ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

«Η αναλυτικοσυνθετική μέθοδος από τον Πλάτωνα μέχρι τις νέες τεχνολογίες»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννα Αλεξοπούλου

Επιβλέπων : **Ευτύχης Παπαδοπετράκης**
Λέκτορας Πανεπιστημίου Πατρών

Πάτρα, 2015

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

«Η αναλυτικοσυνθετική μέθοδος από τον Πλάτωνα μέχρι τις νέες τεχνολογίες»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννα Αλεξοπούλου

Επιβλέπων : **Ευτύχης Παπαδοπετράκης**
Λέκτορας Πανεπιστημίου Πατρών

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ......

....	....	....
Ευτύχης Παπαδοπετράκης Λέκτορας Πανεπιστημίου Πατρών	Παναγής Καραζέρης Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών	Βασίλης Χ. Μουλιανίτης Διδάσκων Πανεπιστημίου Αιγαίου

…………………………………………..

Ιωάννα Αλεξοπούλου
Πτυχιούχος Μαθηματικός Πανεπιστημίου Πατρών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εξετάζει ιστορικά την εμφάνιση, διαμόρφωση και εξέλιξη της αναλυτικοσυνθετικής γεωμετρικής μεθόδου, με στόχο να αναδειχθεί η ευρετική της αξία και η παρουσία της ως τρόπος σκέψης στα πλαίσια της επιστημονικής δραστηριότητας.

Στο **πρώτο κεφάλαιο** εξετάζεται το ζήτημα της προέλευσης της μεθόδου, ανιχνεύοντας τις αναφορές στο έργο του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, ενώ στη συνέχεια γίνεται αναφορά στη γεωμετρική μέθοδο της απαγωγής η οποία χαρακτηρίστηκε από τους μετέπειτα μελετητές πρόδρομος της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου.

Το **δεύτερο κεφάλαιο** περιλαμβάνει τον πρώτο ορισμό της μεθόδου, ο οποίος εντοπίζεται στα σχόλια του δεκάτου τρίτου βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη (αγνώστου σχολιαστή), ενώ στο **τρίτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται παραδείγματα από το έργο του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου.

Το **τέταρτο κεφάλαιο** αναφέρεται στο έργο «Συναγωγή» του Πάππου, ο οποίος επτά αιώνες μετά τον Ευκλείδη εξετάζει διεξοδικά την αναλυτικοσυνθετική μέθοδο και διατυπώνει έναν δεύτερο, πληρέστερο ορισμό, που ενώ αποτελεί τη βασική αναφορά των μελετητών, επιδέχεται περισσότερες από μια ερμηνείες, προκαλώντας μια σειρά άρθρων σε σχέση με αυτό που αργότερα ονομάστηκε «ζήτημα της κατεύθυνσης».

Το **πέμπτο κεφάλαιο** περιλαμβάνει αναφορές από έργα Αράβων μαθηματικών, οι οποίοι τον $10^{ο}$ αιώνα μ.Χ. εξακολουθούν να χρησιμοποιούν την αναλυτικοσυνθετική μέθοδο για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Το **έκτο κεφάλαιο** αναφέρεται στη νεώτερη εποχή, όπου διαπιστώνεται η παρουσία της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου ως τρόπος σκέψης στην εξέλιξη της επιστήμης. Ειδικότερα εξετάζεται η περίπτωση του σχεδιασμού προϊόντων ως παράδειγμα επίδρασης της μεθόδου στις νέες τεχνολογίες.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

ανάλυση, σύνθεση, γεωμετρικές κατασκευές

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Μαθηματικά και Σύγχρονες Εφαρμογές – Διδακτική των Μαθηματικών» του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω:

- τον επιβλέποντα της εργασίας μου κ. Ευτύχη Παπαδοπετράκη για την πολύτιμη συνεργασία και βοήθειά του.
- τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής, κ. Παναγή Καραζέρη και κ. Βασίλη Μουλιανίτη, η βοήθεια και οι συμβουλές του οποίου ήταν σημαντικές ιδιαίτερα στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.
- τους συμφοιτητές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα Πετρούλα, Ελένη, Θέμη και Παναγιώτη καθώς επίσης και όλους όσους με βοήθησαν και συζήτησαν μαζί μου για το αντικείμενο της εργασίας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΟΙ ΑΠΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣΥΝΘΕΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Υπάρχουν αρκετές αναφορές στον όρο ανάλυση κατά την αρχαιότητα, οι οποίες άλλοτε συνδέονται με τη φιλοσοφία, άλλοτε με τη λογική και άλλοτε με τη γεωμετρία. Σύμφωνα με τους περισσότερους μελετητές η κοινή ορολογία μαρτυρά ότι ο όρος αυτός αρχικά αντιστοιχούσε σε μια γενική μέθοδο, η οποία εφαρμόζονταν σε διάφορους τομείς. Οι τομείς αυτοί αναπτύσσονταν παράλληλα, όντας σε διαρκή αλληλεπίδραση, επηρεάζοντας τελικά ο ένας τη διαμόρφωση του άλλου.

1.1. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΑ

Η αρχαία γεωμετρική μέθοδος της ανάλυσης και σύνθεσης συνδέεται στενά με τη φιλοσοφία και το όνομα του Πλάτωνα. Σύμφωνα με τον Πρόκλο, η ανάλυση αποτελεί την καλύτερη «μέθοδο εύρεσης λημμάτων[1]»[2], την οποία δίδαξε ο Πλάτωνας στον Λεωδάμαντα το Θάσιο[3]. Την ίδια άποψη έχει και ο συγγραφέας του Academ.Philos.Index Herculanensis, ο οποίος αναφέρει ότι η ανάλυση πρωτοεμφανίστηκε στα χρόνια του Πλάτωνα[4]. Ο Διογένης ο Λαέρτιος[5] αφήνει να εννοηθεί ότι ο Πλάτωνας ήταν αυτός που επινόησε τη γεωμετρική μέθοδο της ανάλυσης και σύνθεσης αλλά οι μελετητές εκτιμούν ότι η άποψη αυτή δεν ευσταθεί. Ο Heath αναφέρει ότι και η άποψη του Πρόκλου πιθανότατα να οφείλεται σε μια παρανόηση[6]. Αυτό που πρέπει να είχε στο μυαλό του είναι ένα απόσπασμα από την «Πολιτεία»[7], στο οποίο όμως αυτό που περιγράφεται είναι η φιλοσοφική ανάλυση –

1 Σύμφωνα με τον Πρόκλο ο όρος «λήμμα» συχνά χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει μια πρόταση η οποία αποτελεί προϋπόθεση για κάποια άλλη κατασκευή, η οποία όμως δεν έχει αποδειχθεί προηγουμένως ώστε να αποτελεί θεώρημα. Έτσι, η απόδειξη ως προς τη δυνατότητα πραγματοποίησης μιας κατασκευής ολοκληρώνεται με την απόδειξη των ενδιάμεσων λημμάτων που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτή.

2 Heath (1956, 133-134), Πρόκλος (211.12, 211.19-20): «*περὶ δὲ τὴν εὕρεσιν τῶν λημμάτων...μέθοδοι δὲ ὅμως παραδίδονται, καλλίστη μὲν ἡ διὰ τῆς ἀναλύσεως ἐπ' ἀρχὴν ὁμολογουμένην ἀνάγουσα τὸ ζητούμενον*»

3 Ο Διογένης ο Λαέρτιος τον αναφέρει ως Λαοδάμαντας ο Θάσιος.

4 Καρασμάνης(1992, 174)

5 «Οὗτος πρῶτος (ο Πλάτων) ἐν ἐρωτήσει λόγον παρήνεγκεν, ὥς φησι Φαβωρῖνος ἐν ὀγδόῃ Παντοδαπῆς ἱστορίας· καὶ πρῶτος τὸν κατὰ τὴν ἀνάλυσιν τῆς ζητήσεως τρόπον εἰσηγήσατο Λεωδάμαντι τῷ Θασίῳ. καὶ πρῶτος ἐν φιλοσοφίᾳ ἀντίποδα ὠνόμασε καὶ στοιχεῖον καὶ διαλεκτικὴν καὶ ποιότητα καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τὸν προμήκη καὶ τῶν περάτων τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν καὶ θεοῦ πρόνοιαν» (Διογένης Λαέρτιος, 3.24.7 – 13)

6 Heath (1956, 134)

7 «*Τὸ τοίνυν ἕτερον μάνθανε τμῆμα τοῦ νοητοῦ λέγοντά με* τοῦτο οὗ *αὐτὸς ὁ λόγος ἅπτεται τῇ τοῦ διαλέγεσθαι δυνάμει, τὰς ὑποθέσεις ποιούμενος οὐκ ἀρχὰς ἀλλὰ τῷ ὄντι ὑποθέσεις, οἷον ἐπιβάσεις τε καὶ ὁρμάς, ἵνα μέχρι τοῦ ἀνυποθέτου ἐπὶ τὴν τοῦ παντὸς ἀρχὴν ἰών, ἁψάμενος αὐτῆς, πάλιν αὖ ἐχόμενος τῶν ἐκείνης ἐχομένων, οὕτως ἐπὶ τελευτὴν καταβαίνῃ,αἰσθητῷ παντάπασιν οὐδενὶ προσχρώμενος, ἀλλ' εἴδεσιν αὐτοῖς δι' αὐτῶν εἰς αὐτά, καὶ τελευτᾷ εἰς εἴδη*» (Πολιτεία, 511b.4–8, 511c.1–2)

διαλεκτική του Πλάτωνα και σε καμία περίπτωση η μαθηματική ανάλυση. Ο Cantor αναφέρει ότι στον τομέα της μαθηματικής μεθοδολογίας η επινόηση της αναλυτικής μεθόδου, η οποία αποτέλεσε το έναυσμα σημαντικής προόδου, αποδίδεται στον Πλάτωνα[8]. Αυτό που ενδεχομένως μπορούμε να ισχυριστούμε είναι μια συσχέτιση της διαλεκτικής του Πλάτωνα και της γεωμετρικής ανάλυσης καθώς και στις δύο περιπτώσεις η πορεία της σκέψης περιλαμβάνει μια ανοδική πορεία συνοδευόμενη από μια καθοδική. Οι διαφορές όμως είναι σημαντικές.

Η πλατωνική διαλεκτική ως μέθοδος εμφανίζεται με δύο μορφές στο έργο του Πλάτωνα: είτε ως μια συλλογιστική μέθοδος, είτε ως μια μέθοδος αναζήτησης της ουσίας του όντος και του ορίζειν[9]. Η πρώτη περίπτωση εντοπίζεται στην «Πολιτεία», όπου ο Πλάτωνας περιγράφει τη διαλεκτική, ως μια ανοδική αναζήτηση προηγούμενων συνθηκών, κατά την οποία κινούμαστε μέσω υποθέσεων, οι οποίες δεν αντιμετωπίζονται ως αρχές αλλά ως πραγματικές υποθέσεις, και λειτουργούν ως σκαλοπάτια για να φθάσουμε στην «*ἐπὶ τὴν τοῦ παντὸς ἀρχὴν*»· αυτή η ανοδική πορεία συμπληρώνεται από μια καθοδική πορεία, η οποία ξεκινά από την «*ἐπὶ τὴν τοῦ παντὸς ἀρχὴν*», η οποία δεν είναι υποθετική, και έχει ως στόχο να επιβεβαιώσει κάθε μια από τις υποθέσεις που χρησιμοποιήθηκαν ανεβαίνοντας. Μια αντίστοιχη περιγραφή βρίσκουμε και στο «Φαίδωνα»[10], όπου ο Πλάτωνας περιγράφει τα στάδια της διαλεκτικής ως εξής: κάθε φορά ξεκινάμε από μια υπόθεση και δεχόμαστε ως αληθή όλα όσα είναι σύμφωνα με αυτή· αν κάποιος διαφωνήσει με αυτή, ελέγχουμε πρώτα αν όσα προκύπτουν από αυτή συμφωνούν μεταξύ τους ή όχι· αν συμφωνούν, προχωράμε στην αιτιολόγηση η οποία γίνεται θέτοντας μια άλλη υπόθεση, την καλύτερη από τις «*ἄνωθεν*» και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Μια ακόμη αναφορά εντοπίζουμε στο «Μένωνα» όπου ο Πλάτωνας ασχολείται με το φιλοσοφικό ζήτημα του εάν η αρετή είναι διδακτή ή όχι και όπως αναφέρει «*ἐξ ὑποθέσεως αὐτὸ σκοπεῖσθαι*», διευκρινίζοντας ότι «*λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι*

8 Martin (1991, 45)

9 Παπαδοπετράκης – Σκαλτσάς (2007): Και οι δύο μεθοδολογίες αποδίδονται από τον Αριστοτέλη στο Σωκράτη (Μετά τα Φυσικά 1078b.25-31).

10 «*καὶ ὑποθέμενος ἑκάστοτε λόγον ὃν ἂν κρίνω ἐρρωμενέστατον εἶναι, ἃ μὲν ἄν μοι δοκῇ τούτῳ συμφωνεῖν τίθημι ὡς ἀληθῆ ὄντα...εἰ δέ τις αὐτῆς τῆς ὑποθέσεως ἔχοιτο, χαίρειν ἐῴης ἂν καὶ οὐκ ἀποκρίναιο ἕως ἂν τὰ ἀπ' ἐκείνης ὁρμηθέντα σκέψαιο εἴ σοι ἀλλήλοις συμφωνεῖ ἢ διαφωνεῖ· ἐπειδὴ δὲ ἐκείνης αὐτῆς δέοι σε διδόναι λόγον, ὡσαύτως ἂν διδοίης, ἄλλην αὖ ὑπόθεσιν ὑποθέμενος ἥτις τῶν ἄνωθεν βελτίστη φαίνοιτο*» (Φαίδωνας, 100a, 101d)

πολλάκις σκοποῦνται»[11], χρησιμοποιώντας δηλαδή το συλλογισμό των γεωμετρών ως πρότυπο συλλογισμού. Συνεχίζει περιγράφοντας ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό παράδειγμα προκειμένου να εξηγήσει τη μέθοδο αυτή: *Όταν ερωτηθεί για παράδειγμα ένας γεωμέτρης, αν μια δεδομένη επιφάνεια μπορεί να εγγράφει σε κύκλο με τη μορφή τριγώνου, θα απαντούσε ως εξής: Δεν γνωρίζω ακόμη αν αυτή η επιφάνεια μπορεί να εγγραφεί, νομίζω όμως ότι θα ήταν χρήσιμο να ξεκινήσω από κάποια βάση (υπόθεση) γι' αυτόν τον σκοπό, και τότε θα μπορώ να σας πω τι συνάγεται από αυτή σε σχέση με την εγγραφή του δεδομένου σχήματος, το αν αυτό είναι δυνατό ή όχι. Το ίδιο λοιπόν ας κάνουμε και εμείς για την αρετή. Εφόσον δεν γνωρίζουμε ούτε τι είναι ούτε τι λογής είναι, ας εξετάσουμε αν είναι διδακτή ή όχι ξεκινώντας από μιαν υπόθεση*[12]. Έτσι, και η διαπραγμάτευση στο «Μένωνα» ξεκινά από μια υπόθεση[13]: «αν η αρετή είναι επιστήμη, τότε είναι διδακτή». Η «μέθοδος της υπόθεσης» εισάγεται για πρώτη φορά σε αυτό το διάλογο και ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζεται υποδηλώνει ότι η μέθοδος ήταν ήδη γνωστή, την χρησιμοποιούσαν οι γεωμέτρες της εποχής και ο Πλάτωνας, δείχνοντας εμπιστοσύνη στις μεθόδους έρευνάς τους, την αξιοποίησε για να αναπτύξει τη διαλεκτική του.

