > c+b$. □

Προταση 3 (Πολλαπλασιασμός με θετικό).

$$\boxed{a > b \overset{c>0}{\Leftrightarrow} ac > bc}$$

Απόδειξη. $ac > bc \Leftrightarrow ac - bc > 0 \Leftrightarrow c(a - b) > 0 \overset{\text{Αξίωμα 2}}{\Leftrightarrow} a - b, c$ ομόσημοι $\overset{c>0}{\Leftrightarrow} a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$. □

Προταση 4 (Πολλαπλασιασμός με αρνητικό).

$c<0 \Leftrightarrow -c>0$

$$\boxed{a > b \overset{c<0}{\Leftrightarrow} ac < bc}$$

$a>b \Leftrightarrow -ca>-cb$

Άσκηση 1. *Να αποδειχθεί η προηγούμενη πρόταση.*

$\Leftrightarrow ca<cb$

Πρόταση 5 (Πρόσθεση κατά μέλη).

$$\boxed{a > b \text{ και } c > d \Rightarrow a + c > b + d}$$

Απόδειξη.

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$
$$c > d \Leftrightarrow c - d > 0$$
$$(\text{ από αξίωμα:2 }) \ \Leftrightarrow a - b + c - d > 0$$
$$\Leftrightarrow a + c - (b + d) > 0 \Leftrightarrow a + c > b + d$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Αρκεί $a+c-(b+d) > 0$

Δηλαδή, μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη ανισότητες ίδιας φοράς, χωρίς να αλλάζει η φορά. □

Πρόταση 6 (Πολλαπλασιασμός κατά μέλη). *Αν a, b, c, d είναι **θετικοί αριθμοί**, τότε:*

$$\boxed{a > b \text{ και } c > d \Rightarrow ac > bd}$$

Απόδειξη.

$$a > b \overset{c>0}{\Rightarrow} ac > bc$$
$$c > d \overset{b>0}{\Rightarrow} bc > bd$$
$$\overset{\text{Μεταβατική}}{\Rightarrow} \ ac > bc > bd \Rightarrow ac > bd.$$

Δηλαδή, μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ανισότητες ίδιας φοράς όταν περιέχουν **θετικούς αριθμούς μόνο**, χωρίς να αλλάζει η φορά. □

Άσκηση 2. *Αν a, b, c, d είναι **αρνητικοί αριθμοί**, τότε:*

$$a > b \text{ και } c > d \Rightarrow ac < bd$$

Πρόταση 7. *Ισχύει ότι:*

$$\boxed{a^2 \geq 0, \ \forall a \in \mathbb{R}}$$

ισότητα μόνο για $a=0$

Απόδειξη. Αν $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$.
Έστω $a \neq 0$ τότε $a < 0$ ή $a > 0$.
Για $a > 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
Για $a < 0 \Rightarrow a \cdot a > a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
Συνεπώς για κάθε $a \neq 0$ ισχύει ότι $a^2 > 0$ και μόνο για $a = 0 \Rightarrow a^2 = 0$. □

Πρόταση 8. $\boxed{a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ και } b = 0}$ $\boxed{a^2 + b^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } b \neq 0}$

Άσκηση 3. *Να εξεταστεί ποιες από τις επόμενες ανισότητες είναι σωστές και ποιες λάθος, αιτιολογώντας γιατί.*

1. $\boxed{3 \leq 3}$ ∨ $3<3$ $3=3$
2. $3 \geq 0$
3. $3 \leq 0$
4. $3 \geq -1$

$ab<0$

$a<b \Longleftrightarrow$

Παράδειγμα 1. *Αν a, b ομόσημοι τότε:* $\boxed{a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}}$

$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab} \Leftrightarrow$

Απόδειξη. Αν a, b ομόσημοι, τότε από αξίωμα 2 ισχύει ότι $ab > 0$.
Συνεπώς: $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ □

$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

Άσκηση 4. *Να εξεταστεί τι συμβαίνει αν στην προηγούμενη άσκηση οι a, b ήταν ετερόσημοι.*

Πρόταση 9. *Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς a, b και $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ισχύει ότι:*

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$$

Απόδειξη. Για το ευθύ:

Αν $a > b > 0$ τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη με τον εαυτό της όσες φορές θέλουμε. Για δύο φορές παίρνουμε: $a \cdot a > b \cdot b \Leftrightarrow a^2 > b^2$, οπότε για n φορές έχουμε $a^n > b^n$.

Για το αντίστροφο: Έστω $a^n > b^n$ και θα δείξουμε ότι $a > b$.

Θα εργαστούμε με απαγωγή σε άτοπο[2].

Έστω ότι $a = b$,τότε όμως ισχύει $a^n = b^n$, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω ότι $a < b$, τότε από το αποδεδειγμένο ευθύ θα ισχύει ότι: $a^n < b^n$ το οποίο είναι επίσης άτοπο.

Συνεπω $a > b$. □

[2] Εφόσον έχει αποδειχθεί το ευθύ μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο στο αντίστροφο

Άσκηση 5. *Μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο ανισότητες κατά μέλη; Να εξηγήσετε γιατί, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και τις προτάσεις που έχουν αποδειχθεί παραπάνω.*

Παρατηρήσεις. Για την απόδειξη μίας ανισότητας, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες προσπαθούμε να την μετασχηματίσουμε ισοδύναμα σε μία από τις βασικές:

$x < 2$

$\frac{1}{y} \le \frac{1}{3}$ $\Big\} \ \frac{x}{y} < \frac{2}{3}$

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \quad (1)$$

$$a^2 \ge 0 \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } a = 0 \quad (2)$$

$$a, b \text{ ομόσημοι } \Leftrightarrow ab > 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > 0 \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + \cdots \ge 0 \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } a = b = c = \cdots 0 \quad (4)$$

$$(a - b)^2 \ge 0 \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } a = b \quad (5)$$

Παράδειγμα 2. *Αν $1 < x < 2$ και $3 \le y < 5$ να βρεθούν τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:*

$1 < x < 2$

$3 \le y < 5$

$\frac{1}{3} \ge \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$

$\frac{2}{3} \ge \frac{x}{y} > \frac{1}{5}$

1. $x + y$
2. $x - y$
3. $\frac{x}{y}$
4. x^2
5. $2x + \frac{1}{y}$
6. $\frac{2x-3}{y}$

$1 < x < 2$

$3 \le y < 5$

$-3 \ge -y > -5$

$2 > x > 1$

$-1 > x - y > -4$

Απόδειξη. Προσέχουμε σε κάθε βήμα την εφαρμογή των ιδιοτήτων!

1. $1 < x < 2$ και $3 \le y < 5$ οι ανισότητες έχουν ίδια φορά και μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη για να προκύψει το άθροισμά τους: $1 + 3 < x + y < 3 + 5 \Leftrightarrow 4 < x + y < 8$[3].

2. **Δεν** έχουμε **ιδιότητα αφαίρεσης ανισοτήτων** κατά μέλη, οπότε πρώτα θα δημιουργήσουμε το $-y$ και μετά θα προσθέσουμε κατά μέλη. Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν τη δεύτερη με -1, ώστε να προκύψει το $-y$: $-3 \ge -y > -5$ και έχουμε:

$1 < x < 2$ και $-5 < -y \le -3$ τις οποίες προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε: $1 - 5 < x - y < 2 - 3 \Leftrightarrow -4 < x - y < -1$.

3. Επίσης **δεν** έχουμε **ιδιότητα διαίρεσης ανισοτήτων** κατά μέλη, αλλά μόνο πολλαπλασιασμού, οπότε δημιουργούμε τον αντίστροφο και πολλαπλασιάζουμε.

$3 \le y < 5$ είναι ομόσημοι οι αριθμοί, οπότε από ιδιότητα για αντιστρόφους έχουμε: $\frac{1}{3} \ge \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$, στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες θετικών αριθμών με την ίδια φορά κατά μέλη και έχουμε:

$$\frac{1}{5} \cdot 1 < x \cdot \frac{1}{y} \le \frac{1}{3} \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < \frac{x}{y} \le \frac{2}{3}$$

[3] Όταν προσθέτουμε γνήσια ανισότητα $<$ με $\le$ προκύπτει γνήσια ανισότητα.

Άσκηση 9. *Να αποδειχθεί ότι:* $\alpha, b, c > 0$

$$\underbrace{\left(\overset{x}{a+1+\frac{1}{a}}\right)\left(\overset{y}{b+1+\frac{1}{b}}\right)\left(\overset{z}{c+1+\frac{1}{c}}\right)}\geq 27$$

ΑΜ – ΓΜ
πολ/σμός κ.μ.

$$\sqrt[3]{(x)(y)(z)} \geq \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$$

$$\left(\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha}\right)\left(\frac{b^2+b+1}{b}\right)\left(\frac{c^2+c+1}{c}\right) \; ? \; 27$$

$$(\alpha^2+\alpha+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geq 27abc$$

$$[(\alpha+1)^2-\alpha][(b+1)^2-b][(c+1)^2-c] \geq 27abc$$

$$\alpha+1+\frac{1}{\alpha} = \alpha+\frac{1}{\alpha}+1 \geq 2\sqrt{\alpha\frac{1}{\alpha}}+1 = 3 \qquad \boxed{\alpha>0}$$

$$b+1+\frac{1}{b} \geq 3$$

$$c+1+\frac{1}{c} \geq 3$$

$$\boxed{x+\frac{1}{x} \leq -2 \quad x<0}$$

$$\boxed{x+\frac{1}{x} \geq 2 \quad x>0}$$

$$\boxed{\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x\cdot\frac{1}{x}} = 1 \qquad x+\frac{1}{x} \geq 2}$$

$$x^2+1 \geq 2x$$
$$x^2-2x+1 \geq 0$$
$$(x-1)^2 \geq 0 \; ✓$$

Κατά μέλη

$$\left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(b+1+\frac{1}{b}\right)\left(c+1+\frac{1}{c}\right) \geq 3\cdot3\cdot3 = 27$$

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc.$

$(a^2b^2+a^2+b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$

$a^2b^2c^2+ab^2+a^2c^2+a^2+b^2c^2+b^2+c^2+1 \geq 8abc$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$a>0$

$a^2+1 = a\left(a+\frac{1}{a}\right) \geq 2a$

$b^2+1 = b\left(b+\frac{1}{b}\right) \geq 2b$

$c^2+1 = c\left(c+\frac{1}{c}\right) \geq 2c$

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8abc$

1) $a^2+b^2 \geq 2ab$

$|a|^2+1 \geq 2|a|\cdot 1$

$|b|^2+1 \geq 2|b|\cdot 1$

$|c|^2+1 \geq 2|c|\cdot 1$

$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq 8|abc| \geq 8abc$

Ασκηση 12. *Αν* $a,b,c \in \mathbb{R}-\{0\}$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq 3\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$x \quad y \quad \frac{1}{y} \quad \frac{1}{x} \quad z \quad \frac{1}{z}$

$$\left(\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}\right)^2 \geq 3\left(\frac{a^2b+c^2a+b^2c}{abc}\right)$$

$$\frac{(a^2c+b^2a+c^2b)^2}{(abc)^2} \geq 3\,\frac{(a^2b+c^2a+b^2c)}{abc}$$

$$(a^2c+b^2a+c^2b)^2 \geq 3abc(a^2b+c^2a+b^2c)$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\frac{a}{\cancel{b}}\frac{\cancel{b}}{c}+2\frac{b}{\cancel{c}}\frac{\cancel{c}}{a}+2\frac{\cancel{a}}{b}\frac{c}{\cancel{a}}=$$

$$\cdots\cdots\cdots+2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\geq 3\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\geq 0$$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\geq 0$$

$\boxed{xyz=1}$

$z=\frac{1}{xy}$

$y=\frac{1}{xz}$

$x=\frac{1}{yz}$

$$2x^2+2y^2+2z^2-\frac{2}{x}-\frac{2}{y}-\frac{2}{z}\geq 0$$

$$x^2+y^2-\frac{2}{z}+x^2+z^2-\frac{2}{y}+y^2+z^2-\frac{2}{x}\geq 0$$

$$x^2+y^2-2xy+x^2+z^2-2xz+y^2+z^2-2yz\geq 0$$

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$

ισχύει $\forall\, x,y,z \neq 0$

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Πέμπτη, 26 Νοεμβρίου 2020.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 Η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης στους ακεραίους $\mathbb{Z}$

Θεώρημα 1 (Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης)**.** *Αν* $\Delta, \delta \in \mathbb{Z}$*, με* $\delta \neq 0$*, τότε υπάρχουν μοναδικοί* $\pi, \upsilon \in \mathbb{Z}$*, τέτοιοι ώστε:*

$$\boxed{\Delta = \pi \cdot \delta + \upsilon}$$

και

$$\boxed{0 \leq \upsilon < |\delta|}$$

Οι υπόλοιπες ιδιότητες στις σημειώσεις από τη συνάντηση.

2 Εφαρμογές προς εξάσκηση

Άσκηση 1. *Αν* $a, b \in \mathbb{N}$*, με* $a > b$ *και* $a + b = 6612$ *και η διαίρεση* $a : b$ *έχει πηλίκο* 75*, να βρεθούν οι* a, b*.*

Άσκηση 2. *Αν ο αριθμός* $a \in \mathbb{N}$ *στη διαίρεση με 5 αφήνει υπόλοιπο 2 και στη διαίρεση με 6 αφήνει υπόλοιπο 1, να βρεθει το υπόλοιπό του στη διαίρεση με το 30.*

Άσκηση 3. *Αν* $a, b \in \mathbb{Z}$ *και* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ *και οι διαιρέσεις* $a : n$ *και* $b : n$ *αφήνουν ίδιο υπόλοιπο, τότε να αποδειχθεί ότι* $\frac{a-b}{n} \in \mathbb{Z}$*.*

Άσκηση 4. *Να βρεθούν οι ακέραιοι* k*, για τους οποίους ο αριθμός* $A = \frac{2k+1}{3} \in \mathbb{Z}$*.*

Άσκηση 5. *Αν* $a \in \mathbb{Z}$*, τότε να αποδειχθεί ότι* $A = \frac{a(a^3+1)}{2} \in \mathbb{Z}$*.*

Άσκηση 6. *Αν* $a \in \mathbb{Z}$ *τότε να αποδειχθεί ότι* $a^2 = 5k$ *ή* $a^2 = 5k + 1$ *ή* $a^2 = 5k + 4, k \in \mathbb{Z}$*. Να βρεθούν οι ακέραιοι* $a \in \mathbb{Z}$*, ώστε* $\frac{2a^2+8}{5} \in \mathbb{Z}$*.*

Άσκηση 7. *Αν* $a \in \mathbb{Z}$ *τότε να αποδειχθεί ότι* $a^2 = 3k$ *ή* $a^2 = 3k + 1$*.*

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Πέμπτη, 3 Δεκεμβρίου 2020.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 7 προβλήματα προς επίλυση...

Θέμα Α΄. *Αν ένας αριθμός* $a \in \mathbb{N}$ *στη διαίρεση με* 5 *αφήνει υπόλοιπο* 2*, ενώ στη διαίρεση με το* 6 *αφήνει υπόλοιπο* 1*, να βρεθεί το υπόλοιπό του στη διαίρεση με το* 30.

Θεμα Β'. *Αν το πολυώνυμο* $p(x)$ *διαιρούμενο με καθένα από τα* $x-1, x-2, x-3$ *αφήνει υπόλοιπα* $4, 2, 1$ *αντιστοίχως να βρεθεί το υπόλοιπο που αφήνει αν διαιρεθεί με* $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Θεμα Γ'. *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης:*

$$(x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 1) : (x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)$$

Θεμα Δ΄. *Αν m και e θετικοί ακέραιοι και $N = \frac{1997m}{m+1997^e}$ ακέραιος. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές του N.*

Θεμα Ε′. *Αν* $S \subset \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ *ώστε κανένα άθροισμα δύο διαφορετικών στοιχείων του* S *δεν περιέχεται στο* S*, να βρεθεί το μέγιστο δυνατό πλήθος αριθμών που περιέχονται στο* S.

Θεμα Ϛ΄. *Αν* $a, b \in \mathbb{R}$ *και ο αριθμητικός μέσος των τέταρτων δυνάμεών τους είναι ίσος με την τέταρτη δύναμη του αριθμητικού τους μέσου, να αποδειχθεί ότι οι* $a = b$.

Θεμα Ζ΄. *Αν* $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *θετικοί και* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, *να αποδειχθεί ότι καθένας από τους* $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, *είναι επίσης ρητός.*

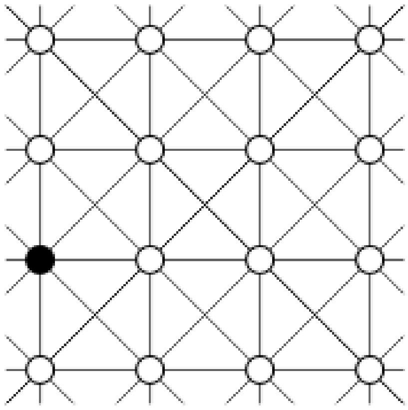
Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή, 11 Δεκεμβρίου 2020.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 7 προβλήματα προς επίλυση...

Θεμα Α′ (Ωισςονσιν 2012). *Δίνονται 16 σημεία στο επίπεδο τοποθετημένα στις κορυφές ενός πλέγματος 4Χ4, όπως στο σχήμα. Χρωματίζουμε το πρώτο σημείο της τρίτης γραμμής μαύρο και τα υπόλοιπα 15 λευκά, όπως στο σχήμα. Στη συνέχεια σε καθένα από τα επόμενα βήματα μπορούμε να επιλέξουμε μία οριζόντια ή μία κάθετη γραμμή ή μία γραμμή παράλληλη σε μία από τις διαγωνίους του πλέγματος και να αλλάξουμε το χρώμα σε όλα τα κομβικά σημεία του πλέγματος που ανήκουν σε αυτήν.*

Να εξεταστεί αν μπορούμε να κάνουμε όλα τα σημεία του πλέγματος λευκά.



Σχῆμα 1

Θέμα Β΄. *Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο* ABC *με διάμεσο* BD *και ύψος* CE*, ώστε* $BD = CE$ *και* $\angle DBC = \angle ECB$*. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο* ABC *είναι ισόπλευρο.*

Θεμα Γ΄. *Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης:*

$$(x^{99} + x^{98} + \cdots + x + 1) : (x^6 + x^5 + \cdots + x + 1)$$

Θεμα Δ′. *Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι* n, *ώστε οι* n^3 *και* n^4 *περιέχουν στη γραφή τους συνολικά, καθένα από τα ψηφία* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *ακριβώς μία φορά.*

Θεμα Ε′. *Να βρεθούν άπειροι ακέραιοι* $n \in \mathbb{N}$*, ώστε* $7 \mid 2^n + 27$.

Θεμα Ϡ΄. *Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων πέντε διαδοχικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι ίσο με τετράγωνο ακεραίου.*

ΘΕΜΑ Ζ′. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό* $n \in \mathbb{N}$, *ο αριθμός* n^2+3n+5 *δεν είναι πολλαπλάσιο του* 121.

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή, 18 Δεκεμβρίου 2020.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 Παιχνίδια με προκαθορισμένο νικητή...

Θέμα Α΄. *Δίνονται n σημεία στο επίπεδο. Δύο παίκτες συνδέουν διαδοχικά δύο διαφορετικά σημεία με μία γραμμή, ώστε αυτή να μην τέμνει μία ήδη υπάρχουσα γραμμή. Νικητής όποιος κάνει την τελευταία κίνηση.Έχει κάποιος στρατηγική νίκης;*

Θεμα Β′. *Δίνεται η εξίσωση:*

$$*x^2 + *x + * = 0$$

Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ο πρώτος επιλέγει οποιοσδήποτε τρεις πραγματικούς αριθμούς και ο δεύτερος τους τοποθετεί στις θέσεις των αστεριών με όποια σειρά επιθυμεί. Ο πρώτος κερδίζει αν η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές ρητές ρίζες. Σε κάθε άλλη περίπτωση κερδίζει ο δεύτερος. Έχει κάποιος στρατηγική νίκης;

Θεμα Γ′. *Δίνονται* n *σημεία σε έναν κύκλο αριθμημένα κατά σειρά από το 1 έως το* n. *Δύο παίκτες παίζουν εναλλάξ, ενώνοντας οποιοδήποτε ζεύγος σημείων με ίδιο ισοϋπόλοιπο ως προς 2. Κάθε νέα χορδή δεν πρέπει να έχει κοινά σημεία με τις προηγούμενες. Κερδίζει ο παίκτης που θα κάνει την τελευταία κίνηση. Υπάρχει στρατηγική νίκης για κάποιον από τους δύο;*

Θεμα Δ΄. *Δίνεται η εξίσωση:*

$$f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

Δύο παίκτες αντικαθιστούν εναλλάξ έναν από τους τρεις συντελεστές της εξίσωσης με έναν πραγματικό αριθμό. Κερδίζει ο πρώτος παίκτης αν η εξίσωση έχει τρεις ρίζες, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση κερδίζει ο δεύτερος παίκτης. Υπάρχει στρατηγική νίκης για τον πρώτο παίκτη;

Θέμα Ε′. *Γράφουμε στον πίνακα τους αριθμούς* $1, 2, 3, \ldots, 20$. *Δύο παίκτες τοποθετούν εναλλάξ, μπροστά από κάθε αριθμό το πρόσημο + ή το πρόσημο - σε έναν από τους μη προσημασμένους αριθμούς. Αν ο πρώτος παίκτης επιδιώκει το μικρότερο κατ΄ απόλυτη τιμή άθροισμά τους και ο δεύτερος το μεγαλύτερο, υπάρχει ανώτερο άθροισμα που μπορεί να επιτύχει ο δεύτερος παίκτης;*

Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

3 Δεκεμβριου 2020 | Φύλλο 8 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

Σωτήριος Χασάπης, *www.arithmoi.gr*

Η Ταυτότητα της Διαίρεσης

1 Εισαγωγή

Όλοι γνωρίζουμε να κάνουμε διαίρεση. Μαθαίνουμε ήδη από το Δημοτικό.

Η διαδικασία με την οποία κάνουμε τη διαίρεση είναι συγκεκριμένη ΚΑΙ ΠΑΝΤΑ οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα που αποτελείται από δύο αριθμούς: το **πηλίκο** και το **υπόλοιπο**.

Η διαδικασία που ακολουθείται περιλαμβάνει τις ίδιες σκέψεις - πράξεις για κάθε ψηφίο που υπολογίζουμε στο πηλίκο και τον ίδιο έλεγχο για το υπόλοιπο που προκύπτει σε κάθε βήμα.

Πρόκειται για έναν **αλγόριθμο**[1].

Φυσιολογικά, προκύπτουν τα ερωτήματα :

1) Γιατί υπάρχει πάντα λύση για κάθε ζεύγος αριθμών (διαιρετέου και διαιρέτη);

2) Γιατί όλοι βρίσκουμε την ίδια λύση όταν εκτελούμε τη διαδικασία της διαίρεσης;

2 Η ταυτότητα της Διαίρεσης

Θεώρημα 2.1 (Ταυτότητα - Αλγόριθμος της διαίρεσης). *Αν $a, b \in \mathbb{N}$ με $b \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί p, y, ώστε:*

$$a = p \cdot b + y, \quad 0 \leq y < b$$

. Οι αριθμοί p, y είναι μοναδικοί.

Απόδειξη. Με επαγωγή επί του a. □

Μία δεύτερη απόδειξη μπορεί να γίνει με χρήση του παρακάτω λήμματος, το οποίο επίσης αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή.

Λήμμα 2.1 (Αρχή Καλής Διάταξης). *Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών αριθμών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο.*

Παράδειγμα 2.1. *Να γίνει η διαίρεση $a : b$, $a = 22$, $b = 5$.*

Στην επίλυση αυτής της διαίρεσης αναζητούμε τα πολλαπλάσια του 5, τα οποία δεν ξεπερνούν τον αριθμό 22. Δηλαδή κατασκευάζουμε το σύνολο :

$$S = \{22,\ 22 - 1 \cdot 5,\ 22 - 2 \cdot 5,\ 22 - 3 \cdot 5,\ 22 - 4 \cdot 5\} =$$

$$\{22,\ 17,\ 12,\ 7,\ 2\}$$

Από το οποίο σύνολο επιλέγουμε το ελάχιστο στοιχείο που είναι μεγαλύτερο του 0 και υπάρχει από την αρχή της καλής διάταξης. Ο μέγιστος αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε το 5 (δηλ.τον διαιρέτη) είναι το πηλίκο.

Η ταυτότητα της διαίρεσης μπορεί να γενικευτεί και για ακέραιους αριθμούς.

Θεώρημα 2.2 (Ταυτότητα διαίρεσης για ακέραιους). *Για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$, $\quad b \neq 0$ υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι p, y, ώστε : $a = b \cdot p + y, 0 \leq y < |b|$.*

Άσκηση 1. *Να γίνουν οι διαιρέσεις :*

[1]Ως **αλγόριθμος** ορίζεται μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων και εκτελέσιμων σε πεπερασμένο χρόνο, που στοχεύουν στην επίλυση ενός προβλήματος. Πιο απλά αλγόριθμο ονομάζουμε μία σειρά από εντολές που έχουν αρχή και τέλος, είναι σαφείς και εκτελέσιμες που σκοπό έχουν την επίλυση κάποιου προβλήματος.

Η λέξη αλγόριθμος προέρχεται από μία μελέτη του Πέρση μαθηματικού του 8ου αιώνα μ.Χ. Αλ Χουαρίζμι (Abu Ja'far Mohammed ibn Musa Al-Khwarismi), η οποία περιείχε συστηματικές τυποποιημένες λύσεις αλγεβρικών προβλημάτων και αποτελεί ίσως την πρώτη πλήρη πραγματεία άλγεβρας. Πέντε αιώνες αργότερα η μελέτη μεταφράστηκε στα Λατινικά και άρχιζε με τη φράση "Algorithmus dixit ...." (ο Αλγόριθμος είπε...). Έτσι η λέξη αλγόριθμος καθιερώθηκε αργά τα επόμενα χίλια χρόνια με την έννοια «συστηματική διαδικασία αριθμητικών χειρισμών». Τη σημερινή της σημασία την οφείλει στη γρήγορη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών στα μέσα του 20ου αιώνα.

1. $a = 80,\ b = 6$

2. $a = 80,\ b = -6$

3. $a = -80,\ b = 6$

4. $a = -80,\ b = -6$

3 Εφαρμογές της ταυτότητας της διαίρεσης

Άσκηση 2. *Κάθε ακέραιος* $a \in \mathbb{Z}$ *γράφεται σε μία από τις μορφές :* $a = 2k+1,\ a = 2k, \qquad k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 3. *Κάθε ακέραιος γράφεται ακριβώς σε μία από τις μορφές :*

$$a = 3k,\ a = 3k+1,\ a = 3k-1, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

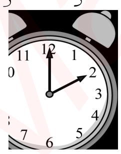
Άσκηση 4. *Για κάθε περιττό αριθμό* $p \in \mathbb{N}$ *ο αριθμός :* $a = \frac{p^2-1}{4}$ *είναι άρτιος.*

Άσκηση 5. *Για κάθε ακέραιο* a *ο αριθμός:* $\frac{a^2+a+3}{4} \notin \mathbb{Z}$.

4 Ισοϋπόλοιποι αριθμοί

Είναι γνωστό ότι οι ακέραιοι μπορούν να χωριστούν με διάφορους τρόπους σε κατηγορίες. Για παράδειγμα : Πολλαπλάσια του 3 και μη πολλαπλάσια του 3 ή ακόμα άρτιοι και περιττοί. Παρόμοια με κριτήριο τη διαίρεση με το 3 μπορούμε να τους κατατάξουμε ανάλογα με το υπόλοιπο που αφήνουν.

Άσκηση 6. *Δύο ποδηλάτες κάνουν το γύρο της Ελλάδας σε* $330h$ *ο πρώτος και σε* $342h$ *ο δεύτερος. Αν ξεκινήσουν από την Ακρόπολη της Αθήνας στις* $08:00$ *και ποδηλατούν καθημερινά μέχρι τις* $20:00$*, να βρεθεί τι ώρα θα τερματίσει ο καθένας τους.*



Ορισμός 4.1. *Οι ακέραιοι αριθμοί* a, b *θα λέγονται ισοϋπόλοιποι με μέτρο τον* m *ή modulus* $m > 0$*, αν στη διαίρεση με τον* m *έχουν το ίδιο υπόλοιπο. Δηλαδή :* $a = mk + y,\ b = ml + y, \qquad 0 \le y < m$. *Συμβολίζουμε:* $a \equiv b(mod m)$.

Η σχέση: $a \equiv b(mod m)$ *λέγεται ισοτιμία.*

Παράδειγμα 4.1. $4 \equiv 6(mod 2), 3 \equiv 15(mod 2)$ *κ.ο.κ.*

Άσκηση 7. *Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.*

1. $3 \equiv 12(mod 3)$

2. $11 \equiv 12(mod 3)$

3. $13 \equiv 12(mod 3)$

4. $15 \equiv 3(mod 12)$

5. $15 \equiv 27(mod 12)$

6. $-3 \equiv 17(mod 10)$

7. $11 \equiv 68(mod 3)$

8. $-3 \equiv 0(mod 3)$

Άσκηση 8. *Αν* $a \equiv b(mod m)$ *μπορείτε να βρείτε μία σχέση που να συνδέει τους* m *και* $a - b$ *;*

Άσκηση 9. *Να βρεθούν οι διψήφιοι φυσικοί αριθμοί* a*, ώστε :* $a \equiv 37(mod 41)$.

Άσκηση 10. *Αν 4 Νοέμβρη είναι ημέρα Δευτέρα, τότε να βρεθεί ποια ημέρα της εβδομάδας του ίδιου έτους είναι οι :* $12/11,\ 20/11,\ 17/11,\ 27/11$.

Άσκηση 11. *Θεωρούμε ένα κανονικό εξάγωνο* $ABCDEF$ *με κέντρο* O*. Αν το περιστρέψουμε γύρω από το κέντρο του 3 φορές κατά* 60^o *ή 9 φορές κατά* 60^o *να βρεθεί σε κάθε περίπτωση η νέα θέση των κορυφών του. Αν από την αρχική του θέση θεωρήσουμε το συμμετρικό του ως προς τη διαγώνιο* AD *ποια θα είναι τότε η νέα θέση των κορυφών του;*

Το πρόβλημα της εβδομάδας

Ο Πλάτων στους Νόμους του χρησιμοποιεί ένα αριθμό μικρότερο του 10000 ο οποίος έχει διαιρέτες 10 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Βρείτε τον.

Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

'Ομιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

3 Δεκεμβριου 2020 | Φύλλο 9 | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

Σωτήριος Χασάπης, www.arithmoi.gr

Η αριθμητική $\mod m$.

1 Η αριθμητική $\mod m$

Όλα τα προηγούμενα χρόνια δουλεύουμε με την συνηθισμένη αριθμητική των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των πραγματικών αριθμών. Και θα συνεχίσουμε να δουλεύουμε με αυτήν. Υπάρχουν όμως και άλλες αριθμητικές που έχουν την δική τους θεωρητική αξία και τις δικές τους εφαρμογές. Στη σημερινή συνάντηση θα συζητήσουμε μία από αυτές. Μελετήθηκε συστηματικά από τον Carl Friedrich Gauss[1] στο έργο του *Disquisitiones Arithmeticae* (Αριθμητικές Έρευνες).

Ονομάζεται *γνωμονική αριθμητική* (modular arithmetic). Στην αριθμητική αυτή επιλέγουμε ένα ακέραιο $m > 1$ και εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ ακεραίων με *γνώμονα* αυτόν τον ακέραιο ως εξής: προσθέτουμε αφαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε τους δύο ακεραίους και μετά ότι βρούμε το διαιρούμε δια m. Σαν αποτέλεσμα βάζουμε όχι τον αριθμό που βρήκαμε αλλά το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού που βρήκαμε δια m. Αν για παράδειγμα θέλουμε να προσθέσουμε τους 7 και 13 $\mod 8$ τότε

Carl Friedrich Gauss
1777-1855

- Θα προσθέσουμε τους 7 και 13 με τον συνηθισμένο τρόπο και θα βρούμε 20.
- Θα διαιρέσουμε το 20 δια του 8 και θα βρούμε πηλίκο 2 (που δεν μας ενδιαφέρει) και υπόλοιπο 4,
- το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των 7 και 13 όχι με τον συνηθισμένο τρόπο αλλά $\mod 8$ είναι 4. Γράφουμε $7 + 13 \equiv 4(\mod 8)$.

Καθώς αντιλαμβάνεσθε στην αριθμητική $\mod 8$ τα αποτελέσματα που μπορούμε να βρούμε είναι υπόλοιπα διαίρεσης δια 8. Και αυτά είναι τα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Γενικά αν δουλεύουμε $\mod m$ τα αναμενόμενα αποτελέσματα είναι 0, 1, 2, ..., $m-1$. Είδαμε ότι

$$7 + 13 \equiv 4(\mod 8)$$

Αλλά και

$$15 + 13 \equiv 4(\mod 8)$$

$$15 + 21 \equiv 4(\mod 8)$$

$$(-1) + 13 \equiv 4(\mod 8)$$

$$(-1) + 5 \equiv 4(\mod 8)$$

$$(-1) + 21 \equiv 4(\mod 8)$$

Δεν είναι δύσκολο να δείτε ότι οποιοσδήποτε από τους αριθμούς 7, 15, -1 προστεθεί $\mod 8$ με οποιονδήποτε από τους αριθμούς 13, 21, 5 θα δώσει αποτέλεσμα 4. Αν προσέξουμε θα δούμε ότι όλοι οι αριθμοί 7, 15, -1 είναι ισοϋπόλοιποι $\mod 8$ (διαιρούμενοι με το 8 αφήνουν υπόλοιπο 7). Αλλά και οι 13, 21, 5 είναι ισοϋπόλοιποι $\mod 8$. Αυτός είναι και ο λόγος που παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Πράγματι ας υποθέσουμε ότι $\alpha + \beta = \gamma(\mod 8)$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο άλλους αριθμούς α', β' που είναι ισότιμοι με τους α, β $\mod 8$. Τότε $\alpha - \alpha' = 8k$ αλλά και $\beta - \beta' = 8k'$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \alpha' + \beta - \beta' = 8k + 8k'$ και επομένως $(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') = 8(k + k')$. Άρα οι αριθμοί $\alpha + \beta$ και $\alpha' + \beta'$ είναι ισοϋπόλοιποι $\mod 8$. και αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης $\alpha+\beta : 8$ είναι γ και το υπόλοιπο της $\alpha'+\beta' : 8$ θα είναι γ. Επομένως θα είναι και $\alpha' + \beta' = \gamma(\mod 8)$. Αν κάνουμε τον ίδιο συλλογισμό αλλά αντί στην θέση του 8 φαντασθούμε τον m θα έχουμε το:

Θεώρημα 1.1 Αν $\alpha \equiv \alpha'(\mod m)$ και $\beta \equiv \beta'(\mod m)$ τότε $\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta'(\mod m)$.

Οι αριθμοί που είναι μεταξύ τους ισότιμοι (ισοϋπόλοιποι) $\mod 8$ είναι «οργανωμένοι» σε σύνολα (λέγονται και κλάσεις):

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 0:
  $... - 16, -8, 0, 8, 16, 24, ...$
- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 1:
  $... - 15, -7, 1, 9, 17, 25, ...$
- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 2:
  $... - 14, -6, 2, 10, 18, 26, ...$
- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 3:
  $... - 13, -5, 3, 11, 19, 27, ...$

[1] Στα Ελληνικά υπάρχει η μυθιστορηματική βιογραφία του: *Καρλ Φρίντριχ Γκάους. Ο Πρίγκιπας των Μαθηματικών* της M. B. W. Tent σε μετάφραση Στάμου Τσιτσώνη από τις εκδόσεις ΤΡΑΥΛΟΣ, 2007

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 4:
  $\ldots -12, -4, 4, 12, 20, 28, \ldots$

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 5:
  $\ldots -11, -3, 5, 13, 21, 29, \ldots$

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 6:
  $\ldots -10, -2, 6, 14, 22, 30, \ldots$

- Εκείνοι που αφήνουν υπόλοιπο 7:
  $\ldots -9, -1, 7, 15, 23, 31, \ldots$

Αν προσθέτουμε $\mod 8$ όποιον αριθμό και αν πάρουμε από μία κλάση και όποιον αριθμό πάρουμε από μία άλλη το αποτέλεσμα που θα βρούμε θα είναι το ίδιο. Στην πρόσθεση $\mod 8$ όλες οι κλάσεις «εκπροσωπούνται» εξ' ίσου καλά όποιον αριθμό και αν διαλέξουμε να τις «εκπροσωπήσει». Ας συμβολίσουμε την πρώτη κλάση με $\mathbf{0}$ την δεύτερη με $\mathbf{1}$ κ.οκ. φθάνοντας στην όγδοη που θα συμβολίσουμε με $\mathbf{7}$.Η σχέση $7+13 \equiv 4(\mod 8)$ που είδαμε πιο πριν ουσιαστικά μας λέει ότι όποιο αριθμό και αν προσθέσουμε από την κλάση $\mathbf{7}$ με όποιον αριθμό από την κλάση $\mathbf{5}$ (σε αυτήν ανήκει ο 13) θα πάρουμε αριθμό από την κλάση $\mathbf{4}$. Γράφουμε συμβολικά $\mathbf{7}+\mathbf{5}=\mathbf{4}$. Ουσιαστικά η νέα αριθμητική μας έχει 8 στοιχεία (:τις κλάσεις). Σε αυτήν $\mathbf{6}+\mathbf{5}=\mathbf{3}$ και $\mathbf{4}+\mathbf{4}=\mathbf{0}$!

Άσκηση 1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα «προπαίδειας» για την πρόσθεση $\mod 8$.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Με εντελώς ανάλογο τρόπο ορίζεται και ο πολλαπλασιασμός $\mod m$: Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς και ότι βρούμε το διαιρούμε δια m. Το υπόλοιπο που προκύπτει είναι το γινόμενο τους $\mod m$. Ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.2 Αν $\alpha \equiv \alpha' (\mod m)$ και $\beta \equiv \beta' (\mod m)$ τότε $\alpha \cdot \beta \equiv \alpha' \cdot \beta' (\mod m)$.

Άσκηση 2 Να αποδείξετε το θεώρημα **;;**

Άσκηση 3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα «προπαίδειας» για τον πολλαπλασιασμό $\mod 8$.

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

Άσκηση 4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα «προπαίδειας» για τον πολλαπλασιασμό $\mod 5$.

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0					
1					
2					
3					
4					
5					

2 Η αριθμητική $\mathbb{Z}_m$

Με $\mathbb{Z}_m$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων $\mod m$ που τις συμβολίζουμε με $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$,..., $\mathbf{m-1}$. Προστίθενται και πολλαπλασιάζονται με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν. Στο $\mathbb{Z}_m$ μπορούμε να κάνουμε διάφορους υπολογισμούς, να λύνουμε εξισώσεις συστήματα κ.α. Ας δούμε μερικούς:

Άσκηση 5 *Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης*

$$(\mathbf{2}+\mathbf{3})(\mathbf{5}+\mathbf{4})+\mathbf{2}$$

στο $\mathbb{Z}_8$.
Κατόπιν να κάνετε το ίδιο στο $\mathbb{Z}_{12}$.

Άσκηση 6 Να βρείτε τον αντίθετο (: που έχει με αυτόν άθροισμα μηδέν) του $\mathbf{4}$:

1. Στο $\mathbb{Z}_{12}$
2. Στο $\mathbb{Z}_5$

Άσκηση 7 Να βρείτε τον αντίστροφο (: που έχει με αυτόν γινόμενο ένα) του $\mathbf{4}$:

1. Στο $\mathbb{Z}_5$
2. Στο $\mathbb{Z}_{12}$

Άσκηση 8 Να λύσετε στο $\mathbb{Z}_5$ την εξίσωση

$$\mathbf{2x}+\mathbf{3}=\mathbf{1}$$

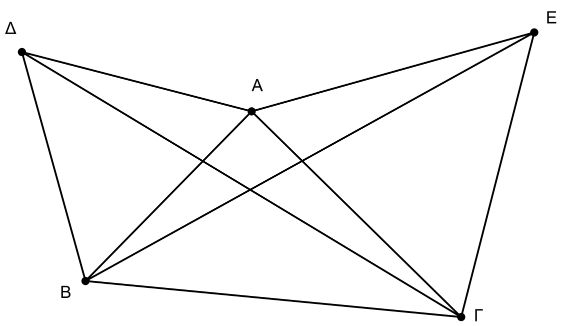
.

Άσκηση 9 Να λύσετε στο $\mathbb{Z}_7$ το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{2x}+\mathbf{y}=\mathbf{1}\\ \mathbf{x}-\mathbf{2y}=\mathbf{3}\end{array}\right\}$$

Το προβλημα της εβδομαδας

Στο σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισόπλευρα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.



Πέμπτη 10 Δεκεμβρίου 2020

Υπενθύμιση ιδιοτήτων πράξεων ισοϋπόλοιπων αριθμών.

$a \equiv b \bmod c \Leftrightarrow c \mid a-b \Leftrightarrow a = nc + b$

$a \equiv a \bmod c$ | $a \equiv b \bmod d$ κ $b \equiv c \bmod d \Rightarrow a \equiv c \bmod d$

$a \equiv b \bmod d \Longrightarrow ac \equiv bc \pmod d$

$a \equiv b \pmod d$, $c \equiv e \pmod d$ $\Longrightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm e) \bmod d$

ΟΧΙ $a \equiv b \bmod \Longrightarrow a:k \equiv (b:k) \pmod d$

$ac \equiv bc \bmod d \overset{(c,d)=1}{\Longleftrightarrow} a \equiv b \pmod d$

$3 \equiv 5 \pmod 2 \equiv 1 \bmod 2$

$2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 5 \pmod 2$

$6 \equiv 10 \pmod 2 \equiv 0 \pmod 2$

$6 \equiv 0 \pmod 3$

$10 \equiv 1 \pmod 3$

$6 \not\equiv 10 \pmod 3$

10/12/2020

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ mod 10

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
2	4	8	6	2	4
3	9	7	1	3	9
4	6	4	6	4	6
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	9	3	1	7	9
8	4	2	6	8	4
9	1	9	1	9	1

Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο

$7^{2016} = (7^4)^{504} \equiv 1^{504} (\mathrm{mod}\ 10) \equiv 1 \ \mathrm{mod}\ 10$

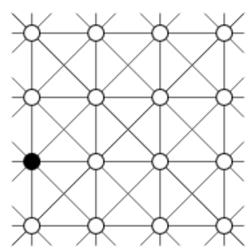
$$\begin{array}{r|l} 2016 & 4 \\ \hline 016 & 504 \\ 0 & \end{array}$$

0

τελευταίο ψηφίο 1

$7^{2016} \rightarrow$ 2 τελευταία ψηφία?

5. Consider 16 lattice points arranged on a 4×4 square grid. We color the first point of the third row black and the other 15 points with white. Next in each step we can choose a horizontal or a vertical line or a line which is parallel to one of the main diagonals and we can change the colors of the lattice points on that line to the opposite. Is it possible to change the colors of all the lattice points to white?



$7^2 \equiv 49 (\mathrm{mod}\ 100)$

$7^3 = 343 \equiv 43 \ (\mathrm{mod}\ 100)$

$7^4 = 2401 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 100)$

$7^5 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 100)$

$7^{2016} = (7^4)^{504} \equiv 1^{504} (\mathrm{mod}\ 100)$

$\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 100)$

0 mod 2 = { άρτιοι }

1 mod 2 = { περιττοί }

$3 \neq 241 \quad 3 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)$

$241 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)$

τελ. ψηφία 7^{2016} : 01

Τελευταίο ψηφίο $3^{1999} + 2^{1999}$

$$\begin{array}{r|l} 1999 & 4 \\ \hline 3 & 499 \end{array}$$

$1999 = 4 \cdot 499 + 3$

$3^{1999} \equiv 3^3 \ \mathrm{mod}\ 10$

$\equiv 7 (\mathrm{mod}\ 10)$

$2^{1999} \equiv 2^3 \ \mathrm{mod}\ 10 \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 10)$

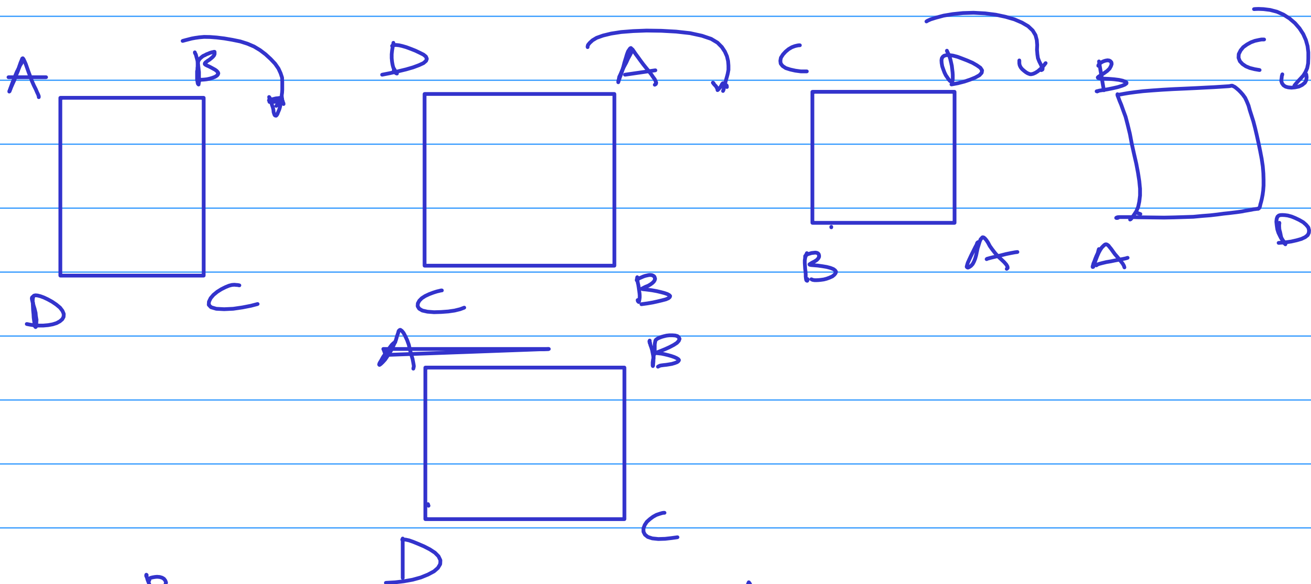
$$(2^4)^{499}\cdot 2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

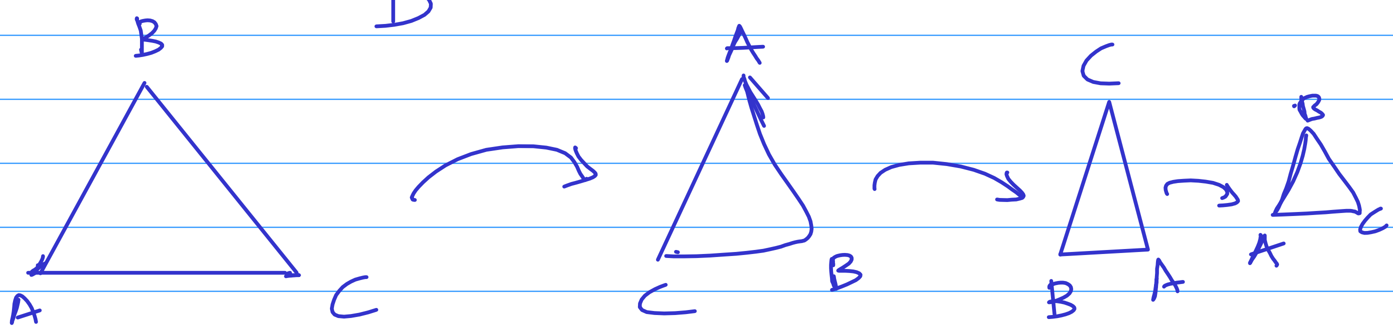
$$3^{1999}+2^{1999} \equiv (7+8) \bmod 10 \equiv 5 \pmod{10}$$

$$3^{1999} = 3^{4\cdot 499+3} = (3^4)^{499}\cdot 3^3 \equiv 1\cdot 7 \pmod{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^3 = 27 = 2\cdot 10 + 7 \\ 3^4 = 81 = 8\cdot 10 + 1 \end{array}\right\} \quad 3^3\cdot 3^4 = (2\cdot 10+7)(8\cdot 10+1) =$$

$$\cancel{2\cdot 10\cdot 8\cdot 10} + \cancel{2\cdot 10\cdot 1} + \cancel{7\cdot 8\cdot 10} + 7\cdot 1$$





Ε1995Α Να εξεταστεί αν υπάρχουν ακέραιοι x, y ώστε $x^2+4y=1995$

$4y \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow 4y = \text{πολ}4$

$1995 \equiv 3 \pmod 4 \Leftrightarrow 1995 = 4\cdot k+3$

$x^2 = 1995 - 4y \equiv 3 \pmod 4 - 0 \pmod 4$ $\quad 4\cdot 498+3$

$$x^2 \equiv 3 \pmod 4$$

$$\begin{array}{l|l} 1995 & 4 \\ \hline 39 & 498 \\ \ 35 & \\ \ \ 3 & \end{array}$$

mod4

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	1

Οποιοσδήποτε αριθμός στο τετράγωνο 0,1 (mod4)

άρα $x^2 \equiv 3 \pmod 4$ αδύνατο

Συνεπώς δεν υπάρχουν τέτοιοι ακέραιοι

$x = 4k + \upsilon \qquad \upsilon = 0,1,2,3$

$x^2 = (4k+1)^2 = (4k)^2 + 8k + 1$

ή $x^2 = (4k+2)^2 = \qquad +4 \equiv 0 (m4)$

$x^2 = (4k+3)^2 = \qquad 1 (m4)$

$x^2 = (4k+0)^2 = \qquad 0 (m4)$

Υπόλοιπο της $2^{100} : 7$

$2^1 \equiv 2 \pmod 7$
$2^2 \equiv 4 \pmod 7$
$2^3 \equiv 1 \pmod 7$
$2^4 \equiv 2 \pmod 7$
$2^5 \equiv 4 \pmod 7$

$100 \mid 3$ → 33, υπόλοιπο 1

$2^{100} = (2^4)^{25} \equiv 2^{25} \pmod 7 =$
$= (2^5)^5 \pmod 7 \equiv 4^5 \pmod 7$
$= 2^{10} \pmod 7 = (2^5)^2 \pmod 7$
$= 4^2 \pmod 7 = 16 \bmod 7$
$= 2 \pmod 7$.