Σε άλλα σημεία του έργου του, ο Πλάτωνας περιγράφει τη διαλεκτική με έναν διαφορετικό τρόπο, ως μια μέθοδο αποτελούμενη από *συναγωγές* και *διαιρέσεις*. Πιο συγκεριμένα, στο «*Φαίδρο*»[14] αναφέρει ότι η διαλεκτική ξεκινά προσπαθώντας «*εἰς μίαν τε ἰδέαν συνορῶντα ἄγειν τὰ πολλαχῇ διεσπαρμένα*», το οποίο διατυπώνεται με παρόμοιο τρόπο και στο «*Φίληβο*»[15]: «*μίαν ἰδέαν περὶ παντὸς ἑκάστοτε θεμένους ζητεῖν*». Αφού αυτό επιτευχθεί, «*κατ' εἴδη δύνασθαι διατέμνειν*»[16]. Και σε αυτή την περιγραφή, η διαλεκτική περιλαμβάνει και πάλι δύο πορείες: μια ανοδική και μια καθοδική. Κατά την ανοδική, αναζητείται η γενική ιδέα, το «γένος», το οποίο περιλαμβάνει την έννοια η οποία μας ενδιαφέρει, και μια καθοδική, η οποία ξεκινά από τη γενική ιδέα και προχωρά μέσω διαδοχικών διαιρέσεων «*μέχρι τοῦ ἀτμήτου τέμνειν ἐπιστηθῇ*»[17]. Ο Πρόκλος αναφέρει ότι η μέθοδος των συναγωγών και των

11 Μένων (86e)
12 Μένων (86e – 87b)
13 Η πορεία που ακολουθείται συμφωνεί με τη μέθοδο της υπόθεσης στη γεωμετρία, αλλά η φύση των υποθέσεων είναι διαφορετική.
14 Φαίδρος (265d.3 – 4)
15 Φίληβος (16d.1 – 2)
16 Φαίδρος (265e.1) Ανάλογες περιγραφές εντοπίζονται στην Πολιτεία (454.a.6) «*...κατ' εἴδη διαιρούμενοι*». Η μέθοδος αναλύεται κυρίως στο Σοφιστή (253d.1–3) «*τὸ κατὰ γένη διαιρεῖσθαι καὶ μήτε ταὐτὸν εἶδος ἕτερον ἡγήσασθαι μήτε ἕτερον ὂν ταὐτὸν μῶν οὐ τῆς διαλεκτικῆς φήσομεν ἐπιστήμης εἶναι;*»
17 Φαίδρος (277b.7–8)

διαιρέσεων χρησιμοποιούνταν και από τους γεωμέτρες. Ο τρόπος με τον οποίο συλλογίζεται ένας διαλεκτικός προκειμένου να προσδιορίσει το γένος βρίσκεται σε αντιστοιχία με τον τρόπο με τον οποίο συλλογίζεται ένας γεωμέτρης σε σχέση με μια γεωμετρική κατασκευή. Όπως ο διαλεκτικός απορρίπτει σε κάθε διαίρεση οτιδήποτε βρίσκεται στον αριστερό κλάδο, έτσι και ο γεωμέτρης απορρίπτει εκείνα τα στοιχεία τα οποία ενδεχομένως και να χρησιμοποίησε προκειμένου να συλλάβει το πώς θα πραγματοποιήσει την κατασκευή του αλλά στην πορεία να αποδείχθηκαν περιττά. Η καθοδική πορεία από το γένος στα είδη καταλήγει για το διαλεκτικό σε έναν ορισμό και για το γεωμέτρη σε ένα γεωμετρικό σχήμα, το οποίο αποτελεί το γεωμετρικό τόπο όλων εκείνων των βοηθητικών στοιχείων που τελικά χρησιμοποιήθηκαν κατά την κατασκευή.

Στο «*Φαίδρο*», τον «Σοφιστή» και τον «Πολιτικό» παρουσιάζονται συγκεκριμένοι κανόνες ως προς τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να προχωρά η καθοδική πορεία των διαιρέσεων, αντιθέτως δεν προσφέρεται καμία μεθοδολογία ως προς τα βήματα της συναγωγής. Το ίδιο παρατηρούμε και για την αρχική περιγραφή της διαλεκτικής: «η καθοδική πορεία ξεκινά από την *αρχή του παντός* και προχωρά μέσω των υποθέσεων που διατυπώθηκαν κατά την ανοδική πορεία». Για τον Πλάτωνα η ανοδική πορεία της διαλεκτικής κατευθύνεται από τη διαίσθηση, η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας συγκεκριμένης μεθοδολογίας. Προχωρά μέσω διαδοχικών υποθέσεων μέχρι να καταλήξει στην *αρχή του παντός* και επειδή η *αρχή του παντός* δεν μπορεί να συναχθεί από κανένα συμπέρασμα, κάθε υπόθεση οφείλει να είναι γενικότερη της προηγούμενης[18].

Παρά τις ομοιότητες ανάμεσα στη διαλεκτική και τη γεωμετρική μέθοδο της ανάλυσης και σύνθεσης, δεν φαίνεται πιθανό να ήταν ο Πλάτωνας αυτός που την ανακάλυψε. Αντιθέτως αρκετοί σχολιαστές θεωρούν σχεδόν βέβαιο ότι ο τρόπος με τον οποίο διαμορφώθηκε και περιγράφηκε τελικά η ανοδική πορεία της διαλεκτικής οφείλεται στη γεωμετρική ανάλυση. Ο Cornford[19] αναφέρει από την άλλη βέβαια ότι: «είναι εύλογο να ισχυριστεί κανείς ότι ο Πλάτωνας ανακάλυψε τη μέθοδο της ανάλυσης υπό την ίδια έννοια που ισχυριζόμαστε ότι ο Αριστοτέλης ανακάλυψε το συλλογισμό· ήταν ο πρώτος που στοχάστηκε ως προς την πορεία της σκέψης που ακολουθείται σε αυτή», επισημαίνοντας παράλληλα την σπουδαιότητα της επιβεβαιωτικής σύνθεσης που πρέπει να την ακολουθεί.

18 Σε αυτό παραπέμπει και η χρήση του όρου *ἄνωθεν* στην περιγραφή των σταδίων της διαλεκτικής στο Φαίδωνα. Έτσι όταν αναφέρεται σε *ἄλλην ὑπόθεσιν* εννοεί γενικότερη και όχι ισοδύναμη.

19 Cornford (1932, 47)

1.2. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ

Ο Αριστοτέλης υπήρξε κατά γενική ομολογία μαθητής του Πλάτωνα στην Ακαδημία[20]. Ξεκίνησε τη μελέτη του σε όλους τους τομείς από τις πλατωνικές θέσεις, στην πορεία όμως απέρριψε τη θεωρία των Ιδεών και ανέπτυξε το δικό του φιλοσοφικό σύστημα. Σε αντίθεση με τον Πλάτωνα, ο οποίος είχε ως απώτερο στόχο την κατανόηση της ουσίας του όντος, ο Αριστοτέλης ενδιαφερόταν κυρίως για λογικά και συντακτικά ζητήματα, εστιάζοντας κυρίως στη μελέτη της δομής των συλλογισμών[21]. Πίστευε ότι η μορφή είναι αυτό που κάνει ένα πράγμα κατανοητό και ταυτόχρονα αυτό που πρέπει να συλλάβει κανείς προκειμένου να το αντιληφθεί ως συγκεκριμένο μέρος ενός όλου. Ως αποτέλεσμα, μετασχημάτισε τη διχοτομική μέθοδο του Πλάτωνα σε μια λογικο – ταξινομική πολυτομική διαίρεση, όπου όλοι οι κλάδοι ήταν ισοδύναμοι, με αποτέλεσμα τη διαμέριση του αρχικού γένους. Η μέθοδος αυτή οδήγησε σε ακριβέστερους ορισμούς και ακολουθήθηκε αργότερα και από τον Ευκλείδη κατά τους ορισμούς των ευθύγραμμων σχημάτων αλλά και από μετέπειτα διανοητές όπως ο Ποσειδώνιος και ο Ήρωνας[22]. Ο Αριστοτέλης, όπως και ο Πλάτωνας, επηρεάστηκε από τη γεωμετρία και τα μαθηματικά της εποχής του, γι' αυτό και σε πολλά αποσπάσματα αξιοποιεί μαθηματικές έννοιες στην προσπάθειά του να επιχειρηματολογήσει σε σχέση με κάποιο ζήτημα. Ταυτόχρονα όμως, οι φιλοσοφικές τους θεωρίες επηρέασαν με τη σειρά τους τα μαθηματικά της εποχής, ο Πλάτωνας σε σχέση με την οντολογία των μαθηματικών αντικειμένων ενώ ο Αριστοτέλης μέσω της ανάλυσής του σε σχέση με την εξαγωγή ορθών αποτελεσμάτων.

Υπάρχουν αρκετά αποσπάσματα στα οποία ο Αριστοτέλης αναφέρεται καθαρά στη γεωμετρική ανάλυση. Ένα από αυτά βρίσκεται στα «Ηθικά Νικομάχεια» (1112b.12 – 26), στο οποίο ο Αριστοτέλης φαίνεται να θεωρεί ως ανάλυση τον τρόπο με τον οποίο σκεφτόμαστε και αποφασίζουμε, συνδέοντας τη διαλεκτική με την ανάλυση ενός σχήματος στη γεωμετρία :

«τῶν δ' ἀνθρώπων ἕκαστοι βουλεύονται περὶ τῶν δι' αὑτῶν πρακτῶν[...]ἀλλ' ὅσα γίνεται δι' ἡμῶν, μὴ ὡσαύτως δ' ἀεί[...]βουλευόμεθα δ' οὐ περὶ τῶν τελῶν ἀλλὰ περὶ τῶν πρὸς τὰ τέλη[...]ἀλλὰ θέμενοι τὸ τέλος τὸ πῶς καὶ διὰ τίνων ἔσται

20 Αν και από τα επτά χρόνια των σπουδών του στην Ακαδημία, μαθητής του Πλάτωνα υπήρξε μόλις δυόμιση με τρία χρόνια, ενώ το υπόλοιπο διάστημα δάσκαλός του ήταν ο Εύδοξος ο Κνίδιος. Έτσι, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί πως ήταν περισσότερο μαθητής του Ευδόξου.

21 During (1966, Αριστοτέλης, τόμος 2, 138, 169)

22 Παπαδοπετράκης (Η Αριστοτελική θεωρία των ορισμών, υπό έκδοση)

σκοποῦσι· καὶ διὰ πλειόνων μὲν φαινομένου γίνεσθαι διὰ τίνος ῥᾷστα καὶ κάλλιστα ἐπισκοποῦσι, δι' ἑνὸς δ' ἐπιτελουμένου πῶς διὰ τούτου ἔσται κἀκεῖνο διὰ τίνος, ἕως ἂν ἔλθωσιν ἐπὶ τὸ πρῶτον αἴτιον, ὃ ἐν τῇ εὑρέσει ἔσχατόν ἐστιν. ὁ γὰρ βουλευόμενος ἔοικε ζητεῖν καὶ ἀναλύειν τὸν εἰρημένον τρόπον ὥσπερ διάγραμμα (φαίνεται δ' ἡ μὲν ζήτησις οὐ πᾶσα εἶναι βούλευσις, οἷον αἱ μαθηματικαί, ἡ δὲ βούλευσις πᾶσα ζήτησις), καὶ τὸ ἔσχατον ἐν τῇ ἀναλύσει πρῶτον εἶναι ἐν τῇ γενέσει. κἂν μὲν ἀδυνάτῳ ἐντύχωσιν, ἀφίστανται»

«Οι άνθρωποι σκέφτονται και αποφασίζουν για πράγματα που μπορούν οι ίδιοι να πραγματοποιήσουν[...] Όσα όμως γίνονται από εμάς τους ίδιους, δεν γίνονται με τον ίδιο τρόπο.[...] Έτσι, δεν σκεφτόμαστε για τους σκοπούς, στους οποίους αποβλέπουμε, αλλά για τα μέσα που θα μας οδηγήσουν στην επίτευξη των σκοπών.[...] Όλοι αφού θέσουν και προσδιορίσουν κάποιο σκοπό, εξετάζουν με ποιο τρόπο και ποια μέσα μπορεί αυτός να επιτευχθεί. Κι αν φαίνεται ότι ένας σκοπός μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους, τότε σκέπτονται με ποιον τρόπο θα επιτευχθεί ευκολότερα και καλύτερα. Αν όμως επιτυγχάνεται με ένα μόνο μέσο, τότε σκέπτονται το πώς θα επιτευχθεί με αυτό το μέσο και αυτό το ίδιο με ποιο άλλο μέσο θα επιτευχθεί έως ότου φθάσουν στο πρώτο αίτιο, το οποίο είναι τελευταίο στην ερευνητική διαδικασία. Διότι ο διαβουλευόμενος φαίνεται να ερευνά και να αναλύει με τον τρόπο που αναφέραμε, ωσάν επρόκειτο για την ανάλυση ενός γεωμετρικού διαγράμματος[23][...] όπου το τελευταίο στην αναλυτική διαδικασία είναι πρώτο στη διαδικασία της γένεσις. Αν πέσουν πάνω σε κάτι αδύνατο παραιτούνται[...] Αν πάλι αυτό φαίνεται δυνατό, τότε επιχειρούν να το πραγματοποιήσουν»

Η ορολογία η οποία χρησιμοποιείται από τον Αριστοτέλη και στις δύο περιγραφές είναι κοινή. Ωστόσο δεν γίνεται καμία αναφορά ως προς την αρχική προέλευση του όρου «ανάλυση» ούτε στο κατά πόσο η κοινή διαδικασία την οποία περιγράφει αποτελεί δάνειο της

23 Οι Hintikka & Remes (1974, 86 – 87) υποστηρίζουν ότι η ερμηνεία του όρου «διάγραμμα» είναι ασαφής. Κάποιοι σχολιαστές την ερμηνεύουν ως γεωμετρικό σχήμα ενώ κάποιοι άλλοι ως απόδειξη στην περίπτωση θεωρήματος ή ως κατασκευή στην περίπτωση προβλήματος αντίστοιχα. Ως αποτέλεσμα, δεν είναι σαφές αν αυτό για το οποίο μιλά ο Αριστοτέλης αφορά τελικά ανάλυση σχημάτων ή προτάσεων, γεγονός το οποίο ενισχύεται από το ότι ο ίδιος δεν αναφέρει στις περιγραφές του το μαθηματικό ισοδύναμο του «*τέλους*» ή των «*αρχών*» μιας «*βούλευσης*». Η ίδια άποψη διατυπώνεται και από τον Cornford (1932, 44 – 45) αλλά και από τον Gulley (1958, 8).

διαλεκτικής στη γεωμετρία ή το αντίστροφο. Ο Αριστοτέλης, όπως και ο Πλάτωνας, αναφέρεται σε μια διαδικασία η οποία ξεκινά από την υπόθεση ότι το ζητούμενο έχει επιτευχθεί, και προχωρά προς τα πίσω αναζητώντας τις αναγκαίες συνθήκες για την πραγματοποίησή του. Στην περίπτωση της διαλεκτικής η αναζήτηση σταματά όταν φθάσουμε στο *«πρώτο αίτιο»*, ενώ στην περίπτωση της γεωμετρίας, η αναζήτηση σταματά όταν φθάσουμε σε μια συνθήκη η οποία μπορεί να ικανοποιηθεί ή σε μια δυνατή κατασκευή. Η ανάλυση συμπληρώνεται με τη *«γένεση»*, η οποία ξεκινά από αυτό που είναι τελευταίο στην ανάλυση και καταλήγει στο ζητούμενο προσφέροντας μια απόδειξη γι' αυτό. Οι δύο πορείες στην πράξη εξελίσσονται υπό μια έννοια ταυτόχρονα, καθώς όπως αναφέρει ο Αριστοτέλης πολλές φορές το ζητούμενο μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους και επειδή πρέπει να επιλεγεί ο καλύτερος από αυτούς, κάθε πιθανολογούμενη αναγκαία συνθήκη τη διαδέχεται ο αντίστοιχος επιβεβαιωτικός έλεγχος. Ο παλινδρομικός χαρακτήρας της μεθόδου είναι ιδιαίτερα εμφανής στον Αριστοτέλη σε σχέση με τον Πλάτωνα, παρά το γεγονός ότι και αυτός είχε προβληματιστεί ως προς τον τρόπο επιλογής της βέλτιστης προκείμενης, αλλά η θεωρία των Ιδεών δεν του επέτρεπε να προσφέρει μια ικανοποιητική απάντηση σε αυτό το ζήτημα. Αντιθέτως, το ζήτημα του καθορισμού του γένους και του προσδιορισμού της απο κοινού ιδιότητας («ειδοποιός διαφορά») μέσω της οποίας κινούμαστε κάθε φορά προς το «προσεχές γένος», αποτέλεσαν βασικούς άξονες της μελέτης του Αριστοτέλη. Τα ζητήματα αυτά εξετάστηκαν διεξοδικά στα «Τοπικά», όπου ο Αριστοτέλης δίνει συγκεκριμένους κανόνες διάκρισης του τυχαίου χαρακτηριστικού («συμβεβηκότος») από αυτό που πράγματι ανήκει στην έννοια του γένους («ειδοποιός διαφορά»).

Στο τέλος του αποσπάσματος που προηγήθηκε, ο Αριστοτέλης αναφέρεται επίσης και στα δύο δυνατά αποτελέσματα της ανάλυσης, ενώ αξίζει να αναφερθεί και το σχόλιο το οποίο σπεύδει να κάνει αμέσως μετά τον συσχετισμό διαλεκτικής – γεωμετρικής ανάλυσης. Θέλοντας να επισημάνει ότι πρόκειται για διαφορετικές μεθόδους, αναφέρει ότι παρά το γεγονός ότι κάθε *βούλευση* έχει το χαρακτήρα έρευνας, κάθε έρευνα δεν αποτελεί *βούλευση* χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα τις μαθηματικές έρευνες (1112b.21 – 23).

Μια αντίστοιχη περιγραφή βρίσκουμε και στο έργο του «Μετά τα φυσικά» (1032b.6 – 21):

> «ἐπειδὴ τοδὶ ὑγίεια, ἀνάγκη εἰ ὑγιὲς ἔσται τοδὶ ὑπάρξαι, οἷον ὁμαλότητα, εἰ δὲ τοῦτο, θερμότητα· καὶ οὕτως ἀεὶ νοεῖ, ἕως ἂν ἀγάγῃ εἰς τοῦτο ὃ αὐτὸς δύναται

ἔσχατον ποιεῖν. εἶτα ἤδη ἡ ἀπὸ τούτου κίνησις ποίησις καλεῖται.ἡ μὲν ἀπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ τοῦ εἴδους νόησις»

«Πράγματι το υγιές προκύπτει με το εξής σκεπτικό: επειδή αυτό εδώ είναι υγεία, για να υπάρξει υγιές θα πρέπει κατ' ανάγκη να προκύψει πρώτα αυτό εδώ, για παράδειγμα η ομαλή κατάσταση του οργανισμού, και για να υπάρξει αυτό χρειάζεται θερμότητα. Αυτό το σκεπτικό ακολουθεί πάντα ο γιατρός μέχρις ότου αναγάγει το πράγμα στην τελική κατάσταση την οποία ο ίδιος μπορεί να παραγάγει. Η διαδικασία από εδώ και πέρα καλείται παραγωγή[...]ενώ αυτή που ξεκινά από το την αρχή και το είδος νόηση»

Εδώ ο Αριστοτέλης δεν αναφέρει τον όρο ανάλυση, παρ' όλα αυτά η διαδικασία της νόησης η οποία περιγράφεται παρουσιάζει αρκετές ομοιότητες με αυτή της ανάλυσης στα «Ηθικά Νικομάχεια». Για την αντίστροφη διαδικασία χρησιμοποιεί τον όρο *«παραγωγή»*, ο οποίος είναι σύμφωνος με τον όρο *«γένεση»* του προηγούμενου αποσπάσματος, αφού λίγο νωρίτερα έχει ορίσει ως παραγωγή την ειδική περίπτωση γένεσης η οποία έχει προκύψει από τέχνη, ικανότητα ή διάνοια (1032a.27 – 29).

Στο «Μετά τα φυσικά», ο Αριστοτέλης ασχολείται με το ερώτημα του τι πρέπει να εννούμε λέγοντας ουσία. Αναφερόμενος στη μορφή και την ύλη των αντικειμένων ασχολείται με τις έννοιες «*εν δυνάμει*» και «*εν ενεργεία*», καταλήγοντας στο ότι «*κάθε τι το οποίο έχει μέρη και δεν είναι εντελώς σαν σωρός αλλά στο οποίο το σύνολο είναι κάτι το οποίο υπερβαίνει τα μέρη, υπάρχει μια αιτία για το ότι είναι ένα. Αυτό το καταλαβαινουμε όταν επικαλεστούμε τη σχέση ύλης και μορφής, δυνάμει και ενεργεία*»[24]. Οι έννοιες «*δυνάμει*» και «*ενεργεία*» πριν από τον Αριστοτέλη αποτελούσαν έννοιες περιεχομένου. Το «*δυνάμει*» εξέφραζε την ικανότητα για κάτι, συνήθως την ικανότητα πρόκλησης ή ανοχής μιας μεταβολής ή κίνησης, ενώ το «*ενεργεία*» μια διαδικασία την οποία υφίσταται κάτι ώστε να πάρει υπόσταση. Ο Αριστοτέλης ανέπτυξε τη λειτουργική έννοια του «*δυνάμει*» ως οντολογική δυνατότητα και του «*ενεργεία*» ως πραγμάτωσης μιας δυνατότητας, εστιάζοντας στη νέα ποιότητα την οποία φέρει η πραγμάτωση αυτή στο αντικείμενο[25].

Έτσι, όταν το προηγούμενο απόσπασμα καταλήγει σε μια αναφορά στη γεωμετρική μέθοδο

24 During(1966, Αριστοτέλης, τόμος 2, 452 – 453)
Η λέξη *αιτία* στον Αριστοτέλη είναι συνώνυμη της δομής.
25 During(1966, Αριστοτέλης, τόμος 2, 454 – 455)

της ανάλυσης ενός σχήματος (1051a.22 – 30), έχοντας υπόψιν τον λειτουργικό χαρακτήρα των δύο εννοιών, είμαστε σε θέση να σχηματίσουμε μια πιο σαφή εικόνα ως προς τη μέθοδο της ανάλυσης που εφάρμοζαν οι γεωμέτρες:

> «*εὑρίσκεται δὲ καὶ τὰ διαγράμματα*[26] *ἐνεργείᾳ· διαιροῦντες γὰρ εὑρίσκουσιν. εἰ δ' ἦν διῃρημένα, φανερὰ ἂν ἦν· νῦν δ' ἐνυπάρχει δυνάμει. διὰ τί δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον; ὅτι αἱ περὶ μίαν στιγμὴν γωνίαι ἴσαι δύο ὀρθαῖς. εἰ οὖν ἀνῆκτο ἡ παρὰ τὴν πλευράν, ἰδόντι ἂν ἦν εὐθὺς δῆλον διὰ τί. ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθὴ καθόλου διὰ τί; ἐὰν ἴσαι τρεῖς, ἥ τε βάσις δύο καὶ ἡ ἐκ μέσου ἐπισταθεῖσα ὀρθή, ἰδόντι δῆλον τῷ ἐκεῖνο εἰδότι. ὥστε φανερὸν ὅτι τὰ δυνάμει ὄντα εἰς ἐνέργειαν ἀγόμενα εὑρίσκεται·*»

> «Είναι δε και τα (τελειωμένα) διαγράμματα εν ενεργεία, καθότι έρχονται στο προσκήνιο με διαιρέσεις. Εάν ήταν ήδη προϊόντα διαίρεσης θα ήταν φανερά, τώρα όμως υπάρχουν εν δυνάμει. Γιατί οι γωνίες του τριγώνου είναι δύο ορθές: ότι η πεπλατισμένη γωνία είναι δύο ορθές είναι γνωστό, εάν λοιπόν έχει αχθεί (από μια κορυφή) μια παράλληλη προς μια πλευρά αυτό γίνεται αμέσως φανερό σε αυτόν που θα το δει. Η (εγγεγραμμένη) γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή, γιατί: εάν έχουμε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου, τα δύο της βάσης και το τρίτο κάθετο στο μέσο, αυτό γίνεται αμέσως φανερό σε αυτόν που θα δει το σχήμα. Γίνεται συνεπώς φανερό ότι τα εν δυνάμει διαγράμματα έρχονται στο προσκήνιο εν ενεργεία»

Σύμφωνα με το παραπάνω απόσπασμα, το ζητούμενο μιας γεωμετρικής πρότασης εμπεριέχει τις αναγκαίες κατασκευές για την απόδειξη – κατασκευή του. Έτσι κάθε φορά ο γεωμέτρης ξεκινά από ένα δεδομένο σχήμα, το οποίο δίνεται μέσω του ζητούμενου, και προσπαθεί να ανακαλύψει γεωμετρικά αντικείμενα τα οποία υπάρχουν σε αυτό εν δυνάμει, με στόχο να επιλέξει τελικά εκείνα τα οποία είναι τα κατάλληλα για την απόδειξη – κατασκευή του. Η ανακάλυψη αυτή γίνεται «*διαιρώντας*» το δεδομένο σχήμα, δηλαδή πραγματοποιώντας διαδοχικές βοηθητικές κατασκευές μέχρι να καταλήξουμε σε κάτι το οποίο είναι δυνατό να

26 Και σε αυτό το απόσπασμα η χρήση του όρου «διάγραμμα» είναι ασαφής. Όταν λέει «*εἰ δ' ἦν διῃρημένα*» αναφέρεται σε σχήματα στα οποία έχουν ολοκληρωθεί όλες οι βοηθητικές κατασκευές, ενώ η αμέσως επόμενη φράση «*φανερὰ ἂν ἦν*» αναφέρεται σε μια γεωμετρική απόδειξη ή κατασκευή.

κατασκευαστεί από τα δεδομένα της υπόθεσης. Έτσι, στην περίπτωση του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου, η εν δυνάμει γεωμετρική κατασκευή η οποία καθιστά προφανή την αλήθεια της πρότασης είναι αυτή της ευθείας η οποία διέρχεται από μια κορυφή και είναι παράλληλη στην απέναντι πλευρά, ενώ στην περίπτωση του ότι είναι ορθή η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο, η ισχύς του ζητούμενου επιβεβαιώνεται με την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο και έχει ως βάση τη διάμετρο. Και στις δύο περιπτώσεις η διαίρεση του σχήματος καταλήγει σε μια κατασκευή η οποία εκφράζει μια έννοια ή σχέση γενικότερη του συμπεράσματος, ο συλλογισμός όμως ο οποίος ακολουθείται για την ανακάλυψή της παρουσιάζεται περισσότερο ως συμπερασματικός παρά ως επαγωγικός σε αντίθεση με την περιγραφή στα «Ηθικά Νικομάχεια».

Ο Αριστοτέλης ολοκληρώνει την περιγραφή των δύο παραδειγμάτων αναφέροντας ότι από τη στιγμή που έχουν ολοκληρωθεί όλες οι βοηθητικές κατασκευές η σύσταση της απόδειξης είναι προφανής. Σε ένα απόσπασμα όμως στους «Σοφιστικούς Ελέγχους» (175a.27 – 29), ο Αριστοτέλης αναφέρει ότι είναι δυνατό να ολοκληρωθεί η ανάλυση ενός σχήματος αλλά η σύσταση της σύνθεσης να είναι αδύνατη : «*συμβαίνει δέ ποτε καθάπερ ἐν τοῖς διαγράμμασιν· καὶ γὰρ ἐκεῖ ἀναλύσαντες ἐνίοτε συνθεῖναι πάλιν ἀδυνατοῦμεν*». Το σχόλιο το οποίο κάνει προκύπτει και πάλι σε σχέση με τη διαλεκτική. Πιο συγκεκριμένα, ο Αριστοτέλης αναφέρεται στην περίπτωση των σοφισμάτων και στην αντικειμενική δυσκολία την οποία αντιμετωπίζει ακόμα κι ένας έμπειρος διαλεκτικός ως προς το να αντιληφθεί άμεσα το λάθος σε ένα συλλογισμό. Έτσι, είναι πολλές φορές πιθανό να προκύπτουν λανθασμένα συμπεράσματα μέσα από μια τυπικά σωστή διαδικασία γεγονός το οποίο παρατηρείται όπως αναφέρει και στην περίπτωση της γεωμετρίας. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ήδη από την εποχή του Αριστοτέλη είχε αναγνωριστεί η αναγκαιότητα σύστασης της σύνθεσης, καθιστώντας την ανάλυση και τη σύνθεση συμπληρωματικές μεθόδους ή καλύτερα τα δύο μέρη μίας και μόνο μεθόδου.

Τόσο στα «Ηθικά Νικομάχεια» όσο και στο «Μετά τα φυσικά», οι ομοιότητες οι οποίες παρατηρούνται μεταξύ διαλεκτικής και γεωμετρικής ανάλυσης είναι αρκετές, τόσο σε επίπεδο ορολογίας όσο και σε επίπεδο δομής, παρ' όλα αυτά οι περισσότερες ομοιότητες παρατηρούνται στα «Αναλυτικά» κατά την ανάπτυξη της θεωρίας των συλλογισμών. Τα «Αναλυτικά» διακρίνονται στα «Αναλυτικά Πρότερα» και τα «Αναλυτικά Ύστερα». Το πρώτο βιβλίο των «Αναλυτικών Πρότερων» αποτελεί για το συλλογισμό ότι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, προσφέροντας παράλληλα ολοκληρωμένες μεθοδολογίες αναγωγής – ανασκευής ενός συλλογισμού σε έναν άλλο. Σκοπός του Αριστοτέλη ήταν να προσφέρει τα μέσα έτσι ώστε να μπορεί κανείς να βρίσκει εύκολα για ένα δεδομένο συμπέρασμα τις αναγκαίες για την απόδειξη προκείμενες[27]. Τη μέθοδο την οποία ακολουθεί γι' αυτό το σκοπό την ονομάζει «ανάλυση» και σύμφωνα με τον During[28] δεν υπάρχει αμφιβολία ότι για την ανάπτυξή της χρησιμοποίησε τις γεωμετρικές μεθόδους της εποχής του, μερικές από τις οποίες δεν ήταν παρά προϊόντα εφαρμοσμένης διαλεκτικής.

Η ανάλυση ενός ισχυρισμού είναι δυνατή δεδομένου ότι μπορεί να επαναδιατυπωθεί με τη μορφή ενός συλλογισμού, δηλαδή ενός συνδυασμού από προκείμενες συνοδευόμενες από ένα συμπέρασμα. Η ανάλυση συνίσταται στον τρόπο με τον οποίο θα ανάγουμε τον εκάστοτε συλλογισμό σε ένα από τα τρία βασικά συμπερασματικά σχήματα, έτσι ώστε το συμπέρασμα να προκύπτει με αναγκαιότητα (46b.40 – 47a.5) :

> *«πῶς δ' ἀνάξομεν τοὺς συλλογισμοὺς εἰς τὰ προειρημένα σχήματα, λεκτέον ἂν εἴη μετὰ ταῦτα· λοιπὸν γὰρ ἔτι τοῦτο τῆς σκέψεως. εἰ γὰρ τήν τε γένεσιν τῶν συλλογισμῶν θεωροῖμεν καὶ τοῦ εὑρίσκειν ἔχοιμεν δύναμιν, ἔτι δὲ τοὺς γεγενημένους ἀναλύοιμεν εἰς τὰ προειρημένα σχήματα, τέλος ἂν ἔχοι ἡ ἐξ ἀρχῆς πρόθεσις»*

Στη συνέχεια, ο Αριστοτέλης αναφέρει λεπτομερώς τους κανόνες μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η ζητούμενη αναγωγή, καταλήγοντας στη φράση *«οὕτω μὲν οὖν γίνεται ἀνάλυσις»*[29], ενώ κατά τη σχετική διερεύνηση που ακολουθεί, γίνεται αναφορά και στο ενδεχόμενο *«αδύνατου συλλογισμού»*[30]. Αναγνωρίζοντας την ομοιότητα που παρουσιάζει η ανάλυση με τη διαλεκτική, ο Αριστοτέλης ξεκαθαρίζει και σε αυτό το απόσπασμα ότι ανάλυση και διαλεκτική δεν αποτελούν συνώνυμες έννοιες. Η διαλεκτική εδώ αναφέρεται ως ο *«ασθενής συλλογισμός»*, ο ρόλος της οποίας είναι καθαρά βοηθητικός στην ανάλυση[31]. Η

27 Αναλυτικά Πρότερα (43a.20) «*πῶς δ' εὐπορήσομεν αὐτοὶ πρὸς τὸ τιθέμενον ἀεὶ συλλογισμῶν, καὶ διὰ ποίας ὁδοῦ ληψόμεθα τὰς περὶ ἕκαστον ἀρχάς*»

28 During (1966, 120)

29 Αναλυτικά Πρότερα (49a.19)

30 Αναλυτικά Πρότερα (51a.40 – 51b.5)

31 Ήδη από τα «Τοπικά» ο Αριστοτέλης έχει διακρίνει τους συλλογισμούς σε διαλεκτικούς, αναλυτικούς και αποδεικτικούς, επισημαίνοντας ότι η διαλεκτική δεν αποτελεί επιστήμη αλλά τεχνική, σε αντίθεση με τον Πλάτωνα ο οποίος θεωρούσε τη διαλεκτική την κορωνίδα των επιστημών.