$2^{100} = 2^{3\cdot 33+1} = (2^3)^{33}\cdot 2^1 \equiv$
$\equiv (2^3)^{33} \bmod 7 \cdot 2^1 \pmod 7$
$\equiv 1^{33} \bmod 7 \cdot 2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$

ΝΔΟ $\boxed{21 \mid \left(2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1}\right) = A}$ $\nu \in \mathbb{N}$

Για $\nu = 1$: $2^6 + 5^3 = 64 + 125 = 189 = 9\cdot 21$

$21 = 3\cdot 7 \qquad 3\mid A$ και $7 \mid A$

$2 \equiv 2 \pmod 3 \qquad 2^6 \equiv 1 \pmod 3$

$2^2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad 2^{2\nu+4} \equiv 1 \pmod 3$

$2^3 \equiv 2 \pmod 3 \qquad 2\nu+4$ άρτιος

$5 \equiv 2 \pmod 3$ $\quad 5^{2\nu+1} \equiv 2 \pmod 3$ διότι $2\nu+1$ περιττός

$5^2 \equiv 1 \pmod 3$ $\quad A \equiv 1 \pmod 3 + 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 3$

$5^3 \equiv 2 \pmod 3$ $\quad \equiv 0 \pmod 3$

άρα $3 | A$

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$ $\quad 5 \equiv 5 \pmod 7 \equiv (-2) \bmod 7$

$2^4 \equiv 2 \pmod 7$ $\quad 5^2 \equiv 4 \pmod 7$

$2^5 \equiv 4 \pmod 7$ $\quad 5^3 \equiv (-1) \pmod 7$

για $3|\nu$: $2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1} = 2^{2\cdot 3k+4} \equiv 2 \pmod 7$

$5^{2\nu+1} = 5^{2\cdot 3k} \cdot 5 = 5^{6k+1} = 5 \pmod 7 \equiv (-2) \pmod 7$

$A = 2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1} \equiv 2 \pmod 7 + (-2) \bmod 7 \equiv 0 \pmod 7$

ομοίως για τα άλλα υπόλοιπα του 3

1) $6^{1987} : 37 \longrightarrow$ υπόλοιπο $= 31$

2) ΝΔΟ $7 | A = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

3) Υπάρχουν ακέραιοι x, y : $x^2 - 5y^2 = 2$?

4) Να βρεθούν ακέραιοι $\nu \in \mathbb{N}$: $7 | 2^\nu + 27$

5) ΝΔΟ $3 | n$ αν το $3 | \Sigma = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$

όπου $n = \overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_k}$

6) ΝΔΟ $2^k - 5 \not\equiv 1 \pmod 7$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

$3 \pmod 2 \equiv 5 \pmod 2$

$3 \equiv 5 \pmod 2 \equiv 1$

$1 \equiv 5 \pmod 2$

$1 \equiv 5 \pmod 2 = \underbrace{\{1, 3, 5, 7, 9, \dots, -1, -3, -5\}}_{\text{ΣΥΝΟΛΟ ΑΡΙΘΜΩΝ}}$

$\alpha \equiv b \bmod c \Leftrightarrow c \mid a-b \Leftrightarrow a = nc + b$	
$\alpha \equiv \alpha \bmod c$	$\alpha \equiv b \bmod d$ κ $b \equiv c \bmod d \Rightarrow a \equiv c \bmod d$
$\alpha \equiv b \bmod d \Rightarrow ac \equiv bc \pmod d$	
$\alpha \equiv b \pmod d$, $c \equiv e \pmod d \Rightarrow (a \pm c) \equiv (b \pm e) \bmod d$	
ΟΧΙ $\alpha \equiv b \bmod \Rightarrow \alpha : k \equiv (b : k) \pmod d$	
$ac \equiv bc \bmod d \overset{(c,d)=1}{\Longrightarrow} a \equiv b \pmod d$	

$3 \equiv 5 \pmod 2 \equiv 1 \bmod 2$

$2 \cdot 3 \equiv 2 \cdot 5 \pmod 2$

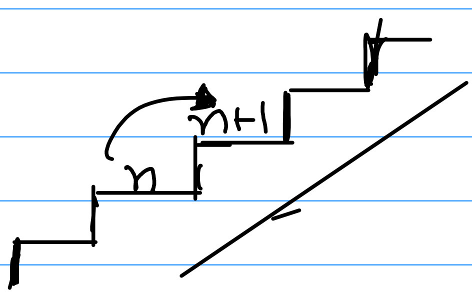
$6 \equiv 10 \pmod 2 \equiv 0 \pmod 2$

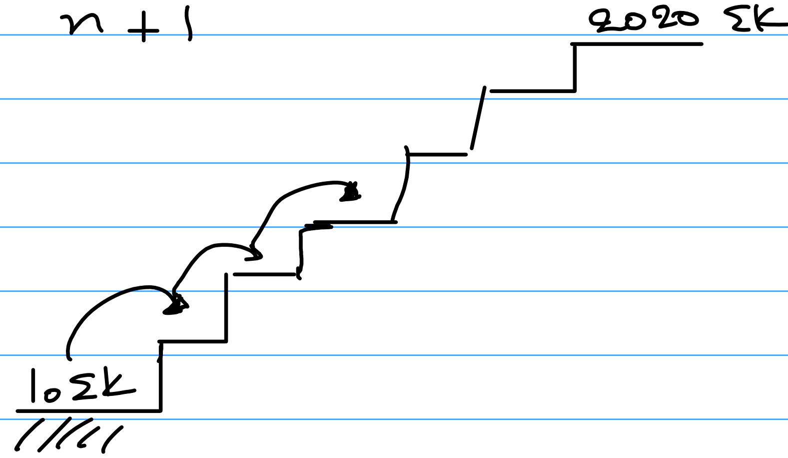
$6 \equiv 0 \pmod 3$

$10 \equiv 1 \pmod 3$

$6 \not\equiv 10 \pmod 3$

- Δείξε ότι αν η ιδιότητα Α ισχύει για τον n τότε θα ισχύει και για τον επόμενο $n+1$





$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ιδιότητα επομένου: Θεωρώ ότι ισχύει $n = k \in \mathbb{N}$ και ΘΔΟ ισχύει για $n = k+1$ (ΕΥ)

ΕΥ. Ισχύει $1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

ΘΔΟ ισχύει για $n = k+1$:

$$\underbrace{1+2+\cdots+k}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\overset{\text{ה״א}}{\Longleftrightarrow}\quad \frac{k(k+1)}{2}+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \cdots \quad \Longleftrightarrow\quad 0=0$$

<u>אם? גם $n=3$</u>

$$1+2+3=6 \quad \checkmark$$

$$\frac{3\cdot(3+1)}{2}=\frac{12}{2}=6$$

1 Εισαγωγή

Ο όρος **Διοφαντική εξίσωση** οφείλεται στο μαθηματικό Διόφαντο, ο οποίος ξεκίνησε τη μελέτη τέτοιων εξισώσεων. Στην πραγματικότητα γνωρίζουμε λίγα για τη ζωή του Διόφαντου. Έζησε περίπου το 350μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια. Το μόνο γνωστό που έχουμε για την ζωή του προέρχεται από ένα επίγραμα - πρόβλημα: *Υπήρξε παιδί για το 1/6 της ζωής του· η γενιάδα του μεγάλωσε μετά από ακόμα 1/12 της ζωής του· μετά από ακόμα ένα 1/7 της ζωής του παντρεύτηκε, ενώ ο γιος του γεννήθηκε 5 χρόνια μετά. Αν ο γιος του έζησε τα μισά χρόνια από τον πατέρα του ο οποίος πέθανε 4 χρόνια μετά από αυτόν, να βρεθεί η ηλικία στην οποία πέθανε ο Διόφαντος.*

Η εργασία στην οποία οφείλεται η φήμη του Διόφαντου είναι τα *Αριθμητικά* του. Από αυτά διασώζονται μόνο 6 από τα 13 βιβλία.

Ο απλούστερος τύπος *Διοφαντικής εξίσωσης* είναι μία εξίσωση με έναν ή περισσότερους αγνώστους, της οποίας ζητούνται ακέραιες λύσεις. Για παράδειγμα η γραμμική Διοφαντική εξίσωση με δύο αγνώστους:

$$ax + bx = c$$

όπου οι $a, b, c \in \mathbb{Z}$ και οι $a, b \neq 0$. Μία λύση αυτής της εξίσωσης είναι ένα ζεύγος ακεραίων x_0, y_0, ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση, δηλαδή: $ax_0 + by_0 = c$.

2 Γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις

Μία γραμμική Διοφαντική εξίσωση μπορεί να έχει πολλές λύσεις όπως για παράδειγμα η $3x + 6y = 18$, όπου λύσεις, μεταξύ άλλων, είναι τα ζεύγη: $(4, 1), (-6, 6), (10, -2)$. Ενώ η εξίσωση $2x + 10y = 17$ δεν έχει καμία λύση, αφού το αριστερό μέλος είναι πάντα άρτιος αριθμός, ενώ το δεξί μέλος περιττός. Η συνθήκη λύσης της Διοφαντικής εξίσωσης καθορίζεται από το:

Θεώρημα 2.1. *Η γραμμική Διοφαντική εξίσωση $ax + by = c$ έχει μία λύση, αν και μόνο αν $d \mid c$, όπου $d = (a, b)$. Αν x_0, y_0 είναι μία συγκεκριμένη λύση αυτής της εξίσωσης, τότε ΟΛΕΣ οι υπόλοιπες λύσεις δίνονται από τους τύπους:*

$$x = x_0 + \frac{b}{d} + t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Η απόδειξη που παραλείπεται ουσιαστικά δίνει και τον τρόπο λύσης της γραμμικής διοφαντικής όπως περιγράφεται στο επόμενο:

Παράδειγμα 2.1. *Να λυθεί η Διοφαντική εξίσωση:* $172x + 20y = 1000$.

Εφαρμόζουμε τον Ευκλείδιο αλγόριθμο για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη $(172, 20)$:

$$\begin{aligned} 172 &= 8 \cdot 20 + 12 \\ 20 &= 1 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Οπότε $(172, 20) = 4$. Τώρα ο αριθμός $4 \mid 1000$, οπότε η εξίσωση έχει λύση. Για να την βρούμε θα γράψουμε τον αριθμό 4 ως γραμμικό συνδυασμό των $172, 20$, το οποίο μπορεί να γίνει ακολουθώντας προς τα πίσω την εύρεση του ΜΚΔ, ως εξής:

$$\begin{aligned} 4 &= 12 - 8 = \\ &= 12 - (20 - 12) = \\ &= 2 \cdot 12 - 20 = \\ &= 2(172 - 8 \cdot 20) - 20 = \\ &= 2 \cdot 172 + (-17) \cdot 20 \end{aligned}$$

Οπότε, πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με 250 παίρνουμε τη λύση της ζητούμενης εξίσωσης:

$$1000 = 250 \cdot 4 = 250 \cdot (2 \cdot 172 + (-17) \cdot 20) =$$

$$= 500 \cdot 172 + (-4250) \cdot 20$$

Συνεπώς, ένα ζεύγος λύσεων είναι: $(x, y) = (500, -4250)$ και όλες οι υπόλοιπες λύσεις γράφονται στη μορφή:

$$x = 500 + \left(\frac{20}{4}\right) t = 500 + 5t$$
$$y = -4250 - \left(\frac{172}{4}\right) t = -4250 - 43t$$
$$t \in \mathbb{Z}.$$

Ας δούμε και ένα πρόβλημα, το οποίο θα λύσουμε με διαφορετικό τρόπο:

Θεμα 2.1. *Να βρεθούν όλοι οι τρόπου με τους οποίους μπορούμε να διαθέσουμε ακριβώς 200€ για την αγορά βιβλίων αξίας 5€ το καθένα και τετραδίων αξίας 3€ το καθένα.*

Λύση. Αν q είναι το πλήθος των βιβλίων και y το πλήθος των τετραδίων που θα αγοραστούν, τότε $5x+3y = 200$ είναι η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε με $x, y \geq 0$. Μία άλλη μέθοδος είναι αυτή της δοκιμής για να την λύσουμε.

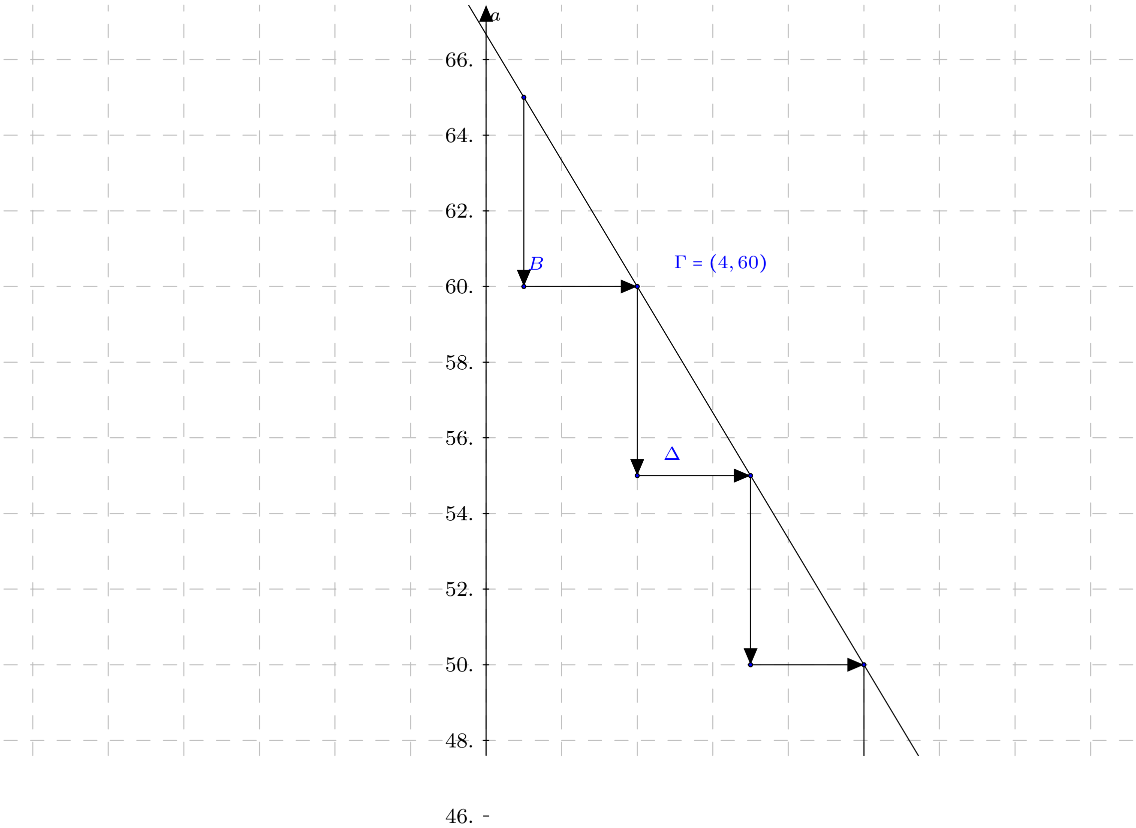
Συγκεκριμένα, για $x = 1$ παρατηρούμε ότι ο αριθμός $200-1cdot5 = 195$ διαιρείται από τον αριθμό 3 και μάλιστα ισχύει: $195 = 3 \cdot 65$. Οπότε το ζεύγος $x = 1, y = 65$ αποτελεί μία λύση της εξίσωσης αφού: $5 \cdot 1 + 3 \cdot 65 = 200$.

Όμως, 3 βιβλία κοστίζουν όσο 5 τετράδια, οπότε αν αντικαταστήσουμε 3 βιβλία με 5 τετράδια ή 5 τετράδια με 3 βιβλία θα έχουμε μία ακόμα λύση της εξίσωσης την: $x = 4,\ y = 60$, όπου πράγματι: $5 \cdot 4 + 3 \cdot 60 = 200$. Γενικότερα, αν κάνουμε t τέτοιες αντικαταστάσεις θα έχουμε διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης της μορφής: $x = 1 + 3t,\ y = 65 - 5t$.

Το παραπάνω ζεύγος για $t \geq 0, x \geq 0$ και συγκεκριμένα για $t = 0, 1, 2, \ldots, 13,$ και $y \geq 0$ παίρνουμε τις 14 λύσεις της εξίσωσης. □

Ας θεωρήσουμε τώρα το προηγούμενο πρόβλημα γεωμετρικά.

Η εξίσωση $5x + 3y = 200$ παριστάνει μία ευθεία γραμμή στο επίπεδο. Κάθε λύση της εξίσωσης είναι ένα σημείο με ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκεται πάνω σε αυτήν την ευθεία. Από την πρώτη λύση που βρήκαμε την $(1, 65)$ μπορούμε να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες γεωμετρικά χρησιμοποιώντας την κλίση της ευθείας: $-\frac{5}{3}$, μετακινώντας το αρχικό σημείο λύση 3 μονάδες δεξιά και 5 μονάδες κάτω για t φορές.



Απ'όπου επίσης προκύπτει ότι η γενική λύση της $5x + 3y = 200$ είναι η $x = 1 + 3t, y = 65 - 5t, t \geq 0$

ΘΕΜΑ 2.2. *Δίνεται ένα δοχείο 11 λίτρων και ένα 8 λίτρων τα οποία δεν έχουν διαβαθμίσεις. Να βρεθεί ένας τρόπος ώστε σε ένα τρίτο δοχείο να τοποθετηθεί 1 λίτρο νερού, χρησιμοποιώντας τα δύο αρχικά δοχεία και όσο το δυνατόν λιγότερο νερό.*

Λύση. Έστω q, y ο αριθμός των φορών που θα γεμίσουμε τα δοχεία των 11 και των 8 λίτρων αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση θα γεμίσουμε το μεγάλο δοχείο με νερό και στη συνέχεια θα το αδειάσουμε στο τρίτο δοχείο, απ΄ όπου θα πάρουμε περιεχόμενο χρησιμοποιώντας το μικρό δοχείο, ώστε τελικά να απομείνει στο τρίτο δοχείο 1 λίτρο. Έτσι, ο όγκος του νερού που θα έχει απομείνει στο τρίτο δοχείο θα περιγράφεται από την εξίσωση: $11x - 8y = 1$.

Σε αυτήν την περίπτωση αναζητούμε πολλαπλάσια του 11, των οποίων η διαφορά από πολλαπλάσια του 8 αφήνουν υπόλοιπο 1. Εφόσον, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το λιγότερο δυνατό όγκο νερού ψάχνουμε πρώτα για όσο το δυνατόν μικρότερο πολλαπλάσιο του 11 με την προηγούμενη ιδιότητα.

Για $11 \cdot 1$ έχουμε $11 \cdot 1 - 8 \cdot 1 \neq 1$, $11 \cdot 1 - 8 \cdot 2 < 0$

Για $11 \cdot 2$ έχουμε $11 \cdot 2 - 8 \cdot 1 \neq 1$, $11 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \neq 1, 11 \cdot 2 - 8 \cdot 3 < 0$

Για $11 \cdot 3 - 8 \cdot 4 = 1$ είναι η μικρότερη ζητούμενη λύση.

□

ΘΕΜΑ 2.3. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:* $4x - 6y = 101$ *δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

Λύση. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του 4 και του 6 είναι το 2, συνεπώς το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι πάντα πολλαπλάσιο του 2, οπότε δεν μπορεί να είναι ίσο με το δεξί μέλος της εξίσωσης το 101, το οποίο δεν είναι πολλαπλάσιο του 2. □

Κλείνουμε με ένα ελαφρώς δυσκολότερο πρόβλημα:

ΘΕΜΑ 2.4. *Θεωρούμε την εξίσωση:* $5x + 8y = c$. *Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του* c*, ώστε να υπάρχουν μη αρνητικές ακέραιες λύσεις για τα* x, y.

Υπόδειξη. Για $c = 13$ για παράδειγμα υπάρχουν λύσεις μη αρνητικές. Αναζητούμε 5-άδες διαδοχικών ακεραίων c για τους οποίους έχουμε μη αρνητικές ακέραιες λύσεις. Τέτοια παραδείγματα είναι οι 5-άδες:

$$\{50, 51, 52, 53, 54\} \text{ και } \{100, 101, 102, 103, 104\}$$

Στη συνέχεια προσθέτοντας κάθε φορά 5 σε καθέναν από τους αριθμούς προκύπτουν νέες πεντάδες με όλο και μεγαλύτερα c που δίνουν μη αρνητικές ακέραιες λύσεις. Όμως πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το c;

Δείτε το πρόβλημα γεωμετρικά σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

□

ΘΕΜΑ 2.5. *Να βρεθούν οι τρεις μικρότεροι διαδοχικοί φυσικοί, για τους οποίους ο* 3^2 *διαιρεί τον πρώτο, ο* 4^2 *διαιρεί τον δεύτερο και ο* 5^2 *διαιρεί τον τρίτο.*

ΘΕΜΑ 2.6. *Να βρεθούν όλοι οι πενταψήφιοι αριθμοί, ώστε αν τους σβήσουμε το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο, ο αριθμός που προκύπτει είναι* $\frac{2}{215}$ *του αρχικού αριθμού.*

3 Μη γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις

Κάθε Διοφαντική εξίσωση, η οποία δεν παριστάνεται από εξίσωση ευθείας καλείται μη γραμμική. Μερικά παραδείγματα μη Διοφαντικών εξισώσεων:

$$xy - 2y + x + 1 = 0$$
$$2x^2 - 3x + y + 1 = 0$$
$$y^2 + x^3 + k = 0, k \in \mathbb{R}$$
$$x^2 - y^2 = 1$$

Σε αυτές τις εξισώσεις απαιτούνται διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυσή τους. Συνδυασμός παραγοντοποιήσεων, βασικών ιδιοτήτων των ακεραίων και έμπνευσης είναι τα κύρια εργαλεία.

Θεμα 3.1. *α. Να παραγοντοποιηθεί η έκφραση:* $xy - 2x + 3y - 6$.
β. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις (x, y) *της εξίσωσης:* $xy - 3x + 3y - 11 = 0$.

Λύση. Η πρώτη παραγοντοποιείται με κλασική ομαδοποίηση:

$$\begin{aligned} xy - 2x + 3y - 6 &= \\ x(y-2) + 3(y-2) &= \\ (y-2)(x+3). \end{aligned}$$

Πώς όμως συνδέεται αυτή η παραγοντοποίηση με τη δεύτερη εξίσωση;

Παρατηρούμε ότι $xy - 3x + 3y - 11 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(x+3) - 5 = 0$.

Συνεπώς, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $(y-2)(x+3) = 5$. Δηλαδή, αναζητούμε γινόμενα ακεραίων $y-2, x+3$ που είναι ίσα με 5. Όμως τα μόνα ζεύγη ακεραίων που έχουν γινόμενο 5 είναι τα εξής: $(1,5), (-1,-5), (5,1), (-5,-1)$ από τα οποία προκύπτουν: $(x+3, y-2) = (1,5), (-1,-5), (5,1), (-5,-1) \Leftrightarrow (x,y) = (2,3), (-2,7), (-8,1), (-4,-3)$. □

Θεμα 3.2 (Αρχιμήδης 2011 - Μεγάλοι)**.** *Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση*

$$x^3y^2(2y - x) = x^2y^4 - 36.$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} 2x^3y^3 + 36 &= x^2y^2(x^2 + y^2) \\ 36 &= x^2y^2(x-y)^2 \\ (xy(x-y))^2 &= 36 \\ xy(x-y) &= 6 \text{ ή } xy(x-y) = -6, x, y \in \mathbb{Z} \\ xy(x-y) &= 6 \text{ ή } xy(y-x) = -6, x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Αν έχουμε μία λύση (x_0, y_0) της πρώτης εξίσωσης τότε η (y_0, x_0) θα είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης και αντίστροφα. Οπότε, όλες οι λύσεις μπορούν να προκύψουν από την επίλυση της μίας από τις δύο εξισώσεις.

Η εξίσωση αυτή γίνεται:

$\{xy = 6, x - y = 1\}\{xy = -6, x - y = -1\}$ $\{xy = 3, x - y = 2\}\{xy = -3, x - y = -2\}$ $\{xy = 2, x - y = 6\}\{xy = -1, x - y =$
$\{xy = 2, x - y = 3\}$ ή τέλος $\{xy = -2, x - y = -3\}$

Οπότε προκύπτουν οι ακέραιες λύσεις: $(x, y) = (3,2), (-2,-3), (3,1), (-3,-1), (1,-2), (2,-1)$.

□

Θεμα 3.3. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:* $3x^2 - xy - 4y^2 = 6$ *έχει μόνο δύο λύσεις στους ακεραίους.*

Λύση. Καταρχάς γίνεται παραγοντοποίηση όπως προηγουμένως: $3x^2 - xy - 4y^2 = (x+y)(3x-4y) = 6$. Αν θέσουμε $x+y = a, 3x-4y = b$ έχουμε ότι: $ab = 6 \Leftrightarrow (a,b) = (6,1), (-6,-1), (1,6), (-1,-6), (3,2), (-3,-2), (2,3), (-2,-3)$. Από αυτές τις λύσεις ελέγχουμε ποιες δίνουν ακέραιες λύσεις:

$$x = \frac{4a+b}{7}, y = \frac{3a-b}{7}$$

Δεκτές τελικά είναι: $(x, y) = (2,1), (-2,-1)$. □

Θεμα 3.4. *Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος ο οποίος αφήνει το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθεί με καθέναν από τους* 889, 961, 1009, 1189.

Λύση. Έστω n ο ζητούμενος αριθμός. Τότε θα ισχύουν:

$$\begin{aligned} 889 &= n \cdot k + r \\ 961 &= n \cdot l + r \\ 1009 &= n \cdot m + r \\ 1189 &= n \cdot o + r \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη οποιεσδήποτε δύο από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε ότι: $961 - 889 = n(l-k) \Leftrightarrow 72 = n(l-k)$ και παρομοίως στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Δηλαδή, η διαφορά οποιωνδήποτε δύο από αυτούς τους αριθμούς θα πρέπει να διαιρείται από τον n. Συνεπώς, ο μεγαλύτερος δυνατόν n θα είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των διαφορών των αριθμών αυτών: $961 - 889 = 72, 1009 - 889 = 120, 1189 - 889 = 300$. Οπότε βρίσκουμε τον ΜΚΔ των $72, 300, 120$, απ' όπου προκύπτει $n = 12$. □

Θεμα 3.5. *Ο Μαρίνος παρατήρησε ότι το γινόμενο των ηλικιών των συμμαθητών που συμμετέχουν από το Γυμνάσιο και το Λύκειο της Ευαγγελικής σχολής στην επόμενη φάση του διαγωνισμού της Ε.Μ.Ε. είναι* 611520. *Μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός των μαθητών που θα συμμετέχουν σε αυτόν το διαγωνισμό; Λύση*

Θεμα 3.6. *Αν a, b δύο θετικοί ακέραιοι με $a \geq b$, να βρεθούν όλα τα ζεύγη a, b, ώστε το άθροισμά τους, η θετική διαφορά τους, το γινόμενό τους και το πηλίκο τους να έχουν άθροισμα* 36. *Λύση*

Θεμα 3.7 (Αρχιμήδης 2007 - Μεγάλοι). *Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση $x^8 + 2^{2^x} + 2 = p$, όπου pείναι πρώτος αριθμός.*

Απόδειξη. Για $x \geqslant 2$ θέτουμε $a = x^2, b = 2^{2^{x-2}}$ που δίνει $p = a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$. Αυτό είναι αδύνατο αφού και οι δύο παράγοντες είναι μεγαλύτεροι του 1 και άρα το γινόμενο τους δεν μπορεί να είναι πρώτος.

Για τον δεύτερο παράγοντα έχουμε $a^2 + 2b^2 - 2ab \geqslant (2\sqrt{2} - 2)ab > 1$ αφού είναι επίσης $a = x^2 \geqslant 4$.

Μένει να ελεγχθεί η περίπτωση $x = 1$ που δίνει $x^8 + 2^{2^x+2} = 17$ ο οποίος είναι πρώτος. Άρα η $x = 1, p = 17$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος. □

Θεμα 3.8 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Πολωνίας). *Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση:*

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$$

Λύση. Θέτοντας $x = a + 1, y = b + 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$(a+1)^2 b + (b+1)^2 a = 1$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} ab(a+b) + 4ab + (a+b) = 1 &\Leftrightarrow \\ ab(a+b+4) + (a+b+4) = 5 &\Leftrightarrow \\ (a+b+4)(ab+1) = 5 & \end{aligned}$$

Απ' όπου προκύπτει ένας παράγοντας θα είναι ± 5 και ο άλλος παράγοντας ± 1. Και η συνέχεια της λύσης παρόμοια με προηγούμενα. □

4 Άλλες μέθοδοι επίλυσης Διοφαντικών εξισώσεων

4.1 Ανισότητες και Διοφαντικές εξισώσεις

Χρησιμοποιώντας γνωστές ανισότητες μπορούμε να περιορίσουμε το εύρος των λύσεων μία διοφαντικής εξισώσεις σε πεπερασμένο πλήθος περιπτώσεων.

ΘΕΜΑ 4.1 (Ανδρεεσςυ). *Να λυθεί η εξίσωση:* $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Λύση. Καταρχάς, όλοι οι ακέραιοι της μορφής $(k, -k)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης, η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 = (x + y)^2 &\Leftrightarrow \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 &\overset{x+y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \\ x^2 - xy + y^2 = x + y &\Leftrightarrow \\ (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 &\end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι: $(x - 1)^2 \leq 1$ και $(y - 1)^2 \leq 1$, δηλαδή: $x, y \in [0, 2]$ Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$. □

ΘΕΜΑ 4.2 (Ολυμπιάδα Μ.Βρετανίας). *Να βρεθούν οι τριάδες θετικών ακεραίων* (x, y, z) *οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης:*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2$$

Λύση. Οι ζητούμενες τριάδες λύσεις της εξίσωσεις μπορούν να διαταχθούν χωρίς βλάβη της γενικότητας: $z \leq y \leq x \Leftrightarrow \frac{1}{z} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{z} \geq 1 + \frac{1}{y} \geq 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 \geq 2 \Rightarrow z \leq 3$ Αν $z = 1$ τότε: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1$, το οποίο είναι αδύνατο.

Αν $z = 2$, τότε: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{4}{3} \Rightarrow y < 7$. Ακόμα έχουμε: $1 + \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow y > 3$. Συνδυάζοντας, τα προηγούμενα έχουμε τις λύσεις: $(7, 6, 2), (9, 5, 2), (15, 4, 2)$.

Αν $z = 3$, τότε: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow y < 5$ και $y \geq z = 3$ απ΄ όπου προκύπτουν λύσεις: $(8, 3, 3), (5, 4, 3)$. Συνεπώς, όλες οι λύσεις είναι οι μεταθέσεις των τριάδων: $(7, 6, 2), (9, 5, 2), (15, 4, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3)$. □

ΘΕΜΑ 4.3 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Ρουμανίας). *Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

Απόδειξη. Δουλεύοντας όπως προηγουμένως, μπορούμε να θεωρήσουμε μία διάταξη: $2 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow$ από την οποία προκύπτει $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5} \Rightarrow x \in \{2, 3, 4, 5\}$. Στη συνέχεια δουλεύουμε με περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές του x όπως προηγουμένως. □

4.1.1 Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 4.1. *Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2. *Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$xy + yz + zx - xyz = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.3 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Ρουμανίας). *Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$(x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$$

4.2 Επίλυση μέσω παραμετρικής αντικατάστασης

Παραμετρική αντικατάσταση είναι μία διαδικασία κατά την οποία εκφράζονται οι άγνωστοι της Διοφαντικής εξίσωσης μέσω παραμέτρων, οι οποίες ορίζονται σε κάποιο διάστημα, οπότε καθίσταται ευκολότερη η διάκριση περιπτώσεων ή η απόδειξη ύπαρξης άπειρων λύσεων συγκεκριμένης μορφής.

ΘΕΜΑ 4.4 (Πρωτάθλημα των Πόλεων - Tournament of Towns). *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει άπειρο πλήθος τριάδων (x, y, z) ακεραίων, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$$

Υπόδειξη. Θέτοντας: $z = -y$ η εξίσωση γίνεται: $x^3 = x^2 + 2y^2$ και λαμβάνοντας $y = mx, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε $x = 1 + 2m^2$. Οπότε προκύπτουν οι άπειρες λύσεις:

$$x = 2m^2 + 1, y = m(2m^2 + 1), z = -m(2m^2 + 1), \;\; m \in \mathbb{Z}$$

□

ΘΕΜΑ 4.5. *Να βρεθούν όλες οι τριάδες (x, y, z) θετικών ακεραίων τέτοιων, ώστε:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

Υπόδειξη. Η εξίσωση γράφεται: $z = \frac{xy}{x+y}$. Αν θεωρήσουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των x, y έχουμε: $d = (x, y) \Rightarrow x = dm, \; y = dn, m, n \in \mathbb{Z}$ πρώτοι μεταξύ τους. Τότε οι αριθμοί $mn, m + n$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε: $z = \frac{dmn}{m+n}$, απ' όπου προκύπτει $m + n \div d$. Συνεπώς, οι λύσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = km(m + n), y = kn(m + n), z = kmn, \;\; k, m, n \in \mathbb{Z}_+$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 4.4 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Ην.Βασιλείου). *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 = z^5 + z$ έχει άπειρες λύσεις ακεραίους σχετικά πρώτους μεταξύ τους.*

4.3 Αριθμητική ισοτιμιών

Μία άλλη διαδικασία που μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση Διοφαντικών εξισώσεων προκύπτει μέσω των ισοϋπόλοιπων αριθμών (Αριθμητική $(modn)$). Ακολουθούν βασικές υπενθυμίσεις.

- Για κάθε δύο ακέραιους αριθμούς a, b υπάρχουν ακέραιοι q, r, ώστε να ισχύει:

$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < q, \; q, r \in \mathbb{Z}$$

- Δύο αριθμοί a, c που αφήνουν στην Ευκλείδια διαίρεση με τον $b \in \mathbb{N}$ το ίδιο υπόλοιπο r λέγονται ισοϋπόλοιποι $(modb)$.
- $a \cong b(modn) \Leftrightarrow n \div (a - b)$
- $a \cong b(modn) \Leftrightarrow b \cong a(modn)$
- $a \cong b(modn)$ και $b \cong c(modn) \Rightarrow a \cong c(modn)$
- Πράξεις ισοτιμιών $a \cong b(modn), c \cong d(modn)$
  $a + c \cong (b + d)(modn)$
  $a - c \cong (b - d)(modn)$
  $ac \cong bd(modn)$
- $a \cong b(modn) \Rightarrow a + c \cong b + c(modn)$
  $a \cong b(modn) \Rightarrow ac \cong bc(modn)$
- $a_1 \cong b_1(modn), \dots, a_k \cong b_k(modn) \Rightarrow$
  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k(modn) \cong b_1 + b_2 + \cdots b_k(modn)$
  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_k(modn) \cong b_1 \cdot b_2 \cdots b_k(modn)$
  $a^m \cong b^m(modn)$

Παράδειγμα 4.1 (Παραδείγματα στις παραπάνω υπενθυμίσεις). *1. Θεωρούμε $a = 80, b = 12$ τότε η Ευκλείδια διαίρεση δίνει: $80 = 12 \cdot 6 + 8, \; a = 80, b = 12, q = 6, 0 \leq r = 8 < 12$*

2. *Θεωρούμε $a = 80, b = -12$ τότε η Ευκλείδια διαίρεση δίνει: $80 = -12 \cdot (-6) + 8, \; a = 80, b = -12, q = -6, 0 \leq r = 8 < 12$, όπου προσέχουμε πάντα το υπόλοιπο να είναι μη αρνητικό.*
3. *$a = -80, b = 12$ τότε η Ευκλείδια διαίρεση γίνεται: $-80 = 12 \cdot (-7) + 4$*
4. *Οι αριθμοί $7 = 3 \cdot 2 + 1$ και $61 = 3 \cdot 20 + 1$ είναι ισοϋπόλοιποι $(mod3)$. Μάλιστα ισχύουν: $7 \cong 1(mod3), \; 61 \cong 1(mod3)$.*
5. *Κάθε άρτιος $a \cong 0(mod2)$ και κάθε περιττός $b \cong 1(mod2)$*
6. *Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $a = 111^{333} + 333^{444}$ διαιρείται με το 7.*
   Ισχύουν: $111 = 7 \cdot 15 + 6 \Rightarrow 111 \cong 6(mod7) \cong (-1)(mod7) \Rightarrow 111^{333} \cong (-1)^{333}(mod7) \cong -1(mod7)$.
   Όμοιως: $333 = 7 \cdot 47 + 4 \Rightarrow 333 \cong 4(mod7) \cong (-3)mod7$
   $333^2 \cong (-3)^2(mod7) \Leftrightarrow 333^2 \cong 2(mod7), \; 333^3 \cong -6(mod7) \cong 1(mod7)$
   $111^{333} \cong (-1)^3 33(mod7) \cong -1(mod7)$
   $333^{444} \cong 333^{3 \cot 148}(mod7) \cong (-1)^{148}(mod7) \cong 1(mod7)$ *Συνεπώς:* $111^{333} + 333^{444} \cong 1(mod7) + (-1)(mod7) \cong 0(mod7)$ *που είναι το ζητούμενο.*
7. ***Εφαρμογή: Εύρεση τελευταίου ψηφίου** Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $a = 2 \cdot 3^{2015} + 5 \cdot 11^{2015}$.*
   Έχουμε: $3^2 = (-1)(mod10) \Rightarrow 3^{2012} \cong (-1)^{1006}(mod10) \cong 1(mod10)$. Οπότε: $3^{2012} \cong 1(mod10) \Rightarrow 3^{2015} \cong 3^3(mod10) \cong 7(mod10)$.
   Ακόμα: $11 \cong 1(mod10) \Rightarrow 11^{2015} \cong 1(mod10)$
   Άρα έχουμε: $a \cong (2 \cdot 7 + 5 \cdot 1)(mod10) \cong 19(mod10) \cong 9(mod10)$. Συνεπώς, το τελευταίο ψηφίο του a είναι το 9.

Θεμα 4.6 (Αρχιμήδης 2009 - Μεγάλοι). *Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y$.*

Υπόδειξη. Η εξίσωση γράφεται $(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 7 \cdot 2^y$. Αρχικά, αν $y < 0$ τότε το δεξί μέλος δεν είναι ακέραιο ενώ το αριστερό είναι.Άρα $y \geq 0$.

Επίσης, έστω $x > 0$ αφού αν (x, y) είναι λύση,τότε και η $(-x, y)$ είναι λύση. Αν $y = 0$ τότε πρέπει $x^2 - 2x - 1 = 1$ και $x^2 + 2x - 1 = 7$ και προσθέτοντας κατα μέλη παίρνουμε $2x^2 = 10$ άτοπο.

Αν τώρα $x \equiv 0 \mod 2$ τότε $(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) \equiv (-1)(-1) \mod 2 = 1 \mod 2$ ενώ $7 \cdot 2^y \equiv 0 \mod 2$ άτοπο. Άρα x περιττός.

Για $y \geq 3$ είναι $7 \cdot 2^y \equiv 0 \mod 8$ ενώ $x^2 \equiv 1 \mod 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 \equiv -2k \mod 8$ όπου $k = x \mod 8$.

Ομοίως $x^2 + 2x - 1 \equiv 2k \mod 8$.Άρα $(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) \equiv 4k^2 \mod 8$.Όμως $k \equiv 1 \mod 2$ και συνεπώς $(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) \equiv 4 \mod 8$.

Άρα $y \leq 2$. Ελέγχοντας τις προηγούμενες περιπτώσεις βλέπουμε ότι μοναδικές αποδεκτές λύσεις είναι οι: $(x, y) = (\pm 3, 2)$. Αναλυτικές λύσεις. □

Θεμα 4.7. *Να βρεθούν ακέραιοι αριθμοί n για τους οποίους ισχύει: $n^2 + n + 7 =$ πολ13 .*

Υπόδειξη. Αρκεί: $n^2 + n + 7 \cong 0(mod13) \Leftrightarrow n^2 + n \cong -7(mod13) \Leftrightarrow n^2 + n - 6 \cong -13(mod13) \Leftrightarrow (n-2)(n+3) \cong 0(mod13) \Leftrightarrow 13 \div (n-2)$ ή $13 \div (n+3) \Leftrightarrow n \cong 2(mod13)$ ή $n \cong -3(mod13)$. □

Θεμα 4.8 (Andreescu)**.** *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:*

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+2001)^2 = y^2$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Υπόδειξη. Θέτοντας $x = z - 1001$ η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} (z-1000)^2 + \cdots + (z-1)^2 + z^2 + (z+1)^2 + \cdots + (z+1000)^2 = y^2 \Leftrightarrow \\ 2001z^2 + 2(1^2 + 2^2 + \cdots + 1000^2) = y^2 \Leftrightarrow \\ 2001z^2 + 2\frac{1000 \cdot 1001 \cdot 2001}{6} = y^2 \Leftrightarrow \\ 2001z^2 + 1000 \cdot 1001 \cdot 667 = y^2 \end{aligned}$$

Σε αυτήν την ισοδύναμη εξίσωση το αριστερό μέλος είναι ισότιμο $2(mod3)$, ενώ το δεξί μέλος είναι τέλειο τετράγωνο, τα οποία δεν μπορούν να είναι ίσα. □

Ασκηση 4.5. *Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x, y), ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$3^x - 2^y = 7$$

Ασκηση 4.6. *Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x, y), ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$x^3 - 4xy + y^3 = -1$$

4.4 Εξίσωση Pell

Ορισμός 4.1. *Μία εξίσωση της μορφής:*

$$x^2 - Dy^2 = 1, \ x, y \in \mathbb{Z}$$

όπου ο φυσικός αριθμός $D \in \mathbb{N}$ ***δεν*** *είναι τέλειο τετράγωνο, λέγεται εξίσωση τύπου Pell.*

Αν x_0, y_0 η ελάχιστη μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης Pell, δηλαδή $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ τότε οι άπειρες λύσεις της ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις:

$$x_{n+1} = x_1 x_n + D y_1 y_n, \qquad y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n, n \geq 0 \tag{1}$$

και τελικά δίνονται από τη σχέση:

$$x + y\sqrt{D} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{D})^n$$

Θεμα 4.9 (Στεργίου)**.** *Να βρεθούν όλα τα τρίγωνα με μήκη πλευρών διαδοχικούς ακέραιους και εμβαδόν ακέραιο.*

Υπόδειξη. Έστω ότι οι πλευρές έχουν μήκη: $a-1, a, a+1$, τότε από τον τύπο του Ήρωνα[1] το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι $E = \frac{a\sqrt{3(a^2-4)}}{4}$. Για να είναι ακέραιος το Ε πρέπει ο a να είναι άρτιος, δηλαδή $a = 2k \Rightarrow a^2 - 4 = u^2$. Οπότε έχουμε ότι: $4k^2 - 4 = 3u^2$, οπότε u άρτιος απ' όπου έχουμε: $x^2 - 3y^2 = 1$ η οποία είναι εξίσωση τύπου Pell με λύση $(2, 1)$ και τις υπόλοιπες θετικές ακέραιες λύσεις να δίνονται από τους τύπους 1. □

[1]Κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και ημιπερίμετρο s έχει εμβαδόν ίσο με $E = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ βιβλίο γεωμετρίας σελ.218.

Απάντηση 3.5. Παρατηρείστε ότι οι μαθητές έχουν ηλικίες από 13 έως 18 ετών και αναλύστε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Τότε εύκολα θα βρείτε ότι οι μαθητές ήταν 5. Επιστροφή $\square$

Απάντηση 3.6. Προκύπτει η διοφαντική εξίσωση: $\frac{a}{b}(b+1)^2 = 36 \Leftrightarrow a(b+1)^2 = 36b$. Όμως οι αριθμοί $b, b+1$ είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους, άρα ο $(b+1)^2$ θα είναι παράγοντας του 36, δηλαδή $(b+1)^2 = 1, 4, 9, 36$. Οπότε, προκύπτουν $b = 0, 1, 2, 5$. Από τους οποίους δεκτές τιμές είναι οι $b = 1, 2, 5 \Rightarrow a = 9, 8, 5$. Επιστροφή $\square$

Τι είναι μία γεωμετρική κατασκευή;

κανόνας + διαβήτης

Γιατί γεωμετρικές κατασκευές;

Οι γεωμετρικές κατασκευές εφαρμόζονται στην επίλυση σχεδιαστικών προβλημάτων σε διάφορες επιστήμες όπως η Αρχιτεκτονική, την Πολιτική Μηχανική, τη Μηχανολογία, την Ηλεκτρολογία κ.α.

Πολύ καλή ακρίβεια

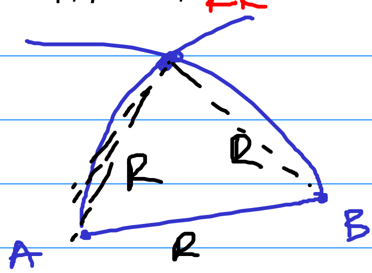
Κ1 : Κατασκευή ευθείας διερχόμενης από δύο σημεία.

Κ2 : Κατασκευή κύκλου με δοθέν κέντρο και δοθείσα ακτίνα.

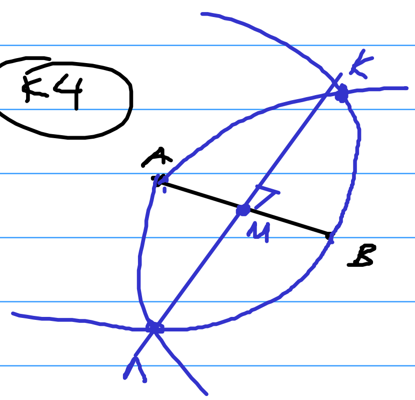
Βασικές γεωμετρικές κατασκευές

~~Κ3~~: Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος ίσου με δοθέν και με το ένα άκρο επί δοθέντος σημείου ΔΕ
~~Κ4~~: Κατασκευή του μέσου ευθυγράμμου τμήματος ΑΤ/ΑΚ/ΔΣ/ΚΚ/ΑΝ
~~Κ5~~: Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου ΝΕΦ/ΔΔ/ΑΣ/ΑΤ/ΑΚ/ΔΣ/ΚΚ/ΑΝ
Κ6: Κατασκευή τριγώνου με δοθείσες τις τρείς πλευρές του
~~Κ7~~: Κατασκευή καθέτου προς δοθείσα ευθεία διερχομένης από δοθέν σημείο κείμενου εκτός της δοθείσης ευθείας. ΓΜ
~~Κ8~~: Κατασκευή καθέτου προς δοθείσα ευθεία διερχομένης από δοθέν σημείοκείμενου πάνω σε αυτήν. ΜΝ/ΠΘ
~~Κ9~~: Κατασκευή γωνίας ίσης με δοθείσα. ΝΕΦ/ΑΚ/ΝΛ
~~Κ10~~: Κατασκευή της διχοτόμου δοθείσης γωνίας ΚΚ

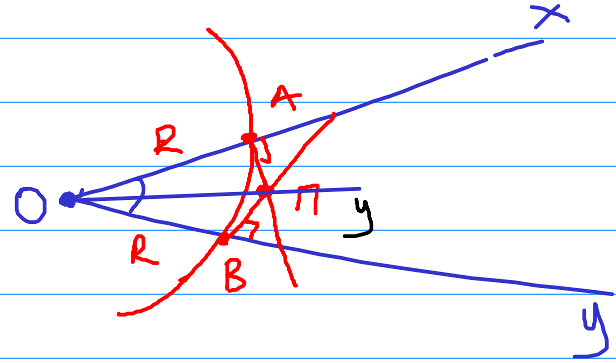
Κ5 (ΔΔ)



Κ4

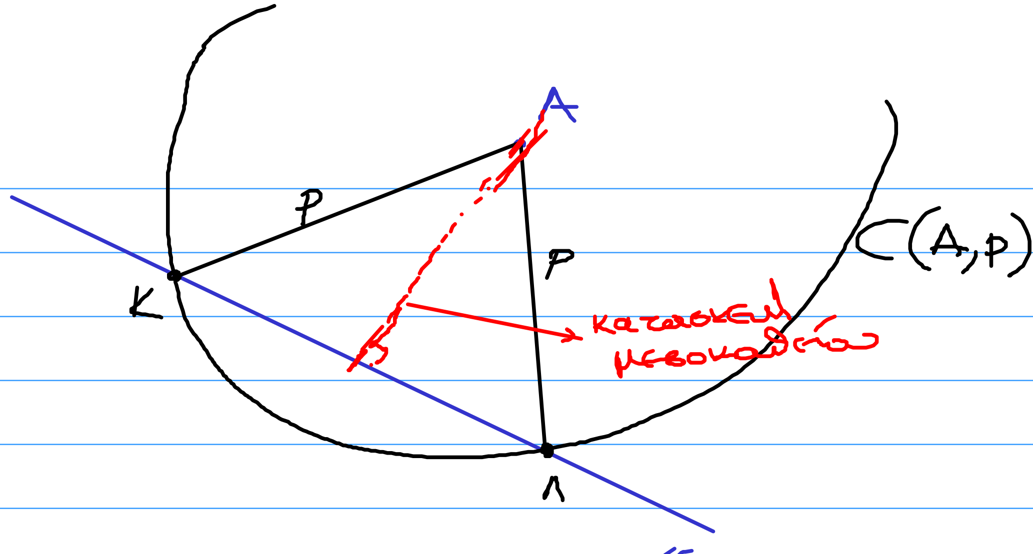


Κ10

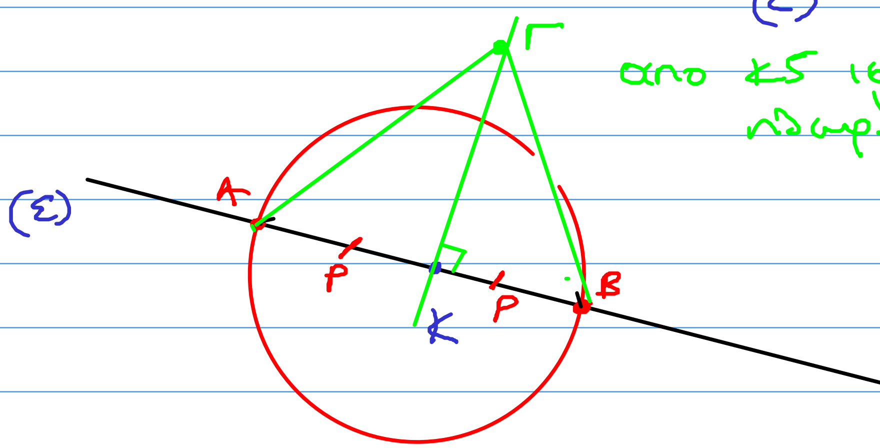


Κ7

Κ7 Μ

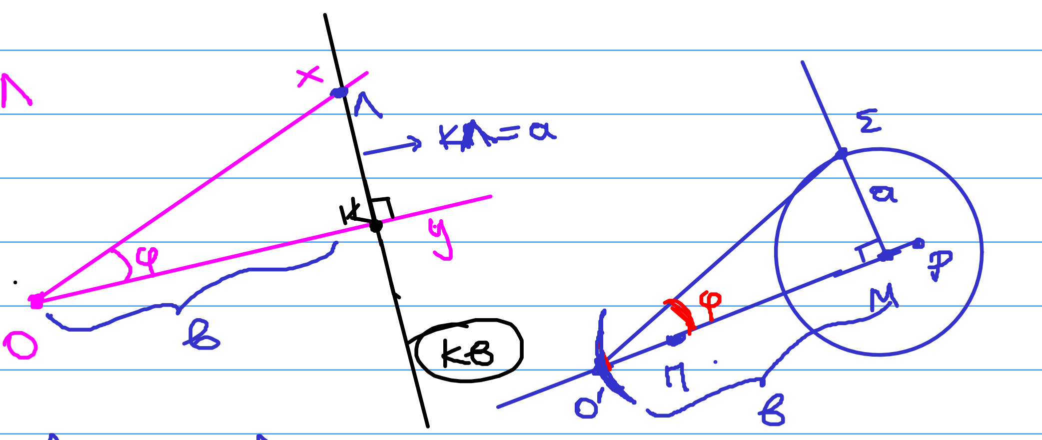


Κ8 ΜΝ



από Κ5 ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς ΑΒ

Κ9 ΝΛ

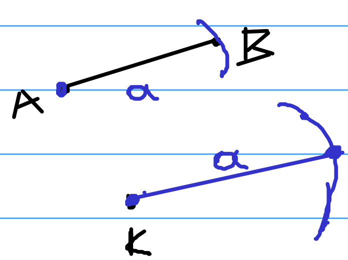


$\overset{\triangle}{OK\Lambda} = \overset{\triangle}{O'M\Sigma}$ διότι

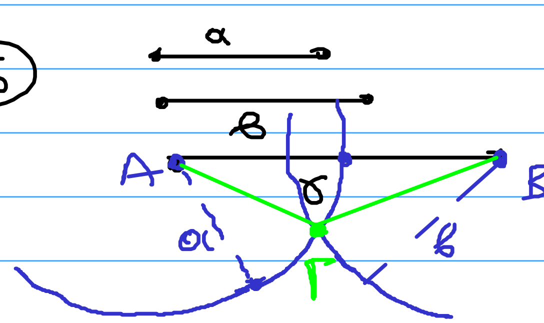
$\hat{K} = \hat{M} = 90^\circ$, $OK = O'M = \beta$, $K\Lambda = M\Sigma = \alpha$

Κ11 ΝΛ Κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με δοσμένες τις κάθετες πλευρές

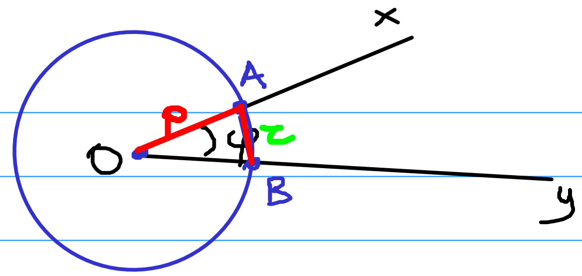
Κ3 ΔΕ

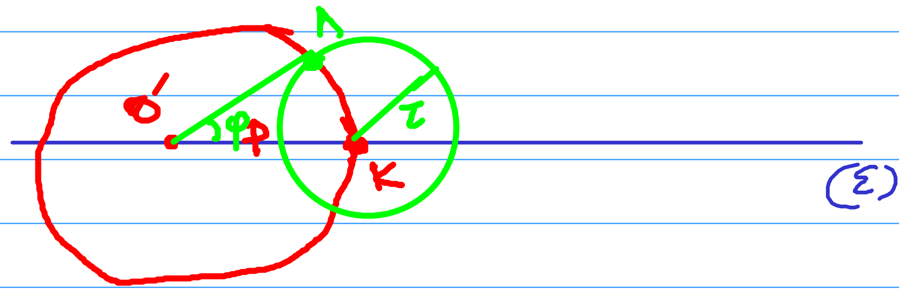


Κ6



Κ9' ΝΑ





ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ – ΣΥΝΘΕΣΗΣ

«Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον»

ΣΧΟΛΙΑ στο ΕΥΚΛΕΙΔΗ
Ήρωνας

Η **ανάλυση** αποτελεί μια διαδικασία η οποία ξεκινά υποθέτοντας το ζητούμενο, και προχωρά μέχρι να φθάσει σε μια πρόταση η οποία είναι γνωστό ότι είναι αληθής **και ανεξάρτητη από αυτό**.

πχ ΝΔΟ $\alpha^2+4\alpha+4\geq 0 \quad \forall \alpha\in\mathbb{R}$

Ανάλυση

$$\alpha^2+4\alpha+4\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+2)^2\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$B^2\geq 0,\ B\in\mathbb{R}$$

αξιώματα αριθμών

Σύνθεση: Γνωρίζουμε ότι

ΓΝΩΣΤΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

$$B^2\geq 0 \quad \forall B\in\mathbb{R}$$
$$\underset{B=\alpha+2}{\Longrightarrow} (\alpha+2)^2\geq 0$$
$$\Longrightarrow \alpha^2+4\alpha+4\geq 0$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ

Η **σύνθεση** ξεκινά από κάτι το οποίο είναι αληθές, προσφέροντας τελικά μια απόδειξη για το ζητούμενο.

Ο ορισμός της μεθόδου Ανάλυσης - Σύνθεσης από τον Πάππο τον Αλεξανδρινό (3ος αι. μ.Χ.).

(α)

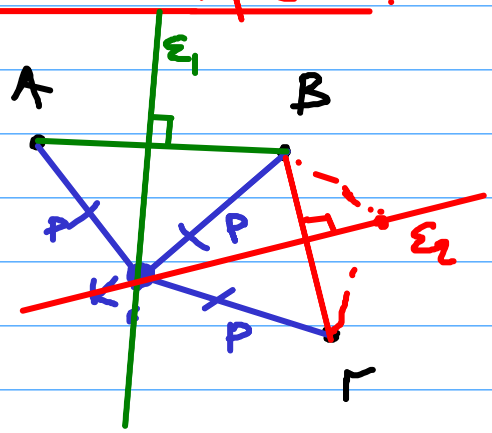
Μέσα στα πλαίσια της ανάλυσης **το ζητούμενο τίθεται ως γεγονός γνωστό** και αναζητείται εκείνο από το οποίο προκύπτει και από αυτό αναζητείται το προηγούμενο.

Και **βαδίζοντας έτσι προς τα πίσω** μέχρι να φτάσουμε σε κάποιο από τα ήδη γνωστά ή αυτά που αποτελούν αρχές. Τη μέθοδο αυτή την ονομάζουμε ***ανάλυση***, δηλαδή αντίστροφη λύση.

Μέσα στα πλαίσια δε της **σύνθεσης**, με αντιστροφή, ορμώμενοι από αυτό που κατά την ανάλυση έχει προσδιοριστεί ως κατασκευάσιμο κατά το τελευταίο βήμα, κατασκευάζουμε τα σύμφωνα με τη **φυσική σειρά επόμενα**, που στην ανάλυση είναι προηγούμενα. Έτσι φτάνουμε στο τέλος (σκοπό) που είναι η κατασκευή του ζητούμενου.

Και αυτό το ονομάζουμε **σύνθεση.**

Να κατασκευαστεί κύκλος, διερχόμενος από τρία δοθέντα σημεία.



ΑΝΑΛΥΣΗ

α) Κέντρο Κ ενός κύκλου θα ισαπέχει από τα Α, Β, Γ : ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ

ΚΑ = ΚΒ δηλαδή στη μεσοκάθετο του ΑΒ

(ε_1) μεσοκ. ΑΒ

ΚΒ = ΚΓ δηλαδή στη μεσοκάθετο του ΒΓ

(ε_2) μεσοκαθ. ΒΓ

$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ το κοινό σημείο Κ

ένα υπάρχει

Ανάλυση του προβλήματος: Έστω τρία μη συνευθειακά σημεία τα Α, Β, Γ.

Ζητούμενο: Κατασκευή κύκλου διερχομένου από αυτά τα τρία σημεία.

Ζητείται επομένως το κέντρο και η ακτίνα αυτού του κύκλου.

- Ποια ιδιότητα έχει το κέντρο ενός τέτοιου κύκλου σε σχέση με τα σημεία Α,Β,Γ;

Προφανώς θα ισαπέχει και από τα τρία σημεία.

-Τι γνωρίζουμε για τα σημεία για παράδειγμα από τρία σημεία;

-Τι γνωρίζουμε για τα σημεία για παράδειγμα από δύο σημεία;

πχ για τα Α,Β θα ξέρουμε ότι ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ!

-Αλλά το ίδιο θέλουμε και για οποιαδήποτε άλλα δύο από τα τρία αυτά, πχ τα Β,Γ.

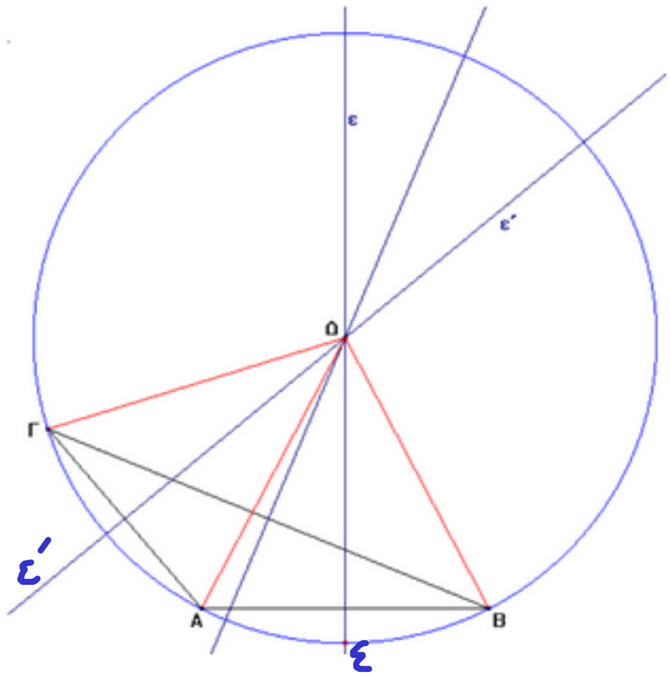
Άρα και τα σημεία που ισαπέχουν από τα Β,Γ θα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΒΓ.

έχει ιδιότητα ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ = ρ

Υπάρχει αν Α, Β, Γ όχι συνευθειακά διότι διαφορετικά $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ ως κάθετες στην ίδια ευθεία: ΑΒΓ

μοναδικό διότι αν υπήρχε και άλλο οι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ το οποίο δε συμβαίνει αφού Α, Β, Γ διαφορετικά

Σύνθεση - Κατασκευή - Απόδειξη :



Φέρνουμε την ε μεσο κάθετο στο ΑΒ, καθώς και την ε΄μεσοκάθετο στο ΑΓ.

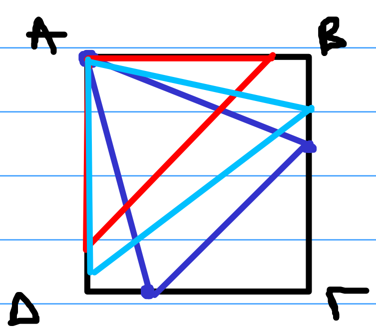
Η ε΄ θα τμήσει οπωσδήποτε την ε γιατί διαφορετικά θα ήταν παράλληλη με αυτήν, και με δεδομένο ότι η ε είναι κάθετη στην ΑΒ θα πρέπει και η ε΄ να είναι κάθετη σ'αυτήν δηλαδή τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά!

Έστω λοιπόν ότι οι ε και ε΄ τέμνονται στο Δ.

Δηλαδή ΑΔ=ΒΔ=ΓΔ

Άρα το Δ είναι το κέντρο του ζητούμενου κύκλου και ακτίνα του η ΑΔ.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ
να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο
με μια κορυφή {Α, Β, Γ, Δ}
και οι άλλες δύο κορυφές να είναι στις
πλευρές του τετραγώνου.



Προβλήματα Ομίλου 1320β-22012021

1. Αν $x, y, z > 0$ με $x + y + z = 3$, αποδείξτε ότι

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx.$$

Υπόδειξη: Ισχύει $x^2 + 2\sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 3\sqrt[3]{x^3} = 3x$ απο μία οπτική

2. Αν $a, b, c > 0$ με $abc = 1$. Να δείξετε ότι: $\sum_{cyc} \frac{a}{a^2+2} \leq 1$

3. Αν $a, b, c > 0$ ισχύει η ανισότητα:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Υπόδειξη: Γενικά $\sqrt{\frac{x}{1-x}} \geq 2x$ για $x \in (0,1)$

4. Αν δίνεται ότι $a + b + c = 0$, τότε να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{a^2}{a^2 - bc} + \frac{b^2}{b^2 - ca} + \frac{c^2}{c^2 - ab} = 2$$

Υπόδειξη: πχ κάνε απαλοιφή ενός αγνώστου με χρήση της $a+b+c=0$

5. Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1. Να δείξετε ότι

$$\frac{a^3+2}{b^2-b+1} + \frac{b^3+2}{c^2-c+1} + \frac{c^3+2}{a^2-a+1} \geq 9.$$

Υπόδειξη: ΑΜ-ΓΜ

αρκεί $(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geq 27(a^2-a+1)(b^2-b+1)(c^2-c+1)$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω* $m \geq 1$.
Λέμε ότι ο a *είναι* **ισότιμος** mod m *με τον* b *αν*

$$m \mid a - b.$$

Αυτό το συμβολίζουμε

$$a \equiv b \,(\text{mod}\, m).$$

Αν $m \nmid a - b$, *λέμε ότι ο* a *είναι* **ανισότιμος** mod m *με τον* b *και γράφουμε* $a \not\equiv b\,(\text{mod}\, m)$.

Πρόταση 5.1 *Ας είναι* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Τότε ισχύουν τα εξής:*
(α) $a \equiv a \pmod n$, *για κάθε* $a \in A$.
(β) *Αν* $a \equiv b \pmod n$, *τότε* $b \equiv a \pmod n$.
(γ) *Αν* $a \equiv b \pmod n$ *και* $b \equiv c \pmod n$, *τότε* $a \equiv c \pmod n$.
(δ) $\alpha + mk \equiv \beta$ mod m , $k \in \mathbb{Z}$

Πρόταση 5.2 *Έχουμε* $a \equiv b \pmod n$ *αν και μόνον αν η διαίρεση των* a *και* b *με* n *δίνει το ίδιο υπόλοιπο.*

Πρόταση 5.3 *Για κάθε* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ *με* $a \equiv b \pmod n$ *και* $c \equiv d \pmod n$ *έχουμε:*

$$a + c \equiv b + d \pmod n \quad \text{και} \quad ac \equiv bd \pmod n.$$

Πόρισμα 5.1 *Ας είναι* $a, b \in \mathbb{Z}$ *με* $a \equiv b \pmod n$. *Τότε, για κάθε* $m \in \mathbb{N}$ *έχουμε:*

$$ma \equiv mb \pmod n \quad \text{και} \quad a^m \equiv b^m \pmod n.$$

Πόρισμα 5.2 *Ας είναι* $a, b \in \mathbb{Z}$ *με* $a \equiv b \pmod n$ *και* $f(x)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές
Τότε $f(a) \equiv f(b) \pmod n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω* $m \geq 1$.
Ένα σύνολο m *αριθμών* $\{a_1, \ldots, a_m\}$ *χαρακτηρίζεται* **πλήρες σύνολο υπολοίπων** mod m *αν τα στοιχεία του είναι ανά δύο ανισότιμα* mod m.

Αν το $\{a_1, \ldots, a_m\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο υπολοίπων mod m, τότε τα στοιχεία του, επειδή είναι ανά δύο ανισότιμα mod m, ανήκουν ένα σε καθεμία κλάση ισοτιμίας mod m από τις (7.1) και, επομένως, κάθε άλλος αριθμός είναι ισότιμος mod m με ένα από αυτά. Φυσικά, ένα απλό πλήρες σύνολο υπολοίπων mod m είναι το $\{0, \ldots, m-1\}$.

1ο **Παράδειγμα.** Έστω $m \geq 1$. Ένα σύνολο, του οποίου τα στοιχεία είναι m διαδοχικοί ακέραιοι, είναι πλήρες σύνολο υπολοίπων mod m.
Πράγματι, οι αριθμοί $a, a+1, \ldots, a+(m-1)$ είναι ανά δύο ανισότιμοι mod m. Διότι δυο τέτοιοι αριθμοί διαφέρουν κατά αριθμό k με $0 < k < m$ και, επομένως, η διαφορά k δεν διαιρείται από τον m.

2ο **Παράδειγμα.** Το $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \}$ είναι το προφανές πλήρες σύνολο υπολοίπων mod 6.
Ένα άλλο τέτοιο σύνολο είναι το $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, το οποίο αποτελείται από 6 διαδοχικούς αριθμούς.
Επειδή οι $85, 28, -7, -3, 20, 36$ είναι ανά δύο ανισότιμοι mod 6, το $\{85, 28, -7, -3, 20, 36\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο υπολοίπων mod 6.

3ο **Παράδειγμα** Θα υπολογίσουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $8^{20}11^{15}$ με τον 9. Έχουμε $8 \equiv -1 \pmod 9$. Οπότε

$$8^{20} \equiv (-1)^{20} \equiv 1 \pmod 9.$$

Επίσης, $11 \equiv 2 \pmod 9$ και επομένως

$$11^{15} \equiv (2^3)^5 \equiv 8^5 \equiv -1 \equiv 8 \pmod 9.$$

Άρα, έχουμε

$$8^{20}11^{15} \equiv 8 \pmod 9$$

και επομένως υπάρχει ακέραιος a τέτοιος, ώστε

$$8^{20}11^{15} = 9a + 8.$$

Συνεπώς, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $8^{20}11^{15}$ με τον 9 είναι 8.

4ο <u>Παράδειγμα</u>: ΝΔΟ $41 \mid 2^{20}-1$.

Ισχύει ότι $2^5 \equiv -9 \pmod{41} \Rightarrow$

$(2^5)^4 \equiv (-9)^4 \pmod{41} \equiv (81)\cdot(81) \pmod{41}$ $\Big\} \Rightarrow$

Όμως $81 \equiv (-1) \bmod 41$

$81 \cdot 81 \equiv 1 \bmod 41$

Οπότε $2^{20} \equiv 1 \pmod{41} \Rightarrow 2^{20}-1 \equiv 0 \pmod{41}$

Συνεπώς $41 \mid 2^{20}-1$

5ο <u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί το υπόλοιπο της

διαίρεσης $(1!+2!+3!+\dots+99!+100!) : 12$

$(\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu)$

Ισχύει ότι $4! \equiv 24 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow$

$5! = 4! \cdot 5 \equiv 0 \cdot 5 \pmod{12} \equiv 0 \pmod{12}$

Άρα $1!+2!+3!+\dots+100! \equiv (1!+2!+3!+0+\dots+0) \pmod{12}$

$\equiv 9 \pmod{12}$. Οπότε υπόλοιπο 9.

6ο **Παράδειγμα** *Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού* $A = 13^{23}27^{41}$ *με το 8.*

Λύση:

Είναι

$$13^2 = 169 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8.$$

Επομένως

$$13^{23} = 13^{2\cdot 11+1} = 13 \cdot (13^2)^{11} \equiv 13 \equiv 5 \pmod 8.$$

Επίσης $27 \equiv 3 \pmod 8$, *απ' όπου* $27^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod 8$. *Επομένως*

$$27^{41} = 27^{2\cdot 20+1} = 27 \cdot (27^2)^{20} \equiv 27 \equiv 3 \pmod 8.$$

Άρα $A \equiv 15 \equiv 7 \pmod 8$ *και επομένως υπάρχει* $a \in \mathbb{Z}$ *τέτοιο, ώστε* $A = 8a + 7$. *Συνεπώς το ζητούμενο υπόλοιπο είναι ο αριθμός 7.*

7ο **Παράδειγμα** *Να δείξετε ότι* $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0 \pmod 7$.

Απόδειξη:

Ισχύει $2222 \equiv 3 \pmod 7$ *και* $5555 \equiv 4 \pmod 7$.

Άρα $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 3^{5555} + 4^{2222} \pmod 7$.

Επίσης

$$3^{5555} = (3^5)^{1111} = (-2)^{1111} = -2^{1111} \pmod 7$$

και

$$4^{2222} = (4^2)^{1111} \equiv 2^{1111} \pmod 7$$

και προσθέτωντας τις τελευταίες, παίρνουμε αυτό που θέλουμε.

8ο **Παράδειγμα** *Αν* $\lambda \in \mathbb{N}$, *να αποδειχθεί ότι ο αριθμός* $A = \sqrt[4]{5\lambda + 3}$ *είναι άρρητος.*

Απόδειξη:

Έστω a *τυχαίος ακέραιος. Τότε όπως είναι γνωστό* $a \equiv 0, 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ *άρα* $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ *και τελικά* $a^4 \equiv 0, 1 \pmod 5$.

Επειδή $5\lambda + 3 \equiv 3 \pmod 5$, *συμπεραίνουμε ότι ο* $5\lambda + 3$ *δεν έχει τη μορφή* a^4 *με* $a \in \mathbb{Z}$. *Άρα ο* A *είναι άρρητος. (Είναι* $A^4 = 5\lambda + 3 \equiv 3 \pmod 5$, *άτοπο).*

9ο **Παράδειγμα** *Να αποδείξετε ότι ο 121 δεν διαιρεί τον αριθμό* $n^2 + 3n + 5$ *για κάθε τιμή του* $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $121 | n^2 + 3n + 5$. *Τότε* $11 | n^2 + 3n + 5$. *Έτσι* $n^2 + 3n + 5 \equiv 0 \equiv 33 \pmod{11}$. *Άρα* $n^2 + 3n - 28 \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow 11 | (n-4)(n+7) \Leftrightarrow 11 | n - 4$ *ή* $11 | n + 7 \Leftrightarrow (n = 11k + 4$ *ή* $n = 11k - 7)$ *και αντικαθιστώντας το* n *στο* $n^2 + 3n + 5$, *το τελευταίο παίρνει τη μορφή* $121\lambda + \upsilon$ *με* $0 < \upsilon < 121$ *το οποίο είναι άτοπο.*

10ο **Παράδειγμα** *(ΕΜΕ 1997) Έστω a, b, c ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι, ώστε*

$$(a-b)(b-c)(c-a) = a+b+c.$$

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $a+b+c$ διαιρείται με το 27.

Προφανώς για τους a, b, c ισχύει ότι $a, b, c \equiv 0, \pm 1 \pmod 3$. Εαν και οι τρεις αφήνουν διαφορετικό υπόλοιπο στη διαίρεσή τους με το 3, τότε $a+b+c \equiv -1+0+1 = 0 \pmod 3$ ενώ $(a-b)(b-c)(c-a) \not\equiv 0 \pmod 3$. Εαν ακριβώς δύο είναι ισοϋπόλοιποι, χωρίς βλάβη της γενικότητος έστω οι a, b τότε $a-b \equiv 0 \pmod 3$ άρα $(a-b)(b-c)(c-a) \equiv 0 \pmod 3$ ενώ $a+b+c \not\equiv 0 \pmod 3$. Συνεπώς οι a, b, c είναι ισοϋπόλοιποι $mod 3$. Τότε $a-b \equiv b-c \equiv c-a \equiv 0 \pmod 3$, άρα $(a-b)(b-c)(c-a) \equiv 0 \pmod{27}$. Όμως $(a-b)(b-c)(c-a) = a+b+c$ άρα η προηγούμενη ισότητα δίνει $a+b+c \equiv 0 \pmod{27}$ που είναι και το ζητούμενο.

11ο **Παράδειγμα** *(ΕΜΕ 1988) Να βρεθούν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 2^{70}.*

Λύση :

Τί κάνουμε για να βρούμε για παράδειγμα το 2^{24} από το 2^{23}; Πολλαπλασιάζουμε το 2^{23} επί 2. Και αφού μας ενδιαφέρουν μόνο τα δύο τελευταία ψηφία πολλαπλασιάζουμε το 2 με αυτά και αν προκύψουν περισσότερα κρατάμε μόνο τα δύο. Έτσι, υψώνοντας διαδοχικά και κρατώντας μόνο τα δύο τελευταία ψηφία, παίρνουμε την εξής ακολουθία τελευταίων ψηφίων.

$$02, \underbrace{[04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52]}_{\textit{επανάληψη ανά } 20},$$

$04, 08, 26, 32 \ldots$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα δύο τελευταία ψηφία ξαναεμφανίζονται με περίοδο 20. Γράφοντας

$$2^{70} = (2^{20})^3 \cdot 2^{10},$$

συμπεραίνουμε ότι τα δύο τελευταία ψηφία του 2^{70} θα είναι τα ίδια με εκείνα του 2^{10}, άρα το 24.

Παρατήρηση: Για (κάποιου είδους) επαλήθευση μπορούμε να βρούμε το τελευταίο ψηφίο του ίδιου αριθμού χρησιμοποιώντας την περιοδικότητα του τελευταίου ψηφίου που είναι $4, [2, 4, 8, 6], 2, 4, \ldots$ και έτσι

$$2^{70} = (2^4)^{17} \cdot 2^2.$$

Το τελευταίο ψηφίο του 2^{70} θα είναι το ίδιο με εκείνο του 2^2 δηλαδή το 4.

12ο **Παράδειγμα** *(Ολυμπιάδα Καναδά) Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού*

$$\underbrace{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}_{1001\ 7-\text{άρια}}$$

Λύση:

Αρχικά παρατηρούμε ότι $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$. *Επίσης, αφού*

$$7^{2k} \equiv 1 \pmod 4 \ \ \text{και}\ \ 7^{2k+1} \equiv 3 \pmod 4$$

άρα

$$a := \underbrace{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}_{1000\ 7-\text{άρια}} \equiv 3 \pmod 4 \ \ \text{συνεπώς}\ \ a = 3k+4,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Έτσι,

$$\underbrace{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}_{1001\ 7-\text{άρια}} = 7^a = 7^{4k+3} = 7^3 \cdot (7^4)^k \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

13ο **Παράδειγμα** *(ΕΜΕ 1994) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί που τα 4 τελευταία ψηφία τους είναι 1994 και διαιρούνται με το 1993.*

Απόδειξη:

Ο αριθμός αυτός είναι της μορφής

$$\begin{aligned}\overline{\underbrace{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_4}_{A} 1994} &= 10000A + 1994 = A(5 \cdot 1993 + 35) + 1993 + 1 \\ &\equiv 35 \cdot A + 1 \pmod{1993}\end{aligned}$$

Για να είναι $35 \cdot A + 1 \equiv 0 \pmod{1993}$ *θα πρέπει* $35A + 1 = 1993k,\ k \in \mathbb{Z}$ *δηλαδή* $A = 57k - \dfrac{2k+1}{35}$ (1) *δηλαδή πρέπει το* $2k+1$ *να είναι πολλαπλάσιο του 35. Για* $k = 17$ *έχουμε* $A = 968$. *Ο αριθμός λοιπόν 9681994 είναι πολλαπλάσιο του 1993. Υπάρχουν άπειροι τέτοιοι αριθμοί αφού η* (1) *έχει άπειρες λύσεις.*

14ο **Παράδειγμα** *Να αποδείξετε ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει*

$$17 | 3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}.$$

Απόδειξη:

Έχουμε $3^4 = 81 \equiv 13 \pmod{17}$. *Επομένως*

$$3^{4n+2} = 9 \cdot 81^n \equiv 9 \cdot 13^n \pmod{17}.$$

Επίσης $4^3 = 64 \equiv 13 \pmod{17}$, *οπότε* $4^{3n+1} = 4 \cdot (4^3)^n \equiv 4 \cdot 13^n \pmod{17}$. *Άρα*

$$3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1} \equiv 9 \cdot 13^n + 8 \cdot 13^n = 17 \cdot 13^n \equiv 0 \pmod{17}.$$

ΘΕΜΑ Ε′. *Να βρεθούν άπειροι ακέραιοι $n \in \mathbb{N}$, ώστε $7 \mid 2^n + 27$.*

$27 \equiv 6 \pmod 7 \equiv (-1) \bmod 7$

$2 \equiv 2 \pmod 7$

$2^2 \equiv 4 \pmod 7$

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$

αρα αρκεί $2^n \equiv 1 \pmod 7$

αρα για $n = 3k \quad k \in \mathbb{Z}$

O.K.

ΘΕΜΑ Ϛ′. *Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των τετραγώνων πέντε διαδοχικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι ίσο με τετράγωνο ακεραίου.*

$a-2,\ a-1,\ a,\ a+1,\ a+2 \quad a \in \mathbb{Z}$

$S_{x^2} = 5a^2 + 10 = 5(a^2+2)$

$a \equiv 0 \pmod 5 \quad a^2 \equiv 0 \bmod 5 \Rightarrow a^2+2 \not\equiv 0 \bmod 5$

$\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow \ldots$

$2 \qquad \Rightarrow$

$3 \qquad \Rightarrow$

$4 \qquad \Rightarrow$

ΘΕΜΑ Ζ′. *Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό $n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός* n^2+3n+5 A *δεν είναι πολλαπλάσιο του* 121.

Έστω $n^2+3n+5 = 11\kappa \quad \kappa \in \mathbb{N}$

$$n^2+3n+2+3 = 11\kappa$$

$$(n+1)(n+2)+3 = 11\kappa$$

$$(n+1)(n+2) = 11\kappa - 3 \equiv (-3) \bmod 11$$

$$\equiv 8 \pmod{11}$$

$$n+1 \equiv 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \pmod{11}$$

$$n+2 \equiv \ldots \quad \ldots \quad \ldots \pmod{11}$$

$$(n+1)(n+2) \equiv 8 \pmod{11}$$

οπότε θα έχει υπόλοιπο 5.

άρα $n \equiv 4 \pmod{11} = 11\Lambda + 4$

με αντικατάσταση στην αρχική άτοπο

Αν $n = 121\kappa + \upsilon \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad 0 \le \upsilon \le 120$

$$A = (121\kappa+\upsilon)^2 + 3(121\kappa+\upsilon) + 5$$

$$= \text{πολ}121 + \upsilon^2+3\upsilon+5$$

$\boxed{(\alpha+\beta)^n = \text{πολ}\alpha + \beta^n}$ οφείλει $11^2 \mid \upsilon^2+3\upsilon+5$

και πρέπει $11 \mid \upsilon^2+3\upsilon+5$

αν $\upsilon = 11m+\alpha \Rightarrow \upsilon^2+3\upsilon+5 = \text{πολ}11 + \alpha^2+3\alpha+5$
$0 \le \alpha \le 10$

το $\alpha^2+3\alpha+5 = \text{πολ}11$ μόνο για $\boxed{\alpha=4}$

$$16+12+5 = 33$$

$$\upsilon^2+3\upsilon+5 = \text{πολ}11 + 33 = 11\Lambda+33 =$$
$$= 11(\Lambda+3)$$

$0 \le \upsilon = 11m+4 \le 120$ απόπου προκύπτει ότι όχι πολ121

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ mod 10

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
2	4	8	6	2	4
3	9	7	1	3	9
4	6	4	6	4	6
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6
7	9	3	1	7	9
8	4	2	6	8	4
9	1	9	1	9	1

Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο

$$7^{2016} = (7^4)^{504} \equiv 1^{504} (\bmod 10) \equiv 1 \bmod 10$$

$$\begin{array}{r|l} 2016 & 4 \\ \hline 016 & 504 \\ 0 & \end{array}$$

0

τελευταίο ψηφίο 1

7^{2016} → 2 τελευταία ψηφία?

$$7^2 \equiv 49 (\bmod 100)$$
$$7^3 = 343 \equiv 43 (\bmod 100)$$
$$7^4 = 2401 \equiv 1 (\bmod 100)$$
$$7^5 \equiv 7 (\bmod 100)$$
$$7^{2016} = (7^4)^{504} \equiv 1^{504} (\bmod 100)$$
$$\equiv 1 (\bmod 100)$$

0 mod2 = { άρτιοι }
1 mod2 = { περιττοί }
$3 \neq 241$ $\quad 3 \equiv 1 (\bmod 2)$
$241 \equiv 1 (\bmod 2)$

τελ. ψηφία 7^{2016} : 01

Τελευταίο ψηφίο $3^{1999} + 2^{1999}$

$$\begin{array}{r|l} 1999 & 4 \\ \hline 3 & 499 \end{array}$$

$1999 = 4 \cdot 499 + 3$

$$3^{1999} \equiv 3^3 \bmod 10 \equiv 7 (\bmod 10)$$
$$2^{1999} \equiv 2^3 \bmod 10 \equiv 8 (\bmod 10)$$
$$(2^4)^{499} \cdot 2^3 \equiv 8 (\bmod 10)$$

$$3^{1999}+2^{1999} \equiv (7+8) \bmod 10 \equiv 5 \pmod{10}$$

$$3^{1999} = 3^{4\cdot 499+3} = (3^4)^{499}\cdot 3^3 \equiv 1\cdot 7 \pmod{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^3 = 27 = 2\cdot 10+7 \\ 3^4 = 81 = 8\cdot 10+1 \end{array}\right\} \quad 3^3\cdot 3^4 = (2\cdot 10+7)(8\cdot 10+1) =$$

$$\cancel{2\cdot 10\cdot 8\cdot 10} + \cancel{2\cdot 10\cdot 1} + \cancel{7\cdot 8\cdot 10} + 7\cdot 1$$

E1995A Να εξεταστεί αν υπάρχουν ακέραιοι x, y ώστε $x^2+4y=1995$

$$4y \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow 4y = \text{πολ}4$$

$$1995 \equiv 3 \pmod 4 \Leftrightarrow 1995 = 4\cdot k+3$$

$1995 : 4 = 498$

$$x^2 = 1995-4y \equiv 3 \pmod 4 - 0 \pmod 4 \quad 4\cdot 498+3$$

$$x^2 \equiv 3 \pmod 4$$

mod4

x	x^2
0	0
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	1

Οποιοσδήποτε αριθμός στο τετράγωνο $0, 1 \pmod 4$

άρα $x^2 \equiv 3 \pmod 4$ αδύνατο

Συνεπώς δεν υπάρχουν τέτοιοι ακέραιοι

$$x = 4k+\upsilon \qquad \upsilon = 0,1,2,3$$

$$x^2 = (4k+1)^2 = (4k)^2+8k \boxed{+1}$$

$$x^2 = (4k+2)^2 = \quad +4 \equiv 0 \pmod 4$$

$$x^2 = (4k+3)^2 = \quad 1 \pmod 4$$

$$x^2 = (4k+0)^2 = \quad 0 \pmod 4$$

Υπόλοιπο της $2^{100} : 7$

$2^1 \equiv 2 \pmod 7$
$2^2 \equiv 4 \pmod 7$
$2^3 \equiv 1 \pmod 7$
$2^4 \equiv 2 \pmod 7$
$2^5 \equiv 4 \pmod 7$

$2^{100} = (2^4)^{25} \equiv 2^{25} \pmod 7 =$
$= (2^5)^5 \pmod 7 \equiv 4^5 \pmod 7$
$= 2^{10} \pmod 7 \equiv (2^5)^2 \pmod 7$
$= 4^2 \pmod 7 = 16 \bmod 7$
$= 2 \pmod 7.$

$100 : 3 = 33$, υπόλοιπο 1

$2^{100} = 2^{3 \cdot 33 + 1} = (2^3)^{33} \cdot 2^1 \equiv$
$\equiv (2^3)^{33} \bmod 7 \cdot 2^1 \pmod 7$
$\equiv 1^{33} \bmod 7 \cdot 2 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$

ΝΔΟ $\boxed{21 \mid (2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1}) = A}$ $\nu \in \mathbb{N}$

Για $\nu = 1$: $2^6 + 5^3 = 64 + 125 = 189 = 9 \cdot 21$

$21 = 3 \cdot 7$ $3 \mid A$ και $7 \mid A$

$2 \equiv 2 \pmod 3$
$2^2 \equiv 1 \pmod 3$
$2^3 = 2 \pmod 3$

$2^6 \equiv 1 \pmod 3$
$2^{2\nu+4} \equiv 1 \pmod 3$
$2\nu+4$ άρτιος

$5 \equiv 2 \pmod 3$
$5^2 \equiv 1 \pmod 3$
$5^3 \equiv 2 \pmod 3$

$5^{2\nu+1} \equiv 2 \pmod 3$ διότι $2\nu+1$ περιττός

$A \equiv 1 \pmod 3 + 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 3$
$\equiv 0 \pmod 3$

άρα $3 \mid A$

$2^3 \equiv 1 \pmod 7$
$2^4 \equiv 2 \pmod 7$
$2^5 \equiv 4 \pmod 7$

$5 \equiv 5 \pmod 7 \equiv (-2) \bmod 7$
$5^2 \equiv 4 \pmod 7$
$5^3 \equiv (-1) \pmod 7$

για $3 \mid \nu$: $2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1} = 2^{2 \cdot 3k+4} \equiv 2 \pmod 7$
$5^{2\nu+1} = 5^{2 \cdot 3k} \cdot 5 = 5^{6k+1} = 5 \pmod 7 \equiv (-2) \pmod 7$
$A = 2^{2\nu+4} + 5^{2\nu+1} \equiv 2 \pmod 7 + (-2) \bmod 7 \equiv 0 \pmod 7$

ομοίως για τα άλλα υπόλοιπα του 3

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή, 12 Φεβρουαρίου 2021.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 Ημέρα Sierpinksi

Όλα τα προβλήματα που θα δούμε σήμερα είναι τοποθετημένα από τον Πολωνό Μαθηματικό Waclaw Sierpinski[1882-1969]. Εργάστηκε ερευνητικά, με σημαντική συμβολή, σε Θεωρία Αριθμών, θεωρία Συνόλων και Τοπολογία. Στο ευρύ κοινό είναι γνωστός για μερικά όμορφα μορφοκλασματικά σχήματα (φρασταλς), όπως το τρίγωνο Σιερπίνσκι, το χαλί Σιερπίνσκι και οι καμπύλες Σιερπίνσκι. [**;**]

Σχήμα 1

Άσκηση 1 (1/1)**.** *Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί $n \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ο $n+1$ διαιρεί τον n^2+1.*

Άσκηση 2 (1/2)**.** *Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι αριθμοί $n \in \mathbb{Z}$ για τους οποίους ο $n-3$ διαιρεί τον n^3-3.*

Άσκηση 3 (1/3)**.** *Να αποδειχθεί ότι αν ο 7 διαιρεί τον $a^2+b^2, a, b \in \mathbb{Z}$, τότε θα διαιρεί και τους a, b.*

Άσκηση 4 (1/4)**.** *Να βρεθούν άπειροι φυσικοί αριθμοί $n \in \mathbb{N}^*$ για τους οποίους ο $4n^2+1$ διαιρείται ταυτόχρονα από τους 5 και 13.*

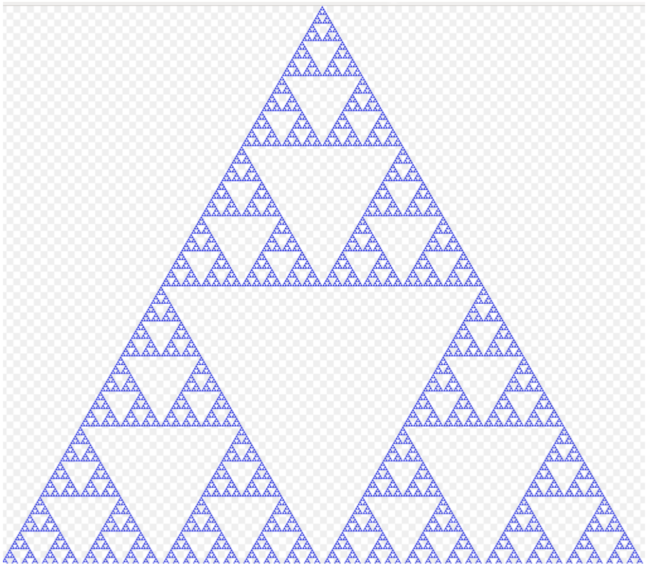
Άσκηση 5 (1/6)**.** *Να αποδειχθεί ότι ο 19 διαιρεί τον $2^{2^{6n+2}}+3$ για κάθε φυσικό αριθμό n.*

Άσκηση 6 (1/17)**.** *Αν $n \in \mathbb{N}^*$ άρτιος, τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι φυσικοί αριθμοί $k \in \mathbb{N}$, ώστε κανένας από τους:*

$$n+1, n^n+1, n^{n^n}+1, \dots$$

να μη διαιρείται από τους k.

2 Χαρακτηριστικά Sierpinski



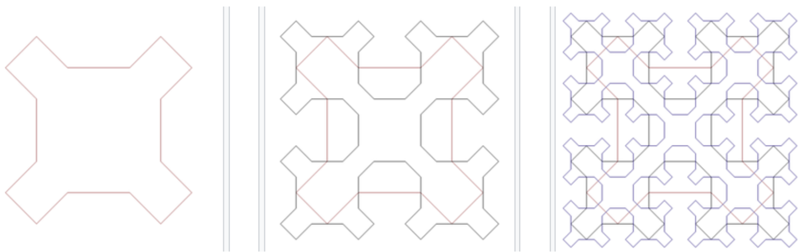
Σχῆμα 2

Στο κινούμενο σχέδιο εδώ Σιερπινσκι φαίνεται η δημιουργία ενός τριγώνου Sierpinski.

Η κατασκευή γίνεται αφαιρώντας από το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο, το μεσαίο ισόπλευρο τρίγωνο που σχηματίζεται, ενώνοντας τα μέσα του αρχικού τριγώνου. Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία σε καθένα από τα τρίγωνα που απομένουν και συνεχίζουμε κατ᾽ αυτόν τον τρόπο. Το σχήμα που απομένει αποτελεί παράδειγμα ενός αυτο-όμοιου σχήματος.

Είναι ενδιαφέρον ότι αν θεωρήσουμε ότι μία καμπύλη είναι μονο-διάστατη, ενώ ένα τρίγωνο αποτελεί επιφάνεια που είναι δι-διάστατη, στο τρίγωνο Sierpinski έχει αφαιρεθεί τόση επιφάνεια, ώστε τελικά αυτό που απομένει να μην αποτελεί διαισθητικά δι-διάστατο σχήμα, αλλά κάτι λιγότερο! Αναπτύσσοντας τη διάσταση **Hausdorff**, ως ευρύτερη έννοια της διάστασης ενός χώρου, θα μπορούσε να υπολογιστεί ότι το αντικείμενο αυτό έχει διάσταση $1,58$ (Καμπύλες γεμίζουσες το χώρο[῾H99]) .

Αν από την άλλη πλευρά κατασκευάσουμε με παρόμοιο επαναληπτικό τρόπο μία **καμπύλη Sierpinski**, τότε αυτή μπορεί να έχει διάσταση 2!