ανάλυση, από την άλλη, περιορίζεται στην εύρεση των αναγκαίων και μόνο προκείμενων για ένα συμπέρασμα. Ως αποτέλεσμα, πρέπει να συμπληρωθεί με την αντίστοιχη απόδειξη ή κατασκευή, προκειμένου να αποτελεί πλήρη λύση για το οτιδήποτε. Έτσι, με την ολοκλήρωση της περιγραφής της ανάλυσης, ο Αριστοτέλης ασχολείται πλέον με τον αποδεικτικό συλλογισμό. Αυτό γίνεται στα «Αναλυτικά Ύστερα». Εκεί, κατά τη διαπραγμάτευση του αποδεικτικού συλλογισμού, εντοπίζουμε ένα απόσπασμα στο οποίο ο Αριστοτέλης αναφέρεται στη μέθοδο της ανάλυσης με έναν διαφορετικό τρόπο σε σχέση με την περιγραφή που βρίσκουμε στα «Αναλυτικά Πρότερα». Το απόσπασμα καταλήγει σε ένα σχόλιο σε σχέση με την ανάλυση στη γεωμετρία (78a.6 – 14) :

> *«Εἰ δ' ἦν ἀδύνατον ἐκ ψεύδους ἀληθὲς δεῖξαι, ῥᾴδιον ἂν ἦν τὸ ἀναλύειν· ἀντέστρεφε γὰρ ἂν ἐξ ἀνάγκης. ἔστω γὰρ τὸ Α ὄν· τούτου δ' ὄντος ταδὶ ἔστιν, ἃ οἶδα ὅτι ἔστιν, οἷον τὸ Β. ἐκ τούτων ἄρα δείξω ὅτι ἔστιν ἐκεῖνο. ἀντιστρέφει δὲ μᾶλλον τὰ ἐν τοῖς μαθήμασιν, ὅτι οὐδὲν συμβεβηκὸς λαμβάνουσιν (ἀλλὰ καὶ τούτῳ διαφέρουσι τῶν ἐν τοῖς διαλόγοις) ἀλλ' ὁρισμούς»*

Η μετάφραση του Ross[32] για το συγκεκριμένο απόσπασμα αφήνει να εννοηθεί ότι ενδεχομένως να υπήρχε και μια άλλη μορφή ανάλυσης, παραγωγικού χαρακτήρα, η οποία ξεκινάει από το συμπέρασμα(Α) και προχωρά μέσω διαδοχικών παραγωγικών βημάτων μέχρι να καταλήξει σε μια προκείμενη(Β) η οποία γνωρίζουμε ότι ισχύει. Ο Gulley[33] υποστηρίζει ότι κάτι τέτοιο δεν ευσταθεί. Αυτή είναι η άποψη και των περισσότερων σχολιαστών. Το συγκεκριμένο απόσπασμα δεν έχει ως στόχο να παρουσιάσει μια άλλη μορφή ανάλυσης, αυτό που θέλει να πει ο Αριστοτέλης είναι ότι εάν ήταν αδύνατο να προκύψουν αληθή συμπεράσματα από λανθασμένες προκείμενες, τότε πράγματι η αλήθεια του συμπεράσματος συνεπάγεται την αλήθεια των προκείμενων. Έτσι, η γεωμετρική ανάλυση είναι πιο εύκολη σε σχέση με τη διαλεκτική, και αυτό οφείλεται τόσο στο γεγονός ότι στη γεωμετρία οι προτάσεις είναι πολύ συχνότερα αντιστρέψιμες, όσο και στο ότι στη θέση των προκείμενων χρησιμοποιούνται ορισμοί. Αυτό σημαίνει ότι εάν γνωρίζουμε ότι δύο προτάσεις είναι αντιστρέψιμες, η αλήθεια του συμπεράσματος επιτρέπει να ισχυριστούμε όχι μόνο την αλήθεια της προκείμενης αλλά και το ότι η προκείμενη αυτή αποτελεί όχι μόνο αναγκαία αλλά και ικανή συνθήκη για αυτό.

---

32 Gulley (1958, 10)
33 Gulley (1958, 10)

Σύμφωνα με τους Hintikka & Remes[34], η μόνη περιγραφή η οποία παρουσιάζει την ανάλυση ως μια παραγωγική διαδικασία βρίσκεται στον Πρόκλο. Σε ένα απόσπασμα, στα σχόλιά του στον Ευκλείδη, αναφέρεται στην περίπτωση του ατόπου, περιγράφοντας ως ανάλυση την πορεία η οποία προχωρά συμπερασματικά ξεκινώντας από την άρνηση του ζητούμενου. Ο Αλέξανδρος, στα σχόλιά του στα «Αναλυτικά Πρότερα», αναφέρει ότι η ανάλυση είναι μια πορεία *«ἀπὸ τοῦ τέλους ἐπὶ τὰς ἀρχάς»*. Στη γεωμετρία συγκεκριμένα, «*οἵ τε γὰρ γεωμέτραι ἀναλύειν λέγονται, ὅταν ἀπὸ τοῦ συμπεράσματος ἀρξάμενοι κατὰ τὴν τάξιν τῶν εἰς τὴν τοῦ συμπεράσματος δεῖξιν ληφθέντων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς καὶ τὸ πρόβλημα ἀνίωσιν»*[35]. Οι Hintikka & Remes[36] θεωρούν ότι η περιγραφή αυτή είναι ασαφής. Δεν διευκρινίζεται ούτε ο τρόπος με τον οποίο προχωρά κανείς από το συμπέρασμα προς αυτά τα οποία είναι πρώτα, ούτε προσδιορίζεται το γεωμετρικό ισοδύναμο των αρχών. Η περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης από τον Ιωάννη Φιλόπονο[37], στα σχόλιά του στα «Αναλυτικά Ύστερα», μοιάζει αρκετά με αυτή του Αλέξανδρου αλλά είναι περισσότερο σαφής. Ξεκαθαρίζει ότι οι αρχές στις οποίες αναφέρεται ο Αλέξανδρος είναι όπως λέει οι αρχές της γεωμετρίας, δηλαδή *«τὸ σημεῖον, ἡ γραμμὴ καὶ τὰ λοιπά»*[38] ενώ περιγράφει και την ανάλυση της πρότασης σε σχέση με το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, αναδεικνύοντας την ευρετική ικανότητα των βοηθητικών κατασκευών. Ο Αμμώνιος, στα σχόλιά του στα «Αναλυτικά Πρότερα», αναφέρει την άποψη του Γεμίνου, ο οποίος χαρακτηρίζει τη γεωμετρική ανάλυση ως *«ἀποδείξεως εὕρεσις»*.

---

34 Hintikka & Remes (1974, 94)

35 *«ἡ δὲ ἀνάλυσις ἐπάνοδός ἐστιν ἀπὸ τοῦ τέλους ἐπὶ τὰς ἀρχάς· οἵ τε γὰρ γεωμέτραι ἀναλύειν λέγονται, ὅταν ἀπὸ τοῦ συμπεράσματος ἀρξάμενοι κατὰ τὴν τάξιν τῶν εἰς τὴν τοῦ συμπεράσματος δεῖξιν ληφθέντων ἐπὶ τὰς ἀρχὰς καὶ τὸ πρόβλημα ἀνίωσιν»*
Alexander, In Aristotelis analyticorum priorum librum i commentarium, σελ.7, 14 – 18

36 Hintikka & Remes (1974, 88)

37 Joannes Philoponus, In Aristotelis analytica posteriora commentaria, 13,3, σελ.162

38 Joannes Philoponus, In Aristotelis analytica posteriora commentaria, 13,3, σελ.120, 20

1.3. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΠΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΤΡΙΑ ΑΛΥΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑΣ

1.3.1. ΓΕΝΙΚΑ

Η περίοδος από τον 6^{ο} – 4^{ο} αιώνα π.Χ. παρουσιάζει τεράστιο ιστορικό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Ήδη από τον 6ο αιώνα π.Χ. κατασκευάζονται από τους αρχαίους Έλληνες οι πρώτες μαθηματικές θεωρίες ενώ παράλληλα διατυπώνονται σπουδαία μαθηματικά προβλήματα. Οι απαρχές αυτής της δραστηριότητας συνδέονται με τη λειτουργία δύο σχολών: της Ιωνικής, με κύριο εκπρόσωπο το Θαλή ο οποίος έζησε και έδρασε στη Μίλητο της Μικράς Ασίας, και της Πυθαγόρειας, η οποία ιδρύθηκε από τον Πυθαγόρα στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας. Στην πορεία εμφανίστηκε η σχολή της Χίου, με κύριους εκπρόσωπους τον Οινοπίδη και τον Ιπποκράτη, η σχολή των Ελεατών, με κύριο εκπρόσωπο τον Παρμενίδη, και ξεκίνησε η δράση των Σοφιστών. Η περίοδος αυτή υπήρξε καθοριστική για τη γεωμετρία καθώς όλη αυτή η δραστηριότητα οδήγησε με τη σειρά της σε ένα πλήθος σπουδαίων αποτελεσμάτων αλλά και μεθόδων επίλυσης, καθώς κάθε σχολή εξέφραζε μια διαφορετική φιλοσοφική θεωρία, η οποία επηρέαζε και τον τρόπο με τον οποίο προσέγγιζε το εκάστοτε πρόβλημα. Στα τέλη του 4^{ου} αιώνα π.Χ. όλη αυτή η προπαρασκευαστική περίοδος κορυφώθηκε με τη συγγραφή των «Στοιχείων» από τον Ευκλείδη.

Ανάμεσα στα σημαντικότερα προβλήματα αυτής της περιόδου συγκαταλέγονται τα περίφημα άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας τα οποία τέθηκαν ήδη από τις αρχές του 5ου αιώνα π.Χ. Πρόκειται για τον διπλασιασμό του κύβου, την τριχοτόμηση της γωνίας και τον τετραγωνισμό του κύκλου. Παρά το γεγονός ότι η αδυναμία επίλυσής τους με κανόνα και διαβήτη αποδείχθηκε μόλις τον 19^{ο} αιώνα μέσω σύγχρονων αλγεβρικών εννοιών, συνέβαλαν σημαντικά στην πρόοδο της Μαθηματικής Επιστήμης μέσω των παράπλευρων αποτελεσμάτων που προέκυψαν κατά τις προσπάθειες εύρεσης λύσης. Στις προσπάθειες αυτές παρατηρείται η χρήση μιας μεθόδου, η οποία χαρακτηρίζεται από τους περισσότερους μελετητές ως πρόδρομος της μεθόδου της ανάλυσης, είναι γνωστή ως η «γεωμετρική μέθοδος της απαγωγής (ή αναγωγής)» και έχει συνδεθεί με το όνομα του Ιπποκράτη του Χίου. Ο Πρόκλος αναφέρει τη «γεωμετρική μέθοδο της απαγωγής» την οποία και συνδέει με τον

Ιπποκράτη, στο απόσπασμα που ακολουθεί[39]:

> «*Ἡ δὲ <ἀπαγωγὴ> μετάβασίς ἐστιν ἀπ' ἄλλου προβλήματος ἢ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο, οὗ γνωσθέντος ἢ πορισθέντος καὶ τὸ προκείμενον ἔσται καταφανές, οἷον ὥσπερ καὶ τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου ζητηθέντος μετέθεσαν τὴν ζήτησιν εἰς ἄλλο, ᾧ τοῦτο ἕπεται, τὴν εὕρεσιν τῶν δύο μέσων, καὶ τὸ λοιπὸν ἐζήτουν, πῶς ἂν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθεῖεν. πρῶτον δέ φασι τῶν ἀπορουμένων διαγραμμάτων τὴν ἀπαγωγὴν ποιήσασθαι <Ἱπποκράτην> τὸν Χῖον, ὃς καὶ μηνίσκον ἐτετραγώνισε καὶ ἄλλα πολλὰ κατὰ γεωμετρίαν εὗρεν εὐφυὴς περὶ τὰ διαγράμματα εἴπερ τις ἄλλος γενόμενος*»
>
> «η δε απαγωγή αποτελεί τη μετάβαση από ένα πρόβλημα σε ένα άλλο, το οποίο αν γίνει γνωστό ή αποδειχθεί, κάνει φανερό και το αρχικό· όπως έχει γίνει και με το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου του οποίου μετέθεσαν την έρευνα σε ένα άλλο από το οποίο αυτό έπεται, την εύρεση δηλαδή των δύο μέσων αναλόγων τις οποίες στη συνέχεια ψάχνουν· πώς δηλαδή αν δοθούν δύο ευθύγραμμα τμήματα, θα κατασκευαστούν δύο μέσοι ανάλογοι αυτών σε συνεχή αναλογία· ο πρώτος δε που πραγματοποίησε την απαγωγή λέγεται πως ήταν ο Ιπποκράτης, ο οποίος τετραγώνισε και μηνίσκο και πολλά άλλα γεωμετρικά ανακάλυψε όντας ευφυής όσο κανένας άλλος σε σχέση με τα γεωμετρικά σχήματα και τις αποδείξεις»

Σύμφωνα με τον Πρόκλο, η «μέθοδος της γεωμετρικής απαγωγής» αφορά μια πορεία διαδοχικών αναγωγών, η οποία ξεκινά από ένα θεώρημα (ή πρόβλημα) το οποίο θέλουμε να αποδείξουμε (ή να επιλύσουμε) και συνεχίζεται μέχρι να καταλήξουμε σε ένα άλλο, το οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει. Ο Πρόκλος αναφέρει ως χαρακτηριστικό παράδειγμα την περίπτωση του διπλασιασμού του κύβου.

Η περιγραφή του Πρόκλου δεν είναι ιδιαίτερα κατατοπιστική, τα παραδείγματα όμως αναδεικνύουν ότι τις περισσότερες φορές η μέθοδος αυτή λειτουργεί εκλαμβάνοντας κάθε νέο πρόβλημα ως ειδική περίπτωση ενός γενικότερου προβλήματος το οποίο ο λύτης προσπαθεί αρχικά να εντοπίσει και κατ' επέκταση να επιλύσει. Αυτό συμβαίνει και στην περίπτωση του διπλασιασμού του κύβου.

39 Πρόκλος (212.24, 213.1 – 12), Heath (1956, 135)

1.3.2. Ο ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΒΟΥ

Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου συνδέεται αρχικά με το βασιλιά της Κρήτης Μίνωα, ο οποίος ζήτησε να ανακατασκευαστεί ο κυβικός τάφος του γιου του Γλαύκου, έτσι ώστε να αποκτήσει διπλάσιο όγκο. Αργότερα το πρόβλημα επανήλθε μέσω ενός άλλου θρύλου, σύμφωνα με τον οποίο ο Απόλλωνας έδωσε στους Δήλιους έναν χρησμό, σύμφωνα με τον οποίο οι κάτοικοι του νησιού θα γλίτωναν από τον λοιμό, μόνο εάν κατόρθωναν να κατασκευάσουν βωμό διπλάσιο του ήδη υπάρχοντος, διατηρώντας το κυβικό του σχήμα. Έτσι, έμεινε γνωστό και ως «το Δήλιο πρόβλημα».

Οι δώδεκα λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα κατά την ελληνική αρχαιότητα τις είχε συγκεντρώσει ο Ερατοσθένης, όντας διευθυντής της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας (γύρω στο 230π.Χ.), και περιέχονται σε μια επιστολή του προς το βασιλιά Πτολεμαίο τον Γ', την οποία παραθέτει ο Ευτόκιος (6^{ος} αιώνας μ.Χ.) στα σχόλιά του στο δεύτερο βιβλίο του έργου «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» του Αρχιμήδη. Οι προσπάθειες επίλυσης του προβλήματος ξεκίνησαν από τον Ιπποκράτη το Χίο, ο οποίος ανήγαγε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου σε αυτό της κατασκευής δύο μέσων αναλόγων, σε συνεχή αναλογία, μεταξύ δύο δεδομένων ευθύγραμμων τμημάτων: της ακμής α του δεδομένου κύβου και ενός ευθύγραμμου τμήματος β, διπλάσιου μήκους. Έτσι, σύμφωνα με τον Ιπποκράτη, το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου μετατοπίζεται στη δυνατότητα κατασκευής μεγεθών x, y, τέτοιων ώστε σύμφωνα με τη σύγχρονη αλγεβρική γραφή να συνδέονται με τη σχέση $\exists xy\left(\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{y}\wedge\frac{x}{y}=\frac{y}{\beta}\right)$ [40], περνώντας από το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης τρίτου βαθμού με έναν άγνωστο, $\exists x\left(x^3=2\alpha^3\right)$, σε ένα σύστημα δύο εξισώσεων δευτέρου βαθμού με δύο αγνώστους. Σύμφωνα με την ίδια επιστολή του Ερατοσθένη, έναν αιώνα μετά τον Ιπποκράτη, ο Μέναιχμος ανήγαγε με τη σειρά του το πρόβλημα της κατασκευής δύο μέσων αναλόγων μεταξύ δεδομένων μεγεθών στο γενικότερο πρόβλημα της εύρεσης του σημείου τομής δύο κωνικών τομών[41]. Ο Μέναιχμος, προκειμένου να προσδιορίσει το σημείο τομής, εξετάζει μόνο τις δύο πρώτες από τις τρεις δυνατές περιπτώσεις : $\alpha y=x^2$ & $x\beta=y^2$ (1)

40 Σύμφωνα με τον Gardies (2001, 59) είναι πολύ πιθανό να είναι αυτό το πρώτο γνωστό παράδειγμα εισαγωγής βοηθητικής μεταβλητής στην αρχαία ελληνική παράδοση.

41 Φαίνεται να είναι αυτός ο οποίος ανακάλυψε τις κωνικές τομές, τις οποίες μελέτησε αργότερα συστηματικά ο Απολλώνιος. Πριν από τον Μέναιχμο, μια πρώτη προσπάθεια επίλυσης είχε πραγματοποιηθεί από τον Αρχύτα, ο οποίος όμως προσέφερε μια λύση η οποία προέκυπτε από την τομή καμπυλων που παράγονταν από την περιστροφή στερεών σωμάτων.

$x\,y=\alpha\,\beta$ & $\alpha\,y=x^2$ (2) $x\,y=\alpha\,\beta$ & $x\,\beta=y^2$ (3), χωρίς να αναφέρεται καθόλου στην τρίτη περίπτωση, ενώ διακρίνει τη διαδικασία την οποία ακολουθεί σε αυτή της ανάλυσης *(«γεγονέτω»)* και σε αυτή της σύνθεσης (*«συντεθήσεται»*).

Έτσι, το αρχικό πρόβλημα μετασχηματίζεται τελικά σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μέσω διαδοχικών αναγωγών, αποτελώντας ένα από τα πρώτα παραδείγματα ανάλυσης στο εσωτερικό της ελληνικής παράδοσης[42]. Η πρώτη αναγωγή του προβλήματος από τον Ιπποκράτη, δεν χαρακτηρίζεται από απλότητα στη σκέψη, όπως θα μπορούσε να πει κανείς για την δεύτερη αναγωγή από τον Μέναιχμο, η οποία μοιάζει απόλυτα φυσική για κάποιον ο οποίος γνωρίζει τις ιδιότητες των κωνικών τομών, ούτε προσφέρει μια ισοδύναμη διατύπωση του προβλήματος η οποία είναι ευκολότερα διαχειρίσιμη, παρ' όλα αυτά είναι ιδιαιτέρως σημαντική. Η σπουδαιότητα του τρόπου με τον οποίο προσέγγισε το πρόβλημα ο Ιπποκράτης εστιάζεται σε δύο βασικά ζητήματα: αφενός προσέφερε μια εναλλακτική προσέγγιση για το χειρισμό του προβλήματος μέσω της θεωρίας αναλογιών[43], ενώ παράλληλα θεωρείται ο πρώτος ο οποίος εφάρμοσε μια από τις σπουδαιότερες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων, αυτή της αναγωγής ενός προβλήματος σε ένα άλλο, η λύση του οποίου εξασφαλίζει τη λύση του αρχικού, σε ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα κατασκευών.

Το εάν ο Ιπποκράτης εισήγαγε τη «γεωμετρική μέθοδο της απαγωγής» ή απλώς την εφάρμοσε πρώτος σε ένα δύσκολο πρόβλημα κατασκευής δεν είναι κάτι στο οποίο συμφωνεί το σύνολο των μελετητών[44]. Ήδη από τον 6^{o} αιώνα, οι Πυθαγόρειοι είχαν σημειώσει σημαντική πρόοδο στον τομέα της Γεωμετρίας. Είναι πολύ πιθανό στιγμιότυπα αυτής της μεθόδου να εντοπίζονται στην γεωμετρία των Πυθαγορείων, οι οποίοι είχαν καταφέρει με την προσέγγισή τους στην επίλυση προβλημάτων να μετατρέψουν τον εμπειρικό λογισμό των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων σε Μαθηματική Επιστήμη, θέτοντας τις βάσεις για την αξιωματική μέθοδο, την οποία ανέπτυξε θεωρητικά ο Αριστοτέλης και εφάρμοσε σε ολόκληρη τη γεωμετρία ο Ευκλείδης. Σε αυτούς πρέπει να οφείλεται και κάποια ισοδύναμη πρόταση με την XI.33 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη[45], η οποία πρέπει να ήταν γνωστή στον Ιπποκράτη

42 Gardies (2001, 58)

43 Μια θεωρία αναλογιών η οποία δεν είχε πάρει ακόμα τη μορφή την οποία βρίσκουμε στα «Στοιχεία» και αποδίδεται στον Εύδοξο.

44 Ο Heath (1956, 135 – 136) αναφέρει την άποψη των Tannery και Bretschneider, την οποία και ενστερνίζεται, σύμφωνα με την οποία η διχογνωμία οφείλεται κατά πάσα πιθανότητα σε παρερμηνεία των σχολίων του Πρόκλου (212.24, 213.1 - 12), δεδομένου ότι αυτό είναι το μοναδικό απόσπασμα στο οποίο στηρίζονται όλοι οι μελετητές.

45 XI.33 *«Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν»*

προκειμένου να προχωρήσει στην συγκεκριμένη αναγωγή.

Οι Πυθαγόρειοι είχαν αναπτύξει μια θεωρία αναλογιών, ή παραβολής χωρίων όπως αναφέρεται, σύμφωνα με την οποία χειρίζονταν γεωμετρικά μεγέθη με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο κάνουμε σήμερα αλγεβρικές πράξεις. Γι' αυτό και πολλοί μελετητές αναφερόμενοι σε αυτή χρησιμοποιούν τον αμφιλεγόμενο όρο «γεωμετρική άλγεβρα». Το πεδίο εφαρμογής της αφορούσε προβλήματα που λύνουμε σήμερα μέσω εξισώσεων δευτέρου βαθμού, αλλά σιγά – σιγά άρχισε να επεκτείνεται από τους μεταγενέστερους και στην επίλυση προβλημάτων στο χώρο, περνώντας από τους τετραγωνισμούς επίπεδων σχημάτων σε μετασχηματισμούς σχημάτων στο χώρο. Κάπως έτσι υποθέτουμε ότι σκέφτηκε ο Ιπποκράτης για να προχωρήσει στην προαναφερθείσα αναγωγή. Πιθανότατα ξεκίνησε από δύο ίσους κύβους ακμής α και όγκου $α^3$, από τους οποίους πέρασε στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ακμές α, α, 2α, διπλάσιου όγκου. Κατόπιν, το ζήτημα ήταν να βρεθεί ο τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να μετασχηματιστεί σε έναν ισοδύναμο κύβο πλευράς x. Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσω δύο διαδοχικών αναγωγών. Αρχικά απαιτείται η δυνατότητα μετασχηματισμού του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ακμές α, α, 2α σε ένα ισοδύναμο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο το οποίο να διατηρεί το ύψος α, αλλά η μία από τις δύο πλευρές της βάσης να έχει μήκος ίσο με x. Έτσι, αν y το μήκος της άλλης πλευράς, θα έχουμε $x \cdot y = 2\alpha^2$ ή $\frac{\alpha}{x} = \frac{y}{2\alpha}$ (1) . Ενώ στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι είναι εφικτό να περάσουμε σε ένα τρίτο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, ισοδύναμο με τα προηγούμενα, όπου διατηρούμε το ύψος x σταθερό και μετασχηματίζουμε τις διαστάσεις της βάσης, έτσι ώστε από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α, y να περάσουμε σε ένα τετράγωνο πλευράς x. Δηλαδή $\alpha \cdot y = x^2$ ή $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y}$ (2) . Από τις (1), (2) προκύπτει η ζητούμενη σχέση. Σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα από το αν ήταν ο Ιπποκράτης αυτός ο οποίος εισήγαγε τη «γεωμετρική μέθοδο της απαγωγής», αυτό που είναι κοινώς αποδεκτό, είναι ότι αποτελεί πρόδρομο της μεθόδου της ανάλυσης[46].

Η «γεωμετρική μέθοδος της απαγωγής» εφαρμόστηκε στον τρόπο αντιμετώπισης και των άλλων δύο κλασικών προβλημάτων της αρχαιότητας, η λύση των οποίων συνδέθηκε με το

46 Heath (1956, 135)

γενικότερο πρόβλημα της νεύσης. Η νεύση αποτελούσε μια γεωμετρική κατασκευαστική μέθοδο κατά την οποία ένα ευθύγραμμο τμήμα δεδομένου μήκους παρεμβαλλόταν μεταξύ δύο γραμμών έτσι ώστε να διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο. Η νεύση επιτυγχανόταν μέσω ενός πλήθους διαφορετικών τεχνικών, οι οποίες ανέκυψαν για πρώτη φορά μέσω των προσπαθειών για την επίλυση των κλασικών προβλημάτων της αρχαιότητας. Έτσι, και στα τρία προβλήματα η «γεωμετρική μέθοδος της απαγωγής» συνέβαλε στην ανάδειξη γενικότερων προβλημάτων, τα οποία κατ' επέκταση μελετήθηκαν και οδήγησαν με τη σειρά τους σε ιδιαιτέρως σημαντικά αποτελέσματα. Στην περίπτωση του διπλασιασμού του κύβου ειδικότερα, η αναγωγή οδήγησε σε ένα γενικότερο πρόβλημα το οποίο διαμόρφωσε μια καινούρια θεωρία προς μελέτη, αυτή των κωνικών τομών.

2. ΑΝΙΧΝΕΥΟΝΤΑΣ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ο Ευκλείδης ήταν ένας από τους σημαντικότερους Έλληνες μαθηματικούς, ο οποίος είναι γνωστός και ως «ο πατέρας της γεωμετρίας». Για τη ζωή και τη δράση του δεν γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα, πέρα από αυτά τα οποία αναφέρονται στα βιβλία του και στις ελάχιστες βιογραφικές αναφορές που εντοπίζονται σε έργα τρίτων. Αυτό που είναι βέβαιο είναι ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου την εποχή της βασιλείας του Πτολεμαίου του Α΄(323π.Χ. – 283π.Χ.) και δίδασκε μαθηματικά στο Μουσείο.

Η μέθοδος της ανάλυσης έχει συνδεθεί με το όνομα του Ευκλείδη, δεδομένου ότι ο πρώτος από τους δύο σωζόμενους ορισμούς εντοπίζεται σε σχόλια ανώνυμου στα «Στοιχεία», ενώ δύο άλλα έργα του, τα «Δεδομένα» και τα «Πορίσματα» έχουν επισημανθεί ως προς τη χρησιμότητά τους σε σχέση με την αναλυτική μέθοδο.

2.1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Αυτό που τον καθιέρωσε ως μια από τις σπουδαιότερες προσωπικότητες στην ιστορία των μαθηματικών ήταν η συγγραφή των «Στοιχείων», μιας συλλογής 13 βιβλίων στα οποία συνοψίζεται η μαθηματική γνώση της εποχής, συγκεντρώνοντας αποτελέσματα εργασιών προγενέστερων μαθηματικών. Η εργασία αυτή εκτόπισε γρήγορα και ολοκληρωτικά όλες τις προηγούμενες εργασίες ανάλογου περιεχομένου παρά το γεγονός ότι στο μεγαλύτερο μέρος της δεν αποτελούσε πρωτότυπο έργο. Η σπουδαιότητά της έγκειται στον τρόπο με τον οποίο ο Ευκλείδης οργάνωσε τα αποτελέσματα τα οποία είχαν προηγηθεί. Ο λόγος για τον οποίο διασώθηκαν μέχρι σήμερα οφείλεται πιθανότατα στη χρησιμότητά τους. Τα «Στοιχεία» αποτέλεσαν για περισσότερα από 2000 χρόνια το βασικό εγχειρίδιο για την εκμάθηση – διδασκαλία της γεωμετρίας.

Δεν σώζεται κανένα αντίγραφο των «Στοιχείων» από την εποχή του Ευκλείδη. Όλες οι σύγχρονες εκδόσεις βασίζονται σε ένα αντίγραφο του Θέωνα από την Αλεξάνδρεια[47], ο οποίος έζησε επτακόσια περίπου χρόνια μετά τον Ευκλείδη, έτσι δεν είναι δυνατό να

47 Στις αρχές του 19ου αιώνα ανακαλύφθηκε ένα παλαιότερο αντίγραφο αλλά δεν περιείχε σημαντικές διαφορές από αυτό του Θεωνά.

γνωρίζουμε με κάθε λεπτομέρεια τη σύσταση του αρχικού κειμένου, αφού στις αντιγραφές που ακολούθησαν πέρα από τα σχόλια τα οποία έχουν προστεθεί, έχουν επέλθει και αλλοιώσεις του αρχικού κειμένου.

Πιθανολογείται ότι ο πρώτος αρχαίος έλληνας μαθηματικός ο οποίος έγραψε σχόλια πάνω στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ήταν ο Ήρωνας ο Αλεξανδρινός ($2^{ος}$ αιώνας μ.Χ.), τα οποία σύμφωνα με τον Heath[48] δεν φαίνεται να αλλοιώνουν το πρωτότυπο έργο. Αφορούν περισσότερο γενικές παρατηρήσεις σε σχέση με τον τρόπο που θα μπορούσε να έχει γραφεί για παράδειγμα ένα σχήμα για να συμβαδίζει περισσότερο με την περιγραφή ή κάποιες μικρές αλλαγές στη σειρά των προτάσεων. Τα ίδια τα κείμενα του Ήρωνα δεν έχουν διασωθεί, υπάρχουν όμως αρκετές αναφορές σε αυτά στον Πρόκλο και στον al – Nairīzi στα σωζόμενα σχόλιά τους στα «Στοιχεία», αλλά και στο αραβικό λεξικό «Fihrist». Εκτεταμένα σχόλια στο δέκατο βιβλίο των «Στοιχείων» έγραψε ο Πάππος, σχόλια τα οποία δεν έχουν διασωθεί στα ελληνικά αλλά υπάρχουν σε αραβική μετάφραση από τον άραβα μαθηματικό Abu Uthmam al-Dimashgi[49] (αρχές $10^{ου}$ αιώνα). Σε αυτά τα σχόλια αναφέρεται τόσο ο Πρόκλος στα σχόλιά του στα «Στοιχεία» όσο και ο Ευτόκιος στα σχόλιά του στο «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» του Αρχιμήδη.