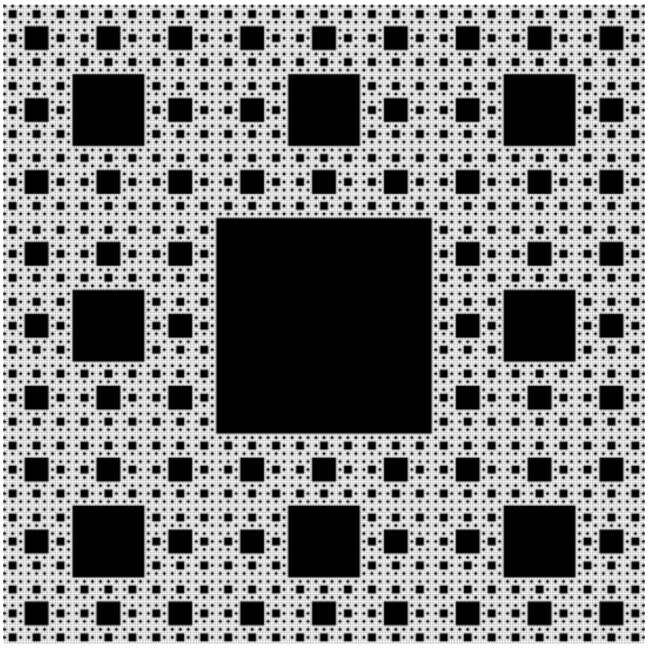


Σχῆμα 3: Μία κλειστή καμπύλη Sierpinski

Το χαλί στο Σχήμα 4 είναι το ορθογώνιο ανάλογο του τριγώνου. Το τετράγωνο χωρίζεται σε εννιά ίσα τετράγωνα και αποκόπτεται το μεσαίο. Η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται για καθένα από τα εναπομείναντα τετράγωνα.

3 Ερώτημα κλεισίματος

Τι το ιδιαίτερο έχει η σημερινή ημερομηνία;



Σχῆμα 4: Το χαλί του Sierpinski

Ἀναφορὲς

[Σιερ04] Sierpinski, Waclaw, 250 *Προβλήματα της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών*, Κάτοπτρο, Αθήνα, 2004.

[῾Η99] Χασάπης, Σωτήριος, *Space Filling Curves*, Προπτυχιακή εργασία, Αθήνα, 1999. Διαθέσιμη και εδώ.

Τα σχήματα και η φωτογραφία προέρχονται από λήμματα στο wikipedia.org

Σ20α – Όμιλος 11/02/2021

2

Προχωρημένα Θεωρήματα βασικής Θεωρίας Αριθμών

α) Εισαγωγή – Υπενθυμίσεις.

1 α1) Αν $p>3$ πρώτος, τότε $p^2 \equiv 1 \pmod 3$

Προφανώς $p \not\equiv 0 \pmod 3$

Αν $p \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$

Αν $p \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 4 \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$

2 α2) Αν $p \neq 2$ πρώτος $\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 8$ ~~ή $p \not\equiv 3 \pmod 8$~~

$p \neq 2 \Rightarrow p \equiv 1 \bmod 8$ ή $3 \bmod 8$ ή $5 \bmod 8$ ή $7 \bmod 8$

$\Rightarrow p^2 \equiv 1 \bmod 8$ ή $p^2 \equiv 9 \bmod 8 \equiv 1 \bmod 8$ ή $p^2 = 25 \bmod 8 \equiv 1 \bmod 8$

ή $p^2 \equiv 49 \bmod 8 \equiv 6 \cdot 8 + 1 \equiv 1 \bmod 8$

3 α3) Αν $p>3$ πρώτος $\Rightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 6$

Αν $p \equiv 2 \bmod 6 \Rightarrow 2 \mid p-6 \Rightarrow 2 \mid 6+p-6 = p$ άτοπο

Αν $p \equiv 3 \bmod 6 \Rightarrow 3 \mid p-6 \Rightarrow 2 \mid 6+p-6 = p$ άτοπο

Αν $p \equiv 4 \bmod 6 \Rightarrow 4 \mid p-6 \Rightarrow 2 \mid p-6 \Rightarrow 2 \mid p$ άτοπο

Αν $p \equiv 5 \bmod 6 \Rightarrow p \equiv -1 \bmod 6$

Άρα, γενικά $\boxed{p \equiv \pm 1 \pmod 6}$

ΘΑ20202 Φ4

1

ΠΛΗΡΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ
Wilson
Fermat ή μικρο Fermat
Euler
φ Euler's
Ιδιότητες φ
Τάξη (ΣΤΣΟΓ) ΔΕΝ ΖΗΤ)

4 Ιδιότητες ισοτιμιών (επαναλήψη)

(5) • Μικρό Θεώρημα Fermat (Fermat's Little theorem)

Αν p πρώτος, τότε $\boxed{a^p \equiv a \pmod{p}}$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

(6) Απόδειξη:

Αν $p \nmid a$, τότε οι ακέραιοι: $0a, 1a, \dots, (p-1)a$ αποτελούν πλήρες σύστημα υπολοίπων $\bmod p$

πχ $0, 1, 2$ είναι πλήρες $\bmod 3$.

Διότι αν ίσχυε $ia \equiv ja \pmod{p}$
$\Leftrightarrow p \mid (i-j)a \xRightarrow{i-j<p} p \mid a$, άτοπο.

Οπότε οι ακέραιοι $0a, 1a, 2a, \dots, (p-1)a$ είναι οι $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ ενδεχομένως αναδιαταγμένοι.

πχ $a=5 \quad p=3$: $\{0a=0, 1a=5, 2a=10\}$
$= \{0 \bmod 3, 2 \bmod 3, 1 \bmod 3\} = \{0, 1, 2\}$

Γενικά, $a \equiv b \bmod p$, $c \equiv d \bmod p \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{p}$

οπότε $1a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p} \Rightarrow$

$(p-1)!\, a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p} \Leftrightarrow$

$p \mid (p-1)!\, a^{p-1} - (p-1)! \Leftrightarrow p \mid (p-1)!\,(a^{p-1} - 1) \Rightarrow$

$p \mid a^{p-1} - 1 \Leftrightarrow \boxed{a^{p-1} \equiv 1 \bmod p}$

Αν $p \mid a \Rightarrow p \mid a^p \Rightarrow a^p \equiv 0 \pmod{p} \equiv a \pmod{p}$

(7) Παρατήρηση: Για $(p, a) = 1$ ισχύει $\boxed{a^{p-1} \equiv 1 \bmod p}$

Πόρισμα: Αν $p \nmid a$ τότε $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ $\forall$ p πρώτο, $a \in \mathbb{Z}$

⑧ Παράδειγμα (Συγκελάκης πχ 219)

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης

$10^{6k+4} : 7 \quad k \in \mathbb{N}$

$p = 7$ πρώτος $\qquad a^p \equiv a \pmod p$

$a = 10 \qquad 10^7 \equiv 10 \pmod 7 \equiv 3 \bmod 7$

$(10,7) = 1 \Rightarrow 10^6 \equiv 1 \pmod 7$

$\Rightarrow 10^{6k} \equiv 1 \pmod 7$

$10 \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow 10^2 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 10^4 \equiv 4 \pmod 7$

$10^{6k+4} \equiv 10^{6k} \cdot 10^4 \equiv 1 \cdot 4 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7$

πχ $10^{6004} = 10^{6 \cdot 1000 + 4} \equiv 4 \pmod 7$

⑨ πχ2 (Συγκ. πχ220)

ΝΔΟ ο $A = 7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78}$ λήγει σε 0.

Αρκεί $10 | A \Leftarrow 2, 5 | A$

$a^p \equiv a \pmod p$ Ο A είναι διαφορά αρτίων, άρα άρτιος.

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ Αρκεί $5 | A \Leftarrow A \equiv 0 \pmod 5$

$\boxed{1968 = 2^4 \cdot 3 \cdot 41} \qquad 68 = 2^2 \cdot 17 \qquad 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$

$2^4 = 2^{5-1} \equiv 1 \pmod 5 \qquad 17^4 \equiv 1 \pmod 5$

$3^4 = 3^{5-1} \equiv 1 \pmod 5 \qquad 17 \equiv 2 \pmod 5 \quad 17^2 \equiv 4 \pmod 5$

$41^4 = 41^{5-1} \equiv 1 \pmod 5 \qquad (2^2)^2 = 2^4 \equiv 1 \pmod 5$

$1968^{1968} = \left[(2^4 \cdot 3 \cdot 41)^4\right]^{2^2 \cdot 3 \cdot 41} \equiv 1 \pmod 5 \qquad (2^2)^{78} \equiv 1 \pmod 5$

$A \equiv 7 \cdot 1 \pmod 5 - 3 \cdot 4 \pmod 5 \equiv -5 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 5$

Συνάρτηση φ του Euler

(10) • Αν $n \geq 1$ $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\varphi(n) =$ πλήθος $k \in \mathbb{N}$: $1 \leq k \leq n$ και $(k,n)=1$
$= \#\{\alpha \in \mathbb{N} : 1 \leq \alpha < n$ και $(\alpha, n) = 1\}$

πχ: $\varphi(1) = 1 \{1\}$ $\varphi(2) = 1 \{1\}$ $\varphi(3) = 2$ $\{1,2\}$ $\varphi(4) =$ $\{1,3\}$
$\varphi(9) = 6 \to \{2,4,5,1,7,8\}$ $\varphi(2021) = 1932$
στο υπολογιστικό: totient(n);

(11) ο Θεώρημα: Αν p πρώτος, τότε $\varphi(p) = p-1$
(χαρακτηρίζει τους πρώτους)

(12) Θεώρημα Euler (ή Euler–Fermat): Για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$ με $(\alpha, m) = 1$ ισχύει ότι: $\boxed{\alpha^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}}$

απόδειξη: (παρόμοια με Fermat)

Αν $\boxed{m=p} \Rightarrow \varphi(m)=p-1$ άρα $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$
$\Rightarrow a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$

(13) Δηλαδή το μικρό Fermat είναι συνέπεια Θ.F.E.

(14) <u>παράδειγμα 3</u>. Να βρεθεί το υπόλοιπο <u>$3^{100} \bmod 100$</u>

$100=(1100100)_2 = 2^6+2^5+2^2$

$3^{100} = 3^{2^6}\cdot 3^{2^5}\cdot 3^{2^2}$
$= 3^{64}\cdot 3^{32}\cdot 3^4$
$\equiv 81\cdot 41\cdot 81 \ m100$
$\equiv 21\cdot 81 \ m100 \equiv 1 \bmod 100$

$3^1\equiv 3 \ m100$
$3^2\equiv 9 \ m100$
$3^4\equiv 81 \ m100$
$3^8\equiv 61 \ m100$
$3^{16}\equiv 21 \ m100$
$3^{32}\equiv 41 \ m100$
$3^{64}\equiv 81 \ m100$

ΑΝΤΟΙΝΑΛΗΣ

Συνεπώς, $3^{100}\equiv 1 \pmod{100}$

(15) <u>παρατήρηση</u>: Αν ήξερα το $\varphi(100)$ τότε τέλος:
$(3,100)=1$ $\quad 3^{\varphi(100)}\equiv 1 \pmod{100}$

(16) <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^{k-1}(p-1)=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$

(17) <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: $\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n) \ \forall (m,n)=1$
(πολλαπλασιαστική συνάρτηση)

Στο πχ $\varphi(100)=\varphi(2^2\cdot 5^2)=\varphi(4)\cdot\varphi(25)=$
$=2^2\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 5^2\left(1-\frac{1}{5}\right)=100\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$
$=10\cdot 4=40$

άρα $3^{40}\equiv 1 \pmod{100}$
$3^{100}\equiv 3^{20} \pmod{100}\equiv 21\cdot 81 \pmod{100}\equiv 1 \pmod{100}$

(18) ΘΕΩΡΗΜΑ: $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_m}$ p_i πρωτοι διαφ. $a_i \geq 1$

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

(19)

ΑΣΚΗΣΗ πχ Να βρεθούν άπειροι ακέραιοι n ώστε $10 \mid \varphi(n)$.

Θέσε $n = 11^k$ $k=1,2,\ldots$ $\varphi(11^k) = 11^k - 11^{k-1} =$
$= 11^k\left(1-\frac{1}{11}\right) = 11^k \cdot \frac{10}{11}$
$= 11^{k-1} \cdot 10$

Αρα $10 \mid 11^{k-1} \cdot 10$ $\forall k \geq 1$

(20) Θέμα: Να βρεθούν, αν υπάρχουν, $x, y \in \mathbb{Z}^+$ ώστε
$$x^5 + y^5 + 1 = (x+2)^5 + (y-3)^5$$

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ αν $p \nmid a$ p πρώτος και $a^p \equiv a \bmod p$

Από ΘF $a = x$ $p = 5$ $x^5 \equiv x \pmod 5$ $y^5 \equiv y \pmod 5$

$\Rightarrow x^5 + y^5 + 1 \equiv (x+y+1) \pmod 5$

$(x+2)^5 \equiv (x+2) \bmod 5$ $(y-3)^5 \equiv (y-3) \bmod 5$

$(x+2)^5 + (y-3)^5 \equiv (x+y-1) \pmod 5$

$\Rightarrow x+y+1 \equiv (x+y-1) \pmod 5 \Leftrightarrow 5 \mid x+y+1-x-y+1 = 2$

$\Rightarrow 5 \mid 2$ αδύνατο, άρα δεν υπάρχουν x, y

ή

$z^5 \equiv z \pmod 5$ $z^2 \equiv z \bmod 2$ $z^4 \equiv z^2 \equiv z \bmod 2 \Rightarrow$
$z^5 \equiv z^2 \equiv z \pmod 2$

$(2,5)=1 \Rightarrow \boxed{z^5 \equiv z \pmod{10}}$

οπότε $x^5 + y^5 + 1 \equiv (x+y+1) \pmod{10}$
$(x+2)^5 + (y-3)^5 \equiv (x+y-1) \pmod{10}$

$\Rightarrow x+y+1 \equiv (x+y-1) \pmod{10}$

$\Leftrightarrow 10 \mid x+y+1-x-y+1 = 2$ άτοπο

$a \equiv b \bmod p$ $(q,p)=1$
$a \equiv b \bmod q$ $a \equiv b \bmod (pq)$

$p \mid a-b$ $q \mid a-b$
$a-b = pk$ $a-b = ql$
$(p,q)=1 \Rightarrow pq \mid a-b \Leftrightarrow$
$\boxed{a \equiv b \pmod{pq}}$

Euler $\alpha^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$ $(\alpha,n)=1$

(22) $A = 3^{1000}$ να βρεθούν τα δύο τελευταία ψηφία ΔΙΠΛΩΜΑ

$A \pmod{100} \equiv ;$

$\alpha=3$ $n=100$ $(3,100)=1$ $\alpha^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$ — καθοδηγεί για το n

$\Rightarrow 3^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$ $\varphi(100)=\varphi(2^2 \cdot 5^2)=\varphi(2^2)\varphi(5^2)$

$\Rightarrow 3^{40} \equiv 1 \pmod{100}$ $=(2^2-2)(5^2-5)= 2 \cdot 20 = 40$

$\Rightarrow (3^{40})^{25} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow A \equiv 1 \bmod 100$

Άρα 01

(23) 2 τελευταία ψηφία $B = 7^{7^{1000}}$ ΔΙΠΛΩΜ.ΕΑΠ 49

$B \equiv x \bmod 100 \to n$ $\alpha^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{100}$ αν $(\alpha,n)=1$

$\alpha=7$ $n=100=2^2 \cdot 5^2$ $(7,100)=1$ $7^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow$

$7^{40} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow (7^{40})^{25} \equiv 1^{25} \pmod{100} \Rightarrow 7^{1000} \equiv 1 \pmod{100}$

$\Rightarrow 100 \mid 7^{1000}-1 \Leftrightarrow 7^{1000} = 100k+1$ $k \in \mathbb{Z}$

άρα $B = 7^{100k+1} = (7^{100})^k \cdot 7$

$7^{100} = 7^{40} \cdot 7^{40} \cdot 7^{20} \equiv 7^{20} \pmod{100}$

$20 \equiv \varphi(n)$ με $(7,n)=1$; $\varphi(50)=\varphi(5^2 \cdot 2)=\varphi(5^2)\varphi(2)=5^2-5=20$

αν όχι βολικό το 20 θα έψαχνα μικρότερο αλλά κοντά ώστε να μην περισσεύουν πολλά 7άρια

$\alpha=7$ $n=50$ $(7,50)=1$

$\overset{\Theta E}{\Longrightarrow} 7^{\varphi(50)} \equiv 1 \pmod{50}$

7 49 343→43 301→1 mod100

$7^4 \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow (7^4)^5 \equiv 1 \pmod{100}$

$B \equiv 7 \cdot 7^{20} \pmod{100} \equiv 7 \pmod{100}$ άρα 07

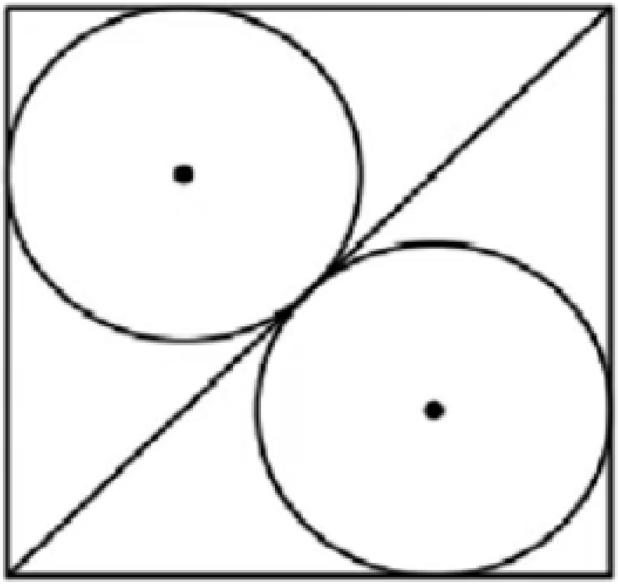
Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ομιλος Μαθηματικων Προτυπου ΓΕΛ Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης
Παρασκευή, 19 Φεβρουαρίου 2021.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

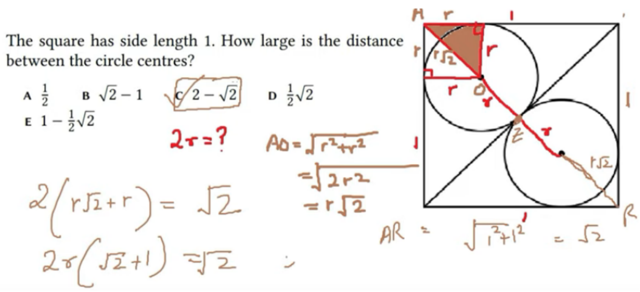
1 Μαθηματικά θέματα απ΄όλον τον κόσμο

1.1 Α Θέματα

Θεμα Α′ (Διαγωνισμός Abel 2019)**.** *Αν το τετράγωνο (1) έχει πλευρά 1, να βρεθεί η απόσταση των κέντρων των κύκλων. Λύση εδώ.*



Σχῆμα 1

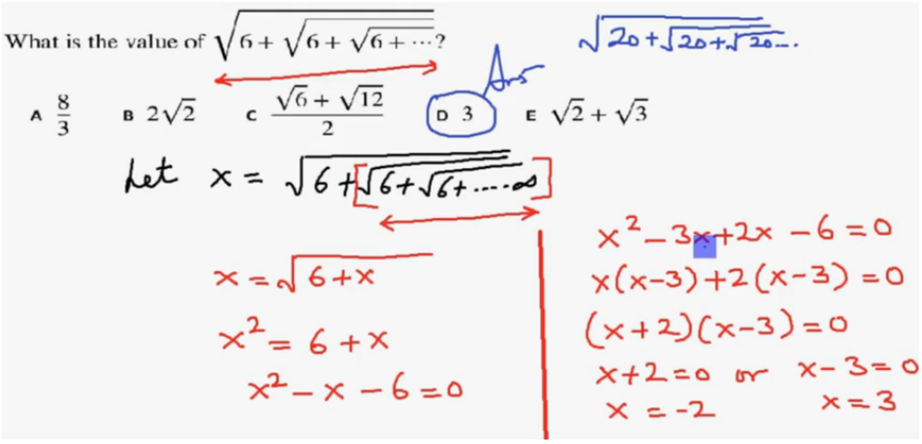


Σχῆμα 2

Λύση. □

Θεμα Β′. *Αν* $A=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$ *είναι πραγματικός αριθμός να βρεθεί η τιμή του*

Λύση. □



Σχῆμα 3

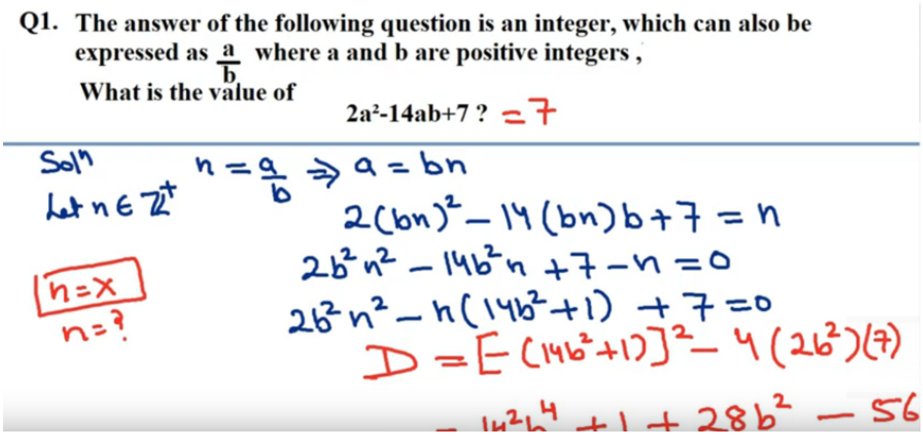
Θεμα Γ′ (Διαγωνισμός Abel 2016). *Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί a, b, c, d, e με μέση τιμή 2 και γινόμενο 1, ώστε να ισχύει:*

$$\frac{1}{abcd}+\frac{1}{bcde}+\frac{1}{cdea}+\frac{1}{deab}=8$$

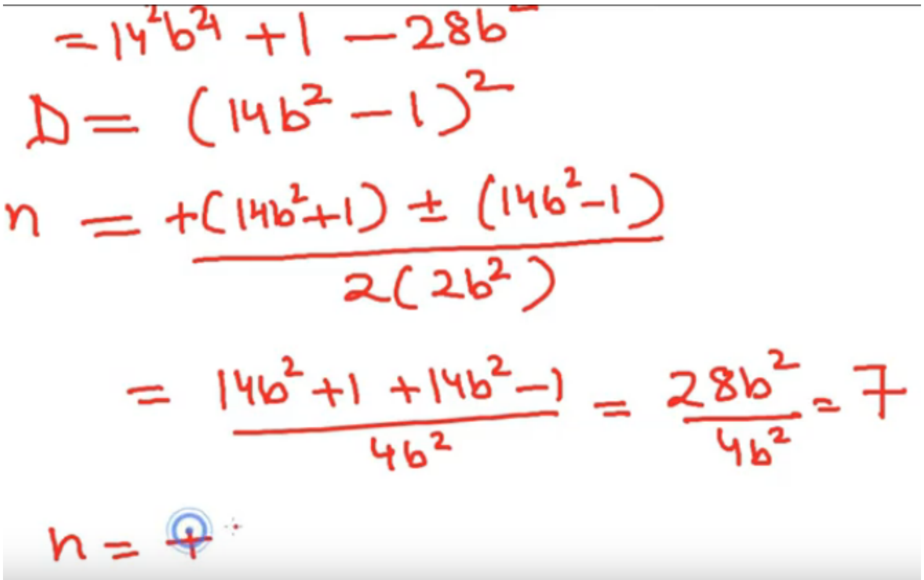
Απόδειξη. μία λύση □

1.2 Β θέματα

Θέμα Δ′ (Διαγωνισμός Abel 2018). *Αν η παράσταση* $A = 2a^2 - 14ab + 7$ *έχει αριθμητική τιμή έναν ακέραιο, ο οποίος γράφεται στη μορφή* $\frac{a}{b}$*, να βρεθεί η τιμή της.*



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Λύση. □

Θέμα Ε′. mathematica *Έστω* a, b, c *οι ρίζες της εξίσωσης* $x^3 - x - 1 = 0$*.Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:* $\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c}$.

Λύση 1. Θέτουμε $t = \dfrac{1-x}{1+x}$ $(*)$, όπου x ρίζα της δοθείσας τριτοβάθμιας. Λύνοντας την $(*)$ ως προς x θα βρούμε $x = \dfrac{1-t}{1+t}$, οπότε θέτοντας στην τριτοβάθμια ισχύει

$$\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^3 - \frac{1+t}{1-t} - 1 = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $(1-t)^3$ θα βρούμε μετά τις πράξεις $t^3 - t^2 + 7t + 1 = 0$. Από Ϊετα το άθροισμα των ριζών της τελευταίας είναι 1. Αλλά από την $(*)$ οι ρίζες της τελευταίας είναι οι $\dfrac{1-a}{1+a}, \dfrac{1-b}{1+b}, \dfrac{1-c}{1+c}$. Συνεπώς

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c} = 1$$ □

Λύση 2. Η παράσταση A είναι ίση με $A = -3 + 2\left(\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right) = -3 + 2\frac{(1+a)(1+b)+(1+b)(1+c)+(1+c)(1+a)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$.

Αφού $P(x) = x^3 - x - 1 = (x-a)(x-b)(x-c)$ άρα $-P(-1) = 1 = (1+a)(1+b)(1+c)$ οπότε

$A = -3 + 2[3 + 2(a+b+c) + ab + bc + ca] = -3 + 2(3 + 2\cdot 0 - 1) = 1$

όπου με τη βοήθεια των τύπων Vieta βρήκαμε ότι $a+b+c = 0$ και $ab+bc+ca = -1$. □

Λύση 3. Θέτουμε

$1 + a = t, 1 + b = w, 1 + c = u,$

Άρα $a = t - 1, (t-1)^3 = t \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0, (*)$

Οπότε η παράσταση γράφεται

$\frac{2-t}{t} + \frac{2-w}{w} + \frac{2-u}{u} = 2(\frac{1}{t} + \frac{1}{w} + \frac{1}{u}) - 3 = 2.\frac{wu+tu+tw}{twu} - 3 = 2.\frac{2}{1} - 3 = 1$

στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήθηκαν οι τύποι $Vietta$ για την εξίσωση $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ με ρίζες t, w, u □

Θεμα ϛ' (Διαγωνισμός Abel 2020). *Αν $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$, $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι οι αριθμοί a, b είναι είτε και οι δύο άρτιοι, είτε και οι δύο περιττοί.*

Θεμα Ζ' (Διαγωνισμός 2012 - Abel p4a). *Δίνονται οι θετικοί αριθμοί x και y. Να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^3 + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^3 \geq 16.$$

Λύση 1. $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^3 + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^3 \geq 2\left[\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \geq 2(1+1)^3 = 16$ □

Λύση 2. Αναπτύσσοντας τις ταυτότητες στο αριστερό μέρος έχουμε:

$$2 + 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}\right) \geq 2 + 6 + 6 + 2 = 16$$

□

Θεμα Η' (Διαγωνισμός 2010 - Abel Competition p2a). *Να αποδεχθεί ότι:*

$$\frac{x^2}{1-x} + \frac{(1-x)^2}{x} \geq 1, \forall x,\ 0 < x < 1$$

Λύση. Ισχύει ότι:

$$\frac{x^2}{1-x} + \frac{(1-x)^2}{x} = \frac{x^3 + (1-x)^3}{x(1-x)} = \frac{1 - 3x + 3x^2}{x - x^2} = \frac{1 - 4x + 4x^2}{x - x^2} + 1 = \frac{(1-2x)^2}{x - x^2} + 1 \geq 1$$

Ισότητα για : $x = \frac{1}{2}$ □

Λύση 2. Ισχύει ότι :

$$A = \frac{x^2}{1-x} + \frac{(1-x)^2}{x} = \frac{x^2}{1-x} + (1-x) + \frac{(1-x)^2}{x} + x - 1 \geq 2x + 2(1-x) - 1 = 1$$

$(Q.E.D)$ Με την ισότητα για $x = \frac{1}{2}$

□

Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Ὁμιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

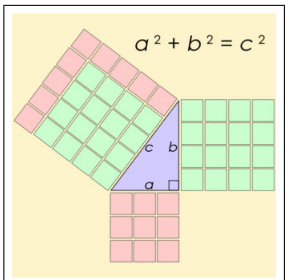
25 Φεβρουαρίου 2021 | Φύλλο 18α | Στοιχειοθετείται με το LaTeX

Καθηγητής:Σωτήριος Χασάπης, www.arithmoi.gr

Πυθαγόρειες τριάδες και ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

1 Ιστορική αναδρομή

Η ισχύς του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τον 6ο αι. π.Χ. οδήγησε σε λύσεις για την κατασκευή κάθετων ευθυγράμμων τμημάτων ως πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με κατάλληλα ακέραια μήκη πλευρών. Η σχέση $a^2 + b^2 = c^2$ που αποδίδεται στον Πυθαγόρα μάλλον ήταν ήδη γνωστή στους Βαβυλώνιους από την εποχή του Χαμουραμπί (18ος π.Χ. αι.). Το «γνωστότερο» ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών τους θετικούς ακέραιους αριθμούς (3,4,5) είναι πιθανό να χρησιμοποιήθηκε ακόμα και για την κατασκευή κάθετων πλευρών σε διάφορες κατασκευές.



Τρίγωνο με πλευρές 3,4,5

Η αναζήτηση ακέραιων λύσεων σε εξισώσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές δίνει εξισώσεις που καλούνται **Διοφαντικές** προς τιμήν του Έλληνα Μαθηματικού **Διόφαντου** από την Αλεξάνδρεια του 3ου αι. μ.Χ. Η διοφαντική ανάλυση αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων διοφαντικών εξισώσεων και συνήθως αναζητά απαντήσεις σε ερωτήματα όπως : Υπάρχουν λύσεις; Υπάρχουν λύσεις πέρα από τις προφανείς που ενδεχομένως μπορούμε να βρούμε με απλή παρατήρηση; Υπάρχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος λύσεων; Μπορούν να βρεθούν όλες θεωρητικά ή να υπολογιστούν πρακτικά;

Διόφαντος, 3ος αι. π.Χ.

Ειδικότερα, η λύση της Διοφαντικής εξίσωσης:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

είναι ισοδύναμη με την εύρεση ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές x, y, z, όπως στην πρώτη εικόνα. Ήδη ο Πυθαγόρας είχε βρει έναν τύπο για την κατασκευή άπειρων τέτοιων τριγώνων:

$$x = 2n + 1,\ y = 2n^2 + 2n,\ z = 2n^2 + 2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Εκτός λοιπόν από την προφανή μηδενική λύση της εξίσωσης, αλλά και τις λύσεις στις οποίες κάποιος από τους x, y είναι μηδέν και ο άλλος ίσος με z, στις οποίες φυσικά δεν αντιστοιχούν ορθογώνια τρίγωνα, ο παραπάνω τύπος του Πυθαγόρα δίνει άπειρες ακόμα λύσεις της εξίσωσης. Είναι όμως όλες;

2 Πυθαγόρειες Τριάδες

Ορισμός 2.1. *Μία **Πυθαγόρεια Τριάδα** είναι τρεις ακέραιοι αριθμοί x, y, z, ώστε: $x^2 + y^2 = z^2$ και θα λέγεται **πρωταρχική(Primitive)**, αν ισχύει ότι: Μ.Κ.Δ.$(x, y, z) = 1$*

Παράδειγμα 2.1. *Παραδείγματα Πυθαγορείων τριάδων αποτελούν οι: $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (12, 35, 37), (9, 40, 41)$ αλλά και οι $(6, 8, 10), (9, 12, 15), \dots$*

Άσκηση 1. *Αν (x, y, z) πρωταρχική Πυθαγόρεια τριάδα, τότε κάθε πολλαπλάσιό της: $(kx, ky, kz), k \in \mathbb{Z}$ είναι επίσης Πυθαγόρεια τριάδα.*

Δηλαδή, οι πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες παράγουν όλες τις υπόλοιπες, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο μη μηδενικό ακέραιο.

Λήμμα 2.1. *Αν (x, y, z) πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα, τότε ένας από τους x, y είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο υποθέτοντας ότι και οι δύο x, y είναι άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. □

Από το προηγούμενο Λήμμα προκύπτει ότι δεν υπάρχει πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα (x, y, z) που να αποτελείται μόνο από πρώτους αριθμούς. Βέβαια, υπάρχουν πυθαγόρειες τριάδες με δύο πρώτους: $(3, 4, 5), (11, 60, 61), (19, 180, 181)$, αλλά είναι άγνωστο αν αυτές είναι άπειρες στο πλήθος. Απαραίτητο επίσης στον καθορισμό όλων των πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων είναι και το επόμενο:

Λήμμα 2.2. *Αν $ab = c^n$ με $(a, b) = 1$, τότε οι a, b είναι $n-$οστές δυνάμεις ακεραίων. Δηλαδή, υπάρχουν ακέραιοι k, l, ώστε: $a = k^n,\ b = l^n$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής για τις παραγοντοποιήσεις των a, b, c καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.1. *Κάθε λύση της Πυθαγόρειας εξίσωσης:*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

Μέρος III
Θεωρητικό υπόβαθρο

3 Εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη

Ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης** δύο αριθμών a, b ορίζεται ως εκείνος ο αριθμός k για τον οποίο ισχύουν:

$$k \mid a \text{ και } k \mid b$$
$$\text{Αν } m \mid a \text{ και } m \mid b \Rightarrow m < k$$

Για την εύρεση του ΜΚΔ ένας τρόπος, γνωστός από το Δημοτικό, είναι να αναλύσουμε τους δοθέντες αριθμούς σε γινόμενα πρώτων και να προσδιορίσουμε τους κοινός πρώτους παράγοντες.

Παράδειγμα 1. *Να προσδιοριστεί ο ΜΚΔ των αριθμών* $504, 198$.

504	198	2
252	99	3
84	33	3
28	11	

Ισχύει ότι $\gcd(28, 11) = 1$ άρα $\gcd(504, 198) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Παρόλα αυτά ο υπολογισμός με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες μπορεί να γίνει ιδιαίτερα δύσκολη, αν οι παράγοντες γίνουν κάπως μεγάλοι. Δοκιμάστε για παράδειγμα να υπολογίσετε με αυτήν τη μέθοδο τον μέγιστο κοινό διαιρέτη $\gcd(10366, 6319)$.

3.1 Ευκλείδειος Αλγόριθμος

Θεώρημα 1 (Ευκλείδειος αλγόριθμος για την εύρεση ΜΚΔ)**.** *Αν ισχύει ότι:* $a = qb + r$ *τότε* $(a, b) = (b, r)$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $a = qb + r \Leftrightarrow r = a - q \cdot b$, οπότε κάθε διαιρέτης των a, b θα είναι και διαιρέτης του r. Συνεπώς θα είναι και διαιρέτης των r, b. Επίσης κάθε κοινός διαιρέτης των b, r θα είναι και διαιρέτης του a, οπότε τα σύνολα των κοινών διαιρετών των a, b και των b, r είναι τα ίδια.

Συνεπώς και οι μέγιστοι των δύο συνόλων αυτών θα είναι ίσοι. □

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον Ευκλείδιο Αλγόριθμο 1 για τον υπολογισμό των μέγιστων κοινών διαιρετών των $(a = 504, b = 198)$.

Παράδειγμα 2. *Να υπολογιστεί ο* $(a = 504, b = 198)$.

Λύση.

$$\begin{aligned} 504 &= 2 \cdot 198 + 108 \\ 198 &= 1 \cdot 108 + 90 \\ 108 &= 1 \cdot 90 + 18 \\ 90 &= 5 \cdot 18 + 0 \end{aligned}$$

Οπότε το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο της διαδικασίας: 18 είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $(504, 198) = 18$. □

Παράδειγμα 3. *Να υπολογιστεί ο* $(a = 10366, b = 6319)$.

Λύση. 10366 = 6319 * 1 + 4047
6319 = 4047 * 1 + 2272
4047 = 2272 * 1 + 1775
2272 = 1775 * 1 + 497

1775 = 497 * 3 + 284
497 = 284 * 1 + 213
284 = 213 * 1 + 71
213 = 71 * 3 + 0
Οπότε το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο της διαδικασίας: 71 είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $(10366, 6319)$. □

Μπορείτε να εκτελέσετε τον αλγόριθμο 5.1 με τον αναγραφόμενο σε Python κώδικα σε πολλούς κόμβους στο διαδίκτυο, όπως για παράδειγμα www.programiz.com

3.2 Ο ΜΚΔ ως γραμμικός συνδυασμός

Μία εξαιρετικά χρήσιμη εφαρμογή του Ευκλείδειου αλγορίθμου, είναι ένας όμορφος αλγόριθμος με τον οποίο ο ΜΚΔ d δύο αριθμών a, b, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Περιγράφουμε τη διαδικασία για το παράδειγμα 3.

Θέλουμε λοιπόν να γράψουμε τον $71 = k \cdot 10336 + m \cdot 6319$. Από τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
71 &= 284 - 213 \star 1 \\
213 &= 497 - 284 \star 1 \\
284 &= 1775 - 497 \star 3 \\
497 &= 2272 - 1775 \star 1 \\
1775 &= 4047 - 2272 \star 1 \\
2272 &= 6319 - 4047 \star 1 \\
4047 &= 10366 - 6319 \star 1
\end{aligned} \tag{1}$$

Τώρα, αντικαθιστώντας κάθε φορά τα μερικά υπόλοιπα από τη γραφή τους, ως γραμμικού συνδυασμού των προηγούμενων διαιρέτη και διαιρετέου, έχουμε:

$$\begin{gathered}
71 = 284 - (497 - 284 \star 1) \star 1 \\
71 = (1775 - 497 \star 3) - (497 - (1775 - 497 \star 3) \star 1) \star 1 \\
71 = 2 \star 1775 - 7 \star 497 \\
71 = 2 \star 1775 - 7 \star (2272 - 1775 \star 1) \\
71 = 9 \star 1775 - 7 \star 2272 \\
71 = 9 \star (4047 - 2272 \star 1) - 7 \star 2272 \\
71 = 9 \star 4047 - 16 \star 2272 \\
71 = 9 \star 4047 - 16 \star (6319 - 4047 \star 1) \\
71 = 25 \star 4047 - 16 \star 6319 \\
71 = 25 \star (10366 - 6319) - 16 \star 6319 \\
71 = 25 \star 10366 - 41 \star 6319
\end{gathered} \tag{2}$$

Οπότε με αυτήν την αναδρομική διαδικασία μπορούμε πάντα να εκφράσουμε τον ΜΚΔ δύο αριθμών ως γραμμικό συνδυασμό τους. Ένας αντίστοιχος αλγόριθμος σε Python δίνεται στο 5.2.

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Bezout). *ασδφ*

4 Πολλαπλασιαστικός αντίστροφος

4.1 Εξισώσεις ισοτιμίας

Μέρος IV
Αλγόριθμοι σε γλώσσα Python

5 Παράρτημα - Κώδικας Python

5.1 Εύρεση ΜΚΔ με Ευκλείδειο Αλγόριθμο

```
# Program to compute and display the GCD using the Euclid Algorithm

a=10366
b=6319

q=1000
r=b
while r>0:
    q=a//b
    print(a,"=",b,"*",q , "+",a%b)
    #print(q,a,r, q*(a%b)+r)
    r=a%b
    a=b
    b=r
print("GCD= ", a)
```

5.2 Ο ΜΚΔ ως γραμμικός συνδυασμός

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι γνωστός ως εκτεταμένος αλγόριθμος ΜΚΔ (Extended GCD algorithm).

```
# Python program to demonstrate working of extended
# Euclidean Algorithm

# function for extended Euclidean Algorithm
def gcdExtended(a, b):
# Base Case
    if a == 0 :
        return b,0,1

    gcd,x1,y1 = gcdExtended(b%a, a)

# Update x and y using results of recursive
# call
    x = y1 - (b//a) * x1
    y = x1

    return gcd,x,y


# Driver code
    a, b = 10366,6319
    g, x, y = gcdExtended(a, b)
    print("gcd(", a , "," , b, ") = ", g)
    print(g, "=", a,"*(",x,")+(",y,")*",b)
```

11/03/2021

- Αυτοελεγχόμενες πληροφορίες
- Ψηφία ελέγχου

Δίνεται ένας αριθμός 10 ψηφίων, δημιουργείται από αυτόν με κάποιον υπολογισμό ένας συμπληρωματικός αριθμός.

πχ 12345 → 1+2+3+4+5 = 15

$\boxed{12345\,15}$ αυτό δίνεται

ψηφίο(α) ελέγχου

έλεγχος 1234715 → 1+2+4+7 = 17 ≠ 15

άρα υπάρχει λάθος!

- 1235415 όχι ΛΑΘΟΣ

Ξενόγλωσσος τίτλος	ME-TI, BUCH DER WENDUNGEN
ISBN13	9789600363401
Εκδότης	ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗΣ
Σειρά	ΕΙΚΟΣΤΟΣ ΑΙΩΝΑΣ
Χρονολογία Έκδοσης	Ιούνιος 2018
Αριθμός σελίδων	386
Διαστάσεις	21x14

International Standard Book Number

ISBN : $x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{13}$ $\quad$ 10 για όλους

$$S = x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + 3x_6 + \dots + x_{11} + 3x_{12} + x_{13} \equiv 0 \bmod 10$$

ΑΦΜ: 9 ψήφιος αριθμός $\boxed{x_1 x_2 \dots x_9}$

$$x_1 \cdot 2^8 + x_2 2^7 + x_3 2^6 + \dots + 2x_8 \equiv x_9 \pmod{11}$$

IBAN: (INTERNATIONAL BANK ACCOUNT NUMBER)

GR XX 0110 1250 0000 0001 2300 675

XX: αριθμοί

0110: ΤΡΑΠΕΖΑ

1250: ΚΑΤΑΣΤΗΜΑ

0000: ΝΟΜΙΣΜΑ

0001 2300 675: ΑΡ. ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟΥ

Συνάρτηση αποτίμησης Euler - Θεώρημα Fermat-Euler

<u>Ορισμός</u>: $n \geq 1$ φυσικός

$\varphi(n)$ = πλήθος θετικών ακεραίων $\leq n$ και είναι σχετικά πρώτοι με τον n

<u>πχ1</u> $\varphi(6) = 2$ 1, 5 δεν έχουν κοινό διαιρέτη ($\neq 1$) μετά 6

$\varphi(7) = 6$ $(1,2,3,4,5,6\,;\,7) = 1$

$$\boxed{\varphi(p) \overset{p \text{ πρώτος}}{=\!=} p-1}$$

<u>πχ 2</u> $\varphi(100) = 6$? 41 ? 42 ?

ΜΚΔ$(a,m) = 1$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Euler</u>: Αν $a \in \mathbb{Z}$ με $\boxed{(a,m) = 1}$

τότε $\boxed{a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m}$

$\varphi(p) = p-1 \implies a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

$a^p \equiv a \pmod p$ $(a,p) = 1$

<u>πχ3</u> να βρεθεί το $3^{100} \bmod 100$

(τα τελευταία δύο ψηφία του 3^{100} ?)

<u>$p = 101$ πρώτος</u> $a = 3$ $3^{\varphi(p)} = 3^{p-1} \Rightarrow$

$3^{\varphi(101)} = 3^{100}$

<u>για $m = 100$</u> $(100, 3) = 1$

$\boxed{\varphi(100) = ;}$

$3^{\varphi(100)} \equiv 1 \bmod 100$

$3^{\varphi(100)+1} \equiv 3 \bmod 100$

$$\boxed{\varphi(100) = ?}$$

2120α – 18/03/21

Ορισμός: $n \geq 1$ φυσικός

$\varphi(n)$ = πλήθος θετικών ακεραίων $\leq n$ και

είναι σχετικά πρώτοι με τον n

πχ1 $\varphi(6) = 2$ 1, 5 δεν έχουν κοινό διαιρέτη ($\neq 1$) μ' το 6

$\varphi(7) = 6$ $(1,2,3,4,5,6\ ;7) = 1$

p πρώτος

$$\boxed{\varphi(p) = p-1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Euler: Αν $a \in \mathbb{Z}$ με $(a,n)=1$

τότε $\boxed{a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n}$

υπόλοιπο $3^{100} \bmod(100)$

$100 = 2^k + 2^{k-1} + \dots + 2^1 + 2^0$

$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$

$3^1 \equiv 3 \pmod{100}$
$3^2 \equiv 9 \pmod{100}$
$3^3 = 27 \pmod{100}$
$3^4 = 81 \pmod{100}$
$3^8 = 61 \pmod{100}$
$3^{16} \equiv 21 \pmod{100}$
$3^{32} \equiv 41 \pmod{100}$
$3^{64} \equiv 81 \pmod{100}$

Δυαδικό σύστημα αριθμών

0, 1 | χρησιμοποιώ μόνο

$0, 1, (10)_2 = 2_{10}$ $(11)_2 = 3$

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4$

$(101)_2 = 5$

$1 \cdot 2^0 \quad 1$

$+\ 0 \cdot 2^1 \quad 0$

$+\ 1 \cdot 2^2 \quad 4$

5

ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤ. ΑΡ.

$0, 1, 2, \dots, 9$

$\overbrace{\dots 1111}^{k}, \overbrace{11111\dots}^{k}$ $= 10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^k$

$+ 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-k}$

3 δεκαδικά

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad 2^6 \quad 2^7 \quad 2^8 \quad 2^9 \quad 2^{10}$

$8 \quad 16 \quad 32 \quad 64 \quad 128 \quad 256 \quad 512$

$100 = (1100100)_2 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^2 = 2^6+2^5+2^2$

$1\cdot 10^2 \quad 0\cdot 10^1 \quad 0\cdot 10^0$

→ 7 δυαδικά ψηφία (Bit)

Binary digit

χίλια πεντακόσια εβδομήντα τρία

$1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$

8 δυαδικά ψηφία → 1 Byte (λέξη)

$1KB = 1024 = 2^{10}$ byte

$1MB = 1024\ KB \approx 1.000.000$

$1GB = 1024MB = 1000000000$ δισ.

$1TB = 1$ τρισ. byte

$\boxed{8 \text{ τρισ bit}}$

φωτ. 0010001100001...

40 εκατομμύρια

$3^{100} \bmod(100)$

$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$

$3^{100} = 3^{2^6+2^5+2^2} = 3^{2^6}\cdot 3^{2^5}\cdot 3^{2^2}$

$3^{2^6} \equiv 81 \bmod 100 \qquad 3^{2^5} \equiv 41 (\bmod 100) \quad 3^{2^2} \equiv 81 (\bmod 100)$

$3^{100} (\bmod 100) \equiv 81\cdot 41 \cdot 81 \bmod 100$

$\equiv 3^4 \cdot 41 \cdot 3^4 (\bmod 100) \equiv 61\cdot 41 (\bmod 100)$

$\boxed{\equiv 1 (\bmod 100)}$

$$\begin{array}{r} 61 \\ 41 \\ \hline 61 \\ 244 \\ \hline 2501 \end{array}$$

Τριαδικό Σύστημα Αρίθμησης

Ψηφία: 0, 1, 2   Θέσεις $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots$

$3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}$

$(211,2)_3 = 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 + 2\cdot 3^{-1} = 18+3+1+\frac{2}{3}$

$(188)_{10} \to (\quad)_3$

$3 \quad 9 \quad 27 \quad 81 \quad 243$

$3^1 \quad 3^2 \quad 3^3 \quad 3^4 \quad 3^5$

$188 - 81 = 107 - 81 = 26$

$26 - 18 = 8$

$8 - 6 = 2$

$= 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0$

$= (20222)_3$

$3^{100} \equiv x \pmod{100}$ $\quad (3,100)=1 \xRightarrow{\Theta.E.} \underbrace{3^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100}}$

$3^{100} = 3^{40}\cdot 3^{40}\cdot 3^{20} \equiv 1\cdot 1\cdot 3^{20} \pmod{100} \equiv 81\cdot 21 \pmod{100} \equiv 1 \pmod{100}$

$81 \cdot 21 = 81 + 162\cdot 10 = 1701$

Κανόνες λειτουργίας της συνάρτησης αποτελεσμάτων φ του Euler.