2.1.1. Ο ΠΡΩΤΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗΣ

Υπάρχουν όμως αρκετά σχόλια στο έργο του Ευκλείδη από σχολιαστές των οποίων η ταυτότητα παραμένει άγνωστη. Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται και τα σχόλια στο δέκατο τρίτο βιβλίο, στα οποία και εντοπίζεται ο πρώτος ορισμός της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου[50] :

> *«Τί ἐστιν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις.*
>
> *Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθές ὁμολογούμενον.*
>
> *Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου <και το πέρασμα> διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθές ὁμολογούμενον»*

48 Heath (1956, 20 – 21)
49 Ευκλείδη «Στοιχεία», Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ (2001, 55)
50 Σταμάτης Ε., «Ευκλείδου Στερεομετρία», τόμος IV (1957, 202)

Πρόκειται για μια περιγραφή αρκετά γενική, η οποία δεν προσφέρει ιδιαίτερες πληροφορίες σε σχέση με τη φύση της μεθόδου. Ο Heath τη χαρακτηρίζει ελλιπή και η φράση <*και το πέρασμα*> αποτελεί δική του προσθήκη. Έχουν διατυπωθεί διάφορες εικασίες σε σχέση με την προέλευση του ορισμού αλλά καμία από αυτές δεν μπορεί να υιοθετηθεί με βεβαιότητα.

Ο Heath αναφέρει ότι σύμφωνα με τον Heiberg ο ορισμός της ανάλυσης και της σύνθεσης οφείλονται στον Ήρωνα και φαίνεται να συμφωνεί με αυτή[51]. Η άποψη του Heiberg βασίζεται στη σύγκριση των ορισμών αυτών με τα σχόλια του Ήρωνα γύρω από την ανάλυση και τη σύνθεση, τα οποία μας μεταφέρει ο al – Nairīzi μέσα από τα σχόλιά του στο δεύτερο βιβλίο των «Στοιχείων». Ο Gulley υποστηρίζει ότι πράγματι οι περιγραφές του Ήρωνα φαίνεται να προσεγγίζουν περισσότερο από άλλες τους ορισμούς στο έργο του Ευκλείδη, παρ' όλα αυτά δεδομένης της ασάφειάς τους δύσκολα μπορεί μια τέτοια σύγκριση από μόνη της να αποτελέσει ισχυρό επιχείρημα σε σχέση με την ταυτότητα του σχολιαστή[52]. Ο Bretschneider, από την άλλη, θεωρεί ότι ο ορισμός αυτός αποτελεί μέρος της εργασίας του Ευδόξου[53].

Ο ορισμός ακολουθείται από πέντε εναλλακτικές αποδείξεις των προτάσεων XIII.1 – 5 με χρήση της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου. Και οι πέντε προτάσεις αφορούν θεωρήματα που σχετίζονται με τομές ευθειών και η απόδειξή τους γίνεται με παρεμφερή τρόπο. Ακολουθεί ενδεικτικά η απόδειξη της πρότασης XIII.2 :

Πρόταση XIII.2

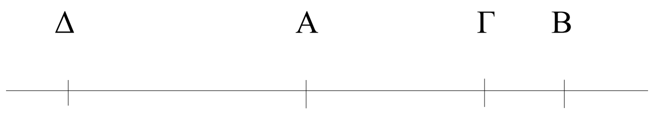
«*Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας*».

Δεδομένα : Ευθεία $\Delta A\Gamma$ τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2=5\,A\Delta^2$

B σημείο στην προέκταση της $\Delta A\Gamma$, τέτοιο ώστε $2\,A\Delta=AB$

Ζητούμενο : $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, με $A\Gamma>B\Gamma$

51 Heath (1956, 137)
52 Gulley (1958, 12)
53 Heath (1956, 137)



ΑΝΑΛΥΣΗ

[1] $AB \cdot B\Gamma = A\Gamma^2$ (Ζητούμενο)

και αφού $AB = 2\,A\Delta$ (από Υ), ισχύει ότι $AB \cdot A\Gamma = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma$ (Στοιχεία, II.4)

[2] Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $AB \cdot A\Gamma + AB \cdot B\Gamma = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$

[3] Όμως $AB \cdot A\Gamma + AB \cdot B\Gamma = AB^2$ (Στοιχεία, II.2),

επομένως $AB^2 = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$

[4] Επειδή $AB = 2\,A\Delta$ (δ_2), έχουμε ότι $4\,A\Delta^2 = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$

[5] $5\,A\Delta^2 = A\Delta^2 + 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$

[6] $5\,A\Delta^2 = \left(A\Delta + A\Gamma\right)^2$

[7] $5\,A\Delta^2 = \Gamma\Delta^2$, που ισχύει.

ΣΥΝΘΕΣΗ

[1] $\Gamma\Delta^2 = 5\,A\Delta^2$ (από Υ) και $\Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$ (Στοιχεία, II.4)

[2] $5\,A\Delta^2 = A\Delta^2 + 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$ (από Υ)

[3] Αφαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει ότι $4\,A\Delta^2 = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$

[4] Επειδή $AB = 2\,A\Delta$ (δ_2), έχουμε ότι $AB^2 = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$

[5] Όμως $AB^2 = AB \cdot A\Gamma + AB \cdot B\Gamma$, επομένως $AB \cdot A\Gamma + AB \cdot B\Gamma = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma + A\Gamma^2$

[6] Αλλά $AB = 2\,A\Delta$ (από Υ), από το οποίο προκύπτει ότι $AB \cdot A\Gamma = 2\,A\Delta \cdot A\Gamma$

[7] $AB \cdot B\Gamma = A\Gamma^2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Σύμφωνα με τον ορισμό της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου, η ανάλυση αποτελεί μια διαδικασία η οποία ξεκινά υποθέτοντας το ζητούμενο, και προχωρά μέχρι να φθάσει σε μια πρόταση η οποία είναι γνωστό ότι είναι αληθής και ανεξάρτητη από αυτό. Παρατηρώντας όμως τις εναλλακτικές αποδείξεις, βλέπουμε ότι στην πράξη δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο. Η ανάλυση δεν ξεκινά μόνο από το ζητούμενο αλλά από το ζητούμενο και τα δεδομένα μαζί.

Η μελέτη των εναλλακτικών αποδείξεων δείχνει ότι και στις πέντε περιπτώσεις, <*το πέρασμα*> από το ένα βήμα στο άλλο κατά την ανάλυση είναι παραγωγικού χαρακτήρα, ακριβώς όπως και στη σύνθεση. Βασιζόμενοι σε αυτές τις αποδείξεις, κάποιοι μελετητές υποστηρίζουν ότι η ανάλυση για τους αρχαίους Έλληνες πρέπει να αποτελούσε μια παραγωγική διαδικασία. Αυτό βέβαια δεν φαίνεται να συμφωνεί και με την περίπτωση της γεωμετρικής μεθόδου της απαγωγής, η οποία αποτελεί για τους περισσότερους μελετητές πρόδρομο της ανάλυσης. Τουλάχιστον όχι σε όλες τις περιπτώσεις. Όπως έχει αναφερθεί, κατά την γεωμετρική μέθοδο της απαγωγής, η μετάβαση από το ένα βήμα στο άλλο συντελούνταν με δύο τρόπους: είτε ανάγοντας το ζητούμενο σε μια γενικότερη προκείμενη από την οποία θα μπορούσε να έχει προέλθει και ούτω καθεξής, είτε ανάγοντάς το σε μια ισοδύναμη πρόταση. Έτσι, στην πρώτη περίπτωση, η μετάβαση αυτή δεν θα μπορούσε να αποτελεί μια αλληλουχία παραγωγικών βημάτων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση αυτό θα μπορούσε να είναι δυνατό. Το ζήτημα της κατεύθυνσης της ανάλυσης προβλημάτισε αρκετά τους μελετητές, αλλά αυτό είναι κάτι το οποίο θα παρουσιαστεί αναλυτικά αργότερα.

Όσον αφορά το μέρος της σύνθεσης, τα παραδείγματα συμφωνούν με τον ορισμό. Η σύνθεση πράγματι ξεκινά από κάτι το οποίο είναι αληθές, προσφέροντας τελικά μια απόδειξη για το ζητούμενο. Πιο συγκεκριμένα, η σύνθεση ξεκινά από το τελευταίο βήμα της ανάλυσης ακολουθώντας τα ίδια βήματα με αντίστροφη σειρά. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η σύνθεση μπορεί να συσταθεί απλώς με το να αντιστρέψουμε τα βήματα της ανάλυσης, μιας και η ακολουθία των βημάτων της ανάλυσης δεν είναι σχεδόν ποτέ γραμμική.

2.1.2. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΠΡΟΤΑΣΗΣ ΣΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

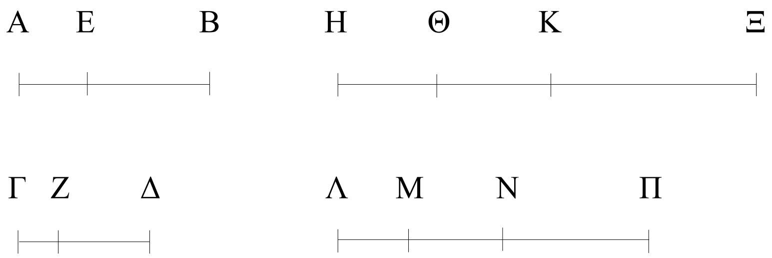
Ο Σταμάτης αναφέρει στον πρόλογο του πέμπτου βιβλίου των «Στοιχείων» ότι ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί τέσσερις αποδεικτικές μεθόδους[54]: τη συνθετική, την απαγωγή σε άτοπο, την πλήρη επαγωγή και σε μία μόνο περίπτωση την αναλυτική μέθοδο. Η περίπτωση αυτή εντοπίζεται στο πέμπτο βιβλίο, στο οποίο αναπτύσσεται η θεωρία αναλογιών του Ευδόξου, και πρόκειται για την πρόταση V.17 :

Πρόταση V.17

«Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται»

Δεδομένα : $\frac{AB}{EB}=\frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$, όπου EB , $Z\Delta$ μέρη των AB , $\Gamma\Delta$

Ζητούμενο : $\frac{AE}{EB}=\frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $AB=AE+BE$, $\Gamma\Delta=\Gamma Z+\Delta Z$ και $\frac{AB}{EB}=\frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$.

Θεωρώ ότι ισχύει το ζητούμενο, δηλαδή $\frac{AB-BE}{EB}=\frac{\Gamma\Delta-\Delta Z}{Z\Delta}$ ή $\frac{AE}{EB}=\frac{\Gamma Z}{Z\Delta}$ (1).

Παίρνω τυχαία πολλαπλάσια των τμημάτων AE , EB , ΓZ , $Z\Delta$:

$H\Theta=\mu\cdot AE$, $\Theta K=\mu\cdot EB$, $\Lambda M=\mu\cdot\Gamma Z$, $MN=\mu\cdot Z\Delta$

τα οποία είναι κατασκευάσιμα λόγω της (1).

54 Σταμάτης Ε., «Ευκλείδου Στοιχεία», τόμος ΙΙ (1953, 5)

Παίρνω και άλλα, επίσης τυχαία, πολλαπλάσια των τμημάτων $EB, Z\Delta$:

$$K\Xi = \nu \cdot EB \quad , \quad N\Pi = \nu \cdot Z\Delta$$

Έτσι, έχουμε ότι $HK = \mu(AE + EB)$ δηλαδή $HK = \mu \cdot AB$ (2)

και $\Lambda N = \mu(\Gamma Z + Z\Delta)$ δηλαδή $\Lambda N = \mu \cdot \Gamma\Delta$ (3)

Επίσης ισχύει ότι $\Theta K + K\Xi = \mu \cdot EB + \nu \cdot EB$ δηλαδή $\Theta\Xi = (\mu + \nu) EB$ (4)

και $MN + N\Pi = \mu \cdot Z\Delta + \nu \cdot Z\Delta$ δηλαδή $M\Pi = (\mu + \nu) Z\Delta$ (5)

Από τη σχέση $\frac{AB}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{Z\Delta}$ και τον ορισμό V.5, έχουμε :

- αν $\mu \cdot AB > (\mu + \nu) \cdot EB$ θα πρέπει συγχρόνως $\mu \cdot \Gamma\Delta > (\mu + \nu) \cdot \Delta Z$
- αν $\mu \cdot AB = (\mu + \nu) \cdot EB$ θα πρέπει συγχρόνως $\mu \cdot \Gamma\Delta = (\mu + \nu) \cdot \Delta Z$
- αν $\mu \cdot AB < (\mu + \nu) \cdot EB$ θα πρέπει συγχρόνως $\mu \cdot \Gamma\Delta < (\mu + \nu) \cdot \Delta Z$

Από τις (2), (3), (4), (5), οι προηγούμενες σχέσεις γίνονται :

- αν $HK > \Theta\Xi$ θα πρέπει συγχρόνως $\Lambda N > M\Pi$
- αν $HK = \Theta\Xi$ θα πρέπει συγχρόνως $\Lambda N = M\Pi$
- αν $HK < \Theta\Xi$ θα πρέπει συγχρόνως $\Lambda N < M\Pi$

Αφαιρώντας από τα $HK, \Theta\Xi$ το κοινό τους μέρος ΘK

και από τα $\Lambda N, M\Pi$ το κοινό τους μέρος MN , έχουμε :

- αν $H\Theta > K\Xi$ θα πρέπει συγχρόνως $\Lambda M > N\Pi$
- αν $H\Theta = K\Xi$ θα πρέπει συγχρόνως $\Lambda M = N\Pi$
- αν $H\Theta < K\Xi$ θα πρέπει συγχρόνως $\Lambda M < N\Pi$

Αντικαθιστώντας τα $H\Theta, K\Xi, \Lambda M, N\Pi$ με τα ίσα τους έχουμε ότι :

- αν $\mu \cdot AE > \nu \cdot EB$ θα πρέπει συγχρόνως $\mu \cdot \Gamma Z > \nu \cdot \Delta Z$
- αν $\mu \cdot AE = \nu \cdot EB$ θα πρέπει συγχρόνως $\mu \cdot \Gamma Z = \nu \cdot \Delta Z$
- αν $\mu \cdot AE < \nu \cdot EB$ θα πρέπει συγχρόνως $\mu \cdot \Gamma Z < \nu \cdot \Delta Z$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό V.5 ισχύει το ζητούμενο.

2.1.3. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Το γεγονός ότι η μέθοδος της ανάλυσης χρησιμοποιείται κατά την απόδειξη μιας και μόνο πρότασης σε ολόκληρο το έργο του Ευκλείδη δεν σημαίνει ότι όλες οι υπόλοιπες αποδείξεις αποκτήθηκαν μέσω της παραγωγικής διαδικασίας με την οποία παρουσιάζονται. Σύμφωνα με τον Gardies[55], οι περισσότερες από τις αποδείξεις των προτάσεων οι οποίες περιλαμβάνονται στα «Στοιχεία» δεν μπορεί παρά να ανακαλύφθηκαν μέσω κάποιας αναλυτικής διαδικασίας η οποία με τη σειρά της υπέδειξε την πορεία της σύνθεσης. Απλώς ο Ευκλείδης δεν την συμπεριέλαβε. Μεταγενέστεροι μαθηματικοί, όπως ο Καρτέσιος, υποστήριζαν ότι οι αρχαίοι Έλληνες συνήθιζαν να αποκρύπτουν την αναλυτική διαδικασία προκειμένου να προφυλάξουν τα μυστικά των ανακαλύψεων τους. Κάτι τέτοιο όμως δεν φαίνεται να αντιστοιχεί στην πραγματικότητα. Το πιο πιθανό είναι ότι ο Ευκλείδης δεν την συμπεριέλαβε, αν και όπου χρησιμοποιήθηκε, απλώς επειδή το κίνητρό του σε σχέση με τη συγγραφή των «Στοιχείων», δεν ήταν να παρουσιάσει τον πραγματικό τρόπο με τον οποίο αποκτήθηκαν τα αποτελέσματα αλλά τα ίδια τα αποτελέσματα.

Ο Gardies αναφέρει ως χαρακτηριστικό παράδειγμα προς ισχυροποίηση του ισχυρισμού του την απόδειξη της πρότασης XIII.17 των «Στοιχείων», επισημαίνοντας ότι οι βασικοί συσχετισμοί μεταξύ των επιμέρους γεωμετρικών αντικειμένων τα οποία εμπλέκονται στο σχήμα, δύσκολα θα είχαν εντοπιστεί εάν δεν θεωρούσε κάποιος ότι η κατασκευή αυτή έχει ήδη πραγματοποιηθεί. Η πρόταση XIII.17 αναφέρεται στην κατασκευή του κανονικού δωδεκαέδρου και στη δυνατότητα εγγραφής του σε σφαίρα. Σε γενικές γραμμές, η πορεία της ανάλυσης ξεκινά φέρνοντας στο προσκήνιο ότι από τις 20 κορυφές του δωδεκαέδρου, οι 8 αποτελούν κορυφές κύβου ενώ οι υπόλοιπες 12 βρίσκονται μεταξύ των εδρών του κύβου και της επιφάνειας της σφαίρας. Έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ενός κύβου. Στη συνέχεια, η ανάλυση του σχήματος αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι έδρες του δωδεκαέδρου με τις ακμές του κύβου, εντοπίζοντας μια σχέση μεταξύ κάθε πλευράς των κανονικών πενταγώνων, τα οποία αποτελούν τις έδρες του δωδεκαέδρου, με κάποια από τις ακμές του κύβου. Όμως η σχέση η οποία τελικά αποκαθίσταται αποτελεί προϊόν μιας αλληλουχίας βημάτων που δύσκολα θα μπορούσε κανείς να προβλέψει και να προσφέρει μέσω παραγωγικών βημάτων, δεδομένου ότι χρησιμοποιούνται θεωρήματα της γεωμετρίας του επιπέδου τα οποία δεν συμπεριλαμβάνονται στα προηγούμενα βιβλία. Πρόκειται για τις

55 Gardies (2001, 32)

12 προτάσεις γεωμετρίας του επιπέδου με τις οποίες ξεκινάει το δέκατο τρίτο βιβλίο. Οι πρώτες 6 αφορούν τομές ευθειών, παρ' όλα αυτά δεν διατυπώθηκαν από τον Εύδοξο και δεν αποτελούν μέρος του πέμπτου βιβλίου, ενώ οι επόμενες 6 ασχολούνται με ιδιότητες στοιχείων κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο αλλά δεν συγκαταλέγονται στο τέταρτο βιβλίο όπως θα ήταν αναμενόμενο. Αντιθέτως, εντάσσονται τελικά στο δέκατο τρίτο βιβλίο διότι η αναγκαιότητα θεμελίωσής τους προέκυψε μέσα από την πορεία της απόδειξης της κατασκευασιμότητας των πέντε κανονικών πολυέδρων, και πιο συγκεκριμένα μέσα από την αναλυτική πορεία η οποία ακολουθήθηκε. Η τελευταία παρατήρηση αναδεικνύει ακόμα περισσότερο την σπουδαιότητα του ευρετικού χαρακτήρα της ανάλυσης, αφού όπως φαίνεται ο ρόλος της δεν περιορίζεται στην εύρεση λύσης σε ένα πρόβλημα. Στην περίπτωση δύσκολων προβλημάτων, όπως είναι η πρόταση XIII.17, λειτουργεί παράλληλα και ως μέσο ανάδειξης νέων προτάσεων.

Η κατασκευή του κανονικού δωδεκαέδρου μέσω ανάλυσης και σύνθεσης παρουσιάζεται από τον Πάππο στο τρίτο βιβλίο της «Συναγωγής», στο οποίο περιλαμβάνονται και οι υπόλοιπες τέσσερις κατασκευές. Η προσέγγιση η οποία ακολουθείται είναι διαφορετική από αυτή που εικάζουμε ότι ακολουθήθηκε στα «Στοιχεία», ενώ χρησιμοποιούνται και κάποιες ιδιότητες της σφαίρας οι οποίες δεν περιέχονται σε αυτά. Η κατασκευή του Πάππου βασίζεται στον προσδιορισμό τεσσάρων παράλληλων κύκλων της σφαίρας στους οποίους ανήκουν οι είκοσι κορυφές του δωδεκαέδρου[56].

2.2. ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Τα «Δεδομένα» αποτελούν μαζί με τα «Στοιχεία» τα μοναδικά έργα του Ευκλείδη τα οποία έχουν διασωθεί εξ ολοκλήρου στα ελληνικά. Η σύνταξή τους ακολουθεί τον παραγωγικό χαρακτήρα των «Στοιχείων» και δεν εντοπίζεται καμία αναφορά στη μέθοδο της ανάλυσης. Παρ' όλα αυτά η σύνδεση μεταξύ «Δεδομένων» και ανάλυσης δεν έχει αμφισβητηθεί από κανένα μελετητή.

Τα «Δεδομένα» περιλαμβάνουν 15 ορισμούς και 94 προτάσεις. Οι ορισμοί αφορούν τους τρόπους με τους οποίους ένα μέγεθος γίνεται αντιληπτό ως δεδομένο και μερικές σχέσεις διάταξης. Οι προτάσεις αναφέρονται σε ζητήματα της γεωμετρίας του επιπέδου και

56 Σπανδάγος Ε. (2001, 295)

ακολουθούν τη δομή: «αν αυτά τα στοιχεία ενός σχήματος είναι *δεδομένα*, τότε και αυτά τα στοιχεία του σχήματος είναι *δεδομένα*». Οι προτάσεις αυτές όμως δεν συνεισφέρουν στο επίπεδο της γνώσης, αντιθέτως φαίνεται να αποτελούν μια επαναδιατύπωση των προτάσεων των πρώτων έξι βιβλίων των Στοιχείων ακολουθώντας το ειδικό λεξιλόγιο των «Δεδομένων». Αυτή η παρατήρηση αποτελεί το βασικό επιχείρημα των μελετητών ως προς τη σύνδεση «Δεδομένων» και ανάλυσης.

Όπως υποστηρίζουν, ο στόχος του έργου ήταν να αναδείξει ότι σε κάθε μαθηματικό πρόβλημα αυτά που είναι *δεδομένα*, εκ των πραγμάτων οδηγούν και σε άλλα *δεδομένα*, τα οποία συμπληρώνουν – οριοθετούν το περιβάλλον του εκάστοτε προβλήματος και είναι αυτά τα οποία θα οδηγήσουν στην επίλυσή του. Όμως, επειδή τα ίδια *δεδομένα* οδηγούν σε μια πληθώρα σχέσεων – κατασκευών, έχοντας μια πλήρη λίστα όλων όσων προκύπτουν από αυτά, παρέχεται η άμεση δυνατότητα επιλογής εκείνων των σχέσεων – κατασκευών που είναι πράγματι σχετικές με το πρόβλημα και αποφυγής ενδεχόμενων αντιπερισπασμών. Παράλληλα, η δομή των «Δεδομένων» προσφέρει τον άμεσο προσδιορισμό του ελάχιστου συνόλου προαπαιτούμενων στοιχείων για την πραγματοποίηση μιας κατασκευής. Έτσι, η πρόθεση του Ευκλείδη φαίνεται ότι ήταν να προσφέρει αυτό τον οδηγό, στον οποίο θα μπορούσε να ανατρέχει κανείς κάθε φορά που βρισκόταν αντιμέτωπος με ένα πρόβλημα. Ο Simson[57] αναφερόμενος στο σχόλιο του Μαρίνου σημειώνει ότι τα «Δεδομένα» του Ευκλείδη είναι το πρώτο από τα βιβλία των αρχαίων γεωμετρών που γράφτηκε για να διευκολύνει και να προάγει τη μέθοδο της ανάλυσης[58].

Σύμφωνα λοιπόν με τα σχόλια του Μαρίνου στα «Δεδομένα»:

> *«ὡς πρὸς τὴν παροῦσαν χρείαν τοῦ δεδομένου ἐφεξῆς ἂν εἴη τὸ χρήσιμον τῆς περὶ αὐτοῦ πραγματείας ἀποδοῦναι. ἔστι δὴ καὶ τοῦτο τῶν πρὸς ἄλλο ἐχόντων τὴν ἀναφοράν· πρὸς γὰρ τὸν ἀναλυόμενον λεγόμενον τόπον ἀναγκαιοτάτη ἐστὶν ἡ τούτου γνῶσις. ὅσην δὲ ἔχει δύναμιν ἐν ταῖς μαθηματικαῖς ἐπιστήμαις καὶ ταῖς συγγενῶς ἐχούσαις ὀπτικῆς τε καὶ κανονικῆς ὁ ἀναλυόμενος τόπος, ἐν ἄλλοις διώρισται, καὶ ὅτι ἀποδείξεώς ἐστιν εὕρεσις ἡ ἀνάλυσις καὶ ὅπως πρὸς εὕρεσιν τῆς τῶν ὁμοίων ἀποδείξεως ἡμῖν συμβάλλεται καὶ ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ δύναμιν*

57 Gardies (2001, 100)

58 Ο Άραβας μαθηματικός του 10ου αιώνα μ.Χ. Ibn al Haytham έγραψε ένα έργο στο ύφος των Δεδομένων του Ευκλείδη προσθέτοντας 48 καινούρια θεωρήματα (Gardies, 2001, 96).

ἀναλυτικὴν κτήσασθαι τοῦ πολλὰς ἀποδείξεις τῶν ἐπὶ μέρους ἔχειν. εἰς πάσας τοίνυν τὰς τοιαύτας ἐπιστήμας χρησίμη οὖσα ἡ περὶ τοῦ δεδομένου θεωρία, ἐπείπερ καὶ εἰς ἀνάλυσιν μέγα συμβάλλεται»

2.3. ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Τα «Πορίσματα» αποτελούν μια συλλογή τριών βιβλίων, η οποία δεν έχει διασωθεί εξ ολοκλήρου. Ακολουθώντας τα αποσπάσματα που αναφέρονται στον Πρόκλο και στη «Συναγωγή» του Πάππου έγιναν κάποιες προσπάθειες ανασύνθεσής του, αρχικά από τον Simson (1776) και αργότερα από τον Chasles (1860)[59]. Τα «Πορίσματα» περιλαμβάνουν 171 προτάσεις και 38 λήμματα, που αναφέρονται κατά κύριο λόγο σε γεωμετρικούς τόπους σημείων και γραμμών. Οι μελετητές σχολιάζουν ότι αποτελεί ένα από τα δυσκολότερα έργα στο κομμάτι της ερμηνείας, παρ' όλα αυτά θεωρούν ότι η σύνδεσή του με την ανάλυση είναι αναμφισβήτητη.

Ο όρος *πόρισμα* σύμφωνα με τον Πρόκλο έχει δύο ερμηνείες. Η συνήθης χρήση του όρου η οποία συναντάται στα «Στοιχεία» αναφέρεται σε μία πρόταση η οποία συνάγεται σχεδόν άμεσα από ένα θεώρημα. Ο όρος όμως χρησιμοποιείται και για μία πρόταση στην οποία αυτό που ζητείται απαιτεί εύρεση και όχι μόνο κατασκευή ή κάποια θεωρητική διαδικασία. Εδώ ο όρος χρησιμοποιείται σύμφωνα με τη δεύτερη σημασία.

Ο κύριος στόχος της συγγραφής των «Πορισμάτων» δεν ήταν τόσο η παρουσίαση των αποτελεσμάτων που περιλαμβάνονται σε αυτά, όσο οι τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την απόκτησή τους. Η βασική επιδίωξη του Ευκλείδη, ήταν να προσφέρει μια καθοδήγηση σε σχέση με τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς, βάσει των δεδομένων του εκάστοτε προβλήματος, να καθορίσει τη φύση του, και κατ' επέκταση την κατεύθυνση στην οποία πρέπει να κινηθεί για να καταφέρει να το επιλύσει. Ως αποτέλεσμα, τα «Πορίσματα» οδηγούσαν σε μια ταξινόμηση των διαφόρων προβλημάτων προς όφελος της ανάλυσης.

59 Ευκλείδη «Στοιχεία», Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ (2001, 48)

3. ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΝΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ

3.1. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Ο Αρχιμήδης γεννήθηκε και πέθανε στις Συρακούσες (287π.Χ. – 212π.Χ.), ήταν γιος του αστρονόμου Φειδία και θεωρείται ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς – μηχανικούς της αρχαιότητας. Δεν γνωρίζουμε ιδιαίτερες πληροφορίες για τη ζωή του. Κάποιοι μελετητές υποστηρίζουν ότι είναι πολύ πιθανό να είχε ζήσει για κάποιο διάστημα στην Αλεξάνδρεια όπου ανέπτυξε φιλία με μαθητές του Ευκλείδη. Θεωρούν ότι αυτός πρέπει να είναι ο λόγος για τον οποίο όχι μόνο γνώριζε τα αποτελέσματα των εργασιών τους αλλά τους έστελνε και μέσω προσωπικής αλληλογραφίας τις δικές του μαθηματικές ανακαλύψεις.

Σύμφωνα με τον Heath[60]: *«όλα του τα έργα αποτελούν μνημεία μαθηματικής παρουσίασης· η προοδευτική ανακάλυψη του σχεδίου προσέγγισης, η αριστοτεχνική διάταξη των προτάσεων, η σταθερή απάλειψη όλων όσων δεν σχετίζονται άμεσα με τον σκοπό, η ολοκλήρωση, εντυπωσιάζουν τόσο πολύ με την τελειότητά τους που δημιουργούν ένα αίσθημα δέους στον αναγνώστη[...] Ταυτόχρονα όμως υπάρχει ένα μυστήριο γύρω από τον τρόπο με τον οποίο βρήκε τα αποτελέσματά του. Αν υπήρχαν μόνο οι γεωμετρικές πραγματείες, ο Αρχιμήδης θα φαινόταν, όπως είχε πει ο Wallis, σαν να είχε σκόπιμα αποκρύψει τα ίχνη των ερευνών του, σαν να ήθελε να στερήσει από τις επόμενες γενιές το μυστικό της μεθόδου του και να ήθελε απλώς να αποσπάσει από αυτές τον έπαινο για τα αποτελέσματά του»*. Αυτή η άποψη επικρατούσε για τους περισσότερους έλληνες μαθηματικούς της αρχαιότητας, αλλά όπως αναφέρθηκε και στην περίπτωση του Ευκλείδη, το πιθανότερο είναι ότι δεν αντιστοιχεί στην πραγματικότητα. Κατά πάσα πιθανότητα, η αναλυτική μέθοδος δεν συμπεριλήφθηκε στα έργα τους απλώς επειδή το κίνητρό τους δεν ήταν να παρουσιάσουν τον τρόπο με τον οποίο απέκτησαν τα εκάστοτε αποτελέσματα αλλά τα ίδια τα αποτελέσματα.