$\boxed{a^{p-1} \equiv 1 \pmod p}$

$\boxed{a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m,\ (a,m)=1}$

- $\varphi(p) = p-1$, p πρώτος;

- $\varphi(m\cdot n) = \varphi(m)\cdot\varphi(n)$ αν $(m,n)=1$

απόδειξη στο τέλος

$\varphi(100) = \varphi(4\cdot 25) = \varphi(2\cdot 2\cdot 5\cdot 5) =$

$= \varphi(2^2)\cdot\varphi(5^2) = \ldots$

- $\varphi(p^k) \xlongequal{p \text{ πρώτος}} p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1) = p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)$

$\ldots = (2^2-2)(5^2-5) = 2\cdot 20 = 40$

$$\boxed{3^{\varphi(100)} = 3^{40} \equiv 1 \pmod{100}}$$

πχ 2 Να βρεθούν $A = 3^{1000}$ τα τελευταία δύο ψηφία πx 2 Να βρεθούν $A = 3^{1000}$ τα τελευταία δύο ψηφία

$$\varphi(1000) = \varphi(4 \cdot 250) = \varphi(2^2 \cdot 2 \cdot 5^3) =$$

$$= \varphi(2^3 \cdot 5^3) = (2^3 - 2^2)(5^3 - 5^2)$$

$$= 4 \cdot 100 = 400$$

$$3^{400} = 3^{\varphi(1000)} \equiv 1 \pmod{\underbrace{1000}_{\text{τρία τελευταία ψηφία}}}$$

Για τα δύο τελευταία ψηφία $x \bmod 100$;

$$3^{40} \equiv 1 \pmod{100} \qquad A = 3^{1000} = (3^{40})^{25} \equiv 1^{25} \pmod{100}$$

$$\equiv 1 \pmod{100}$$

πx 4 Να βρεθούν, αν υπάρχουν, $x, y \in \mathbb{Z}^+$ ώστε $x^5 + y^5 + 1 = (x+2)^5 + (y-3)^5$ (1)

$p = 5$ πρώτος $\boxed{a^p \equiv a \bmod p \quad p \text{ πρώτος}}$ Θ.F.

για $a = x$ $p = 5 \overset{\text{Θ.F}}{\Longrightarrow} x^5 \equiv x \pmod 5$

$a = y$ $p = 5 \Rightarrow y^5 \equiv y \pmod 5$

$$(1) \Longrightarrow x + y + 1 \equiv (x+2) + (y-3) \pmod 5$$

$$x + y + 1 \equiv (x + y - 1) \pmod 5$$

$\boxed{a \equiv b \bmod p \Leftrightarrow p \mid a - b}$ $\Longleftrightarrow 5 \mid (x+y+1 - (x+y-1)) = 2$ αδύνατο διότι $5 \nmid 2$.

Άρα ΔΕΝ υπάρχουν τέτοιοι ακέραιοι

πχ3 Να βρεθούν τα τελευταία δύο ψηφία του $B = 7^{7^{\boxed{1000}}} \neq \left(7^7\right)^{1000}$

$(7,100)=1$ $\qquad a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \qquad (m,a)=1$

$7^{\varphi(100)} \equiv 1 \pmod{100}$

$7^{40} \equiv 1 \pmod{100}$

$$7^{1000} = \left(7^{40}\right)^{25} \equiv 1^{25} \pmod{100} \equiv 1 \pmod{100}$$

$$\Rightarrow 100 \mid 7^{1000} - 1 \Leftrightarrow 7^{1000} = 100k+1,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$B = 7^{100k+1} = \left(7^{100}\right)^{k} \cdot 7 \pmod{100}$$

...

- $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ αν $(m,n)=1$

Θα δείξουμε πρώτα την ιδέα της απόδειξης με ένα παράδειγμα:

$$\varphi(15) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$$

Διατάσσουμε τους αριθμούς ≤ 15 σε ένα ορθογώνιο:

					Περιέχει αριθμ.:
1	4	7	10	13	$1+3k$ } πρώτοι προς 3
2	5	8	11	14	$2+3k$
3	6	9	12	15	$3+3k$ διαιρετοί από 3

Υπάρχουν $\varphi(3)=2$ γραμμές οι οποίες περιέχουν ακεραίους πρώτους ως προς 3.

Εδώ οι δύο πρώτες, διότι στην τρίτη γραμμή είναι πολ/σια του 3.

$\varphi(5)=4$ Σε καθε μία απο τις δύο γραμμες υπάρχουν ακριβώς 4 πρώτοι προς το 5

Στην 1η γραμμή οι αριθμοί $1+3\kappa$ με $(1+3\kappa, 3)=(1,3)=1$ όλοι πρωτοι προς το 3.
Επίσης οι 5 αριθμοί $1, 1+3\cdot 1=4, 1+3\cdot 2=7, 10, 13$ αποτελούν ολα τα δυνατα υπόλοιπα του 5 αφου $1\equiv 1 \pmod 5$ $4\equiv 4 \pmod 5$, $7\equiv 2 \pmod 5$ $10\equiv 0 \pmod 5$ και $13\equiv 3 \pmod 5$
αρα ακριβώς $\varphi(5)=4$ από αυτούς θα είναι πρωτοι προς το 5.

Οπότε συνολικά θα έχουμε $\varphi(m=3)\cdot\varphi(n=5)=$
$=2\cdot 4=8$ πρώτοι προς το 15

Η ίδια απόδειξη μπορεί να γενικευθεί εντελώς παρομοια για καθε m,n με $(m,n)=1$

'Ομιλος

Μαθηματικών

Α' Λυκείου

•**Ερώτηση 2η:** Κατά τη διάρκεια μιας αστυνομικής έρευνας, ο Επιθεωρητής Κλουζώ ανέκρινε πέντε ντόπιους κακοποιούς για να ανακαλύψει ποιος έκλεψε την τούρτα της κυρίας Νοστιμίδου στην καλοκαιρινή γιορτή. Παρακάτω δίνεται μια περίληψη των δηλώσεών τους.

•**Αριστείδης: Δεν ήταν ο Ευθύμης, ήταν ο Βασίλης.**

•**Βασίλης: Δεν ήταν ο Γιώργος, δεν ήταν ο Ευθύμης.**

•**Γιώργος: Ήταν ο Ευθύμης, δεν ήταν ο Αριστείδης.**

•**Δημήτρης: Ήταν ο Γιώργος. Ήταν ο Βασίλης.**

•**Ευθύμης: Ήταν ο Δημήτρης. Δεν ήταν ο Αριστείδης.**

Είναι γνωστό ότι κάθε ύποπτος είπε ακριβώς ένα ψέμα. Μπορείς να βρεις ποιος έκλεψε την τούρτα;

Α. Αριστείδης **Β. Βασίλης** **Γ. Γιώργος** **Δ. Δημήτρης**

++ ++ +++++

	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Α					
Β			Ο		Ο
Γ					
Δ	Χ	Ο	Ο	Χ	
Ε	Χ			Ο	

άρα ο Γιώργος ήταν κλέφτης

Πώς μετράμε αντικείμενα:

1 2 3 4 5 6 7

1 · 1	2 · 8	3 · 9
4 · 3	5 · 2	6 · 10
~~7~~ · 6	8 · 11	9 · 7
10 · 4	11 · 5	12 · 12

← 3 →   ↕ 4

$4 \times 3 = 12$

Η συνδυαστική είναι με λίγα λόγια η «τέχνη» του να βρίσκουμε το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου χωρίς να τα μετρήσουμε ένα προς ένα.

Παράδειγμα 1 *Σε ένα συνέδριο μετέχουν 100 σύνεδροι και χαιρετιούνται όλοι με όλους δια χειραψίας. Πόσες χειραψίες έγιναν;*

ειρμός = μοτίβο

·	A	B	Γ	Δ
A		X	X	X
B	X		X	X
Γ	X	X		X
Δ	X	X	X	

4

12 $\xrightarrow{:2}$ $\boxed{6}$

$4 \cdot 3 / 2$

← n →

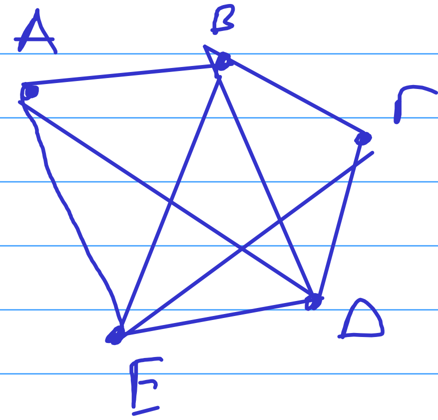
·	A	B	Γ	Δ	E
A		X	X	X	X
B	X		X	X	X
Γ	X	X		X	X
Δ	X	X	X		X
E	X	X	X	X	

n

$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Λειτουργεί για 100 συνέδρους;

Αν n ο αριθμός των καλεσμένων και καθένας θα χαιρετήσει $n-1$ οπότε $\frac{n(n-1)}{2}$



1 Η πολλαπλασιαστική αρχή

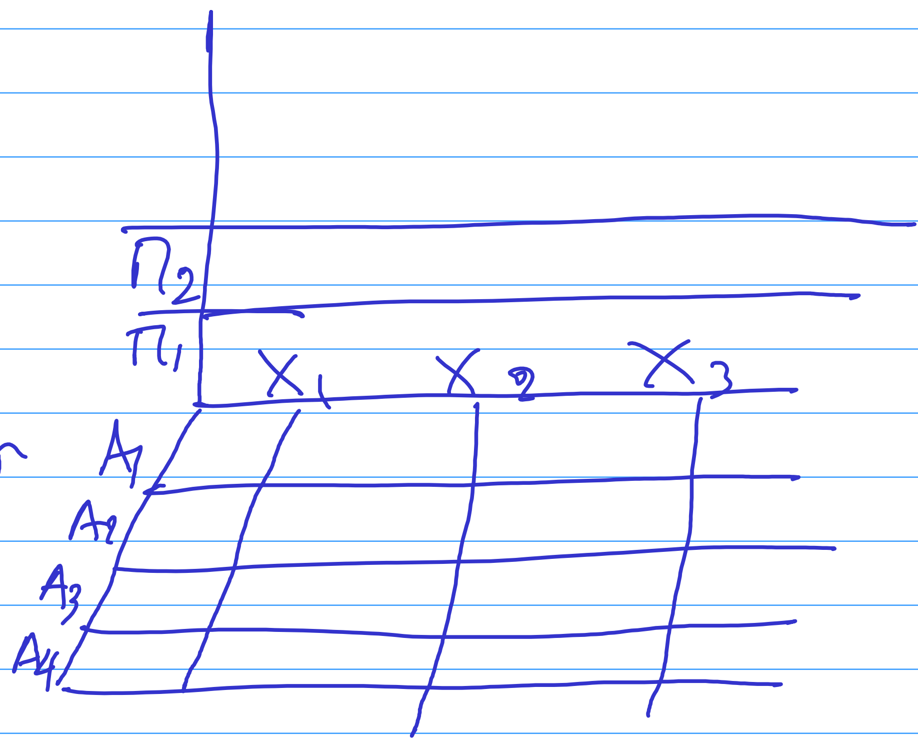
Μας επιτρέπει να «μετρήσουμε» το κατά πόσους τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί μία εργασία που αποτελείται από δύο ή περισσότερα «μέρη» που το κάθε ένα πραγματοποιείται ανεξάρτητα από το άλλο κατά ένα, γνωστό, αριθμό τρόπων.

Παράδειγμα 2 *Σε ένα φάστφουντ διατίθενται 3 είδη χάμπουργκερ, 4 είδη αναψυκτικών και 2 τύποι μερίδας από πατάτες. Πόσα διαφορετικά μενού μπορεί κάποιος να φτιάξει επιλέγοντας χάμπουργκερ, αναψυκτικό, πατάτες;*

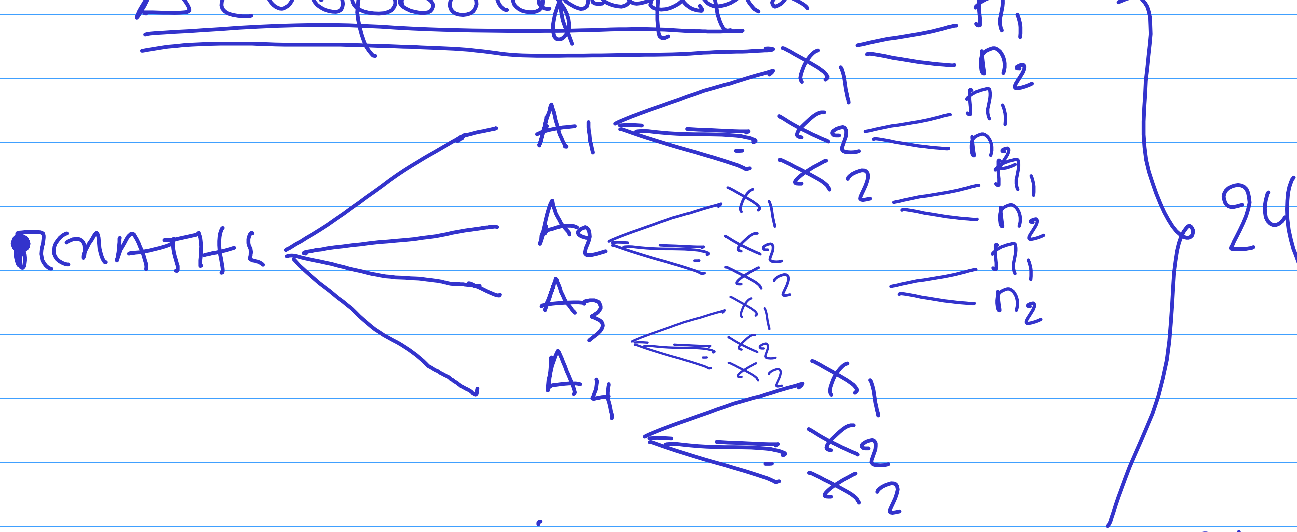
1Χ, 1Α, 1Π

	Π_1				Π_2	
	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2
A_1	×	×	×	A_1	×	×
A_2	×	×	×	A_2	×	×
A_3	×	×	×	A_3	×	×
A_4	×	×	×	A_4	×	×

24 δυνατά



Δενδροδιάγραμμα



$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

$X_1A_1\Pi_1,\ X_1A_1\Pi_2,\ X_1A_2\Pi_1,\ X_1A_2\Pi_2,$
$X_1A_3\Pi_1,\ X_1A_3\Pi_2,\ X_1A_4\Pi_1,\ X_1A_4\Pi_2$
$X_2A_1\Pi_1,\ X_2A_2\Pi_2, \ldots$

Παράδειγμα 3 *Το σύνολο A έχει μ και το σύνολο B έχει ν στοιχεία. Πόσα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) μπορούμε να φτιάξουμε με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$*

το α επιλέγεται από μ δυνατές τιμές
το β επιλέγεται από ν δυνατές τιμές

για καθεμία τιμή του $\alpha \in A$ υπάρχουν ν τιμές του $\beta \in B$ άρα $\nu \times \mu$.

Άσκηση 2 Πόσες λύσεις (x, y) με x, y μη αρνητικά $\in \mathbb{Z}$ έχει η εξίσωση $x + y = 12$;

$x = 12 - y \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}$

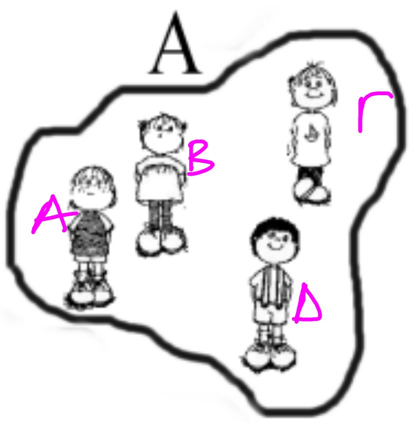
$y, x \in \{\underbrace{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 12}_{n=13}\}$

$13 \times 13 = 169$? όχι ανεξάρτητα

μόλις καθοριστεί το x τότε είναι γνωστό ότι του αντιστοιχεί ένα y.

$(x,y) = (0,12), (1,11), \ldots, (12,0)$

Άσκηση 3 Ας θεωρήσουμε το σύνολο A που απαρτίζεται από τέσσερα παιδιά:



Ας υποθέσουμε τώρα ότι τοποθετούμε τα παιδιά του συνόλου A σε μία σειρά. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να γίνει αυτό λ.χ. ένας είναι ο:

1. Να βρείτε **όλους** τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούν τα παιδιά του συνόλου A να μπουν σε μία σειρά.

2. Αν για να απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα δοκιμάσατε όλους τους τρόπους ένα-ένα σκεφθείτε μήπως θα μπορούσατε να βρείτε την απάντηση πιο γρήγορα. Κατά πόσους τρόπους θα μπορούσαν να τοποθετηθούν σε μία σειρά τα στοιχεία του A αν είχαμε 5 αντί για 4 παιδιά;

ΑΒΓΔ, ΑΓΔΒ, ΑΒΔΓ, ΑΓΒΔ
ΑΔΒΓ, ΑΔΓΒ
ΒΑΓΔ, ΒΑΔΓ, ΒΓΑΔ, ΒΓΔΑ
ΒΔΑΓ, ΒΔΓΑ, ΓΑΒΔ, ΓΑΔΒ, ΓΒΑΔ, ΓΒΔΑ
ΓΔΑΒ, ΓΔΒΑ, ΔΑΒΓ, ΔΑΓΒ, ΔΒΑΓ, ΔΒΓΑ, ΔΓΑΒ, ΔΓΒΑ

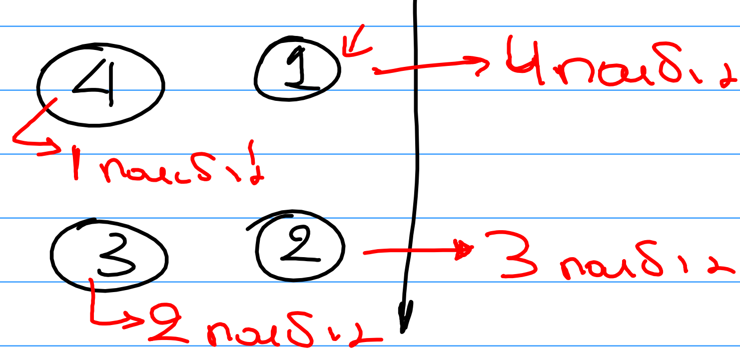
24

1ο παιδί   2ο παιδί   3ο παιδί   4ο παιδί

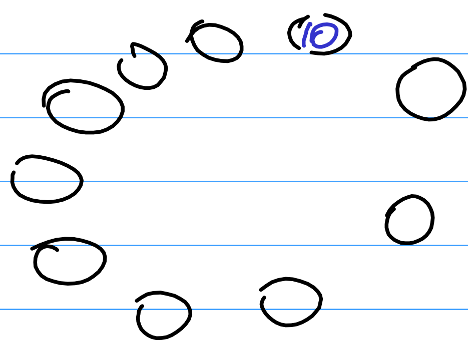
4 επιλογές   3 επιλογές   2 επιλογές   1

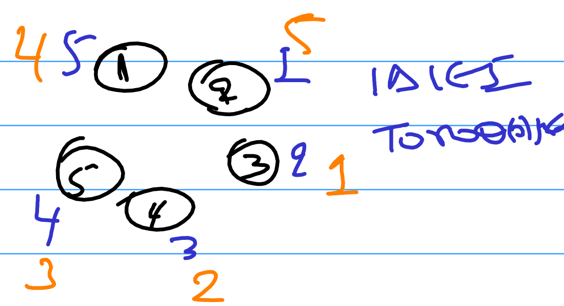
πολ/σιαστική αρχή $4\times3\times2\times1=24$

4 παιδιά



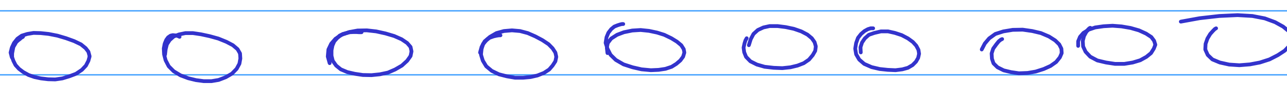
10 παίκτες να τοποθετηθούν σε κυκλικά σε 10 θέσεις





πάντα ίδιο

$$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5}$$



$10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$10!$ → διαβάζεται 10 παραγοντικό.

Σε κυκλικές τοποθετήσεις έχουμε $10!$ αλλά οι διαφορετικές είναι $\frac{10!}{10}=9!$

Έστω ένα σύνολο με ν στοιχεία. Κάθε τοποθέτηση των στοιχείων του συνόλου σε μία σειρά λέγεται *μετάθεση* των στοιχείων του. Το πλήθος των όλων των δυνατών μεταθέσεων ενός συνόλου με ν στοιχεία συμβολίζεται με M_ν.

Θεώρημα 2 *Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι $\nu!$. Δηλαδή*

$$\boxed{M_\nu = \nu!} \tag{1}$$

Α, Β, Γ → με πόσους τρόπους μπαίνουν στη σειρά

$M_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

ΑΒΓ, ΑΓΒ

24 γράμματα → με πόσους τρόπους τα βάφεις στη σειρά
→ με πόσους τρόπους μπορείς να επιλέξεις δύο διαφορετικά γράμματα;
→ 3 διαφορ. γρ.
→ 4 — — —
→ 24 διαφορ. γρ.

Α, Β
Β, Α

Δυο διαφορετικα : 24×23 χωρίς σειρά $\frac{24 \times 23}{2}$

3 —"— : $\frac{24 \times 23 \times 22}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ —"— —"—

ΑΒΓ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, ΓΒΑ

⋮

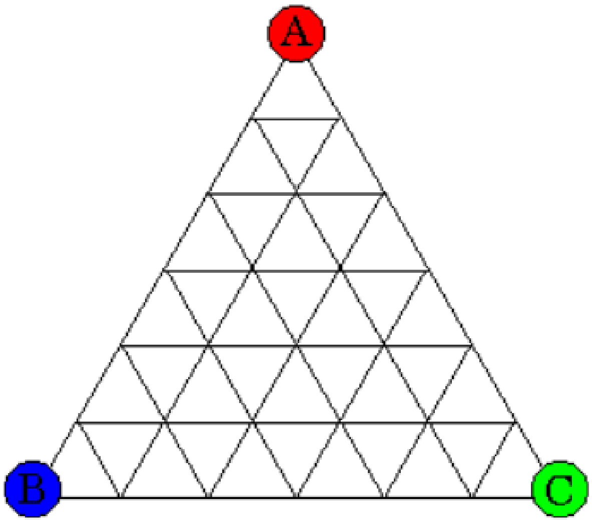
24 —"— : $\frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 1}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 1} = 1$

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Πέμπτη, 13 Μαΐου 2021.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 Το παιχνίνι του Sperner

Δίνεται ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC, όπως στο σχήμα 1:



Σχῆμα 1: Πηγή: nrich.maths.org

Όπως βλέπουμε πρόκειται για ένα ισόπλευρο τρίγωνο, το οποίο έχει χωριστεί σε 36 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα, φέροντας 5 παράλληλες σε ίσες αποστάσεις προς κάθε πλευρά του τριγώνου.

Παρατήρηση 1. *Πόσες κορυφές δημιουργούνται σε αυτό το πλέγμα ;*

1.1 Οι κανόνες του παιχνιδιού

Πρόκειται για παιχνίδι δύο παικτών. Οι δύο παίκτες έχουν ως στόχο, παίζοντας εναλλάξ, να χρωματίσουν τις κορυφές του πλέγματος, σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

1. Μία κορυφή στην AB μπορεί να ονομαστεί είτε A, είτε B, αλλά όχι C.
2. Μία κορυφή στην BC μπορεί να ονομαστεί είτε B, είτε C, αλλά όχι A.
3. Μία κορυφή στην AC μπορεί να ονομαστεί είτε A, είτε C, αλλά όχι B.
4. Κάθε κορυφή στο εσωτερικό του τριγώνου μπορεί να ονομαστεί με οποιοδήποτε από τα A, B, C.

Σκοπός του παιχνιδιού είναι καθένας παίκτης να συμπληρώσει τους περισσότερους δυνατούς πόντους, ως εξής:

1. Ο παίκτης Α, που παίζει πρώτος, κερδίζει 1 πόντο για κάθε μικρό τρίγωνο που ονομάζεται ABC με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.

2. Ο παίκτης Β, που παίζει δεύτερος, κερδίζει 1 πόντο για κάθε μικρό τρίγωνο που ονομάζεται ABC με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Φυσικά, αποτελεί ερώτημα, αν υπάρχει **στρατηγική νίκης** για κάποιον από τους δύο παίκτες !

2 Το λήμμα του Sperner

Θεώρημα 1 (Λήμμα Sperner 2-διάστατη εκδοχή). *Σε ένα τρίγωνο, το οποίο έχει τριγωνοποιηθεί με έναν τρόπο T και στο οποίο το σύνολο των κορυφών S της τριγωνοποίησης T έχει χρωματιστεί με τρία χρώματα, ώστε οι κορυφές του τριγώνου έχουν τα χρώματα $A \to 1, B \to 2, C \to 3$ και κάθε κορυφή του στις πλευρές του τριγώνου χρωματίζεται με τα χρώματα των άκρων της μόνο, τότε:*

Υπάρχει ένα τρίγωνο της T, του οποίου οι κορυφές έχουν τρία διαφορετικά χρώματα και το πλήθος αυτών των τριγώνων είναι περιττό.

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Πέμπτη, 08 Απριλίου 2021.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

Μέρος I
Κρυπτογραφία

1 Ιστορικά στοιχεία

1.1 Εισαγωγή

Πριν από χιλιετίες πρωτοεμφανίστηκε το πρόβλημα της κρυπτογράφησης ενός μυστικού μηνύματος σε έναν κώδικα και με τέτοιο τρόπο, ώστε:

α) να μπορεί να μεταφερθεί μέσω ενός συστήματος επικοινωνιών ευρείας πρόσβασης, όπως το διαδίκτυο στη σημερινή εποχή ή κάθε τύπου αγγελιοφόρος παλαιότερα και

β) να αποκωδικοποιείται από τον παραλήπτη με χρήση κάποιου είδους πληροφορίας (μυστικό κλειδί) που είναι γνωστό μόνο σε αποστολέα και παραλήπτη.

Το ζήτημα, λοιπόν, ήταν να βρεθεί ένα μοντέλο κρυπτογράφησης, γνωστό σε αποστολέα και παραλήπτη, ώστε να μπορούν να ανταλλάξουν πληροφορίες μέσω ενός μη ασφαλούς καναλιού επικοινωνίας.

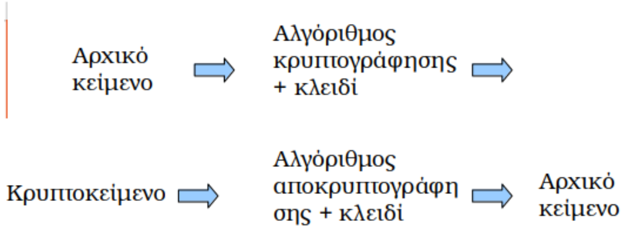
Η **Κρυπτογραφία** (Cryptography) ως ελληνική λέξη ετυμολογικά προέρχεται από τις λέξεις κρυπτός + γράφω και αναφέρεται στη δυνατότητα να καταγράφουμε μία πληροφορία με τέτοιο τρόπο που να μην μπορεί κάποιος να την αναγνωρίσει αν δεν του δοθούν οι απαραίτητες προσβάσεις – πληροφορίες. Ως επιστήμη είναι ένας επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με την μελέτη, την ανάπτυξη και την χρήση τεχνικών κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης με σκοπό την απόκρυψη του περιεχομένου των μηνυμάτων. Ο πιο διαδεδομένος ορισμός της επιστήμης της κρυπτογραφίας στην παγκόσμια βιβλιογραφία ([1],[17]) αναφέρει :

«Η κρυπτογραφία μελετά τρόπους με τους οποίους μπορούμε να μετασχηματίσουμε ένα μήνυμα σε φαινομενικά ακατάληπτη μορφή».

Τέτοιοι τρόποι παρέχονται κατεξοχήν από τα μαθηματικά.

Αρχικό ή απλό κείμενο (plaintext) ονομάζεται το κείμενο, το οποίο επιθυμεί κάποιος να κρυπτογραφήσει. Κρυπτοκείμενο (ciphertext) ονομάζεται το κείμενο, το οποίο έχει κρυπτογραφηθεί μέσω κάποιου αλγορίθμου κρυπτογράφησης. Κρυπτογράφηση (encryption) ονομάζεται η διαδικασία μετατροπής του αρχικού κειμένου σε κρυπτοκείμενο. Ο μετασχηματισμός του κρυπτοκειμένου σε απλό κείμενο ονομάζεται αποκρυπτογράφηση (decryption). Η επιπλέον πληροφορία που είναι απαραίτητη για την κρυπτογράφηση και αποκρυπτογράφηση ενός κειμένου ονομάζεται κλειδί (key). Κρυπτανάλυση (cryptanalysis) είναι η επιστήμη που ασχολείται με την αποκρυπτογράφηση του κρυπτοκειμένου χωρίς την κατοχή του κλειδιού, η οποία όταν είναι αποτελεσματική για ένα κρυπτοκείμενο, τότε υπάρχει αποτυχία πρωτοκόλλου κρυπτογράφησης (protocol failure), αφού βεβαίως ο στόχος της κρυπτογράφησης είναι να μην μπορεί κάποιος να κάνει την αποκρυπτογράφηση χωρίς τη γνώση του κλειδιού. **Κρυπτοσύστημα** είναι το σύνολο των διαδικασιών κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης. Σε κάθε κρυπτοσύστημα θεωρείται αποδεκτό ότι ισχύει η αρχή Κερςηοφφ σύμφωνα με την οποία ο σχεδιαστής του συστήματος πρέπει να υποθέτει ότι το μόνο άγνωστο στοιχείο του κρυπτοσυστήματος είναι το κλειδί και ο στόχος κάθε εισβολέα είναι να το αποκτήσει. Ένα κρυπτοσύστημα πρέπει να διέπεται από τις εξής βασικές αρχές ([17])

: **Εμπιστευτικότητα** (Confidenciality): Η πληροφορία προς μετάδοση είναι προσβάσιμη μόνο στα εξουσιοδοτημένα μέλη. Η πληροφορία είναι ακατανόητη σε κάποιον τρίτο. **Ακεραιότητα** (Data integrity): Η πληροφορία δεν μπορεί να αλλοιώνεται από μη εξουσιοδοτημένα άτομα χωρίς την ανίχνευση της αλλοίωσης. **Μη άρνηση** (Non-repudiation): Ο αποστολέας ή ο παραλήπτης της πληροφορίας δεν μπορεί να αρνηθεί την αυθεντικότητα της μετάδοσης ή της δημιουργίας της. **Πιστοποίηση** (**Authentication**): Αποστολέας και παραλήπτης μπορούν να εξακριβώνουν τις ταυτότητές τους καθώς και την πηγή και τον προορισμό της πληροφορίας. Ένα τυπικό σύστημα κρυπτογράφησης μπορεί να περιγραφεί από το παρακάτω σχεδιάγραμμα :



Σχῆμα 1

1.2 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Η αναγκαιότητα για κρυπτογράφηση δεδομένων εμφανίστηκε από τους αρχαίους χρόνους. Σύμφωνα με μία μικρή σφηνοειδή επιγραφή, που ανακαλύφθηκε στις όχθες του ποταμού Τίγρη, οι πολιτισμοί που αναπτύχθηκαν στην Μεσοποταμία ασχολήθηκαν με την κρυπτογραφία ήδη από το **1500 π.Χ.** Η επιγραφή αυτή περιγράφει μία μέθοδο κατασκευής σμάλτων για αγγειοπλαστική και θεωρείται ως το αρχαιότερο κρυπτογραφημένο κείμενο σύμφωνα με τον Καην [10]. Οι αρχικές προσπάθειες κρυπτογράφησης βασίζονταν σε απλά εργαλεία ή τεχνικές, γι΄ αυτό σήμερα εύκολα αποκρυπτογραφούνται τέτοια κρυπτογραφημένα κείμενα. Αυτό αφορά την πρώτη περίοδο της κρυπτογραφίας έως το 1900 μ.Χ. περίπου.

Η **δεύτερη περίοδος της κρυπτογραφίας** οριοθετείται μεταξύ των αρχών του 20ου αιώνα και φτάνει **μέχρι το 1950**, καλύπτοντας τους δύο παγκόσμιους πολέμους, στους οποίους οι στρατιωτικές ανάγκες για ασφαλή μετάδοση πληροφορίων συνέβαλαν ουσιαστικά στην ευρεία ανάπτυξή της.

Έτσι αναπτύσσονται κρυπτοσυστήματα που απαιτούν πολλούς υπολογισμούς και στηρίζονται σε διάφορες μηχανικές κατασκευές. Για παράδειγμα οι Γερμανοί έκαναν εκτενή χρήση της κρυπτομηχανής **Ενιγμα**, η οποία παραβιάστηκε από τον Μαριαν Ρεθεωσκι με χρήση θεωρητικών μαθηματικών το **1932**. Γενικότερα, η κρυπτανάλυση των συστημάτων και αυτής της περιόδου υπήρξε επιτυχημένη.

Η **τρίτη περίοδος της κρυπτογραφίας** εκκινεί τη δεκαετία του **1950**, όταν ο **Claude Shannon** θεμελίωσε μαθηματικά την κρυπτογραφία και την κρυπτανάλυση.

Όλα τα κρυπτοσυστήματα έως τότε βασίζονταν στη χρήση ενός κοινού κλειδιού για αποστολέα - κρυπτογράφο και παραλήπτη - αποκρυπτογράφο (**κρυπτογραφία συμμετρικού κλειδιού**).

Η επόμενη μεγάλη συμβολή στη θεωρία της κρυπτογραφίας προήλθε από τους W. Diffie και M. Hellman στο άρθρο τους New directions in cryptography [7] το 1976, όπου εισάγουν την κρυπτογραφία ασύμμετρου κλειδιού (Asymmetric Cryptography) ή **κρυπτογραφία δημοσίου κλειδιού** (Public Key Cryptography).

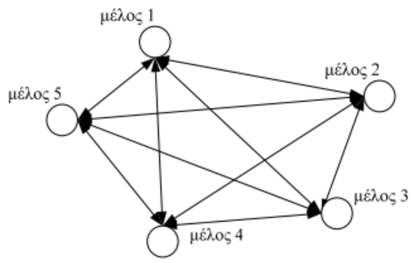
- Πρωτότυπο κείμενο plaintext

$$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

- Κρυπτογραφημένο κείμενο Ciphertext

$$C = Cc$$

2. Σε ένα δίκτυο επικοινωνιών θα απαιτούνταν περισσότερα από ένα κλειδιά για να επικοινωνούν τα μέλη μεταξύ τουςτο **πρόβλημα του τετραγώνου**.



	μέλος 1	μέλος 2	μέλος 3	μέλος 4	μέλος 5
μέλος 1		K_{12}	K_{13}	K_{14}	K_{15}
μέλος 2	K_{12}		K_{23}	K_{24}	K_{25}
μέλος 3	K_{13}	K_{23}		K_{34}	K_{35}
μέλος 4	K_{14}	K_{24}	K_{34}		K_{45}
μέλος 5	K_{15}	K_{25}	K_{35}	K_{45}	

Σχήμα 5: Το πρόβλημα του **τετραγώνου**

Πόσα κλειδιά απαιτούνται για να επικοινωνήσουν 5 μέλη ενός δικτύου μεταξύ τους με τον παραπάνω τρόπο;

1.4 Παραδείγματα κρυπτογράφησης ιδιωτικού κλειδιού

1.4.1 Σπαρτιάτικη σκυτάλη

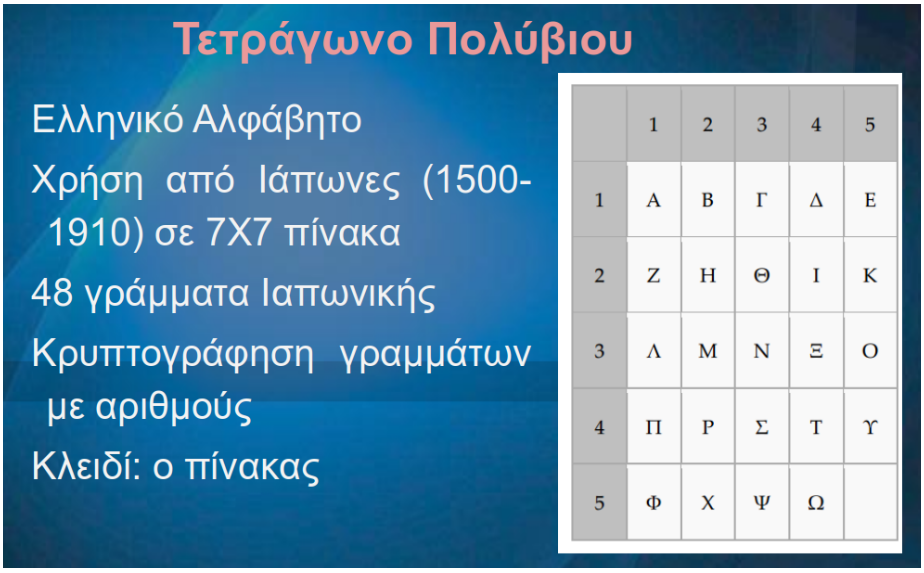
Σχήμα 6: Σπαρτιάτικη σκυτάλη

1.4.2 Τετράγωνο Πολύβιου

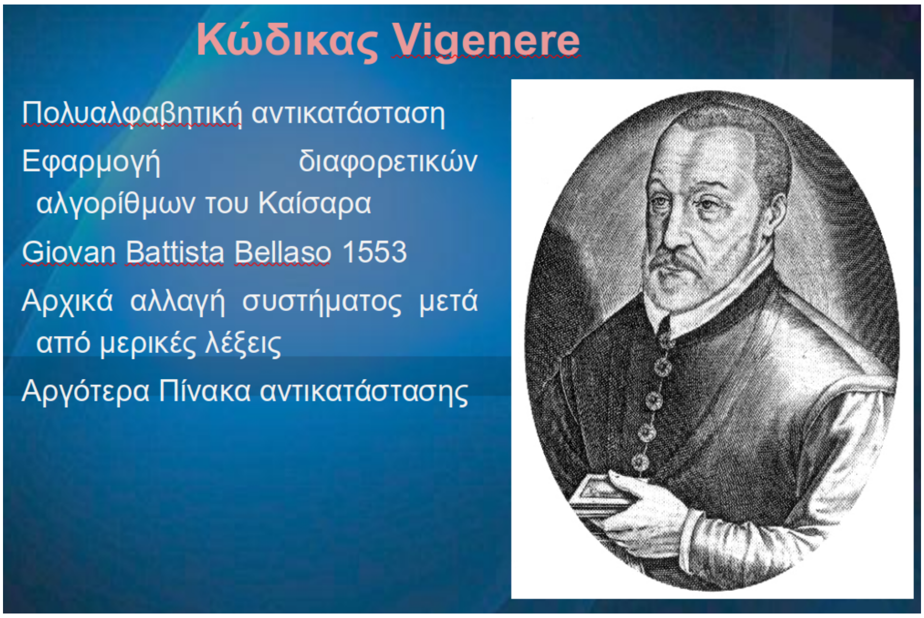
1.4.3 Κώδικας του Καίσαρα

1.4.4 Κώδικας Vigenere

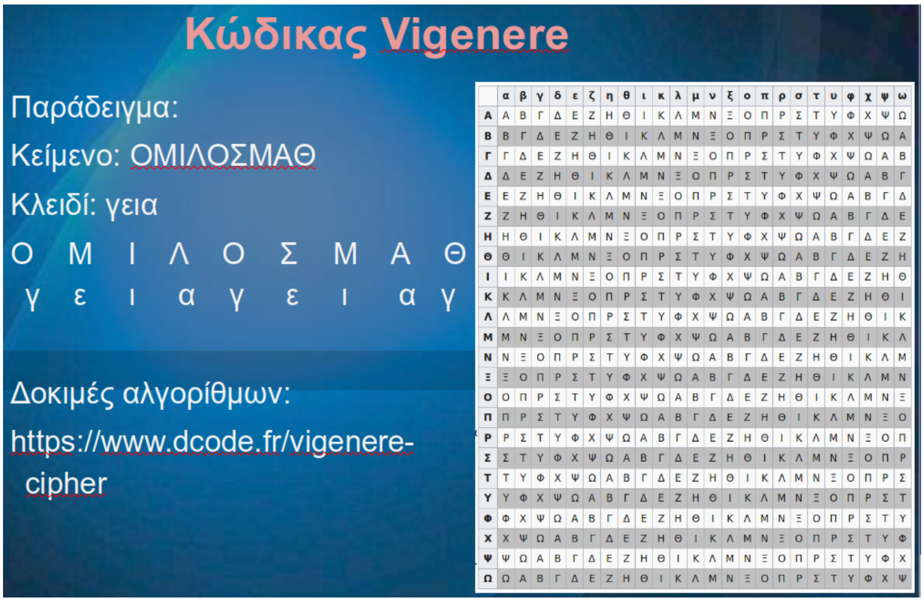
Κώδικας Vigenere



Σχῆμα 7: Τετράγωνο Πολύβιου



Σχῆμα 8: Κώδικας Vigenere



Σχῆμα 9: Κώδικας Vigenere

Μέρος II
Β μέρος

2 Κρυπτογράφηση δημοσίου κλειδιού

Όπως είδαμε η διανομή του κλειδιού κρυπτογράφησης είναι ένα από τα κύρια ζητήματα ασφαλείας στην κρυπτογραφία. Η χρήση όμως του ίδιου κλειδιού καθιστά το σύστημα επισφαλές. Επίσης, η διανομή του δεν μπορεί να γίνει πάντα με ασφάλεια. Μία μέθοδος για την κρυπτογράφηση είναι το κλειδί να διατίθεται ελεύθερα, αλλά για την αποκρυπτογράφηση να απαιτείται ένα δεύτερο κλειδί το οποίο είναι γνωστό μόνο σε αυτόν που θέλει να αποκρυπτογραφήσει.

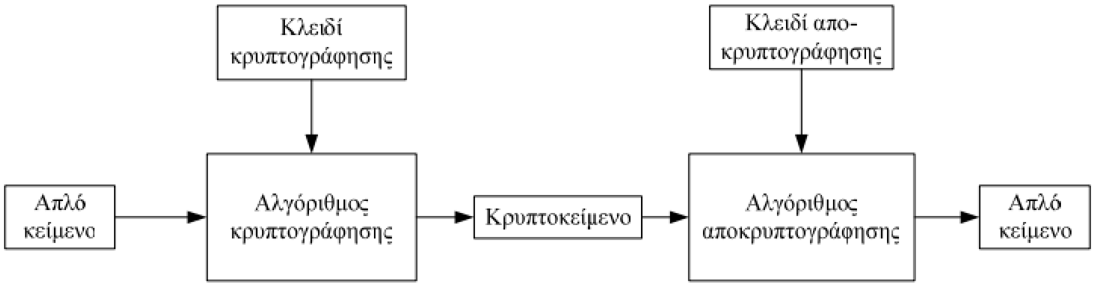
Σχῆμα 10: Κλειδαριά διπλού κλειδώματος.

Παλαιότερα χρησιμοποιούσαν για την μεταφορά αντικειμένων και αλληλογραφίας είτε ταχυδρομικά κιβώτια με διπλή πόρτα, στα οποία δηλαδή υπήρχαν δύο πόρτες για τις οποίες τα κλειδιά διατηρούσαν ένα ο αποστολέας και ένα ο παραλήπτης, είτε αντίστοιχα διπλές κλειδαριές, όπως στο σχήμα 10.

Η βασική ιδέα είναι ότι η κρυπτογράφηση και αποκρυπτογράφηση **δε γίνονται** με τη χρήση ενός κοινού κλειδιού για αποστολέα και παραλήπτη, όπως στην κρυπτογραφία συμμετρικού κλειδιού, αλλά με **δύο διαφορετικά κλειδιά** το ιδιωτικό κλειδί (private key) και το δημόσιο κλειδί (public key), τα οποία **σχετίζονται μαθηματικά μεταξύ τους**.

Το ιδιωτικό κλειδί είναι διαφορετικό και κρυφό για κάθε χρήστη, ενώ το δημόσιο κλειδί γνωστό σε όλους και κοινοποιήσιμο, χρησιμοποιούνται για την κρυπτογράφηση και την αποκρυπτογράφηση αντίστοιχα, αλλά η γνώση του δημοσίου κλειδιού δεν επιτρέπει πρακτικά την εύρεση του ιδιωτικού κλειδιού κρυπτογρά φησης.

Κατ΄ αυτόν τον τρόπο λύνεται το βασικό πρόβλημα της κρυπτογράφησης συμμετρικού κλειδιού που είναι ο τρόπος αποστολής του κλειδιού από τον αποστολέα του μηνύματος στον παραλήπτη, ώστε να μπορέσει ο δεύτερος να αποκρυπτογραφήσει το μήνυμα. Για την κρυπτογράφηση χρησιμοποιείται μία **μονόδρομη απεικόνιση** (one way function) , η οποία έχει την ιδιότητα να είναι πρακτικά αδύνατο να υπολογιστεί η αντίστροφή της απεικόνιση χωρίς τη γνώση του επιπλέον ιδιωτικού κλειδιού. Έτσι μπορεί ο καθένας που γνωρίζει το δημόσιο κλειδί



Σχήμα 11: Κρυπτοσύστημα **δημοσίου κλειδιού**

να προβεί στην κρυπτογράφηση μίας πληροφορίας, αλλά είναι πρακτικά αδύνατη η αποκρυπτογράφηση χωρίς τη γνώση του ιδιωτικού κλειδιού([17],[12]).

Βασικοί αλγόριθμοι που στηρίζονται σε αυτήν την ιδέα είναι των Rivest, Samir *και* Adleman, ο λεγόμενος RSA, ο οποίος χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα σε πλήθος εφαρμογών αλλά και ο αλγόριθμος διακριτού λογαρίθμου. Η αποτελεσματικότητά τους εξαρτάται από την πολυπλοκότητα πεπερασμένων αβελιανών ομάδων.

Η μαθηματική σχέση των κλειδιών, η οποία αναφέρθηκε παραπάνω, βρίσκεται στο επίκεντρο της μελέτης πολλών μαθηματικών από διαφορετικούς κλάδους : Θεωρία αριθμών, Θεωρία ομάδων, Θεωρία ελλειπτικών καμπυλών κλπ.

2.0.1 Προϋποθέσεις μέτρησης ασφάλειας κρυπτοσυστήματος

Ορισμός 1 (**Αρχή του Kerchoff**)**.** *Ο αλγόριθμος κρυπτογράφησης πρέπει να θεωρείται γνωστός σε όλους, όταν σχεδιάζεται η ασφάλεια ενός κρυπτοσυστήματος.*

Ορισμός 2 (**Κριτήρια αλγορίθμου Shannon 1949**)**.**

- ***Βαθμός επιθυμητής ασφάλειας.***
- ***Μήκος κλειδιού.*** *Από αυτό εξαρτάται η ευκολία χειρισμού του αλγορίθμου.*
- ***Πρακτική αλγορίθμου.*** *Ο χρόνος και οι λειτουργίες που απαιτούνται για κρυπτογράφηση και αποκρυπτογράφηση.*
- ***Μέγεθος κρυπτοκειμένου.*** *Ποια η σχέση του με το αρχικό κείμενο.*
- ***Διάδοση σφαλμάτων κρυπτογράφησης.*** *Πώς τα πιθανά σφάλματα μετάδοσης επηρεάζουν την αποκρυπτογράφηση και άρα την ποιότητα του αποκρυπτογραφημένου κειμένου.*

2.1 Ο αλγόριθμος RSA

2.1.1 Αναλυτική ερμηνεία του αλγορίθμου RSA

Βασικό πρόβλημα είναι η εύρεση πλήρους παραγοντοποίησης μεγάλων ακεραίων.

Η διαδικασία λειτουργεί ως εξής:

- Επιλέγονται δύο μεγάλοι πρώτοι p, q (πχ 200 ψηφίων).
- Υπολογίζεται το γινόμενό τους $n = p \cdot q$.
- Υπολογίζεται το πλήθος των πρώτων αριθμών που είναι μικρότεροι του n :

$$\phi(n) = (p-1)\cdot(q-1) = n+1-p-q$$

- Επιλέγεται ένας ακέραιος e,ώστε:

$$1 < e < \phi(n) \quad \text{και} \quad (e, \phi(n)) = 1 \Leftrightarrow (e, (p-1)(q-1)) = 1$$

- Ο Α υπολογίζει τον πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του e:

$$d_A = e_A^{-1} mod(\phi(n))$$

- Ο Α δημοσιοποιεί το **κλειδί κρυπτογράφησης**:

$$K(n, e)$$

- Ο Α ασφαλίζει το **κλειδί αποκρυπτογράφησης**:

$$K(n, d)$$

- **Μετασχηματισμός κρυπτογράφησης:**

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \qquad f(P) = P^e mod(n)$$

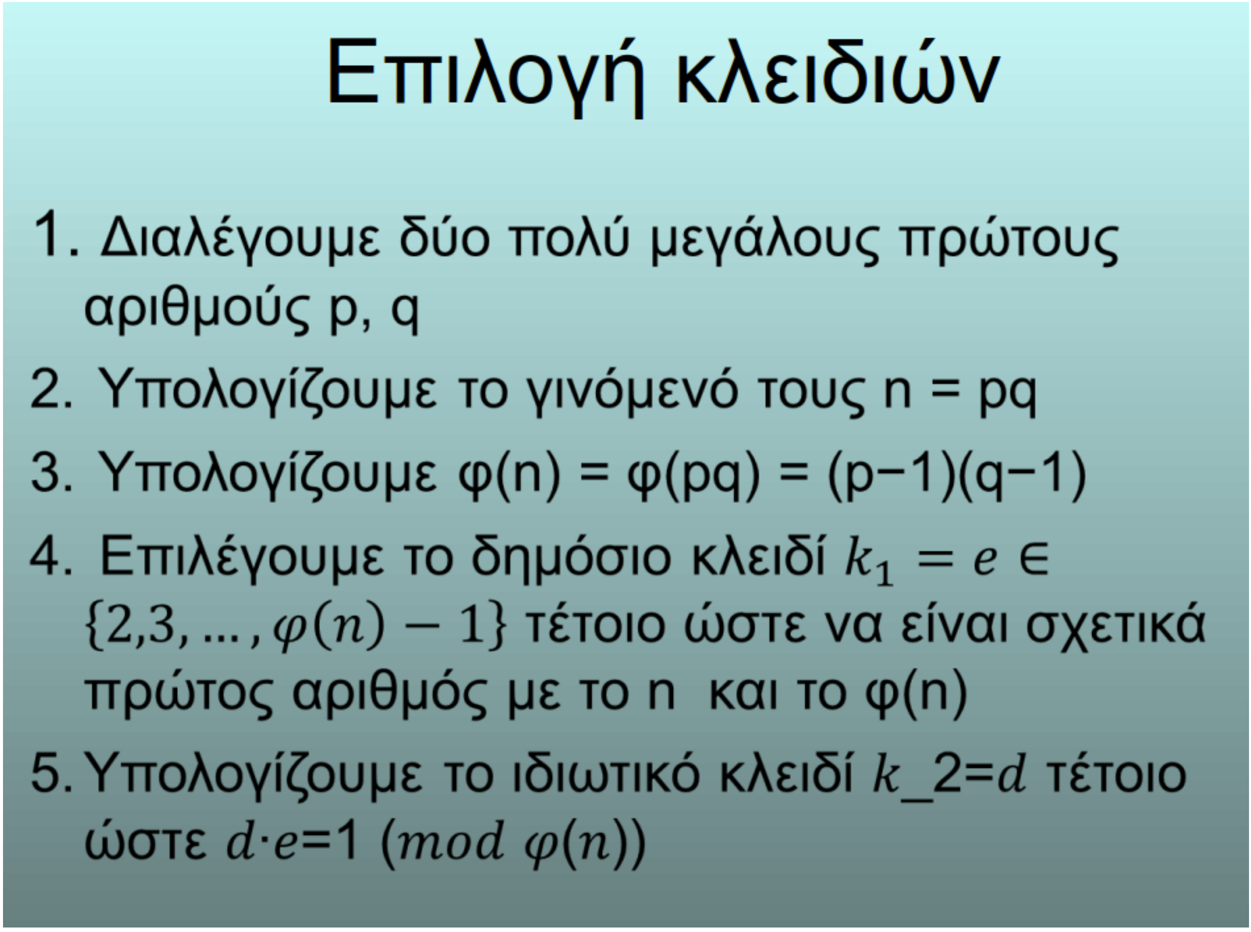
- **Μετασχηματισμός αποκρυπτογράφησης:**

$$f^{-1} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \qquad f(C) = C^d mod(n)$$

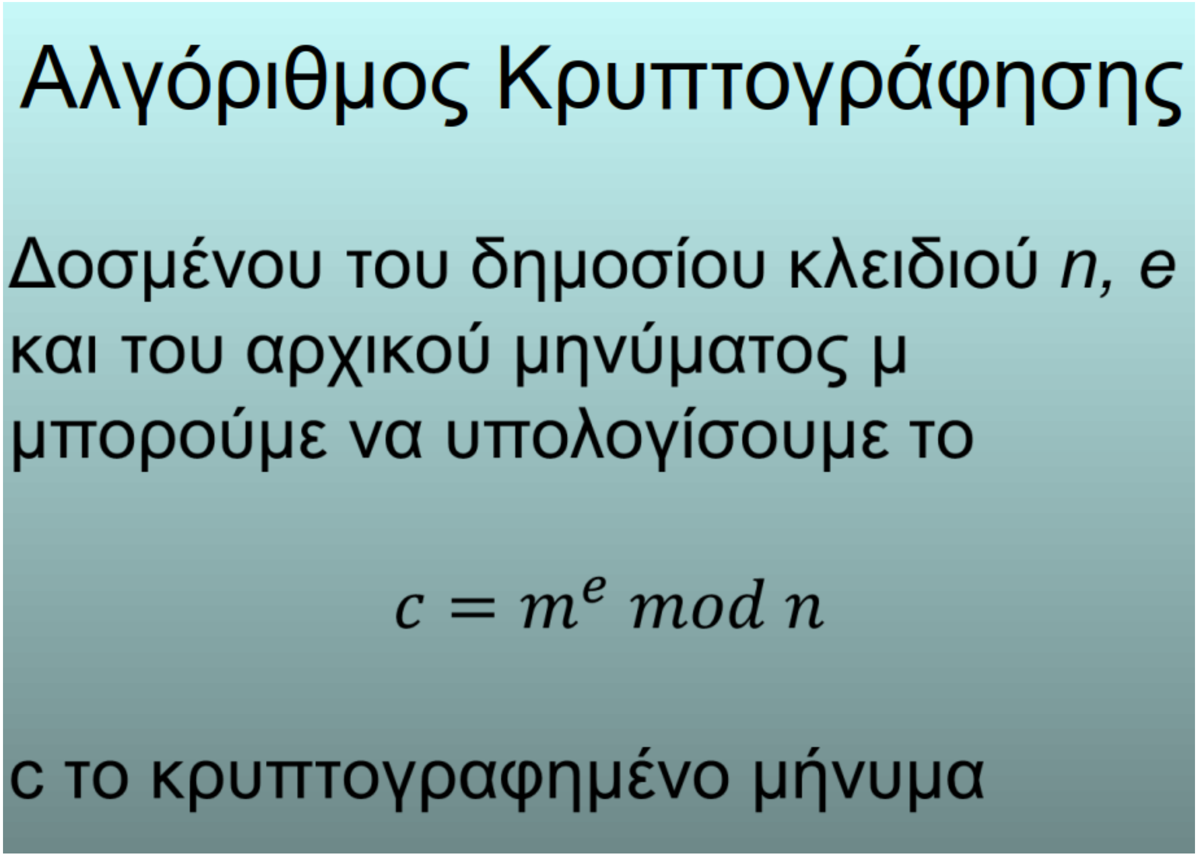
- $f(f^{-1}(x)) = x^{de}$ όμως ισχύει ότι:

$$de \cong 1mod(\phi(n)) \cong 1mod((p-1)(q-1))$$

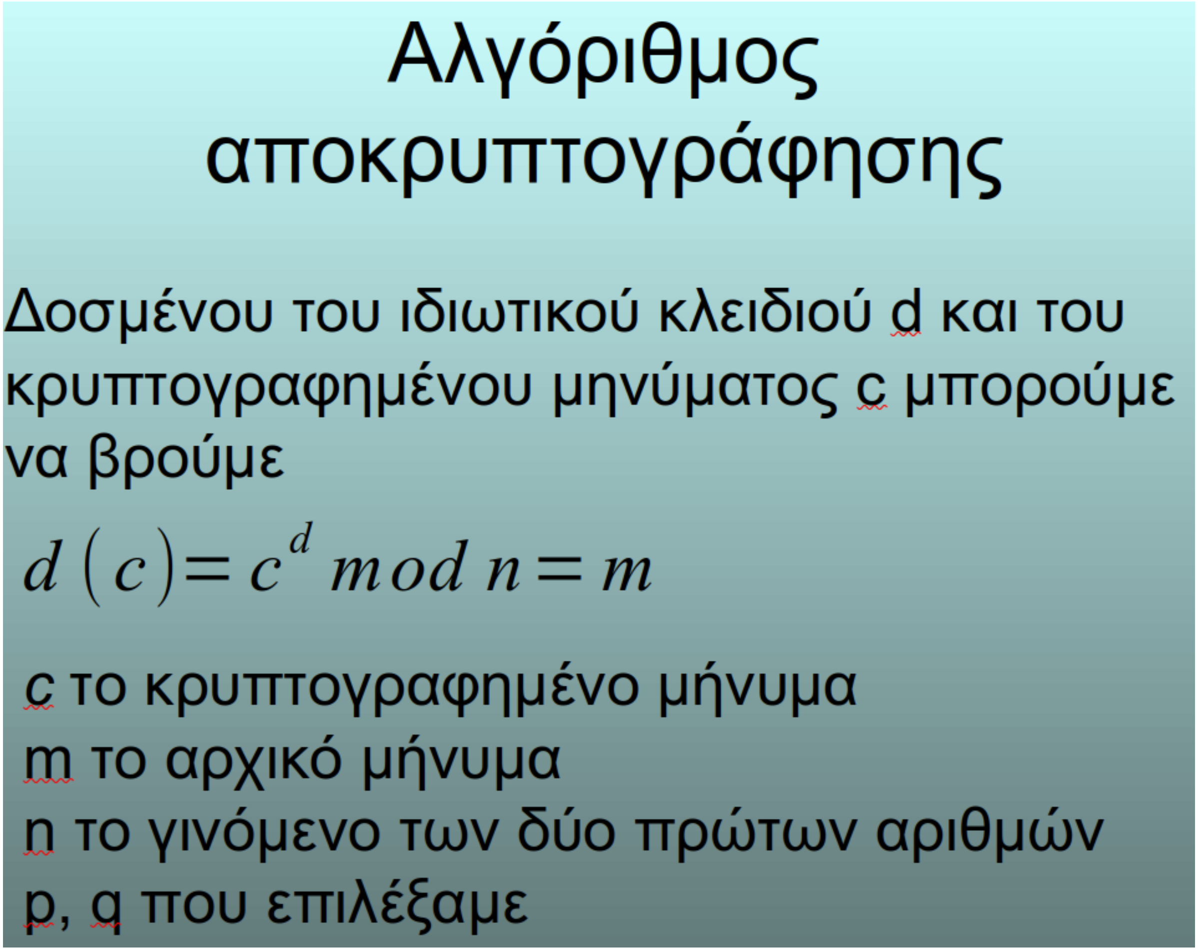
2.1.2 Παράδειγμα λειτουργίας αλγορίθμου



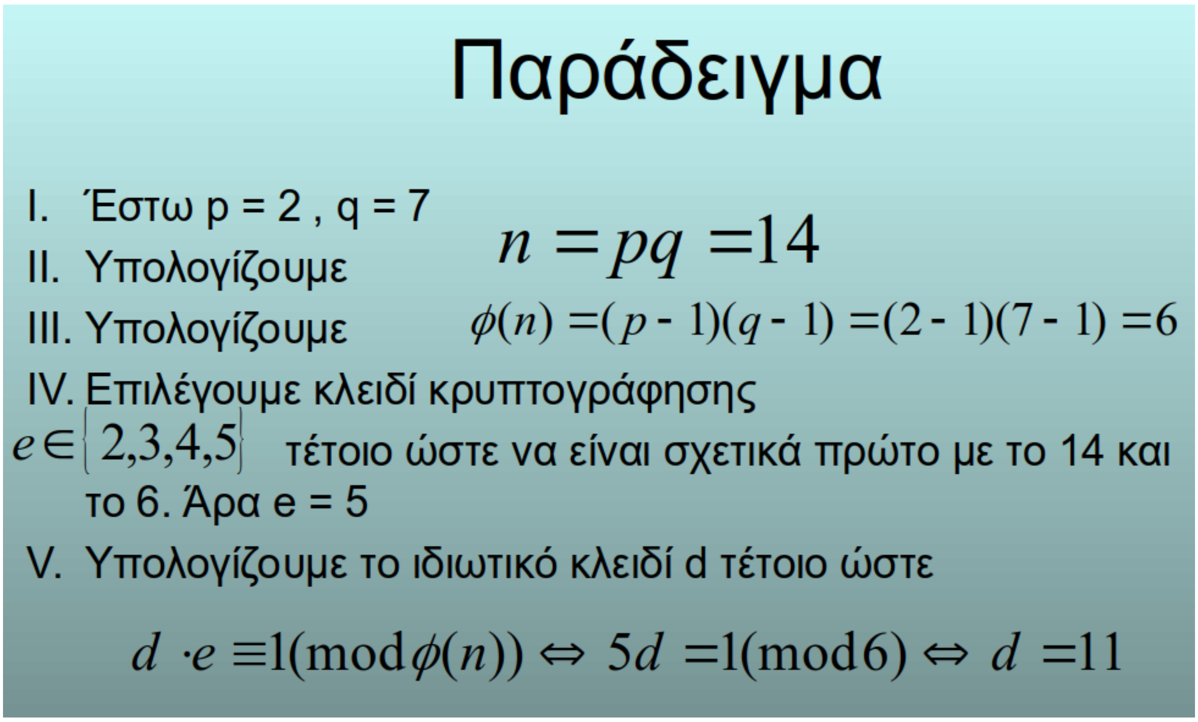
Σχήμα 12


Αλγόριθμος Κρυπτογράφησης
Δοσμένου του δημοσίου κλειδιού *n*, *e* και του αρχικού μηνύματος μ μπορούμε να υπολογίσουμε το
$c = m^e \bmod n$
c το κρυπτογραφημένο μήνυμα

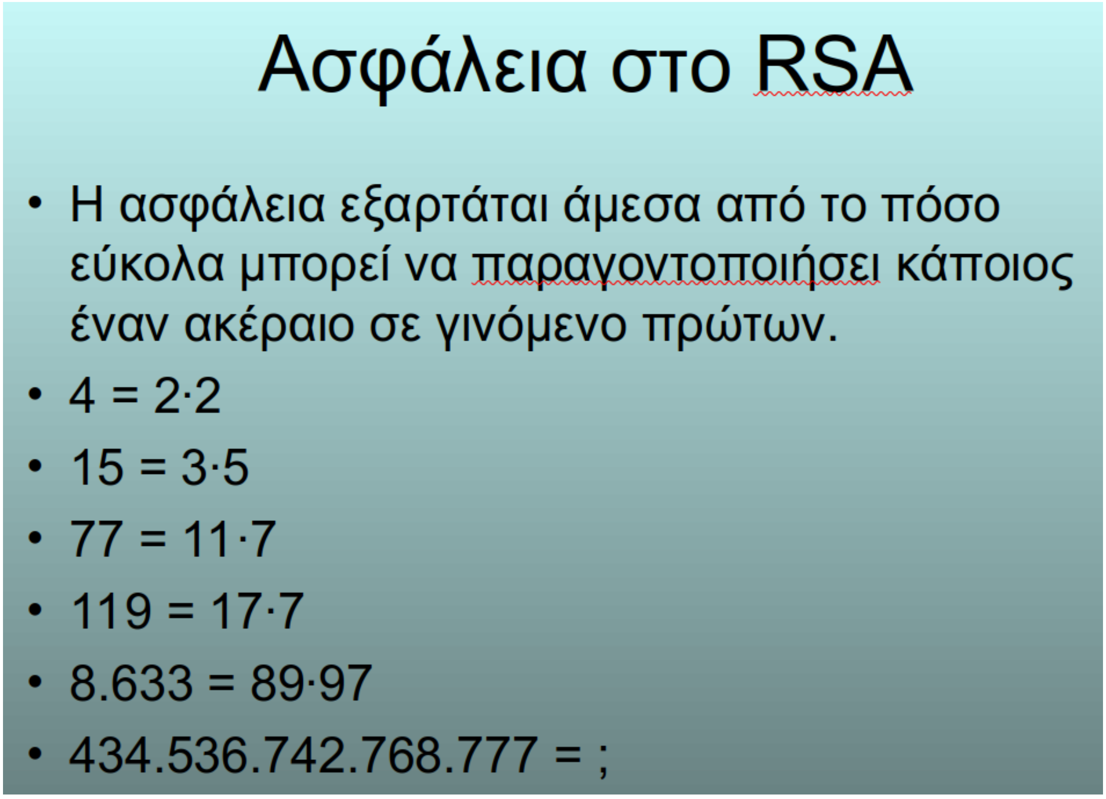
Σχήμα 13



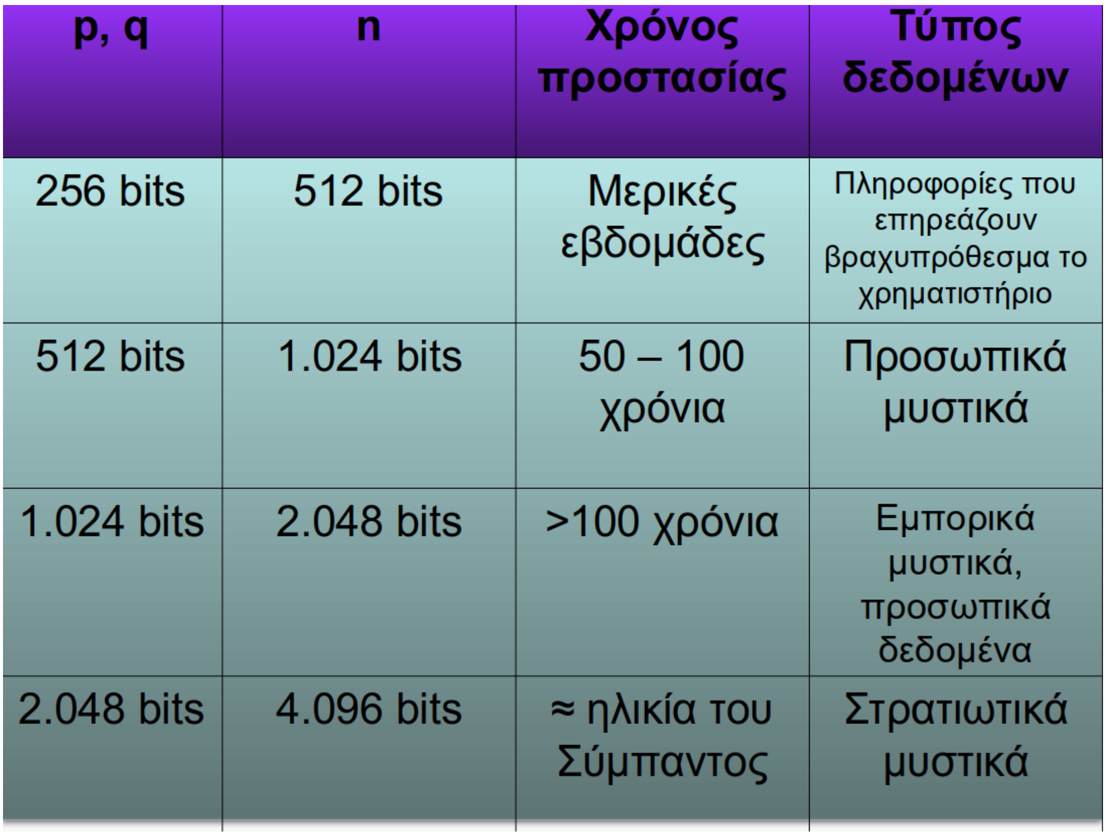
Σχήμα 14



Σχήμα 15



Σχήμα 16



p, q	n	Χρόνος προστασίας	Τύπος δεδομένων
256 bits	512 bits	Μερικές εβδομάδες	Πληροφορίες που επηρεάζουν βραχυπρόθεσμα το χρηματιστήριο
512 bits	1.024 bits	50 – 100 χρόνια	Προσωπικά μυστικά
1.024 bits	2.048 bits	>100 χρόνια	Εμπορικά μυστικά, προσωπικά δεδομένα
2.048 bits	4.096 bits	≈ ηλικία του Σύμπαντος	Στρατιωτικά μυστικά

Σχήμα 17

Μέρος III
Θεωρητικό υπόβαθρο

3 Εύρεση Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη

Ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης** δύο αριθμών a, b ορίζεται ως εκείνος ο αριθμός k για τον οποίο ισχύουν:

$$k \mid a \text{ και } k \mid b$$
$$\text{Αν } m \mid a \text{ και } m \mid b \Rightarrow m < k$$

Για την εύρεση του ΜΚΔ ένας τρόπος, γνωστός από το Δημοτικό, είναι να αναλύσουμε τους δοθέντες αριθμούς σε γινόμενα πρώτων και να προσδιορίσουμε τους κοινός πρώτους παράγοντες.

Παράδειγμα 1. *Να προσδιοριστεί ο ΜΚΔ των αριθμών* $504, 198$.

504	198	2
252	99	3
84	33	3
28	11	

Ισχύει ότι $\gcd(28, 11) = 1$ άρα $\gcd(504, 198) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Παρόλα αυτά ο υπολογισμός με την ανάλυση σε πρώτους παράγοντες μπορεί να γίνει ιδιαίτερα δύσκολη, αν οι παράγοντες γίνουν κάπως μεγάλοι. Δοκιμάστε για παράδειγμα να υπολογίσετε με αυτήν τη μέθοδο τον μέγιστο κοινό διαιρέτη $\gcd(10366, 6319)$.

3.1 Ευκλείδειος Αλγόριθμος

Θεώρημα 1 (Ευκλείδειος αλγόριθμος για την εύρεση ΜΚΔ)**.** *Αν ισχύει ότι:* $a = qb + r$ *τότε* $(a, b) = (b, r)$.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $a = qb + r \Leftrightarrow r = a - q \cdot b$, οπότε κάθε διαιρέτης των a, b θα είναι και διαιρέτης του r. Συνεπώς θα είναι και διαιρέτης των r, b. Επίσης κάθε κοινός διαιρέτης των b, r θα είναι και διαιρέτης του a, οπότε τα σύνολα των κοινών διαιρετών των a, b και των b, r είναι τα ίδια.

Συνεπώς και οι μέγιστοι των δύο συνόλων αυτών θα είναι ίσοι. □

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον Ευκλείδιο Αλγόριθμο 1 για τον υπολογισμό των μέγιστων κοινών διαιρετών των $(a = 504, b = 198)$.

Παράδειγμα 2. *Να υπολογιστεί ο* $(a = 504, b = 198)$.

Λύση.

$$\begin{aligned} 504 &= 2 \cdot 198 + 108 \\ 198 &= 1 \cdot 108 + 90 \\ 108 &= 1 \cdot 90 + 18 \\ 90 &= 5 \cdot 18 + 0 \end{aligned}$$

Οπότε το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο της διαδικασίας: 18 είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $(504, 198) = 18$. □

Παράδειγμα 3. *Να υπολογιστεί ο* $(a = 10366, b = 6319)$.

Λύση. $10366 = 6319 * 1 + 4047$
$6319 = 4047 * 1 + 2272$
$4047 = 2272 * 1 + 1775$
$2272 = 1775 * 1 + 497$

1775 = 497 * 3 + 284
497 = 284 * 1 + 213
284 = 213 * 1 + 71
213 = 71 * 3 + 0
Οπότε το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο της διαδικασίας: 71 είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης $(10366, 6319)$. □

Μπορείτε να εκτελέσετε τον αλγόριθμο 5.1 με τον αναγραφόμενο σε Python κώδικα σε πολλούς κόμβους στο διαδίκτυο, όπως για παράδειγμα www.programiz.com

3.2 Ο ΜΚΔ ως γραμμικός συνδυασμός

Μία εξαιρετικά χρήσιμη εφαρμογή του Ευκλείδειου αλγορίθμου, είναι ένας όμορφος αλγόριθμος με τον οποίο ο ΜΚΔ d δύο αριθμών a, b, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους.

Περιγράφουμε τη διαδικασία για το παράδειγμα 3.

Θέλουμε λοιπόν να γράψουμε τον $71 = k \cdot 10336 + m \cdot 6319$. Από τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
71 &= 284 - 213 \star 1 \\
213 &= 497 - 284 \star 1 \\
284 &= 1775 - 497 \star 3 \\
497 &= 2272 - 1775 \star 1 \\
1775 &= 4047 - 2272 \star 1 \\
2272 &= 6319 - 4047 \star 1 \\
4047 &= 10366 - 6319 \star 1
\end{aligned} \tag{1}$$

Τώρα, αντικαθιστώντας κάθε φορά τα μερικά υπόλοιπα από τη γραφή τους, ως γραμμικού συνδυασμού των προηγούμενων διαιρέτη και διαιρετέου, έχουμε:

$$\begin{gathered}
71 = 284 - (497 - 284 \star 1) \star 1 \\
71 = (1775 - 497 \star 3) - (497 - (1775 - 497 \star 3) \star 1) \star 1 \\
71 = 2 \star 1775 - 7 \star 497 \\
71 = 2 \star 1775 - 7 \star (2272 - 1775 \star 1) \\
71 = 9 \star 1775 - 7 \star 2272 \\
71 = 9 \star (4047 - 2272 \star 1) - 7 \star 2272 \\
71 = 9 \star 4047 - 16 \star 2272 \\
71 = 9 \star 4047 - 16 \star (6319 - 4047 \star 1) \\
71 = 25 \star 4047 - 16 \star 6319 \\
71 = 25 \star (10366 - 6319) - 16 \star 6319 \\
71 = 25 \star 10366 - 41 \star 6319
\end{gathered} \tag{2}$$

Οπότε με αυτήν την αναδρομική διαδικασία μπορούμε πάντα να εκφράσουμε τον ΜΚΔ δύο αριθμών ως γραμμικό συνδυασμό τους. Ένας αντίστοιχος αλγόριθμος σε Python δίνεται στο 5.2.

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Bezout). *ασδφ*

4 Πολλαπλασιαστικός αντίστροφος

4.1 Εξισώσεις ισοτιμίας

Μέρος IV
Αλγόριθμοι σε γλώσσα Python

5 Παράρτημα - Κώδικας Python

5.1 Εύρεση ΜΚΔ με Ευκλείδειο Αλγόριθμο

```
# Program to compute and display the GCD using the Euclid Algorithm

a=10366
b=6319

q=1000
r=b
while r>0:
    q=a//b
    print(a,"=",b,"*",q , "+",a%b)
    #print(q,a,r, q*(a%b)+r)
    r=a%b
    a=b
    b=r
print("GCD= ", a)
```

5.2 Ο ΜΚΔ ως γραμμικός συνδυασμός

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι γνωστός ως εκτεταμένος αλγόριθμος ΜΚΔ (Extended GCD algorithm).

```
# Python program to demonstrate working of extended
# Euclidean Algorithm

# function for extended Euclidean Algorithm
def gcdExtended(a, b):
# Base Case
    if a == 0 :
        return b,0,1

    gcd,x1,y1 = gcdExtended(b%a, a)

# Update x and y using results of recursive
# call
    x = y1 - (b//a) * x1
    y = x1

    return gcd,x,y


# Driver code
    a, b = 10366,6319
    g, x, y = gcdExtended(a, b)
    print("gcd(", a , "," , b, ") = ", g)
    print(g, "=", a,"*(",x,")+(",y,")*",b)
```

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή, 05 Μαρτίου 2021.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 Μαθηματικά θέματα απ΄όλον τον κόσμο

1.1 Α Θέματα

Θεμα Α΄. *Δίνεται ο αριθμός που προκύπτει αν τοποθετήσουμε τον έναν δίπλα στον άλλο τους διψήφιους αριθμούς από το 19 έως το 92:*

$$A = 19202122...909192$$

Να βρεθεί η μεγαλύτερη δύναμη του 3, η οποία διαιρεί τον A.

Θεμα Β΄. *Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός*

$$m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$$

δεν μπορεί να είναι ίσος με 33.

Θεμα Γ΄. *Ένας θετικός ακέραιος n έχει την ιδιότητα για κάθε $0 < l < m < n$ ο*

$$S = l + (l+1) + \cdots + m$$

να μην είναι ποτέ διαιρετός από τον n. Να αποδειχθεί ότι αυτό είναι ισχύει αν και μόνο αν ο n είναι δύναμη του 2.

Θεμα Δ΄. *Αν το πολυώνυμο $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1x + a_0$, που έχει ακέραιους συντελεστές γίνεται ίσο με 7 για τέσσερεις διαφορετικούς ακέραιους του x, τότε δεν μπορεί να γίνει ίσο με 14 για καμία ακέραια τιμή του x.*

Θεμα Ε΄. *Να βρεθεί ο μικρότερος θετικός ακέραιος n, για τον οποίο ο $\frac{n}{2}$ είναι τέλειο τετράγωνο και ο $\frac{n}{3}$ είναι τέλειος κύβος.*

Θεμα Ϛ΄. *Να αποδειχθεί ότι ο $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ είναι πολλαπλάσιο του 2 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Θεμα Ζ΄. *Να αποδειχθεί ότι τα πρώτα 1000 δεκαδικά ψηφία του αριθμού*

$$(6+\sqrt{35})^{1980}$$

είναι όλα 9.

Θεμα Η΄. *Να αποδειχθεί ότι ένας αριθμός A διαιρείται με τον $2^k, k \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν τα τελευταία k ψηφία του διαιρούνται με τον 2^k. Να εξεταστεί αν ο αριθμός:*

$$9090876612345678999872$$

διαιρείται από το 8.

Θεμα Θ΄. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής:*

$$p = 6n + 5, n \in \mathbb{N}$$

2 Διαγωνισμός για την επόμενη φορά:

Θεμα Ι΄ (Διεθνής διαγωνισμός ;;;). *Όταν ο αριθμός 4444^{4444} γραφεί στο δεκαδικό συμβολισμό του έχει άθροισμα ψηφίων A. Αν B είναι το άθροισμα των ψηφίων του A, να βρεθεί το άθροισμα των ψηφίων του B.*

Θεμα ΙΑ΄. *τεστ*

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Προτύπου ΓΕΛ Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
Παρασκευή, 19 Μαρτίου 2021.
Καθηγητής: *Σ.Χασάπης*

1 Μαθηματικά θέματα απ΄όλον τον κόσμο

Θέμα Α΄. *Να αποδειχθεί ότι αν επιλέξουμε 51 ακέραιους από τους*

$$1, 2, \dots, 100$$

τότε τουλάχιστον ένας από αυτούς(τους 51) θα διαιρεί έναν άλλο.

Θέμα Β΄. *Ένας θετικός ακέραιος n έχει την ιδιότητα για κάθε $0 < l < m < n$ ο*

$$S = l + (l+1) + \cdots + m$$

να μην είναι ποτέ διαιρετός από τον n. Να αποδειχθεί ότι αυτό είναι ισχύει αν και μόνο αν ο n είναι δύναμη του 2.

Θέμα Γ΄. *Να αποδειχθεί ότι ο $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ είναι πολλαπλάσιο του 2 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Θέμα Δ΄. *Να αποδειχθεί ότι τα πρώτα 1000 δεκαδικά ψηφία του αριθμού*

$$(6+\sqrt{35})^{1980}$$

είναι όλα 9.

Θέμα Ε΄. *Να αποδειχθεί ότι ένας αριθμός A διαιρείται με τον $2^k, k \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν τα τελευταία k ψηφία του διαιρούνται με τον 2^k. Να εξεταστεί αν ο αριθμός:*

$$9090876612345678999872$$

διαιρείται από το 8.

Θέμα Ϛ΄. *Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής:*

$$p = 6n + 5, n \in \mathbb{N}$$

Θέμα Ζ΄ (Διεθνής διαγωνισμός ;;;)**.** *Όταν ο αριθμός 4444^{4444} γραφεί στο δεκαδικό συμβολισμό του έχει άθροισμα ψηφίων A. Αν B είναι το άθροισμα των ψηφίων του A, να βρεθεί το άθροισμα των ψηφίων του B.*

Θέμα Η΄. *Να βρεθεί πόσοι από τους ακέραιους από 1 έως 10^{20} δεν είναι τέλεια τετράγωνα, τέλειοι κύβοι ή τέλειες πέμπτες δυνάμεις.*

Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Καταλογος Γνωστων Ανισοτητων για Διαγωνισμους
Έκδοση 4 - Φεβρουάριος 2020

1 Βασικές

i. $a^2 \geq 0$

ii. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

iii. $(a+b)^2 \geq 4ab$

iv. $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$

v. $a + \frac{1}{a} \leq -2, \forall a < 0$

vi. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a \cdot b > 0$

vii. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2, \forall a \cdot b < 0$

viii. Γενικά ανισότητες που προκύπτουν από τις βασικές ταυτότητες: $(a-b)^2 \geq 0,\ (a+b)^2 \geq 0$.

ix. $a^3 + b^3 \geq ab(a+b), \forall a, b > 0$

x. $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2), \forall a, b > 0$

1.1 Ανισότητες ΑΜΓΜ

Ανισότητες που προκύπτουν σχεδόν άμεσα από την Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου (ΑΜΓΜ).

i. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$

Αποδεικνύεται από τη βασική ταυτότητα και η ισότητα ισχύε για $a = b$.

ii. $a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$

iii. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \forall a, b > 0$

Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού-Αρμονικού Μέσου (ΑΓΑΜ), με την ισότητα να ισχύει για $a = b$ πάλι.

iv. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$

v. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \forall a, b > 0$

1.2 Γενίκευση ΑΜΓΜ

i. Ανισότητα ΑΓΑΜ για τρεις όρους

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \forall a, b, c > 0$$

ii. Γενικευμένη ανισότητα ΑΓΑΜ

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \forall a_i > 0$$

Οι ισότητες στις παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους και μόνο τότε.

2 Ειδικότερες

i. Ανισότητα των Βαρών ή των μέσων

$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n}, \forall a_i > 0, w_i > 0, w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$

Ισότητα ισχύει αποκλειστικά για

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

ii. Ανισότητα τετραγωνικού - Αριθμητικού Μέσου (ΤΜ-ΑΜ)

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

iii. Ανισότητα από ταυτότητα Lagrange

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2, \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$

iv. Ανισότητα Cauchy - Schwartz Δες και εδώ

v. Ανισότητα Cauchy - Schwartz 3 όρων

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+w^2) \geq (ax+by+cw)^2$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{w}$

vi. Γενικευμένη Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$$(a_1^2+\dots+a_n^2)(x_1^2+\dots+x_n^2) \geq (a_1x_1+\dots+a_nx_n)^2$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a_i, x_i.

3 Προχωρημένες

3.1 «Γνωστές» Ανισότητες

i. Γενικευμένη Ανισότητα Μέσων $a_i > 0, k < m$

$$\left(\frac{a_1^k+\dots+a_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{a_1^m+\dots+a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

ii. Ανισότητα Αναδιάταξης (Αγαπημένη! Rearrangement Inequality)

Αν $a_1 < \dots < a_n$ και $b_1 < \dots < b_n$ τότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} a_1b_1+\dots+a_nb_n &\geq \\ a_1c_1+\dots a_nc_n &\geq \\ a_1b_n+\dots a_nb_1 & \end{aligned}$$

όπου οι c_i είναι ανακατεμένοι (αναδιαταγμένοι) οι b_i.

iii. Ανισότητα Holder

$$\begin{aligned} (a_1^p+\dots a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\dots+b_n^q)^{\frac{1}{q}} &\geq \\ \geq a_1b_1+\dots+a_nb_n & \end{aligned}$$

όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a_i, b_i > 0$.

Η ισότητα ισχύει για $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ Για $p = q = 2$ αποτελεί την ανισότητα Cauchy - Schwarz.

Η ανισότητα γενικεύεται και για ολοκληρώματα, αλλά και για περισσότερες ομάδες αριθμών όπως φαίνεται εδώ.

iv. Γενικευμένη ανισότητα Holder Αν $a, b, x, y, k, l > 0, p+q+r = 1$, τότε ισχύει:

$$(a+b)^p(x+y)^q(k+l)^r \geq a^px^qk^r+b^py^ql^r$$

η οποία ισχύει αντίστοιχα και για $n-$άδες.

v. Ανισότητα Minkowski Αν $a_i, b_i \geq 0, p > 0$ τότε ισχύει:

$$((a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$(a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}},\ \forall p > 1$$
$$((a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p)^{\frac{1}{p}} \geq$$
$$(a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}},\ \forall 0 < p < 1$$

3.2 Ανισότητες Jensen

Οι ανισότητες Jensen αποτελούν γενικότερες ανισότητες που στηρίζονται στην κυρτότητα των συναρτήσεων. Πρακτικά «μεταφράζει» την ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων σύμφωνα με την οποία μία τέμνουσα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από αυτήν, μεταξύ των σημείων τομής τους. Οπότε χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση μπορεί κανείς να οδηγηθεί και στις αντίστοιχες ανισότητες. Οπότε με βάση την παρατήρηση αυτή και το Σχετικό Σχήμα προκύπτει ότι αν f **κυρτή συνάρτηση**:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{n}$$

ενώ αν f **κοίλη συνάρτηση**

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{n}$$

Αν γνωρίζεις ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ είναι κοίλη ποια γνωστή ανισότητα προκύπτει για δύο σημεία με εφαρμογή της ανισότητας Jensen;

Αν γνωρίζεις ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή ποια γνωστή ανισότητα προκύπτει για δύο σημεία με εφαρμογή της ανισότητας Jensen;

3.3 Ανισότητα *Chebyshev*

Αν $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, τότε:

i. Αν $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ τότε:

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n) \geq (a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

ii. Αν $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ τότε:

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n) \leq (a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

3.4 Βασικές ασκήσεις

i. $a_i > 0$,

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

ii. Από ανισότητα Cauchy - Schwarz προκύπτουν οι εξής για κάθε $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \text{Μορφή Engel}$$

και

$$\frac{x^n}{a^{n-1}} + \frac{y^n}{b^{n-1}} \geq \frac{(x+y)^n}{(a+b)^{n-1}}$$

Οι ανισότητες ισχύουν και για ν προσθεταίους.

iii. Για $a_i, x_i > 0$ ισχύει:

$$(a_1 x_1 + \cdots a_n x_n)\left(\frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}\right) \geq (a_1 + \cdots + a_n)^2$$

4 Φύλλο Εργασίας 1

Θεμα 1. *Αν* $a, b, c > 0$*, τότε να αποδειχθεί ότι:* $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

Θεμα 2. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$a+b+c \geq \sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{bc^3} + \sqrt[4]{ca^3}$$

Θεμα 3 (Ανισότητα *Shapiro*)**.** *Αν* $a, b, c, d > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

Θεμα 4 (Αρχιμήδης 2010)**.** *Αν* $x, y > 0$ *και* $x+y = 2a, a > 0$*, τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$x^3y^3(x^2+y^2)^2 \leq 4a^{10}$$

5 Φύλλο Εργασίας 2

Θεμα 5. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{a}{a+2c} + \frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2b} \geq 1$$

Θεμα 6. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

Θεμα 7. *Αν* $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3$ *τότε νδο:*

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2} + \frac{1}{c^2+ca+a^2} \leq \frac{1}{abc}$$

Θεμα 8 (*IMO Shortlist*)**.** *Αν* $a, b, c > 0$ *ώστε να ισχύει* $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$$

ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2018 - 2019 ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

Σ.ΧΑΣΑΠΗΣ

20 Ἰανουαρίου 2019

Λύσεις του γράφοντα και συναδέλφων από το www.mathematica.gr

1 Α′ λυκείου

ΘΕΜΑ 1 (E2019A1). *Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι, ώστε*

$$a^3 + b^3 = 2ab(a + b)$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$.

Ἀπόδειξη. $a^3 + b^3 = 2ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 3ab + b^2) = 0$ κι επειδή οι a, b είναι θετικοί θα είναι $a + b \neq 0$,

άρα $a^2 + b^2 = 3ab \Rightarrow a^4 + b^4 = 7a^2b^2$ (1) και $K = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a^4 + b^4}{a^2b^2} \overset{(1)}{=} 7$ □

ΘΕΜΑ 2 (E2019A2). *Οι Θετικοί ακέραιοι m, n είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\frac{50}{3n-2}, \frac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.*

α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$A = 2(n + 1) - 3(m + 2) + 7$$

β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορει να πάρει η παράσταση:

$$B = \frac{162}{n^2} - \frac{m^2}{3721}$$

Ἀπόδειξη. Οι θετικοί διαιρέτες του 50 που αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3 είναι οι $1, 10, 25$

και οι θετικοί διαιρέτες του 243 που αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν με το 4 είναι οι $3, 27, 243$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι $n = 1, 4, 9$ και $m = 1, 7, 61$.

(α) Αφού $2(n + 1) \leq 20$ και $-3(m + 2) \leq -9$ έχουμε

$A \leq 20 - 9 + 7 = 18$ με το ίσο αν και μόνο αν $(n, m) = (9, 1)$.

(β) Αφού $\dfrac{1}{n^2} \geq \dfrac{1}{9^2}$ και $\dfrac{m^2}{3721} \leq \dfrac{61^2}{3721} = 1$

είναι

$B = \dfrac{162}{n^2} - \dfrac{m^2}{3721} \geq \dfrac{162}{81} - 1 = 1,$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $(n, m) = (9, 61)$.

□

ΘΕΜΑ 3 (E2019A3). *Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:*

$$\frac{y + 3x}{xy} = \frac{3z + 5y}{yz} = \frac{5x + z}{zx} = \frac{140}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ἀπόδειξη. Από τις δοθείσες σχέσεις παίρνουμε

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{y} + \dfrac{5}{z} = \dfrac{5}{z} + \dfrac{1}{x},$

οπότε $z = 5x$ και $y = 3x$.

Άρα η $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{140}{x^2 + y^2 + z^2}$ δίνει $\dfrac{2}{x} = \dfrac{140}{x^2 + 9x^2 + 25x^2} = \dfrac{4}{x^2},$

η οποία δίνει $x = 2$. Συνεπώς $(x, y, z) = (2, 6, 10)$. □

Θεμα 4 (Ε2019Α4). *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A} = 60^o$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C(O, R)$, του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι, ώστε $B\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$.*

α. Να αποδείξετε ότι: $\Delta\hat{O}\Gamma = 30^o$.

β. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ ως συνάρτηση της πλευράς ΒΓ=α.

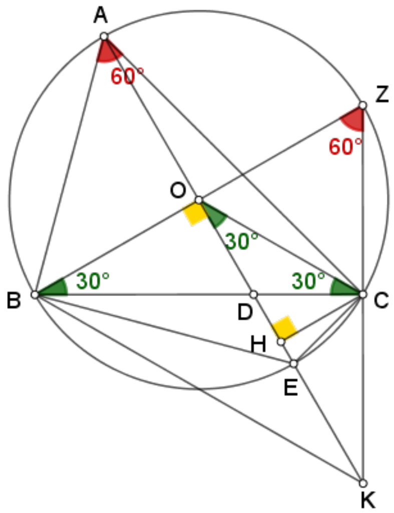
Απόδειξη. α) Φέρνω τη διάμετρο BOZ και έστω K το συμμετρικό του Z ως προς C και H η προβολή του C στην AE. Το τρίγωνο ZBK είναι ισοσκελές κι επειδή $\hat{Z} = 60°$ θα είναι ισόπλευρο.

Είναι όμως $BD = 2DC$, άρα D είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ZBK που σημαίνει ότι τα σημεία K, E, O είναι συνευθειακά. Με $KO \perp BZ \Leftrightarrow \boxed{D\hat{O}C = 30°}$

β) Λόγω της ομοιότητας των τριγώνων BOD, CHD είναι $HC = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{R}{2}$

$$(ABEC) = (ABE) + (ACE) = \frac{1}{2}AE \cdot BO + \frac{1}{2}AE \cdot CH = R\left(R + \frac{R}{2}\right) = \frac{3R^2}{2}$$

Αλλά, $a = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow R^2 = \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow \boxed{(ABEC) = \dfrac{a^2}{2}}$



□

Απόδειξη. (α) Έστω Z το μέσο του $B\Delta$.

Τότε τα τρίγωνα BOZ και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα από (ΠΓΠ), αφού $OB = O\Gamma = R$, $BZ = \Gamma\Delta = B\Gamma/2$, και $O\hat{B}Z = O\hat{\Gamma}\Delta = 30°$, αφού το τρίγωνο $BO\Gamma$ είναι ισοσκελές με $B\hat{O}\Gamma = 2B\hat{A}\Gamma = 120°$.

Αν $OH \perp B\Gamma$, τότε από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OHZ έχουμε

$OZ^2 = OH^2 + ZH^2 = OH^2 + \dfrac{a^2}{36}$, όπου $a = B\Gamma = 3Z\Delta = 6ZH$.

Αλλά, στο ορθογώνιο OHB είναι $BH = \dfrac{\sqrt{3}OB}{2}$, δηλ. $\dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}R}{2}$ ή $a = \sqrt{3}R$ και $OH = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{R}{2}$.

Συνεπώς, $OZ^2 = \dfrac{R^2}{4} + \dfrac{3R^2}{36} = \dfrac{R^2}{3}$, άρα $OZ = \dfrac{R}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{3} = Z\Delta$, που σημαίνει ότι το (ισοσκελές) τρίγωνο $ZO\Delta$ είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς $\Delta\hat{O}\Gamma = 60° - O\hat{\Gamma}\Delta = 60° - 30° = 30°$.

□

Απόδειξη. Άλλος τρόπος είναι $\dfrac{BZ}{ZH} = 2 = \dfrac{BO}{OH}$, οπότε η OZ είναι διχοτόμος της $B\hat{O}H$ που είναι ίση με $60°$. Άρα $D\hat{O}\Gamma = B\hat{O}Z = 30°$.

(β) Η FE είναι παράλληλη στη $B\Gamma$ κι άρα το εμβαδό του $BE\Gamma$ είναι ίσο με το εμβαδό του $BF\Gamma$.

Συνεπώς, το εμβαδό του τετραπλεύρου $ABE\Gamma$ είναι ίσο με αυτό του $ABF\Gamma$.

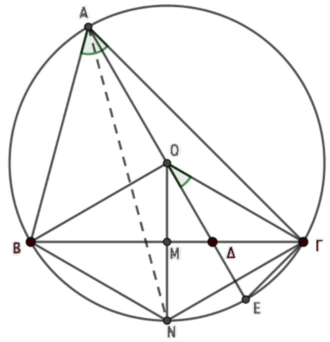
Το $ABF\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο που έχει ίσες και κάθετες διαγωνίους $AF = B\Gamma$. Πράγματι, είναι $F\hat{B}\Gamma = 45^\circ = A\hat{\Gamma}B$ κι άρα $FB//A\Gamma$, ενώ εύκολα βλέπουμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΓFA είναι ίσα.

Συνεπώς, το ζητούμενο εμβαδό είναι $a^2/2$. □

Απόδειξη. Εάν N είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$ που δεν περιέχει το A, τότε το $OBN\Gamma$ είναι ρόμβος,ως παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγωνίους (ή απλώς επειδή όλες οι πλευρές του είναι ίσες με την ακτίνα).

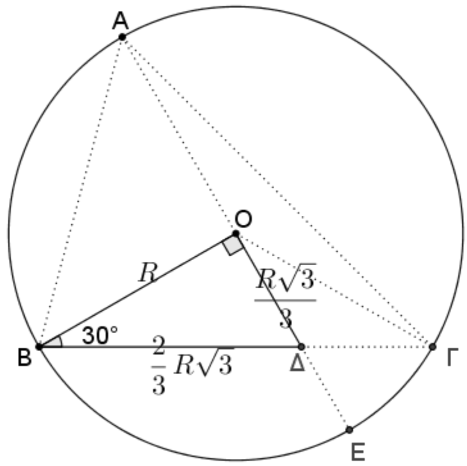
Αφού το Δ διαιρεί τη διάμεσο ΓM σε λόγο $2:1$ είναι το βαρύκεντρο του ισόπλευρου τριγώνου $NO\Gamma$.

Συνεπώς, η $O\Delta$ διχοτομεί την γωνία $N\hat{O}\Gamma = 60^\circ$ κι άρα $\Delta\hat{O}\Gamma = 30^\circ$



□

Απόδειξη. Επικεντρώνουμε στο τρίγωνο $OB\Delta$. Λόγω της 30^0 - ρας και Π.Θ. (Γιατί επιτρέπεται ;) βρίσκουμε $B\Gamma = R\sqrt{3}$ και το τρίγωνο προκύπτει ορθογώνιο κλπ



□

2 Β′ λυκείου

Θέμα 5 (E2019B1). *Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:*

$$\big||x+8|-3x\big| = \frac{x+7}{6}.$$

Απόδειξη. $||x+8|-3x| = \dfrac{x+7}{6}$

Επειδή το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό, το ίδιο θα συμβαίνει και με το δεύτερο, άρα $x \geq -7 \Rightarrow x > -8$

Οπότε η εξίσωση γράφεται:$|x+8-3x| = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow -2x+8 = \frac{x+7}{6}$ ή $-2x+8 = -\frac{x+7}{6}$ απ' όπου παίρνουμε τις λύσεις $\boxed{x = \frac{41}{13}}$ ή $\boxed{x=5}$ που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση. □

Απόδειξη. Η λύση αυτή βασίζεται στην εύρεση των τιμών που μηδενίζουν τις παραστάσεις μέσα στα ¨απόλυτα¨: $x+8$ και $|x+8|-3x$ και τη διάκριση περιπτώσεων στη συνέχεια.

Προφανώς $x+8=0 \iff x=-8$ και εύκολα βρίσκουμε $|x+8| = 3x \iff x=4$.

Έχουμε τις περιπτώσεις:

1) $x \geq 4$

Τότε $|x+8| = x+8 \leq 3x$, κι άρα η εξίσωση γίνεται $2x-8 = \frac{x+7}{6}$, που δίνει $x=5$ (δεκτή).

2) $-8 \leq x < 4$.

Τότε $3x < x+8 = |x+8|$, οπότε η εξίσωση γράφεται $(x+8)-3x = \frac{x+7}{6}$, ή ισοδύναμα

$8-2x = \frac{x+7}{6}$, που δίνει $x = \frac{41}{13} < 4$ (δεκτή).

3) $x < -8$.

Η εξίσωση είναι αδύνατη αφού τότε $x+7<0$. □

Θεμα 6 (E2019B2). *Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες $x+2y = y+3z = z+5x$, να βρείτε:*

α) την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}, \frac{z}{y}$.

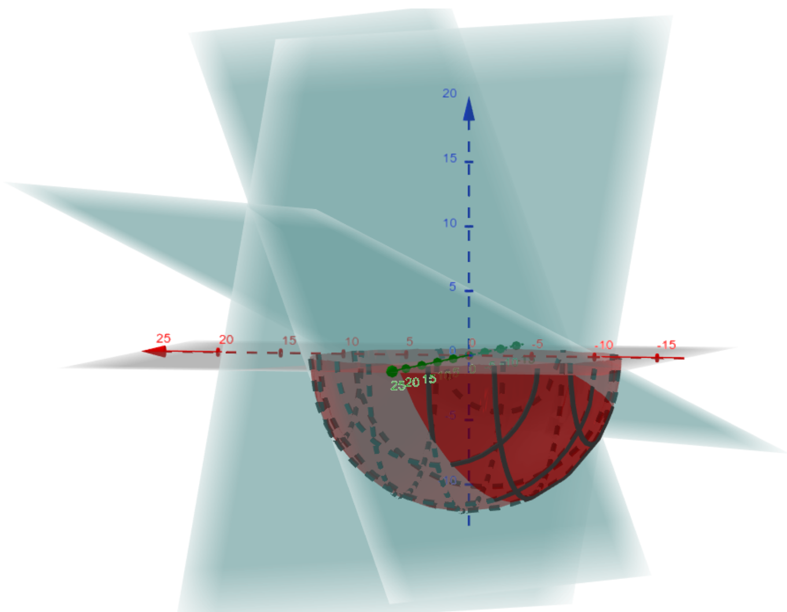
β) τις τιμές των x, y, z για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Οι τρεις σχέσεις μπορούν να γραφούν ως ένα ομογενές σύστημα 3Χ3 ως εξής:

$$\begin{cases} x+2y = y+3z \\ x+2y = z+5x \\ y+3z = z+5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z = 0 \\ -4x+2y-z = 0 \\ -5x+y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z = 0 \\ -13x+5y = 0 \\ 6y-13z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{13}, \frac{z}{y} = \frac{6}{13}$$

Παρατήρηση 1. *Το σύστημα, ως ομογενές, αντιστοιχεί σε τρία επίπεδα που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Βλέπε και σχήμα. Τρία τέτοια επίπεδα είτε έχουν μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων, είτε έχουν άπειρα κοινά σημεία που βρίσκονται σε μία ευθεία. Αν μεταβάλλετε για παράδειγμα το συντελεστή 3 της πρώτης εξίσωσης σε -1 θα δείτε τρία επίπεδα που διέρχονται από μοναδικό κοινό σημείο την αρχή των αξόνων και δεν έχουν άλλο κοινό σημείο.*



Τώρα, για την μέγιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+z^2-2y-144$ *μπορούμε απλά να αντικαταστήσουμε από τις σχέσεις που βρέθηκαν στο α ερώτημα, οπότε έχουμε:*

$x^2+y^2+z^2-2y-144=\frac{25}{169}y^2+y^2+\frac{36}{169}y^2-2y+144=\frac{230}{169}y^2-2y-144$

η οποία είναι μία παραβολή ως προς y *και λαμβάνει όντως ελάχιστη τιμή αφού* $a=\frac{230}{169}>0$ *για* $y=\frac{-b}{2a}=\frac{169}{230}$. *Με αντικατάσταση προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή δίνεται για* $x=\frac{13}{46},y=\frac{169}{230},z=\frac{39}{115}$.

Απόδειξη. $\left\{\begin{array}{c} x+2y=s\\ y+3z=s\\ z+5x=s\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} x+2y\\ 5x+z\end{array}\right\}*(-5)\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} -10y=-5s\\ z=s\end{array}\right\}\Rightarrow z=$ $-4s+10y(1)$ Από την σχεση (1) έχουμε: $3z+y=s\Rightarrow 3*(-4s+10y)+y=s\Rightarrow$ $y=\frac{13s}{31}$

$y+3z=s\Rightarrow x+\frac{26s}{31}=s\Rightarrow x=\frac{5s}{31}$

$y+3z=s\Rightarrow\frac{13s}{31}+3z=s\Rightarrow z=\frac{6s}{31}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\frac{x}{y}=\frac{5}{13},\frac{z}{y}=\frac{6}{13}$

Θέτουμε $x=\frac{5y}{13},z=\frac{6y}{13}$

Όποτε $x^2+y^2+z^2-2y-144=\frac{25y^2}{169}+y^2+\frac{36y^3}{169}-2y-144=\frac{230y^2}{169}-2y-144=k$,όπου κ η ελάχιστη τιμή της παράστασης

Για να έχει ρίζες η παραπάνω εξίσωση πρέπει η διακρινουσα Δ να είναι θετική Σε αυτήν την περίπτωση όμως πρέπει Δ=0,αφού κ η ελάχιστη τιμή της παράστασης $y=\frac{169}{230}$

Άρα $x=\frac{5y}{13}=\frac{845}{2990},z=\frac{6y}{13}=\frac{1014}{2990}$ □

Θεμα 7 (E2019B3). *Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη* (x,y) *που είναι λύσεις της εξίσωσης* $x^2+6x\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0$ *και ανήκουν στο ορθογώνιο* $D=\left\{-\pi<x<\pi,-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right\}$ *του Καρτεσιανού επιπέδου* Oxy.

Λύση

Θεωρούμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου: $\Delta=36\sigma\upsilon\nu^2(xy)-36=36(\sigma\upsilon\nu^2(xy)-1)\leq 0$.

Οπότε, η εξίσωση έχει λύσεις μόνο για $\Delta=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(xy)=\pm1$.

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(xy)=\sigma\upsilon\nu(0)$ *ή* $\sigma\upsilon\nu(xy)=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow xy=2k\pi$ *ή* $xy=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Συνεπώς $xy=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Θεωρούμε τώρα τις περιπτώσεις των τεταρτημορίων του δοθέντος ορθογωνίου στο οποίο θέλουμε τις λύσεις: [υ]1ο τεταρτημόριο[/υ] Αν $0\leq x\leq\pi,0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ *έχουμε:*

$0\leq xy\leq\frac{\pi^2}{2}\Leftrightarrow 0\leq\pi\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow k=0,k=1$ *Οπότε* $yx=0$ *η* $yx=\pi\Leftrightarrow y=0$ *η* $x=0$ *η* $yx=\pi$.

Αν $yx=\pi$ *η εξίσωση γίνεται* $x^2-6x+9=0\Leftrightarrow(x-3)^2=0\Leftrightarrow x=3$, *οπότε* $\boxed{(x,y)=\left(3,\frac{3}{\pi}\right)}$.

Αν $y=0$ *η εξίσωση γίνεται* $x^2+6x+9=0\Leftrightarrow(x+3)^2=0\Leftrightarrow x=-3$, *οπότε* $\boxed{(x,y)=(-3,0)}$ *η οποία εδώ απορρίπτεται γιατί τώρα δουλεύουμε στο 1ο τεταρτημόριο του ορθογωνίου, αλλά θα προκύψει καθώς θα κάνουμε τα ίδια για το [υ]2ο τεταρτημόριο [/υ]*

Έχουμε ότι : $-\pi\leq x\leq 0,0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ *οπότε* $0\leq -x\leq\pi\Rightarrow 0\leq -xy\leq\frac{\pi^2}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\leq k\leq 0\Leftrightarrow k=-1,\ k=0$.

Οπότε $yx=0$ *η* $yx=-\pi\Leftrightarrow y=0$ *η* $x=0$ *η* $yx=-\pi$.

Αν $yx=-\pi$ *η εξίσωση γίνεται* $x^2-6x+9=0\Leftrightarrow(x-3)^2=0\Leftrightarrow x=3$, *οπότε* $\boxed{(x,y)=\left(3,-\frac{3}{\pi}\right)}$. *Αν* $y=0$ *η εξίσωση γίνεται* $x^2+6x+9=0\Leftrightarrow(x+3)^2=0\Leftrightarrow$ $x=-3$, *οπότε* $\boxed{(x,y)=(-3,0)}$.

Ομοίως μπορούμε να εργαστούμε για τα άλλα δύο τεταρτημόρια του ορθογωνίου και τελικά οι λύσεις είναι:

$\boxed{(x,y)=(-3,0)\,,\left(3,-\frac{3}{\pi}\right),\left(3,\frac{3}{\pi}\right)}$.

Απόδειξη. Προφανώς είναι $x \neq 0$. Παρατηρούμε ότι αν $x > 0$, τότε $\dfrac{x^2+9}{6x} \geq 1 \iff (x-3)^2 \geq 0$ με την ισότητα αν-ν $x = 3$

ενώ αν $x < 0$, τότε $\dfrac{x^2+9}{6x} \leq -1 \iff (x+3)^2 \geq 0$ με την ισότητα αν-ν $x = -3$

Συνεπώς,

$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(xy) = -\dfrac{x^2+9}{6x} \leq -1$ για $x > 0$ με την (αναγκαστική) ισότητα αν-ν $x = 3$

και

$1 \geq \sigma\upsilon\nu(xy) = -\dfrac{x^2+9}{6x} \geq 1$ για $x < 0$ με την (αναγκαστική) ισότητα αν-ν $x = -3$

Έτσι, $\sigma\upsilon\nu(xy) = 1$, με $x = -3$ και $xy = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu(xy) = -1$ με $x = 3$ και $xy = \pi$. ή $xy = -\pi$

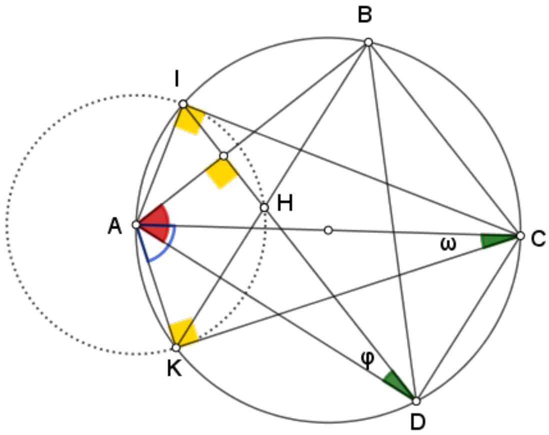
Συνεπώς, οι λύσεις είναι $(x,y) = (-3,0)$ και $(x,y) = (3,\pi/3)$ ή $(x,y) = (3,-\pi/3)$.

Μια άσκηση παρόμοια με αυτή βρίσκεται εδώ.

□

Θέμα 8 (Ε2019Β4)**.** *Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(O,R)$ τέτοιο, ώστε $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^o$. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(A,AH)$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(O,R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι ΓΙ=ΓΚ = ΒΔ.*

Απόδειξη. Η AC είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου, άρα $A\hat{I}C = A\hat{K}C = 90° \Leftrightarrow \boxed{CI = CK}$



$IA = IK \Leftrightarrow \omega = \varphi \Leftrightarrow 90° - K\hat{A}C = 90° - B\hat{A}D \Leftrightarrow K\hat{A}C = B\hat{A}D \Leftrightarrow \boxed{CK = BD}$

□

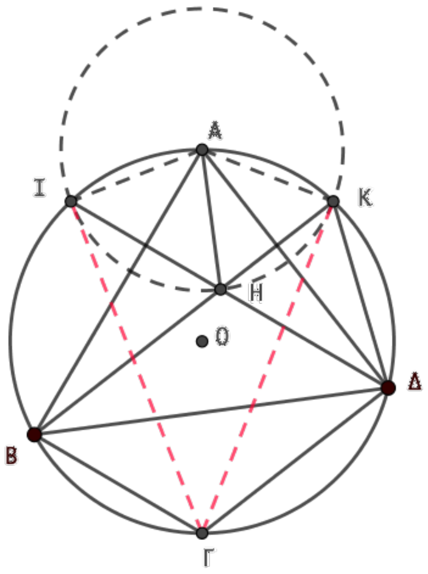
Απόδειξη. Το πρόβλημα αυτό βγαίνει άμεσα από τις παρακάτω ¨γνωστές' ιδιότητες του ορθόκεντρου ενός τριγώνου:

(1) Το συμμετρικό του ορθόκεντρου ενός τριγώνου ως προς (κάθε) πλευρά του ανήκει στον περιγεγραμμένο κυκλο του τριγώνου.

(2) Αν A' είναι το αντιδιαμετρικό σημείο της κορυφής A τριγώνου $AB\Gamma$, τότε το τετράπλευρο $HBA'\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

Από την ιδιότητα (1), τα συμμετρικά σημεία I' και K' του H ως προς τις πλευρές AB και $A\Delta$ είναι συνευθειακά με τα H, Δ και H, B αντίστοιχα, και θα ανήκουν στον $C_1(O,R)$. Επίσης, ισχύει $AI' = AH = AK'$, κι άρα θα ταυτίζονται με τα I και K, αντίστοιχα.

Έτσι, τα τμήματα ΓI και ΓK είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου $C_2(A,AH)$ από το Γ, αφού $\Gamma\hat{I}A = 90° = \Gamma\hat{K}A$, κι άρα είναι ίσα.



Από την ιδιότητα (2), αφού το Γ είναι αντιδιαμετρικό του A, το τετράπλευρο $HB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Βέβαια, ο ισχυρισμός αυτός έπεται άμεσα αφού $\Gamma B \perp AB$, $\Delta H \perp AB$ και $BH \perp A\Delta$, $\Gamma\Delta \perp A\Delta$.

Συνεπώς, το $B\Gamma\Delta K$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, αφού $BK // \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = \Delta H = \Delta K$, κι άρα $B\Delta = \Gamma K = \Gamma I$.

□

3 Γ′ λυκείου

Θεμα 9 (Ε2019Γ1). *Να βρειτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής:*

$$A = \overline{xxxabc} = x \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + x \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

όπου x, a, b, c ψηφία με $x \neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $111 = 3 \cdot 37$, και άρα ο

$$A = 111000x + \overline{abc} = 37 \cdot 3000x + \overline{abc}$$

είναι πολλαπλάσιο του 37 αν και μόνο αν ο $\overline{abc}$ είναι πολλαπλάσιο του 37.

Αφού $999 = 9 \cdot 111 = 27 \cdot 37$, υπάρχουν 28 αριθμοί της μορφής $\overline{abc}$ που είναι πολ/σια του 37, οι: $\overline{000}$, $\overline{037}$, ..., $\overline{999}$.

Αφού το x μπορεί να λάβει 9 δυνατές τιμές: $1, 2, \ldots, 9$, υπάρχουν συνολικά $9 \cdot 28 = 252$ τέτοιοι αριθμοί A. □

Θεμα 10 (Ε2019Γ2). *Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = |mx+4| + |mx-4|$, $m > 0$ και $y = 12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με $20\tau.\mu.$ Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m > 0$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $y = |mx+4| + |4-mx| \geq |mx+4+4-mx| = 8$ με το ίσο αν και μόνο αν $(mx+4)(4-mx) \geq 0$ από την τριγωνική ανισότητα, δηλαδή, αφού $m > 0$, αν και μόνο αν $-\dfrac{4}{m} \leq x \leq \dfrac{4}{m}$.

Αν $mx < -4$, τότε $y = -(mx+4) + 4 - mx = -2mx$, ενώ αν $mx > 4$, τότε $y = (mx+4) + (mx-4) = 2mx$.

Συνεπώς, οι κορυφές $A_i(x_i, y_i)$ του πολυγώνου είναι $A_1(-\dfrac{6}{m}, 12)$, $A_2(\dfrac{6}{m}, 12)$, $A_3(\dfrac{4}{m}, 8)$, $A_4(-\dfrac{4}{m}, 8)$.

Το εμβαδό του πολυγώνου μπορεί να υπολογιστεί ως εμβαδό τραπεζίου.

Γενικότερα, όμως, από shoelace formula, αφού $y_2 = y_1 = 12$ και $y_4 = y_3 = 8$, το εμβαδό του είναι

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\Big|x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big|4x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 4x_4\Big| \\ &= 2\Big|x_1 - x_2 - x_3 + x_4\Big| \\ &= 2\Big| - \frac{6}{m} - \frac{6}{m} - \frac{4}{m} - \frac{4}{m}\Big| \\ &= \frac{40}{m} \end{aligned}$$

Άρα, αφού $A = 20$, έπεται ότι $m = 2$. □

Θεμα 11 (Ε2019Γ3). *Δίνεται η αλγεβρική παράσταση*

$$A = \sqrt{3\left|4 - x^2\right|^2 - 2x^4 + 16x^2 - 32}$$

Να απλοποιήσετε την παράσταση A και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $A = ax + 4$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.

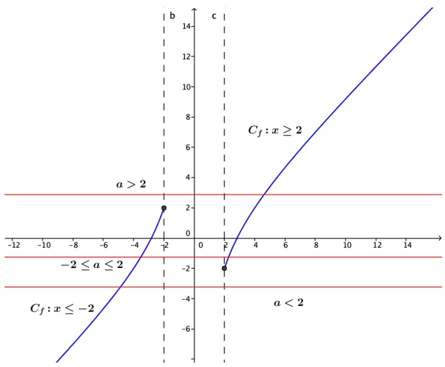
Απόδειξη. Η παράσταση γράφεται ισοδύναμα

$$A = \sqrt{3\left|4 - x^2\right|^2 - 2x^4 + 16x^2 - 32} = \sqrt{3\left(4 - x^2\right)^2 - 2\left(x^4 - 8x^2 + 16\right)} =$$
$$= \sqrt{3\left(4 - x^2\right)^2 - 2\left(x^2 - 4\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(x^2 - 4\right)^2} = \left|x^2 - 4\right|.$$

1.Για $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ η εξίσωση γράφεται

$ax + 4 = x^2 - 4 \Leftrightarrow a = x - \dfrac{8}{x}$

Ο αριθμός των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης αντιστοιχεί με τα σημεία τομής της ευθείας $y = a$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x - \dfrac{8}{x}$. Για την $f(x)$ είναι $f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^2} > 0$. Οπότε είναι γνησίως αύξουσα σε καθέ ένα από τα διαστήματα ορισμού της και θα τέμενει σε μοναδικό σημείο την $y = a$ σε καθένα από αυτά. Σχεδιαζουμε την γραφική παράστασή της



απλή εποπτεία της οποίας μας δίνει τον αριθμό των λύσεων για τις διάφορες τιμές του a.

Δυο λύσεις αν $-2 \leq a \leq 2$. Μια λύση αν $a > 2$ ή $a < -2$

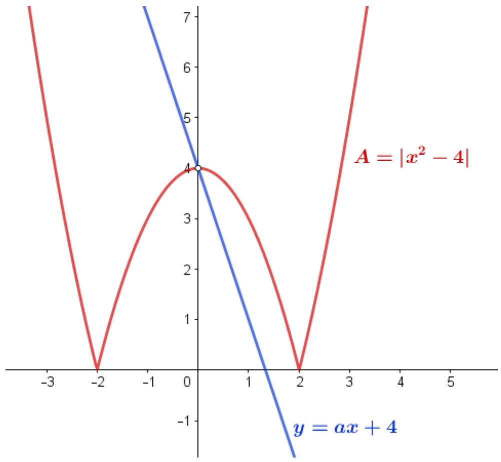
[β]2.[/β] Για $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$ η εξίσωση γίνεται $ax + 4 = -x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 + ax = 0 \Leftrightarrow x(x + a) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -a$. Οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε: Μια λύση αν $a = 0$ Δυο λύσεις αν $a \in (-2, 0) \cup (0, 2)$

Συνοψίζοντας τις περιπτώσεις [β](1),(2)[/β] έχουμε τελικά

Δυο ρίζες αν $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ Τρεις ρίζες αν $a \in \{-2, 2, 0\}$ Τέσσερις ρίζες αν $a \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ □

Παρατήρηση 2. *Η ευθεία $y = ax + 4$ στο σχήμα, περιστρέφεται γύρω απ΄ το σημείο $(0, 4)$ (εξαιρουμένης της κατακόρυφης).*

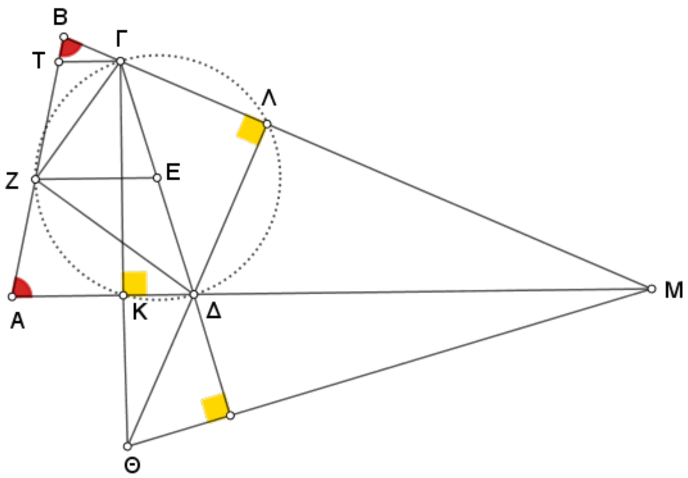
Είναι φανερό ότι τέμνει την καμπύλη $A = \left|x^2 - 4\right|$ τουλάχιστον σε δύο σημεία (από δύο έως και τέσσερα).



Θεμα 12 (Ε2019Γ4). *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο, ώστε $\hat{A} = \hat{B} < 90^o$ και $A\Delta + B\Gamma = \Gamma\Delta$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.*

Απόδειξη. Φέρνω ΓΤ||ΑΔ. Είναι ΒΓ+ΑΔ = ΓΔ ⇔ ΓΤ+ΑΔ = ΓΔ και από γνωστή άσκηση του σχολικού

$\Gamma\hat{Z}\Delta = 90^o$. Άρα ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου και εύκολα τώρα το Δ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΓΘΜ.



□

Παραγοντοποιωντας το τριωνυμο ΓΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
14 Ιανουαριου 2016
Για τον διαγωνισμο Ευκλειδης

1 Εισαγωγή

Η παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου μπορεί να γίνει εύκολα όταν αυτό έχει τουλάχιστον μία τιμή για τη μεταβλητή x (ή οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή θεωρήσουμε) η οποία να το μηδενίζει.

Τριώνυμο ονομάζουμε οποιαδήποτε παράσταση της μορφής:

$$ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$$

όπου οι όροι a, b, c μπορούν να είναι είτε αριθμοί, είτε ακόμα και μεταβλητές για τις οποίες γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής του x^2 δεν παίρνει την τιμή 0. Η παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου εξαρτάται από τις ρίζες του, δηλαδή τις τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται.

2 Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

η οποία λέγεται **διακρίνουσα** του τριωνύμου. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή που θα βρούμε για τη διακρίνουσα:

- Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει **δύο ρίζες** οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει **δύο ίσες ρίζες** οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο ΔΕΝ έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή δε μηδενίζεται για πραγματική τιμή του πραγματικού αριθμού x.

Παράδειγμα 1. *Να λυθεί η εξίσωση:* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Πρόκειται για τριώνυμο με συντελεστές $a = 1, b = -5, c = 6$. Ισχύει: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. Οπότε οι δύο ρίζες(τιμές του χ που το μηδενίζουν) είναι

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} \text{ ή } \frac{5-1}{2}$$

Δηλαδή: $x_1 = 3$ ή $x_2 = 2$. Πράγματι, αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στο τριώνυμο $x^2 - 5x + 6 = 0$ διαπιστώνω ότι βγαίνει η αριθμητική τιμή 0.

Παράδειγμα 2. *Να λυθεί η εξίσωση:* $2x^2 - 8x + 8 = 0$.

Πρόκειται για τριώνυμο με συντελεστές $a = 2, b = -8, c = 8$. Ισχύει: $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0$. Οπότε οι δύο ρίζες(τιμές του χ που το μηδενίζουν) είναι ένας αριθμός:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 2} = 2$$

Δηλαδή: $x_1 = 2$ και $x_2 = 2$. Πράγματι, αντικαθιστώνταςστο τριώνυμο $2x^2 - 8x + 8 = 0$ διαπιστώνω ότι βγαίνει η αριθμητική τιμή 0.

Παράδειγμα 3. *Να λυθεί η εξίσωση:* $x^2 + x + 8 = 0$.

Πρόκειται για τριώνυμο με συντελεστές $a = 1, b = 1, c = 8$. Ισχύει: $\Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -31 < 0$. Οπότε δεν υπάρχουν τιμές του χ που το μηδενίζουν. Σε αυτήν την περίπτωση το τριώνυμο είτε είναι αρνητικό, είτε θετικό για οποιαδήποτε τιμή του x και αν αντικαταστήσουμε. Για παράδειγμα για $x = 0$ στο παραπάνω παίρνουμε την αριθμητική τιμή 8, άρα όποιο x και να αντικαταστήσουμε θα έχουμε πάντα θετικό αριθμό ως αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 4. *Να λυθεί η εξίσωση:* $x^2 + 2006x - 2007 = 0$.

Πρόκειται για τριώνυμο με συντελεστές $a = 1, b = 2006, c = 2007$. Ισχύει: $\Delta = (2006)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2007 = 4024036 - 8028$

Εδώ παρατηρούμε ότι οι πράξεις γίνονται ιδιαίτερα δύσκολες για να τις κάνουμε με το χέρι... Ίσως, λοιπόν να είναι περισσότερο συμφέρον να προσπαθήσουμε μήπως και λύνεται με παραγοντοποίηση.

Πράγματι:

$$x^2 + 2006x - 2007 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2007x - x - 2007 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x + 2007x - 2007 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1) + 2007(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x+2007) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -2007$$

Δηλαδή, η επίλυση της εξίσωσης για το ανθρώπινο χέρι γίνεται ευκολότερα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, με γνωστές μεθόδους παραγοντοποίησης, παρά με χρήση υπολογισμών και τύπων. Γενικότερα, όταν μπορεί να γίνει μία παραγοντοποίηση ή επίλυση εξίσωσης με αυτόν τον τρόπο μπορεί να είναι συντομότερο από τους τύπους και τους υπολογισμούς με το χέρι.

3 Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Αν παρατηρήσεις τις ισοδυναμίες στην επίλυση της τελευταίας εξίσωσης θα δεις ότι η παραγοντοποίηση οδήγησε στην επίλυση της εξίσωσης, δηλαδή στην εύρεση των ριζών της εξίσωσης. Γενικά, μπορεί να συμβεί και η αντίστροφη διαδικασία· δηλαδή να βρούμε τις ρίζες μίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και μέσω αυτών να παραγοντοποιήσουμε.

Συγκεκριμένα, ισχύουν:

- Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει **δύο ρίζες** $x_{1,2}$ που υπολογίζονται όπως είδαμε παραπάνω και παραγοντοποιείται:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει **δύο ίσες ρίζες** $x_{1,2} = r$ που υπολογίζονται όπως είδαμε παραπάνω και παραγοντοποιείται:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο ΔΕΝ έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή δε μηδενίζεται για πραγματική τιμή του πραγματικού αριθμού x και **ΔΕΝ παραγοντοποιείται** με αυτόν τον τρόπο.

Παράδειγμα 5. *Να παραγοντοποιηθεί* $x^2 - 5x + 6$.

Βρήκαμε στο αντίστοιχο παράδειγμα ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $x = 2, x = 3$ οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται:

$$x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x-2) \cdot (x-3)$$

Παράδειγμα 6. *Να παραγοντοποιηθεί :* $2x^2 - 8x + 8$.

Βρήκαμε στο αντίστοιχο παράδειγμα ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $x = 2, x = 2$ οπότε η παράσταση παραγοντοποιείται:

$$2x^2 - 8x + 8 = 2 \cdot (x-2) \cdot (x-2) = 2(x-2)^2$$

Παράδειγμα 7. *Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:* $x^2 + 2yx - 3y^2$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση εμφανίζεται το x^2, αλλά και μία ακόμα μεταβλητή y. Μπορούμε, όπως και πριν, να το θεωρήσουμε τριώνυμο ως προς τη μεταβλητή x με συντελεστές: $a = 1, b = 2y, c = -3y^2$, οπότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε για την εύρεση των ριζών καταρχάς: $\Delta = b^2 - 4ac = (2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3y^2) = 4y^2 + 12y^2 = 16y^2 \geq 0$ άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2y \pm \sqrt{16y^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2y \pm 4y}{2}$ απ' όπου προκύπτουν: $x_1 = y$, $x_2 = -3y$, οπότε έχουμε την παραγοντοποίηση: $x^2 + 2yx - 3y^2 = 1 \cdot (x-y)(x-(-3y)) = (x-y)(x+3y)$. Φυσικά, την ίδια παραγοντοποίηση μπορούσαμε να επιτύχουμε θεωρώντας την παραπάνω παράσταση ως τριώνυμο της μεταβλητής y με συντελεστές αντίστοιχα: $a = -3, b = 2x, c = x^2$ κατά σειρά ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου προσθεταίου y^2, του y και ο σταθερός όρος c. Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε.

Άσκηση 1. *Να αποδειχθεί ότι η διαφορά τετραγώνων δύο διαδοχικών περιττών είναι πολλαπλάσιο του 8.*

Άσκηση 2. *Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:*

1. $A = (2x + 3y - 1)^2 + 4x + 6y - 1$
2. $B = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$
3. $C = a^7 - a^6 - 3a^5 + 3a^4 + 3a^3 - 3a^2 - a + 1$
4. $D = a^2 + b - b^2 - b + (b - a)^2$

Άσκηση 3. *Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:*

1. $A = 7a^2 + 10ab + 3b^2$
2. $B = 5a^2 - 8ab + 3b^2$
3. $C = 2a^2 + 5a + 3$
4. $D = a^5 + a + 1$

Άσκηση 4. *Αν ισχύει ότι $a + b + c = 0$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:*

$$\frac{b^2 + 2bc - a^2}{a + b} + \frac{a^2 + 2ab - c^2}{a + c} + \frac{c^2 + 2ac - b^2}{b + c}$$

Άσκηση 5 (Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2002)**.** *Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:*

$$B = (2 + x + x^2)^2 - x^3$$

Υπόδειξη [1]

Άσκηση 6 (παραλαγή θέματος Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2003)**.** *Δίνεται ότι οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w ικανοποιούν την ισότητα:*

$$x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 = 6(xy + yz + zw).$$

α) Να γραφεί η ισότητα ως άθροισμα τετραγώνων που είναι ίσο με 0.
β) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τους x, w.

Άσκηση 7 (παραλαγή θέματος Αρχιμήδης Νέων 2003)**.** *Δίνεται η παράσταση $A = n^3 - n^2 + n - 1$, όπου n θετικός ακέραιος.*
α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση A.
β) Να βρεθούν οι τιμές του n για τις οποίες ο αριθμός A είναι πρώτος.

Άσκηση 8 (παραλλαγή Προκριματικός διαγωνισμός Νέων 2001)**.** *α) Να αποδειχθεί η ταύτοτητα:*

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

β) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:

$$A = x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$

Υπόδειξη 1 [2] *Υπόδειξη 2* [3]

Εδώ μπορείτε να βρείτε πολλά περισσότερα θέματα προς συζήτηση σε όλα τα επίπεδα ακόμα και για διεθνείς διαγωνισμούς.

Θέμα 9. *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:*

$$f(2x + y) = 2f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(0) = 0$.
2. $f(m + n) = f(m) + f(n), \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}$
3. *Αν f συνεχής στο 0, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.*
4. *Αν f παραγωγίσιμη στο 0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.*

[1] Προσπαθήστε να δημιουργήσετε τις ταυτότητες της διαφοράς τετραγώνων και της διαφοράς κύβων.
[2] Προσθαφαιρέστε κατάλληλη ποσότητα ώστε να δημιουργήσετε την ταυτότητα του ερωτήματος α.
[3] Τώρα, δημιουργήστε μια διαφορά τετραγώνων.

Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ομιλος Μαθηματικων 2018-19

Μαθηματικός: *Σ.Χασάπης*

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:13 Ἰανουαρίου 2019

Οι «πίνακες» της συνάντησης του ομίλου βρίσκονται εδώ.

Θεμα 1. *Όλα τα τρίγωνα είναι ισόπλευρα !*
Δείτε την «απόδειξη» εδώ .
Σκεφτείτε που βρίσκεται το «λάθος». Μην δείτε τη λύση ακόμα εδώ.

Θεμα 2. *Δίνεται η εξίσωση* $x^2 - a(a-2)x - (a-1)^2 = 0 \ a \in \mathbb{R} \qquad (1).$

α. Να αποδειχθεί ότι η (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις.

β. Αν x_1, x_2 *οι λύσεις της (1), να βρεθούν οι* $a \in \mathbb{R}$ *,ώστε* $2\sqrt{x_1+x_2-2(a-2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \geq 1.$

Λύση στον πίνακα από Αλεξάνδρα. Για να έχει η εξίσωση δευτέρου βαθμού δύο διαφορετικές λύσεις αρκεί να ισχύει ότι $D > 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow a^2(a-2)^2 + 4(a-1)^2 > 0.$

Είναι άθροισμα τετραγώνων που δε γίνονται ταυτόχρονα μηδέν, άρα ισχύει για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$.

β.*Λύση από Χρήστο και Αλεξάνδρα* Από τους τύπους Vietta έχουμε, αντικαθιστώντας στη συνθήκη έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x_1+x_2-2(a-2)} - 3\sqrt{-x_1x_2} \geq 1 &\Leftrightarrow \\ 2\sqrt{a(a-2)-2(a-2)} - 3\sqrt{(a-1)^2} \geq 1 &\Leftrightarrow \\ 2|a-2| - 3|a-1| \geq 1 & \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1. *Υψώνοντας στο τετράγωνο στο συγκεκριμένο σημείο και αφού δημιουργήσουμε κατάλληλα την ανίσωση, δεν ειναι ο καλύτερος τρόπος διότι ακολουθούν πολλές πράξεις, οι οποίες δε διευκολύνουν...Δείτε την εικόνα εδώ.*

Διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

a	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$a-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$a-2$		$-$		$-$	0	$+$	

Για $a \leq 1$ *έχουμε:* $-2(a-2) + 3(a-1) \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 0 \Leftrightarrow a \in [0,1]$.
Για $1 < a < 2$ *έχουμε:* $2(a-2) + 3(a-1) \geq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{8}{5}$. *Άρα* $a \in \left[\frac{8}{5}, 2\right)$.
Για $2 \leq a$ *έχουμε:* $2(a-2) - 3(a-1) \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2$, *άρα* $a = 2$.

□

Θεμα 3 (E2016A1). *Να λυθεί η εξίσωση* $x^2 + 4x - 9 = 4|x|, x \in \mathbb{R}$.

Λύση από Δημήτρη. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το x, ώστε να διώξουμε την απόλυτη τιμή: Αν $x \geq 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 9 = 4x &\Leftrightarrow \\ (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3. & \end{aligned}$$

Δεκτή η $x = 3$.

Αν $x < 0$ τότε έχουμε:

$$x^2 + 4x - 9 = -4x \Leftrightarrow$$
$$(x-1)(x+9) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -9.$$

Δεκτή η $x = -9$.

□

Θεμα 4 (E2016B4)**.** *Να βρεθούν οι θετικοί ρητοί αριθμοί a, b ώστε οι αριθμοί: $p = \dfrac{ab+1}{a}, q = \dfrac{ab+1}{b}$ να είναι ακέραιοι.*

Λύση από Κώστα και Δημήτρη. .

(α'τρόπος)

Θεωρούμε το γινόμενο $p \cdot q = \frac{ab+1}{a} \cdot \frac{ab+1}{b} = \frac{(ab+1)^2}{ab} = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$(ab)^2 + (2-k)ab + 1 = 0$

Θεωρούμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση παραπάνω ως προς ab και έχουμε $\Delta = (2-k)^2 - 4$. Όμως οι αριθμοί a, b είναι ρητοί άρα πρέπει Δ να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου(εφόσον $k \in \mathbb{Z}$).

Έστω $(2-k)^2 - 4 = m^2 \Leftrightarrow (2-k-m)(2-k+m) = 4$.

Διακρίνουμε τώρα περιπτώσεις:

1η περίπτωση $2-k-m = 1,\ 2-k+m = 4$, προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $4-2k = 5$, το οποίο είναι άτοπο αφού άθροισμα δύο άρτιων δεν μπορεί να είναι περιττός.

2η περίπτωση $2-k-m = 2,\ 2-k+m = 2$, προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $4-2k = 4 \Leftrightarrow k = 0$. Οπότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Leftrightarrow ab = -1$, το οποίο είναι αδύνατο, εφόσον $a, b > 0$.

3η περίπτωση $2-k-m = 4,\ 2-k+m = 1$, προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $4-2k = 5$, το οποίο είναι άτοπο αφού άθροισμα δύο άρτιων δεν μπορεί να είναι περιττός.

3η περίπτωση $2-k-m = -2,\ 2-k+m = -2 \Rightarrow k = 4, m = 0$ απ' όπου με αντικατάσταση στην εξίσωση έχουμε $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow ab = 1$ Οπότε έχουμε $p = \frac{2}{a}, q = \frac{2}{b}, pq = 4$. Οπότε ισχύει $(p,q) = (1,4), (4,1),\ (2,2) \Leftrightarrow (a,b) = (2,\frac{1}{2}), (\frac{1}{2},2), (1,1)$.

(β' τρόπος)

Εφόσον a, b θετικοί ρητοί αριθμοί θα υπάρχουν ακέραιοι $k, l, m, n \in \mathbb{N}, (k,l) = 1 = (m,n)$ (αν k, l, m, n αρνητικοί έχουμε δεύτερη περίπτωση) ώστε να ισχύει $a = \frac{k}{l}, b = \frac{m}{n}$ και έχουμε:

$\frac{\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}+1}{\frac{k}{l}} = \frac{km+ln}{kn} \in \mathbb{N}$ Εφόσον το τελευταίο κλάσμα θέλουμε να είναι φυσικός αριθμός έχουμε ότι ο παρονομαστής kn πρέπει να διαιρεί τον αριθμητή, οπότε έχουμε:

k διαιρεί τον km άρα θα διαιρεί και τον ln, ώστε να διαιρεί το άθροισμά τους $(k|(km+ln))$. Όμως $(k,n) = 1$ άρα $k|n$. Με παρόμοιο επιχείρημα έχουμε ότι $n|k$ συνεπώς $k = \pm n$ και επειδή έχουμε θεωρήσει ότι είναι θετικοί θα ισχύει ότι $k = n$.

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $l = m$ άρα τελικά έχουμε $a = \frac{n}{m}, b = \frac{m}{n}$

Αντικαθιστώντας τώρα στην αρχική έχουμε:

$$1^2 + (2-k)1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 - k = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

και για τους αρχικούς αριθμούς έχουμε

$\frac{ab+1}{a} = \frac{2}{a} \in \mathbb{Z}, \frac{ab+1}{b} = \frac{2}{b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{a}, 2a, \frac{2}{b}, 2b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a, b \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$

Συνεπώς $(a,b) = (1,1), (\frac{1}{2},2), (2,\frac{1}{2})$.

□

Θεμα 5 (ΕΛ2016Α2)**.** *Να βρεθούν όλοι οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ που ικανοποιούν την εξίσωση $\overline{abc} = (a+b+c)^2 + a + b + c$.*

Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Μη Γραμμικες Διοφαντικες Εξισωσεις .

1 Εισαγωγή

Στο παρόν θα εξετάσουμε την επίλυση εξισώσεων με ακέραιες λύσεις. Ο χειρισμός τέτοιων εξισώσεων διαφέρει σημαντικά ως προς το χειρισμό σε σχέση με τις γενικές εξισώσεις, διότι, αν και δεν υπάρχει γενικός αλγόριθμος λύσης τους, μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να δράσουμε αποτελεσματικά, μέσω γνωστών εργαλείων και έξυπνων σκέψεων.

Στη συνέχεια θα πρέπει να προσπαθείτε να λύνετε μόνοι σας τις ασκήσεις που ακολουθούν τα παραδείγματα, πριν προχωρήσετε στις υποδείξεις και τις λύσεις που δίνονται.

2 Ομαδοποίηση, παραγοντοποίηση, λύση

Ορισμός 1. *Μία εξίσωση λέγεται* ***Διοφαντική εξίσωση*** *αν έχει συντελεστές ακεραίους και λύσεις ακεραίους (ή ρητούς).*

Γενικά, σύμφωνα με θεώρημα του Matjiasevich, το πρόβλημα του καθορισμού της ύπαρξης λύσης είναι μη αποφασίσιμο, δηλαδή δεν μπορεί να κατασκευαστεί αλγόριθμος, ο οποίος σε κάθε περίπτωση να αποφαίνεται σωστά αν η Διοφαντική εξίσωση έχει λύση ή όχι. Αυτό βέβαια αφορά στο σύνολο των Διοφαντικών εξισώσεων. Υπάρχουν όμως συγκεκριμένες μορφές εξισώσεις που έχουμε πλήρη αλγόριθμο για το αν έχουν λύσεις ή όχι και άλλες για τις οποίες έχουμε και αλγόριθμο για να βρούμε τέτοιες λύσεις.

Στα επόμενα θα εργαστούμε με μη γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις [1].

Παράδειγμα 1. *Να βρεθούν ακέραιοι x, y, οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$xy - 3 = y$$

Απόδειξη. Μία βασική τεχνική σε τέτοιου είδους εξισώσεις είναι να προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση στο ένα μέλος, έχοντας στο άλλο είτε μηδέν, είτε κάποιον άλλο - συνήθως μικρό - ακέραιο. Στη συνέχεια διακρίνουμε περιπτώσεις.

Η συγκεκριμένη γράφεται:

$$\begin{aligned} xy - 3 = y &\Leftrightarrow \\ xy - y = 3 &\Leftrightarrow \\ y(x-1) = 3 &\Leftrightarrow \\ (y, x-1) = (1,3) \text{ ή } (-1,-3) \text{ ή } (3,1) \text{ ή } (-3,-1) &\Leftrightarrow \\ (y, x) = (1,4) \text{ ή } (-1,-2) \text{ ή } (3,2) \text{ ή } (-3,0). & \end{aligned}$$

ώστε το γινόμενό τους να είναι 3.

□

Παράδειγμα 2. *Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$3x - 2y + xy - 9 = 0 \tag{1}$$

[1] Για τις γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις αναφερόμαστε σε άλλο κείμενο.

Απόδειξη. Προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε την 1 · απαιτείται ομαδοποίηση:

$$3x + xy - 2y - 9 = 0 \Leftrightarrow x(3 + y) - 2y - 9 = 0$$

Ο προσθεταίος $-2y - 9$ θέλουμε να «περιέχει» $3 + y$, δηλαδή να διαιρείται από το $3+y$ που δε γίνεται αφού το -3 όχι ρίζα του $-2y-9$. Οπότε, μπορούμε να κάνουμε τη διάσπαση:

$$-2y - 9 = -2y - 6 - 3 = -2(y + 3) - 3$$

Τότε η εξίσωση θα γίνει:

$$x(3 + y) - 2(y + 3) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 2)(3 + y) = 3 \text{ με } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Στη συνέχεια θα εργαστούμε με περιπτώσεις όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Το 3 ως γινόμενο ακεραίων προκύπτει από: $1 \cdot 3, (-1) \cdot (-3), 3 \cdot 1, (-3) \cdot (-1)$.

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$(y + 3, x - 2) = (1, 3) \text{ ή } (3, 1) \text{ ή } (-1, -3) \text{ ή } (-3, -1)$$
$$(y, x) = (-2, 5) \text{ ή } (0, 3) \text{ ή } (-4, -1) \text{ ή } (-6, 1)$$

□

Στη συνέχεια ακολουθούν 3 θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου με υποδείξεις και λύσεις. Βασική υπενθύμιση: προσπάθησε να το λύσεις πρώτα μόνος σου! ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ = ΓΡΑΨΙΜΟ ιδεών σε χαρτί. Επιστροφή για εύρεση εναλλακτικών δρόμων όταν κολλήσουμε κάπου.

Θέμα 1 (Θαλής 2012 - Α 1). *Να βρεθούν ακέραιοι x, ρίζες της εξίσωσης:*

$$x(x - 2) = 24 \tag{2}$$

με $x^2 \leq 25$.

Θέμα 2 (Θαλής 2007 - Α 4). *Να βρεθούν θετικοί ακέραιοι x, y, ώστε:*

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$

Υπόδειξη 1 Υπόδειξη 2 Λύση

Θέμα 3 (Θαλής 2008 - Α2). *Να βρεθούν οι $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ώστε $0 \leq x \leq y \leq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44 \tag{3}$$

Υπόδειξη 1 Υπόδειξη 2 Λύση

Θέμα 4 (Θαλής 2013 - Α3). *Να βρεθούν οι $x \in \mathbb{Z}$ για τους οποίους οι αριθμοί: $A = 8x + 1$, $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.*

Υπόδειξη 1η Υπόδειξη 2η Λύση

Σε κάποιες περιπτώσεις θεμάτων μπορεί να χρειαστεί να εφαρμόσουμε πρώτα για μερικές ειδικές περιπτώσεις, μήπως και αντιληφθούμε τι συμβαίνει:

Θέμα 5 (Θαλής 2015 - Α3). *Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης:*

$$x + y + x^2 + y^2 = p, \text{ όπου } p \text{ πρώτος}, p > 0. \tag{4}$$

Υπόδειξη 1η Υπόδειξη 2η Λύση

Σε μερικές περιπτώσεις η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνεται αρκετά δύσκολη στην εύρεση της κατάλληλης ομαδοποίησης. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση μέσω τριωνύμου με μεταβλητούς συντελεστές.

Παράδειγμα 3 (Παραγοντοποιώντας μέσω τριωνύμου)**.** *Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:*

$$3x^2 - xy - 4y^2 = 6 \tag{5}$$

Λύση 1. *Θεωρούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης ως τριώνυμο του* x*, οπότε έχουμε:* $a = 3,\ b = -y,\ c = -4y^2$.

Τότε: $\Delta = b^2 - 4ac = (-y)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4y^2) = 49y^2$.

Και οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{y \pm 7y}{6} = \frac{4y}{3} \text{ ή } -y$$

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται:

$$3x^2 - xy - 4y^2 = 3(x - \frac{4y}{3})(x + y) = (3x - 4y)(x + y)$$

Συνεπώς έχουμε: $(3x - 4y)(x + y) = 6 = 1 \cdot 6 = (-1)(-6) = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = \dots$

Απ΄ όπου τελικά θα προκύψουν οι λύσεις: $(x, y) = (3, 2), (-3, -2)$.

Άσκηση 1. *Να βρεθούν ακέραιοι* x, y*, ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση:*

$$x^2 + x + 29 = y^2 \tag{6}$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν ακέραιοι* x, y *οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$-2x^3 + 5x^2y + 4xy^2 - 3y^3 - 3 = 0 \tag{7}$$

3 Υποδείξεις

Υπόδειξη 1. *Πάλι προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε με ομαδοποίηση.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 2. *Δοκίμασε ομαδοποιήσεις που να έχουν κοινό παράγοντα.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 3. *Εφόσον στο πρώτο μέλος έχουμε 7 προσθεταίους και εμφανίζεται και το xyz υποπτευόμαστε μήπως είναι γινόμενο παραγόντων τριών παρενθέσεων με δύο όρους η καθεμία, οπότε ίσως χρειαστεί να προσθαφαιρέσουμε και κάποιον αριθμό στο αριστερό μέλος.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 4. *Για να παραγοντοποιήσεις τους ομαδοποιημένους προσθεταίους μπορείς να χρησιμοποιήσεις και ταυτότητα.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 5. *Εφόσον είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων πώς θα γράφονται;* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 6. *Αν $A = k^2$ και $B = l^2$ τότε προκύπτει $k^2 - 4l^2 = 13$ η οποία είναι μία Διοφαντική εξίσωση ως προς k, l.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 7. *Εδώ δε φαίνεται εύκολο να γίνει παραγοντοποίηση, καθώς λείπουν και όροι. Μπορούμε να δοκιμάσουμε για $p = 2, 3$ και διάφορες μικρές τιμές των x, y μήπως έρθει κάποια ιδέα για το τι περίπου συμβαίνει.* *Επιστροφή*

Υπόδειξη 8. *Παρατήρησε ότι $x^2 + x, y^2 + y$ είναι άρτιοι.* *Επιστροφή*

4 Λύσεις

Λύση 2. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Παραγοντοποιούμε ως εξής την 1:*

$$(x^3+y^2)^2+3(x^3+y^2)=40$$
$$(x^3+y^2)(x^3+y^2+3)=40=1\cdot 40=2\cdot 20=4\cdot 10=8\cdot 5$$

Ισχύει $x^3+y^2<x^3+y^2+3, x,y\in\mathbb{Z}$. *Προκύπτει λύση μοναδική* $(x,y)=(1,2)$.

Άλλη λύση μπορεί να προκύψει,θέτοντας $x^3+y^2=w$ *και παραγοντοποιώντας με χρήση τριωνύμου.* Επιστροφή

Λύση 3. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Παραγοντοποιούμε ώς εξής την 3:*

$$xyz+xy+yz+y+zx+x+z=44\Leftrightarrow$$
$$xy(z+1)+y(z+1)+x(z+1)+z=44\Leftrightarrow$$
$$(z+1)(x+1)(y+1)=45=1\cdot 1\cdot 45=1\cdot 3\cdot 15=1\cdot 5\cdot 9=3\cdot 3\cdot 5$$

και ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με τις προηγούμενες ασκήσεις, οπότε καταλήγουμε σε λύσεις:

$$(x,y,z)=(2,2,4),(0,4,8),(0,2,14),(0,0,44)$$

Επιστροφή

Λύση 4. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Έχουμε:*

$$A=k^2,\ B=l^2,\qquad k,l\in\mathbb{Z}$$
$$8x+1=k^2,\ 2x-3=l^2$$
$$k^2-4l^2=13$$
$$(k-2l)(k+2l)=13=1\cdot 13=13\cdot 1=(-1)\cdot(-13)=(-13)\cdot(-1)$$

απ΄ όπου καταλήγουμε:

$$(k,l)=(7,3)\ ή\ (-7,-3)\ ή\ (7,-3)\ ή\ (-7,3)\Rightarrow(k^2,l^2)=(49,9)\Rightarrow x=6$$

Επιστροφή

Λύση 5. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Οι αριθμοί* $x^2+x=x(x+1), y^2+y=y(y+1)$ *είναι άρτιοι, διότι είναι γινόμενο διαδοχικών ακεραίων. Συνεπώς και το άθροισμά τους είναι άρτιος, οπότε και ο p είναι άρτιος, πρώτος, θετικός, δηλαδή 2. Ερευνώντας περιπτώσεις καταλήγουμε:*

$$x(x+1)=0\ και\ y(y+1)=2\ η\ x(x+1)=2\ και\ y(y+1)=0$$

Τελικά, με όλες τις προϋποθέσεις έχουμε λύσεις:

$$(x,y)=(0,1),(0,-2),(-1,1),(-1,-2)$$

Επιστροφή

Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Φεβρουάριος2020

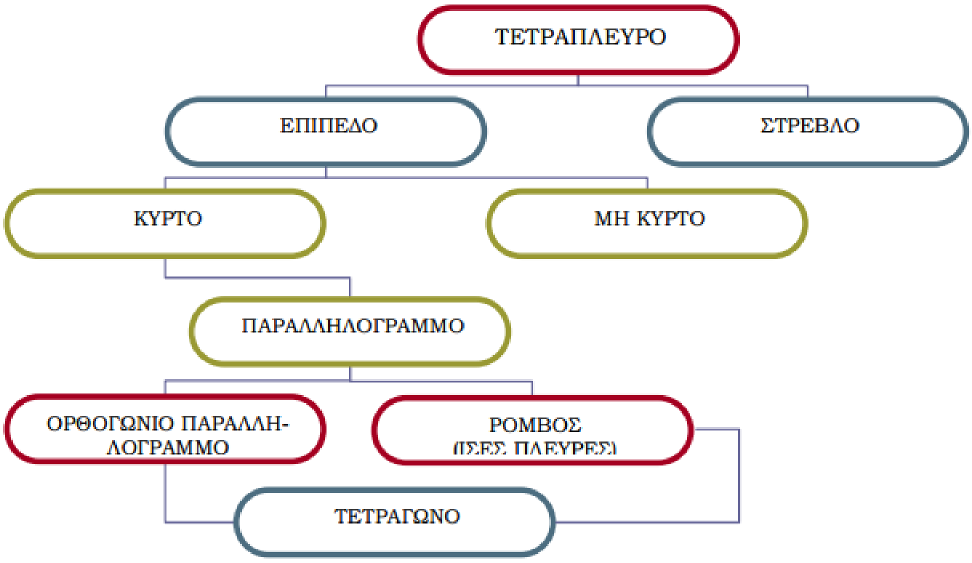
Σ.Χασάπης

Προετοιμασία για τον Αρχιμήδη.

1 Πρόλογος

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρατηρήσουμε γενικά τις σχέσεις και κάποιες γενικές ιδιότητες που έχουν τα σχήματα όταν είναι εγγεγραμμένα σε κάποιον κύκλο.

2 Ταξινόμηση και κριτήρια τετραπλεύρων



ΕΙΔΟΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	ΚΡΙΤΗΡΙΑ
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ	ΔΥΟ ΖΕΥΓΗ ΙΣΩΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΩΝ
	ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ	ΔΥΟ ΖΕΥΓΗ ΙΣΩΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΓΩΝΙΩΝ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑΙ	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑΙ
		ΔΥΟ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΟΡΘΗ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΙΣΕΣ ΔΙΑΓΩΝΙΟΥΣ
		ΤΡΕΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΟΡΘΕΣ
		ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ
ΡΟΜΒΟΣ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΜΕ ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΙΣΕΣ
	ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΕΧΕΙ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΟΥ ΙΣΕΣ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΚΑΘΕΤΑ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΤΕΜΝΟΝΤΑΙ ΚΑΘΕΤΑ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΡΟΜΒΟΥ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ ΤΟΥ	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΚΑΙ ΜΙΑ ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΕΙ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΤΟΥ
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ + ΡΟΜΒΟΣ	ΔΕΙΧΝΩ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΚΑΙ ΡΟΜΒΟΣ
	ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ	ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ + ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ
	ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ	ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ + ΔΙΑΓΩΝΙΟΣ ΔΙΧΟΤΟΜΕΙ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ
	ΟΛΕΣ ΟΙ ΓΩΝΙΕΣ ΟΡΘΕΣ	ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ + ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΚΑΘΕΤΕΣ
	ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ	ΔΙΑΓΩΝΙΕΣ ΙΣΕΣ + ΔΥΟ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΙΣΕΣ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΚΑΘΕΤΕΣ	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΙΣΕΣ ΚΑΙ Η ΜΙΑ ΔΙΧΟΤΟΜΕΙ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑΙ	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΙΣΕΣ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΕΣ
	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΔΙΧΟΤΟΜΟΥΝ ΓΩΝΙΕΣ	
ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ	ΟΙ ΠΡΟΣΚΕΙΜΕΝΕΣ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΓΩΝΙΕΣ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΠΡΟΣΚΕΙΝΤΑΙ ΣΤΗ ΜΙΑ ΒΑΣΗ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ
	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ	ΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ ΤΟΥ ΕΙΝΑΙ ΙΣΕΣ

3 Περίληψη

Ορισμός 1. ***Επίκεντρη*** *λέγεται η γωνία της οποίας η κορυφή βρίσκεται στο κέντρο ενός κύκλου*

Ορισμός 2. ***Εγγεγραμμένη*** *λέγεται η γωνία της οποιας η κορυφή είναι ένα σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο σε δύο σημεία, δηλαδή η γωνία βρίσκεται μέσα στον κύκλο*

Θεώρημα 1. *Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.*

Θεώρημα 2. *Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.*

Θεώρημα 3. *Κάθε εγγεγραμμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.*

Θεώρημα 4. *Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.*

Θεώρημα 5. *Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.*

Ορισμός 3. *Ένα σχήμα λέγεται* ***εγγεγραμμένο σε κύκλο*** *αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ο κύκλος αυτός λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του σχήματος.*

Θεώρημα 6. *Ένα τετράπλευρο το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει την ιδιότητα να είναι παραπληρωματικές οι απέναντι του γωνίες.*

Θεώρημα 7. *Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.*

Ορισμός 4. *Ένα τετράπλευρο λέγεται* ***εγγράψιμο σε κύκλο*** *(δηλαδή μπορεί να εγγραφεί) αν μπορεί να κατασκευαστεί κύκλος ο οποίος διέρχεται από τις τέσσερεις κορυφές του.*

Θεώρημα 8. *(**Κριτήρια εγγραψιμότητας**)*

i. Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

ii. Μία εξωτερική του γωνία είναι ίση με την απέναντι εσωτερική.

iii. Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

Ορισμός 5. *Ένα τετράπλευρο λέγεται* **περιγράψιμο σε κύκλο** *(δηλαδή μπορεί να εγγραφεί κύκλος σε αυτό) αν μπορεί να κατασκευαστεί κύκλος στον οποίο οι πλευρές του τετραπλεύρο να εφάπτονται.*

Θεώρημα 9. *(**Κριτήρια περιγραψιμότητας**)*

i. Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ii. Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

4 Φύλλο εργασίας 1

4.1 Παρατηρήσεις

i. Αν μας ενδιαφέρει η γωνία που σχετίζεται με δύο εφαπτόμενους κύκλους, συνήθως φέρουμε την κοινή εφαπτομένη (εσωτερική ή εξωτερική). Το ιδιο κάνουμε και για τους τεμνόμενους κύκλους, φέροντας την κοινή χορδή.

ii. Για να διέρχεται ένας κύκλος (Α,Β, Γ) από ένα άλλο σημείο Δ, αρκεί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι εγγράψιμο.

Άσκηση 1. *Αν ΑΒ δεδομένο τμήμα μήκους 2εκ., να βρεθούν όλα τα σημεία του επιπέδου τα οποία βλέπουν το ΑΒ υπό ορθή γωνία.*

Άσκηση 2. *Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο οι δύο γωνίες του είναι 70 και 100 μοίρες αντίστοιχα. Να βρείτε αν αυτές είναι διαδοχικές ή απέναντι γωνίες. Πόσες μοίρες είναι οι δύο άλλες γωνίες του τετραπλεύρου;*

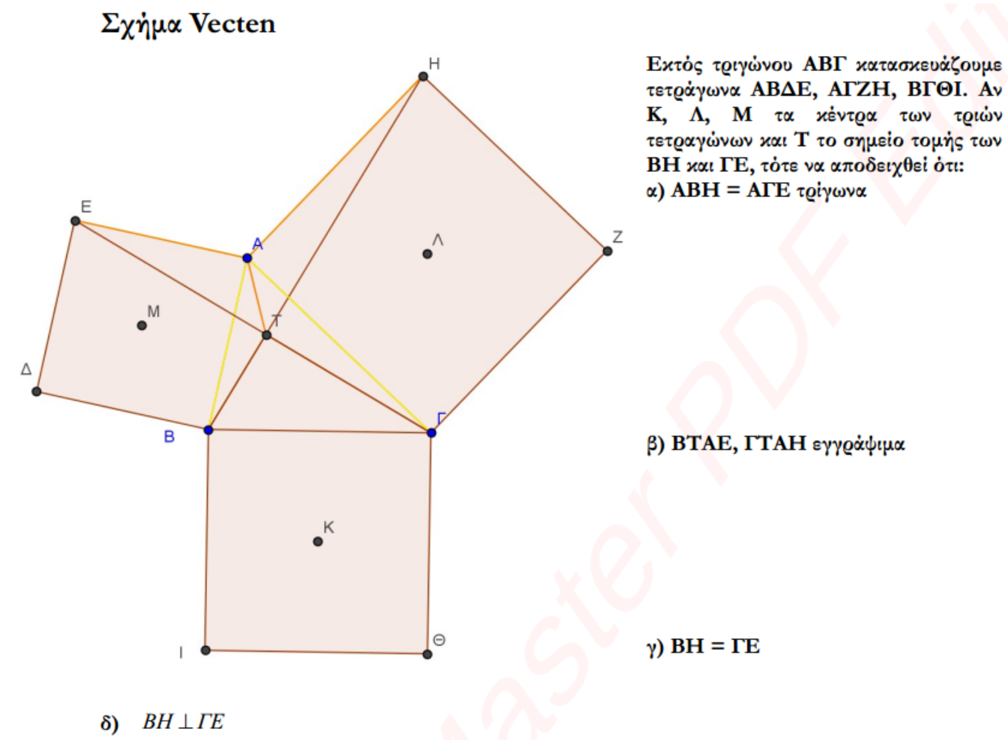
Άσκηση 3. *Να αποδειχθεί ότι ένας ρόμβος εγγεγραμμένος σε κύκλο είναι τετράγωνο.*

Άσκηση 4. *Αν δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α,Β και μία ευθεία από το Α τέμνει τον έναν κύκλο στο Γ και τον άλλον στο Δ, ενώ μία ευθεία από το Β τέμνει τον έναν κύκλο στο Γ′ και τον άλλον στο Δ′ αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι* $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

Άσκηση 5 (Θεώρημα Nagel)**.** *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του* (O, R). *Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι* $OA \perp \Delta E$.

Άσκηση 6. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε,Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

5 Το σχήμα του Vecten



Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Ομιλος Μαθηματικων Πέμπτη 19 Δεκεμβρίου 2019

Σ.Χασαπης

Εφαρμογές ισοτιμιών modulo's. Πυθαγόρειες τριάδες και το Μεγάλο θεώρημα του Fermat

1 Το Διωνυμικό Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$(\alpha+\beta)^4=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$$

Για να κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο της πρώτης παρένθεσης με κάθε στοιχείο της δεύτερης και με κάθε στοιχείο της τρίτης και της τέταρτης. Θα πάρουμε κάποια γινόμενα στα οποία μετά θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων. Έτσι θα πάρουμε τα γινόμενα (η σειρά δείχνει από ποια παρένθεση παίρνουμε τι):
$\alpha\alpha\alpha\alpha \quad =\alpha^4$ 1 όρος
$\alpha\alpha\alpha\beta=\alpha\alpha\beta\alpha=\alpha\beta\alpha\alpha=\beta\alpha\alpha\alpha=\alpha^3\beta$ 4 όροι
$\alpha\alpha\beta\beta=\alpha\beta\alpha\beta=\alpha\beta\beta\alpha=\beta\beta\alpha\alpha=\beta\alpha\beta\alpha=\beta\alpha\alpha\beta=\alpha^2\beta^2$ 6 όροι
$\beta\beta\beta\alpha=\beta\beta\alpha\beta=\beta\alpha\beta\beta=\alpha\beta\beta\beta=\alpha\beta^3$ 4 όροι
$\beta\beta\beta\beta=\beta^4$ 1 όρος

Όταν κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων θα έχουμε

$$(\alpha+\beta)^4=\mathbf{1}\cdot\alpha^4+\mathbf{4}\cdot\alpha^3\beta+\mathbf{6}\cdot\alpha^2\beta^2+\mathbf{4}\cdot\alpha\beta^3+\mathbf{1}\cdot\beta^4$$

Στην περίπτωση τυχόντα εκθέτη είναι:

$$(\alpha+\beta)^\nu=\underbrace{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}_{\nu}$$

Από κάθε παρένθεση παίρνουμε ένα α ή ένα β και θα προκύψουν γινόμενα της μορφής:

$$\alpha^{\text{πόσα } \alpha \text{ πήραμε}}\beta^{\text{πόσα } \beta \text{ πήραμε}}$$

Ας πούμε ότι πήραμε κ από τα α από κ παρενθέσεις. Από τις υπόλοιπες παρενθέσεις που είναι $\nu-\kappa$ θα πάρουμε β. ’ρα θα πάρουμε $\nu-\kappa$ από τα β. Ο αντίστοιχος όρος θα είναι:

$$\alpha^\kappa\beta^{\nu-\kappa}$$

Θα υπάρχουν δε τόσοι προσθετέοι της παραπάνω μορφής όσοι τρόποι υπάρχουν για να διαλέξουμε τις κ παρενθέσεις από τις οποίες θα πάρουμε τα α.

Sir Isaac Newton

1643-1727

Άσκηση 1. Να αποδείξετε ότι(γνωστό και ως *θεώρημα του Νεύτωνα ή δυωνυμικό θεώρημα*):

$$(\alpha+\beta)^{\nu} = \binom{\nu}{\nu}\alpha^{\nu} + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{\nu-2}\alpha^{\nu-2}\beta^{2} + \\ \ldots + \binom{\nu}{2}\alpha^{2}\beta^{\nu-2} + \binom{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{0}\beta^{\nu}$$

και στη συνέχεια ότι

$$\boxed{(\alpha+\beta)^{\nu} = \binom{\nu}{0}\alpha^{\nu} + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^{2} + \\ \ldots + \binom{\nu}{\nu-2}\alpha^{2}\beta^{\nu-2} + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\beta^{\nu}} \tag{1}$$

Άσκηση 2. Να βρείτε ποιος είναι ο συντελεστής του $\alpha^8\beta^2$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^{10}$

Άσκηση 3. Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu}$$

α. Αλγεβρικά, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα.

β. Να υπολογίσετε τα υποσύνολα ενός συνόλου με n στοιχεία.

Άσκηση 4. *Έστω ότι*

$$x = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}, \qquad y = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad z = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}$$

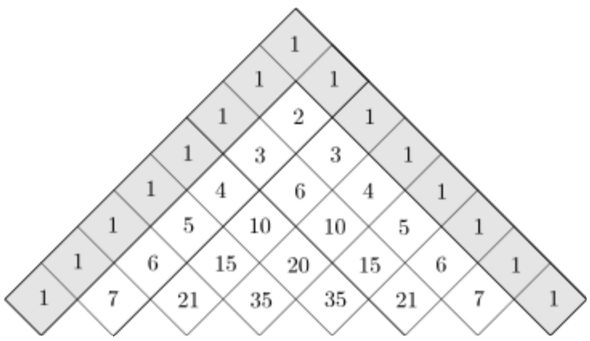
Να αποδείξετε ότι

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$$

Άσκηση 5. Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{\kappa} = \binom{\nu-1}{\kappa} + \binom{\nu-1}{\kappa-1}.$$

Στη συνέχεια να εξηγήσετε γιατί στο τρίγωνο του Pascal κάθε αριθμός προκύπτει από το άθροισμα των δύο αριθμών της προηγούμενης γραμμής.



Άσκηση 6. Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{\kappa+1} = \binom{\nu}{\kappa}\frac{\nu-1}{\kappa+1}.$$

Άσκηση 7. *Με την βοήθεια της (6) να επιβεβαιώσετε τον παρακάτω τρόπο για να βρίσκουμε τους συντελεστές του αναπτύγματος* $(\alpha+\beta)^{\nu}$*:*

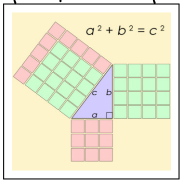
- *Ο πρώτος συντελεστής είναι* 1
- *Ο* m*-ος συντελεστής προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον προηγούμενο συντελεστή επί* $\nu-m+2$ *και διαιρέσουμε δια* $m-1$.

2 Πυθαγόρειες τριάδες, το θεώρημα του Fermat και ο Andrew Wiles

Πυθαγόρειες τριάδες και ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

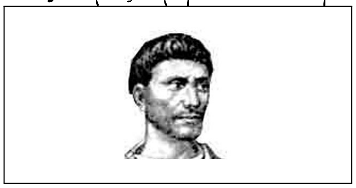
2.1 Ιστορική αναδρομή

Η ισχύς του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τον 6ο αι. π.Χ. οδήγησε σε λύσεις για την κατασκευή κάθετων ευθυγράμμων τμημάτων ως πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με κατάλληλα ακέραια μήκη πλευρών. Η σχέση $a^2+b^2=c^2$ που αποδίδεται στον Πυθαγόρα μάλλον ήταν ήδη γνωστή στους Βαβυλώνιους από την εποχή του Χαμουραμπί (18ος π.Χ. αι.). Το «γνωστότερο» ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών τους θετικούς ακέραιους αριθμούς (3,4,5) είναι πιθανό να χρησιμοποιήθηκε ακόμα και για την κατασκευή κάθετων πλευρών σε διάφορες κατασκευές.



Τρίγωνο με πλευρές 3,4,5

Η αναζήτηση ακέραιων λύσεων σε εξισώσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές δίνει εξισώσεις που καλούνται **Διοφαντικές** προς τιμήν του Έλληνα Μαθηματικού **Διόφαντου** από την Αλεξάνδρεια του 3ου αι. μ.Χ. Η διοφαντική ανάλυση αποτελεί έναν κλάδο των μαθηματικών που ασχολείται με την επίλυση προβλημάτων διοφαντικών εξισώσεων και συνήθως αναζητά απαντήσεις σε ερωτήματα όπως : Υπάρχουν λύσεις; Υπάρχουν λύσεις πέρα από τις προφανείς που ενδεχομένως μπορούμε να βρούμε με απλή παρατήρηση; Υπάρχει πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος λύσεων; Μπορούν να βρεθούν όλες θεωρητικά ή να υπολογιστούν πρακτικά; Ειδικότερα, η λύση της Διοφαντικής εξίσωσης:



Διόφαντος, 3ος αι. π.Χ.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

είναι ισοδύναμη με την εύρεση ορθογωνίων τριγώνων με πλευρές x, y, z, όπως στην πρώτη εικόνα. Ήδη ο Πυθαγόρας είχε βρει έναν τύπο για την κατασκευή άπειρων τέτοιων τριγώνων:

$$x = 2n+1,\ y = 2n^2+2n,\ z = 2n^2+2n+1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Εκτός λοιπόν από την προφανή μηδενική λύση της εξίσωσης, αλλά και τις λύσεις στις οποίες κάποιος από τους x, y είναι μηδέν και ο άλλος ίσος με z, στις οποίες φυσικά δεν αντιστοιχούν ορθογώνια τρίγωνα, ο παραπάνω τύπος του Πυθαγόρα δίνει άπειρες ακόμα λύσεις της εξίσωσης. Είναι όμως όλες;

2.2 Πυθαγόρειες Τριάδες

Ορισμός 1. *Μία **Πυθαγόρεια Τριάδα** είναι τρεις ακέραιοι αριθμοί x, y, z, ώστε: $x^2+y^2=z^2$ και θα λέγεται **πρωταρχική(Primitive)**, αν ισχύει ότι: Μ.Κ.Δ.$(x,y,z)=1$*

Παράδειγμα 2.1. *Παραδείγματα Πυθαγορείων τριάδων αποτελούν οι:* $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(12,35,37)$, $(9,40,41)$ *αλλά και οι* $(6,8,10)$, $(9,12,15)$, …

Άσκηση 8. *Αν (x,y,z) πρωταρχική Πυθαγόρεια τριάδα, τότε κάθε πολλαπλάσιό της: $(kx, ky, kz), k \in \mathbb{Z}$ είναι επίσης Πυθαγόρεια τριάδα.*

Δηλαδή, οι πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες παράγουν όλες τις υπόλοιπες, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο μη μηδενικό ακέραιο.

Λήμμα 1. *Αν (x,y,z) πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα, τότε ένας από τους x, y είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο υποθέτοντας ότι και οι δύο x, y είναι άρτιοι ή και οι δύο περιττοί. □

Από το προηγούμενο Λήμμα προκύπτει ότι δεν υπάρχει πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα (x, y, z) που να αποτελείται μόνο από πρώτους αριθμούς. Βέβαια, υπάρχουν πυθαγόρειες τριάδες με δύο πρώτους: $(3, 4, 5), (11, 60, 61), (19, 180, 181)$, αλλά είναι άγνωστο αν αυτές είναι άπειρες στο πλήθος. Απαραίτητο επίσης στον καθορισμό όλων των πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων είναι και το επόμενο:

Λήμμα 2. *Αν $ab = c^n$ με $(a, b) = 1$, τότε οι a, b είναι $n-$οστές δυνάμεις ακεραίων. Δηλαδή, υπάρχουν ακέραιοι k, l, ώστε: $a = k^n$, $b = l^n$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής για τις παραγοντοποιήσεις των a, b, c καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Θεώρημα 1. *Κάθε λύση της Πυθαγόρειας εξίσωσης:*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

ώστε: $(x, y, z) = 1$, x άρτιος και $x, y, z > 0$ δίνεται απο τις σχέσεις:

$$\begin{array}{ccc} x = 2st, & y = s^2 - t^2, & z = s^2 + t^2, \\ s > t > 0, & s, t \in \mathbb{Z}, & s \neq t(mod2) \end{array}$$

Άσκηση 9. *Παρατηρήστε στον παρακάτω πίνακα παραγωγής πρωταρχικών πυθαγόρειων τριάδων τους ακεράιους x, y :*

s	t	$x = 2st$	$y = s^2 - t^2$	$s^2 + t^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53

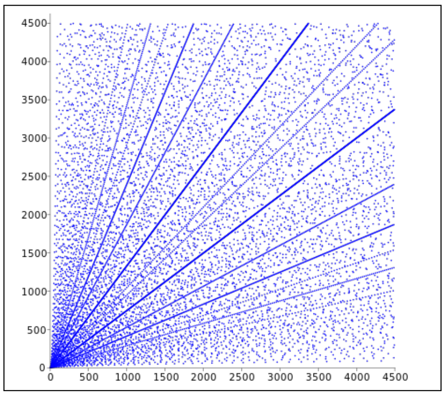
Ορισμός 2. ***Πυθαγόρειο τρίγωνο*** *λέγεται κάθε ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκος κάποιον ακέραιο.*

Άσκηση 10 (Το πρόβλημα του νέου έτους)**.** *Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ενός Πυθαγόρειου τριγώνου είναι πάντα ακέραιος αριθμός.*

Γραφική κατανομή πυθαγόρειων τριάδων

Αν παρασταθούν τα μήκη των κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου σε ένα σύστημα αξόνων παίρνουμε ένα γράφημα όπως το διπλανό.

Στην κατανομή στο γράφημα μπορούν να παρατηρηθούν ορισμένες κανονικότητες:
1) Αν (x, y) τα μήκη των κάθετων στο γράφημα στους δύο άξονες, τότε όλα τους τα πολλαπλάσια εμφανίζονται επίσης στο γράφημα. Αποτέλεσμα αυτού είναι να σχηματίζονται ευθείες γραμμές από την αρχή των αξόνων.
2) Επίσης μέσα στο γράφημα εμφανίζονται τμήματα παραβολικών καμπυλών με υψηλή πυκνότητα σημείων, γεγονός που επίσης εξηγείται από τη μορφή των πυθαγόρειων τριάδων. Συγκεκριμένα, όταν ο αριθμός $\frac{x^2}{4n}$ είναι ακέραιος, τότε η τριάδα: $(x, |n - \frac{x^2}{4n}|, n + \frac{x^2}{4n})$ είναι πυθαγόρεια τριάδα, οπότε δημιουργούνται ομάδες παραβολών.



Ακέραια μήκη κάθετων πλευρών

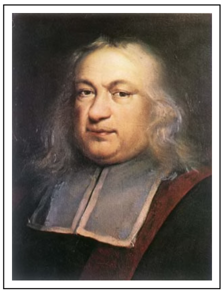
2.3 Ένα άλυτο για 360 έτη πρόβλημα

2.3.1 Αναδρομή

Τι συμβαίνει αν η πυθαγόρεια διοφαντική εξίσωση μετατραπεί σε βαθμού n; Δηλαδή, πότε επαληθεύεται η εξίσωση:

$$x^n + y^n = z^n,\ n \in \mathbb{Z},\ n > 2$$

Το ερώτημα αυτό γεννήθηκε από έναν σημαντικό ερασιτέχνη μαθηματικό - δικηγόρο στο επάγγελμα - τον **Pierre de Fermat** τον 17ο αι.(1637), διατυ-
δύναμη, ως άθροισμα $n-$οστών δυνάμεων.[1].
πώθηκε ως εικασία από τον ίδιο και έμεινε αναπόδεικτο έως το 1995. Ο Φερμά έκανε λίγες μαθηματικές δημοσιεύσεις, καθώς προτιμούσε να στέλνει τις ανακαλύψεις του σε επαγγελματίες μαθηματικούς με αλληλογραφία ή απλά τις κρατούσε σε προσωπικές σημειώσεις. Μελετώντας, λοιπόν, ένα αντίγραφο του έργου: *Αριθμητικά* του Διόφαντου που κατείχε σε μετάφραση του Bachet έκανε διάφορες σημειώσεις στα περιθώρια του βιβλίου. Μία από αυτές - γραμμένη το 1637 - έλεγε ότι δεν μπορεί να γραφεί ένας κύβος ως άθροισμα δύο άλλων κύβων ακεραίων με μη τετριμμένο τρόπο και αντίστοιχα κάθε $n-$οστή

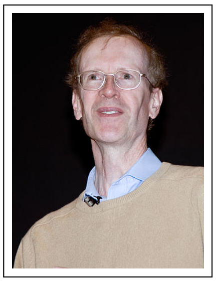


Pierre de Fermat(1601-1665)

Έμεινε στην ιστορία ως **τελευταίο θεώρημα του Fermat** αν και δεν είχε αποδειχθεί μέχρι πριν λίγα έτη και ουσιαστικά αποτελούσε μία εικασία ακόμα.

2.3.2 Η εικασία που έγινε θεώρημα

Wiles, Hasse, Weil, Taniyama, Ribet, Galois, Langlands, Tunnell, Eichler, Shimura, Deligne, Carayol, Serre, Hida, Mazur, Dirichlet, Birch, Swinnerton-Dyer, Iwasawa, Poitou, Tate, Faltings, Frey, Boston, Ramakrishna, Kunz, Rubin, Kolyvagin, Coates, Schmidt, Flach, de Shalit, R.Taylor, N. Katz, Illusie, Bloch, Kato, Raynaud, Schlessinger, Nakayama, Diamond, Kuyk, Lenstra, Boston, Rapoport, Dickson, Fontaine, Hellegouarch, Linve, Schoof, Wintenberger, είναι μερικοί μόνο από τους σύγχρονους μαθηματικούς του 20ου αι. κυρίως οι οποίοι συνέβαλλαν στην απόδειξη της εικασίας από τον Andrew Wiles. Η παρουσίαση της απόδειξής του έγινε σε ένα άρθρο 109 σελίδων στο διάσημο **Annals of Mathematics (`http://annals.math.princeton.edu/`), 142, 1995.**



Andrew Wiles(1953 Cambridge)

Θεώρημα 2 (Τελευταίο Θεώρημα Fermat). *Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z οι οποίοι να ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$x^n + y^n = z^n,\ n > 2$$

2.4 Αναλυτική Απόδειξη Θεωρήματος Πυθαγόρειων Τριάδων

Ορισμός 3. *Μία **Πυθαγόρεια τριάδα** είναι τρεις ακέραιοι αριθμοί x, y, z, ώστε: $x^2 + y^2 = z^2$ και λέγεται πρωταρχική, αν ισχύει ότι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των x, y, z είναι ίσος με 1.*

Το πρόβλημα εύρεση Πυθαγόρειων τριάδων ήταν γνωστό ήδη στους Βαβυλώνιους από τον 18ο αι. π.Χ. και έγινε πολύ αγαπητό στους Αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Ο ίδιος ο Πυθαγόρας είχε έναν τύπο για την εύρεση άπειρου πλήθους Πυθαγόρειων τριάδων :

$$x = 2n + 1,\ y = 2n^2 + 2n,\ z = 2n^2 + 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}$$

[1]Μάλιστα σημείωσε ότι είχε μία θαυμάσια απόδειξη, αλλά το περιθώριο ήταν πολύ μικρό για να την χωρέσει. Αυτή η τελευταία φράση της πρότασης μάλλον ήταν αληθής... Σε άλλη του σημείωση στο περιθώριο είχε γράψει ότι για κάθε ακέραιο $n > 1$ υπάρχουν n το πλήθος πυθαγόρεια τρίγωνα με το ίδιο εμβαδόν και διαφορετικές υποτείνουσες.

Τα ερωτήματα που προκύπτουν όμως είναι αν υπάρχει ένας τύπος που να δίνει όλες τις Πυθαγόρειες τριάδες και ειδικότερα ένας τύπος που να δίνει όλες τις πρωταρχικές Πυθαγόρειες τριάδες.

Άσκηση 11. *Αν οι x, y, z αποτελούν μία Πυθαγόρεια τριάδα, τότε κάθε πολλαπλάσιό της: $kx, ky, kz,\ k \in \mathbb{Z}$ αποτελεί επίσης πυθαγόρεια τριάδα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή άσκηση χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της πυθαγόρειας τριάδας για την αρχική γνωστή x, y, z. □

Συνεπώς, έχει νόημα να ασχοληθούμε αποκλειστικά με τις πρωταρχικές πυθαγόρειες τριάδες.

Θα διερευνήσουμε για αρχή μερικές ιδιότητες που θα έχουν, μέσω κάποιων βοηθητικών προτάσεων (Λήμματα), τα οποία θα μας βοηθήσουν στην τελική απόδειξη.

Λήμμα 3. *Αν x, y, z Πρωταρχική Πυθαγόρεια Τριάδα (Π.Π.Τ.) $x^2 + y^2 = z^2$, τότε ένας από τους x, y είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.*

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο με περιπτώσεις.
- Αν ήταν οι x, y άρτιοι και οι δύο, τότε:

$$\begin{aligned}
2 \mid x, \qquad 2 \mid y &\Rightarrow \\
2 \mid x^2, \qquad 2 \mid y^2 &\Rightarrow && \text{(Κοινός διαιρέτης αριθμών)} \\
2 \mid (x^2 + y^2) = z^2 &\Rightarrow && \text{(διαιρεί γραμμικό συνδυασμό αριθμών)} \\
2 \mid z^2 &\Rightarrow && (p \mid x^2 \Rightarrow p \mid x,\ \text{αν } p \text{ πρώτος}) \\
2 \mid z&.
\end{aligned}$$

Συνεπώς $2 \mid x,\ 2 \mid y,\ 2 \mid z$ άτοπο, αφού η x, y, z πρωταρχική.
- Αν ήταν οι x, y περιττοί και οι δύο, τότε:

Αρχικά, το τετράγωνο κάθε ακεραίου είναι ισοϋπόλοιπο του $0(mod4)$ ή του $1(mod4)$, διότι για τα τετράγων άρτιου ή περιττού ισχύουν:

$$\begin{aligned}
(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 &= 4m + 1 \\
(2k)^2 = 4k^2 &= 4m + 0
\end{aligned}$$

Εφόσον x, y και οι δύο περιττοί, τότε:
$x^2 \cong 1(mod4),\ y^2 \cong 1(mod4) \Rightarrow x^2 + y^2 \cong 2(mod4) \Rightarrow z^2 \cong 2(mod4)$, το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ένας από τους x, y θα είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. □

Λήμμα 4. *Αν x, y, z Π.Π.Τ., τότε οι x, y, z είναι σχετικά πρώτοι ανά δύο μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν είναι σχετικά πρώτοι ανά δύο και υπάρχουν δύο με κοινό διαιρέτη: $(x, y) = d > 1$. Τότε θα υπήρχε πρώτος $p \mid d$ οπότε $p \mid x$, και $p \mid y$. Οπότε:

$$p \mid x^2,\ p \mid y^2\ \Rightarrow p \mid (x^2 + y^2) = z^2 \Rightarrow p \mid z$$

□

Από Λήμμα 3 προκύπτει ότι δεν υπάρχει Π.Π.Τ. που να αποτελείται μόνο από πρώτους αριθμούς.

Λήμμα 5. *Αν $ab = c^n$ με $(a, b) = 1$, τότε οι a, b είναι $n-$οστές δυνάμεις. Δηλαδή, υπάρχουν ακέραιοι a_1, b_1, ώστε: $a = a_1^n,\ b = b_1^n$.*

Απόδειξη. Έστω $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ και $b = q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s}$ και $c = u_1^{m_1} \cdot u_2^{m_2} \cdots u_t^{m_t}$ οι μοναδικές παραγοντοποιήσεις των a, b, c από το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής. Τότε θα ισχύει ότι: $c^n = u_1^{nm_1} \cdot u_2^{nm_2} \cdots u_t^{nm_t}$

Συνεπώς, θα ισχύει ότι:

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \cdot q_1^{l_1} \cdot q_2^{l_2} \cdots q_s^{l_s} = u_1^{nm_1} \cdot u_2^{nm_2} \cdots u_t^{nm_t}$$

Από την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής τα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας είναι ίσα μεταξύ τους, οπότε θα έχουν την ίδια παραγοντοποίηση. Δηλαδή, θα γράφονται ως γινόμενο των ίδιων πρώτων στην ίδια δύναμη ο καθένας. Εφόσον, οι a, b είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε δεν έχουν κοινούς παράγοντες, δηλαδή καθένας από τους p_i, q_j είναι διαφορετικός. Οπότε το πλήθος των όρων στο δεξί μέλος θα είναι ίσο με το πλήθος των όρων στο αριστερό μέλος, δηλαδή: $r+s=t$. Επίσης καθένας από τους πρώτους αριθμούς που εμφανίζονται στην παραγοντοποίηση στο αριστερό μέλος θα εμφανίζονται και στο δεξιό μέλος και μάλιστα στην ίδια δύναμη. Συνεπώς, κάθε δύναμη πρώτου στο αριστερό μέλος θα είναι ίση με κάποια δύναμη πρώτου στο δεύτερο μέλος, δηλαδή: $k_i = nm_j$. Συνεπώς, καθένας εκθέτης στο αριστερό μέλος είναι πολλαπλάσιο του n. Δηλαδή:

$$a = \left(p_1^{\frac{k_1}{n}} p_2^{\frac{k_2}{n}} \cdots p_r^{\frac{k_r}{n}}\right)^n = a_1^n$$

Ομοίως:

$$b = \left(q_1^{\frac{l_1}{n}} q_2^{\frac{l_2}{n}} \cdots q_r^{\frac{l_r}{n}}\right)^n = b_1^n$$

Οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3 (Διόφαντος 250 μ.Χ., Αλεξάνδρεια). *Κάθε λύση της Πυθαγόρειας εξίσωσης:*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

ώστε: $(x, y, z) = 1,\ 2|x,\ x, y, z > 0$ *δίνεται από τις σχέσεις:*

$$x = 2st, y = s^2 - t^2, z = s^2 + t^2$$

για $s > t > 0$ *ακεραίους πρώτους μεταξύ τους και* $s \not\equiv t (mod 2)$.

Απόδειξη. Έστω x, y, z πυθαγόρεια τριάδα με x άρτιο, τότε από λήμμα οι y, z θα είναι περιττοί και συνεπώς οι $z - y,\ z + y$ θα είναι άρτιοι.

Έστω $z - y = 2k$ και $z + y = 2l$, τότε έχουμε:

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 4kl$$

Ακόμα: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = kl$. Επίσης, οι k, l είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους, διότι, αν $(k, l) = d > 1$ τότε: $d|(z - y),\ d|(z + y) \Rightarrow d|y$ και $d|z$, όμως $(y, z) = 1$.

Από λήμμα 5 ισχύει ότι: $kl = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ και $(k, l) = 1$, έπεται ότι k, l είναι τέλεια τετράγωνα, οπότε:
$k = s^2,\ l = t^2,\ s, t \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$z = k + l = s^2 + t^2,\ y = k - l = s^2 - t^2 \Rightarrow$$

$$z - y = 2k,\ z + y = 2l \Rightarrow z = k + l,\ y = k - l$$

$$x^2 = 4kl = 4s^2t^2 \Rightarrow x = 2st$$

Εφόσον, ένας κοινός παράγοντας των s, t διαιρεί ταυτόχρονα τους y, z, τότε $(y, z) = 1 \Leftarrow (s, t) = 1$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αν s, t ταυτόχρονα άρτιοι ή ταυτόχρονα περιττοί, τότε y, z άρτιοι, άτοπο. Έτσι, ακριβώς ένας από τους s, t είναι άρτιος και ένας είναι περιττός, δηλαδή: $s \not\equiv t (mod 2)$.

Αντίστροφα : Έστω s, t ακέραιοι με τις ιδιότητες: $s > t > 0,\ (s, t) = 1,\ s \not\equiv t (mod 2)$,τότε οι: $x = 2st,\ y = s^2 - t^2,\ z = s^2 + t^2$ είναι πυθαγόρεια τριάδα, διότι:

$$x^2 + y^2 = (2st)^2 + (s^2 - t^2)^2 = 4s^2t^2 + s^4 - 2s^2t^2 + t^4 = (s^2 + t^2)^2 = z^2$$

Επίσης, είναι και πρωταρχική, διότι, αν $(x, y, z) = d > 1$ και p πρώτος διαιρέτης του d, τότε $p \neq 2$, διότι p διαιρεί τον περιττό z (αφού ένας από τους δύο s, t είναι περιττός, ενώ ο άλλος είναι άρτιος, έπεται ότι ο $s^2 + t^2 = z$ είναι περιττός).

Επειδή $p|y$ και $p|z \Rightarrow p|(z + y), p|(z - y) \Rightarrow$
$p|2s^2,\ p|2t^2 \Rightarrow p|s,\ p|t$,το οποίο είναι άτοπο, αφού $(s, t) = 1$. Συνεπώς $d = 1$, οπότε η Πυθαγόρεια τριάδα x, y, z είναι πρωταρχική.

□

Άσκηση 12. *Αν x, y, z είναι πρωταρχική πυθαγόρεια τριάδα, τότε ακριβώς ένας από τους ακέραιους x, y διαιρείται από το 3.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν $3|s$ ή $3|t$, τότε $3|x$ και Ο.Κ. Αν $3 \not| \, s$ και $3 \not| \, t$, τότε από θεώρημα *Fermat* ισχύει ότι: $s^2 \cong 1(mod3)$ και $t^2 \cong 1(mod3) \Rightarrow y = s^2 - t^2 \cong 0(mod3) \Rightarrow 3|y$ και Ο.Κ. το ζητούμενο. □

2.5 Επίλογος

Εφόσον παρακολουθήσετε την ιστορία του θεωρήματος Fermat θα διαπιστώσετε ότι δεν υπάρχουν εύκολοι δρόμοι, χωρίς συνεργασίες. Η επιστήμη κτίζεται πετραδάκι - πετραδάκι.

Άσκηση 13 (Κόκκος 1)**.** *Να αποδειχθεί ότι ο κύβος κάθε ακέραιου αριθμού γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο ακέραιων αριθμών.*

Άσκηση 14 (Κόκκος 2)**.** *Μπορείς να βρεις φυσικούς αριθμούς x, y, z, w, ώστε:* $x^3 + y^3 + z^3 = w^3$;

3 Μικρό θεώρημα του Fermat και εφαρμογές

3.1 Μικρό θεώρημα του Fermat . Μία απόδειξη.

Θεώρημα 4 (Μικρό θεώρημα του Fermat). *Έστω p πρώτος αριθμός τότε ισχύει ότι:*

$$\boxed{a^p \equiv a(modp)}$$

Απόδειξη. Έστω $p \nmid a$, τότε οι ακέραιοι $0a, 1a, 2a, ..., (p-1)a$ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα υπολοίπων $modp$.

Διότι αν δύο από αυτά τα υπόλοιπα ήταν ίσα, για παράδειγμα $ia \equiv ja(modp) \Leftrightarrow p \mid (i-j)a \Rightarrow p \mid a$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $i, j < p$.

Συνεπώς, οι ακέραιοι $\{0a, 1a, 2a, ..., (p-1)a\}$ είναι οι $\{0, 1, 2, ..., p-1\}$

Όμως $a \equiv b(modp), c \equiv d(modp) \Rightarrow ac \equiv bd(modp)$ Συνεπώς:

$$\begin{aligned} 1a \cdot 2a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1)(modp) &\Leftrightarrow \\ a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)!(modp) &\Leftrightarrow \\ p \mid (a^{p-1}-1)(p-1)! \Rightarrow p \mid a^{p-1} - 1 &\Leftrightarrow \\ \boxed{a^{p-1} \equiv 1(modp)} \Rightarrow a^p \overset{p \nmid a}{\equiv} a(modp)&. \\ \text{Αν } p \mid a \Rightarrow a^p \equiv a(modp) \equiv 0(modp)& \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 1. *Αν $p \nmid a$ και $n \equiv m(mod(p-1)) \Rightarrow a^n \equiv a^m(modp)$.*

Απόδειξη. Έστω $n > m$ τότε

$$\begin{aligned} n \equiv m(mod(p-1)) &\Leftrightarrow \\ p-1 \mid n-m \Rightarrow n-m = c(p-1) &\Rightarrow \\ n = c(p-1)+m& \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} a^{p-1} \equiv 1(modp) &\Rightarrow \\ a^{c(p-1)} \equiv 1(modp) \Rightarrow a^{n-m} \equiv 1(modp) &\Rightarrow \\ a^n \equiv a^m(modp)& \end{aligned}$$

□

3.1.1 Παραδείγματα - Εφαρμογές - Ασκήσεις

Παράδειγμα 3.1. *Να υπολογιστεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $10^{6k+4} \div 7, k \in \mathbb{N}$.*

Λύση. Ισχύει ότι $(10, 7) = 1$ οπότε από θεώρημα Fermat έπεται ότι:

$$\begin{aligned} 10^6 \equiv 1(mod7) &\Rightarrow \\ 10^{6k} \equiv 1(mod7) &\Rightarrow \\ 10^{6k+4} \equiv 10^4(mod7)& \\ \text{Όμως } 10 \equiv 3(mod7) \Rightarrow 10^4 \equiv 3^4(mod7)& \\ 3^2 \equiv 9(mod7) \equiv 2(mod7) \Rightarrow 3^4 \equiv 4(mod7) &\Rightarrow \\ 10^4 \equiv 4(mod7)&. \end{aligned}$$

Συνεπώς το υπόλοιπο είναι 4. □

Άσκηση 15. *Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $A = 7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78}$ λήγει σε 0.*

Άσκηση 16. *Έστω $p > 5$ πρώτος. Να αποδειχθεί ότι $p^8 \equiv 1(mod240)$.*

Άσκηση 17. *Να βρεθούν θετικοί ακέραιοι x, y, ώστε $x^5+y^5+1 = (x+2)^5+(y-3)^5$.*

4 Καλά Χριστούγεννα