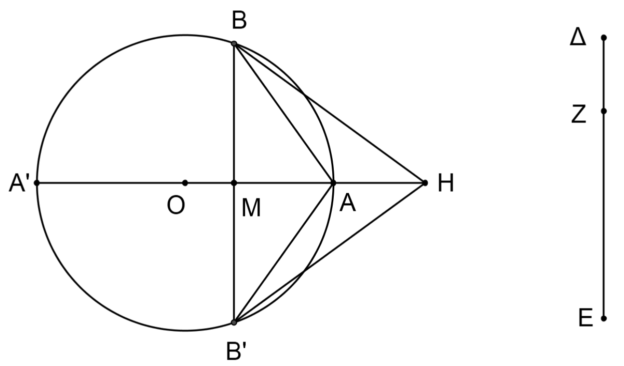
Το μόνο έργο στο οποίο ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί τη μέθοδο της ανάλυσης και σύνθεσης είναι το «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου». Το έργο αυτό αποτελείται από δύο βιβλία. Το πρώτο περιλαμβάνει 44 θεωρήματα τα οποία αναφέρονται στην κυρτή επιφάνεια και τον όγκο κυλίνδρου, κόλουρου κώνου, σφαίρας και σφαιρικού τομέα. Όλες οι αποδείξεις γίνονται συνθετικά. Το δεύτερο βιβλίο περιλαμβάνει 9 προτάσεις, 3 θεωρήματα και 6 προβλήματα,

60 Heath (1981, τόμος II, 20 – 21)

εφαρμογές – συνέπειες του πρώτου βιβλίου, οι αποδείξεις των οποίων ακολουθούν αποκλειστικά την αναλυτικοσυνθετική μέθοδο. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η απόδειξη της πρότασης ΙΙ.7 :

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.7

«Ἀπὸ τῆς δοθείσης σφαίρας τμῆμα τεμεῖν ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ τμῆμα πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχοντα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ ὕψος ἴσον τὸν δοθέντα λόγον ἔχειν»



ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και η ζητούμενη κατασκευή έχει επιτευχθεί. Έστω ΑΑ' η διάμετρος ενός μεγάλου κύκλου της σφαίρας και ΒΒ' μια χορδή του κύκλου, κάθετη στην ΑΑ', από την οποία διέρχεται το επίπεδο τομής. Έστω Μ το σημείο τομής των ΑΑ', ΒΒ' και Ο το κέντρο του κύκλου. Στην προέκταση της ΟΑ παίρνουμε σημείο Η, τέτοιο ώστε

$$\frac{OA'+A'M}{A'M}=\frac{HM}{MA} \quad (1) \text{ (Στοιχεία VI, 12)}$$

Ο κώνος ΗΒΒ' είναι ισοδύναμος με το σφαιρικό τομέα ΑΒΒ' (Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου ΙΙ, 2). 'Ετσι, ο λόγος $\frac{HM}{MA}$ θα είναι ίσος με το δεδομένο λόγο (Στοιχεία XII, 14). Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος $\frac{OA'+A'M}{A'M}$ θα είναι δεδομένος, επομένως Α'Μ δεδομένο, δηλαδή ΒΒ' δεδομένο.

Η σχέση (1) αποτελεί διορισμό[61], ο οποίος σχετίζεται με τη δυνατότητα ύπαρξης σημείου Η τέτοιου ώστε $\frac{OA'+A'M}{A'M}=\frac{HM}{MA}$.

Έχουμε ότι $A'M<AA'$, επομένως $\frac{OA'}{A'M}>\frac{OA'}{AA'}$, άρα $\frac{OA'+A'M}{A'M}>\frac{OA'+AA'}{AA'}$, δηλαδή $\frac{OA'+A'M}{A'M}>\frac{3}{2}$. Συνεπώς το πρόβλημα έχει λύση αν ο δεδομένος λόγος είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{2}$.

ΣΥΝΘΕΣΗ

Έστω Ο το κέντρο της σφαίρας και ΑΑ' η διάμετρος ενός μεγάλου κύκλου. Έστω ένα τμήμα ΔΕ στο οποίο παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε $\frac{\Delta E}{EZ}$ ίσος με το δεδομένο λόγο, ο οποίος είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{2}$. Όμως $\frac{OA'+AA'}{AA'}=\frac{3}{2}$, επομένως $\frac{\Delta E}{EZ}>\frac{OA'+AA'}{AA'}$, δηλαδή $\frac{\Delta E}{EZ}>\frac{OA'}{AA'}$. Παίρνουμε σημείο Μ στην ΑΑ', τέτοιο ώστε $\frac{\Delta E}{EZ}=\frac{OA'}{A'M}$ (1). Από το σημείο Μ φέρουμε μια κάθετη στην ΑΑ', η οποία τέμνει τον κύκλο στα Β, Β' και κατασκευάζουμε ένα κάθετο επίπεδο στην ΑΑ', το οποίο διέρχεται από το ΒΒ'.

Στην προέκταση της ΟΑ παίρνουμε σημείο Η, τέτοιο ώστε $\frac{OA'+A'M}{A'M}=\frac{HM}{MA}$ (Στοιχεία VI, 12). Από την (1) έχουμε ότι $\frac{HM}{MA}=\frac{\Delta E}{EZ}$. Αυτό σημαίνει ότι ο κώνος ΗΒΒ' είναι ισοδύναμος με το σφαιρικό τομέα ΑΒΒ', επομένως ο λόγος του όγκος του σφαιρικού τομέα ΑΒΒ' προς τον όγκο του κώνου ΑΒΒ' ισούται με τον δεδομένο λόγο.

61 Ο όρος *διορισμός* έχει δύο ερμηνείες. Εδώ αναφέρεται στον προσδιορισμό των απαραίτητων συνθηκών σε σχέση με την επιλυσιμότητα ενός προβλήματος, αλλά στα πρώτα στάδια του μαθηματικού λόγου, αποτελούσε μια αναδιατύπωση της εκφώνησης, η οποία ακολουθούσε την καθολική συγκεκριμενοποίηση (*έκθεση*) κατά την οποία εισάγονταν οι μεταβλητές (Παπαδοπετράκης, 2013).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η ανάλυση στον Αρχιμήδη ξεκινά από τα δεδομένα, το ζητούμενο και ένα σύνολο γνωστών προτάσεων. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται ένα πλήθος βοηθητικών κατασκευών προκειμένου να προσδιοριστεί η θέση ενός σημείου το οποίο με τη σειρά του θα εξασφαλίσει τη λύση στο πρόβλημα. Η σύνθεση αποτελείται από δύο μέρη: την κατασκευή και την απόδειξη. Η κατασκευή ξεκινά από μια βοηθητική κατασκευή η οποία δεν περιλαμβάνεται στο αναλυτικό μέρος αλλά υπαγορεύεται από το διορισμό, ενώ η υπόλοιπη πορεία φαίνεται να ακολουθεί σχεδόν τα ίδια βήματα με την ανάλυση και όχι τα αντίστροφα.

3.2. Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΤΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ

Ο Απολλώνιος θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας μετά τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη, γεννήθηκε στην πόλη Πέργη της Παμφυλίας της Μικράς Ασίας το 262π.Χ. και είναι γνωστός ως ο «μέγας γεωμέτρης». Ελάχιστες πληροφορίες γνωρίζουμε για τη ζωή του μεταξύ των οποίων ότι σπούδασε και δίδαξε στο Μουσείο της Αλεξάνδρειας έχοντας ως δασκάλους τους μαθητές του Ευκλείδη. Έγραψε είκοσι δύο έργα τα οποία αφορούσαν ζητήματα γεωμετρίας, μηχανικής και αστρονομίας. Από αυτά μόνο τέσσερα έχουν διασωθεί : τα «Κωνικά», η «Εύρεση δύο μέσων αναλόγων», η «Σύγκριση δωδεκαέδρου και εικοσαέδρου» και η «Περί λόγου αποτομής» (στα αραβικά). Για τα υπόλοιπα αντλούμε πληροφορίες από το έβδομο βιβλίο της «Συναγωγής» του Πάππου.

3.2.1. ΚΩΝΙΚΑ

Τα «Κωνικά» αποτελούν το κορυφαίο σωζόμενο έργο του Απολλώνιου. Πρόκειται μια συλλογή από οκτώ βιβλία, από τα οποία τα τέσσερα πρώτα έχουν διασωθεί στα ελληνικά, τα επόμενα τρία στα αραβικά, ενώ το όγδοο και τελευταίο έχει χαθεί. Τα αποτελέσματα τα οποία περιλαμβάνονται σε αυτά δεν αποδίδονται εξ ολοκλήρου στον Απολλώνιο. Πρόκειται για ένα έργο στο οποίο περιλαμβάνονται όλα τα αποτελέσματα προγενέστερων εργασιών σε σχέση με τις κωνικές τομές, αλλά είναι κοινώς αποδεκτό ότι στη συνέχεια ανέπτυξε και ο ίδιος το ζήτημα σε πολύ μεγάλο βαθμό. Τα τέσσερα πρώτα βιβλία έχουν βασιστεί στον Ευκλείδη[62]. Είχε γράψει και αυτός ένα έργο στο οποίο διαπραγματευόταν ζητήματα κωνικών τομών, το οποίο όμως δεν έχει διασωθεί. Κάποια απο τα αποτελέσματα του Ευκλείδη βέβαια αποτελούν και αυτά με τη σειρά τους αποτελέσματα προγενέστερων εργασίων που αποδίδονται στους Πυθαγόρειους, το Μέναιχμο και τον Αρισταίο τον πρεσβύτερο[63]. Ο Heath αναφέρει ότι ο ίδιος ο Ευκλείδης είχε επισημάνει ότι πολλά από τα αποτελέσματά του οφείλονται στον Αρισταίο[64]. Η εργασία του Απολλώνιου στα «Κωνικά» αποτέλεσε μεγάλη επιρροή για τους μεταγενέστερους μαθηματικούς όπως ο Κέπλερ, ο Νεύτωνας και ο Καρτέσιος καθώς η μέθοδος η οποία αναπτύσσεται σε αυτά αποτέλεσε τη βάση της ανάπτυξης της αναλυτικής γεωμετρίας.

---

62 Bunt, Jones, Bedient, *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών* (1981, 225)
63 Σταμάτης, *Απολλωνίου Κωνικά Α'* (1975, 5 – 6)
64 Heath (1981, τόμος ΙΙ, 116)

Ο τρόπος συγγραφής των «Κωνικών» είναι κατά κύριο λόγο συνθετικός, παρόλα αυτά στο δεύτερο βιβλίο υπάρχουν κάποιες προτάσεις οι οποίες προσεγγίζονται μέσω της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου. Μία από αυτές είναι η πρόταση 49, η οποία περιγράφει την κατασκευή της εφαπτομένης μιας δεδομένης κωνικής τομής, εάν δίνεται επιπλέον και ένα σημείο το οποίο να ανήκει στην εφαπτομένη. Κατά τη διατύπωση του προβλήματος δεν αναφέρεται το είδος της κωνικής τομής, έτσι η απόδειξη περιλαμβάνει τρία μέρη, στα οποία εξετάζεται ξεχωριστά η περίπτωση της παραβολής, της υπερβολής και της έλλειψης. Η διαπραγμάτευση του προβλήματος για κάθε κωνική δεν γίνεται μέσω μιας γενικής περίπτωσης, αλλά γίνεται εξαρχής μια διάκριση υποπεριπτώσεων σε σχέση με τη θέση του δεδομένου σημείου, και κάθε μία από αυτές μελετάται ξεχωριστά. Έτσι, η απόδειξη αποτελείται από 7 διαδοχικές αναλύσεις και συνθέσεις, από τις οποίες οι πρώτες 3 αναφέρονται στην παραβολή, οι επόμενες 5 στην υπερβολή και 2 τελευταίες στην έλλειψη.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται 3 από τις 7 αναλύσεις και συνθέσεις που πραγματοποιούνται κατά την απόδειξη της πρότασης. Η παρουσίαση ακολουθεί την περιγραφή του Απολλώνιου[65]. Έχει γίνει επιλογή ενός παραδείγματος για κάθε κωνική, κάθε ένα από τα οποία αναφέρεται σε μια διαφορετική περίπτωση σε σχέση με τη θέση του δεδομένου σημείου. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αναπτύσσονται με παρόμοιο τρόπο.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΙΙ.49

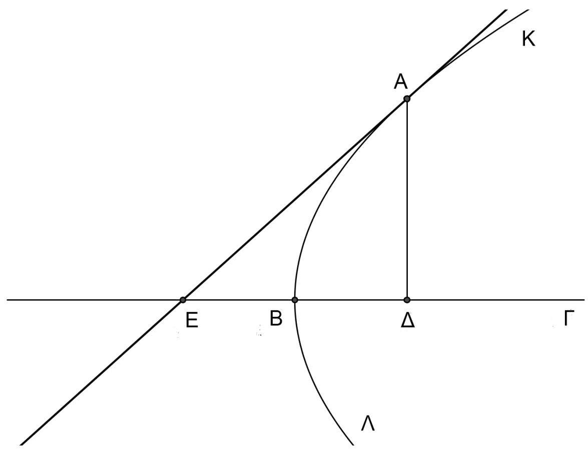
«Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημεῖου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημεῖου εὐθεῖαν καθ' ἣν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς»

(Ι)

Έστω ΚΒΛ η δοθείσα παραβολή και Α το δεδομένο σημείο από το οποίο ζητείται να φέρουμε την εφαπτόμενη σε αυτή. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το σημείο Α δεν βρίσκεται εντός της παραβολής. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις για τη θέση του Α: (α) να ανήκει στην παραβολή, (β) να αποτελεί σημείο του άξονά της ΒΓ, (γ) να είναι τυχαίο σημείο στο εξωτερικό της παραβολής.

65 Σταμάτης, *Απολλωνίου Κωνικά Β'* (1975, 89 – 103)

(α)



ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω ότι το Α είναι σημείο της παραβολής και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει κατασκευαστεί και τέμνει τον άξονα της παραβολής στο σημείο Ε. Από το Α φέρουμε κάθετη στον άξονα της παραβολής, η οποία τον τέμνει στο σημείο Δ. Η ΑΔ θα είναι δεδομένης θέσης αφού το Α είναι δεδομένο (Δεδομένα, 30). Όμως ΒΕ = ΒΔ (Κωνικά, Ι.35) και ΒΔ δεδομένη. Άρα θα είναι δεδομένη και η ΒΕ. Όμως επειδή το Β είναι δεδομένο, τότε και το Ε θα είναι δεδομένο (Δεδομένα, 27). Αλλά το Α είναι δεδομένο, επομένως και η ΑΕ δεδομένη.

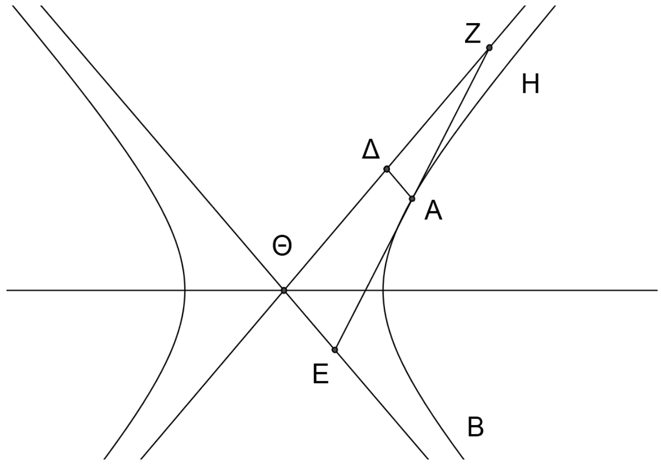
ΣΥΝΘΕΣΗ

Από το σημείο Α φέρουμε κάθετη στον άξονα της παραβολής. Έστω Δ το σημείο τομής της καθέτου και του άξονα της παραβολής. Παίρνουμε σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΕ. Ενώνουμε τα σημεία Α, Ε. Η ΑΕ αποτελεί τη ζητούμενη εφαπτομένη (Κωνικά, Ι.35).

(ΙΙ)

Έστω ΚΒΛ ένας από τους δύο κλάδους της δοθείσας υπερβολής και Ζ το δεδομένο σημείο από το οποίο ζητείται να φέρουμε την εφαπτόμενη σε αυτή. Διακρίνουμε πέντε περιπτώσεις για τη θέση του Ζ: (α) να ανήκει στην υπερβολή, (β) να αποτελεί σημείο του άξονά της ΒΓ, (γ), (δ) να βρίσκεται στο εσωτερικό μιας εκ των τεσσάρων γωνιών που σχηματίζονται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής (μελετώνται ανά δύο ως δύο ξεχωριστές περιπτώσεις), (ε) αποτελεί σημείο μιας εκ των δύο ασύμπτωτων.

(ε)



ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω ότι το δεδομένο σημείο Ζ ανήκει σε μία εκ των ασύμπτωτων της υπερβολής. Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και η εφαπτομένη ΖΑ έχει κατασκευαστεί, όπου Α το σημείο επαφής. Έστω Ε το σημείο τομής της προέκτασης της ευθείας ΖΑ με την άλλη ασύμπτωτη. Έστω Θ το σημείο τομής των δύο ασύμπτωτων. Φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην ΘΕ η οποία να διέρχεται από το Α. Έστω Δ το σημείο τομής της ευθείας ε με την ΘΖ. Τότε ΔΘ = ΔΖ (Στοιχεία VI, 1). Όμως ΖΑ = ΑΕ. Η ΖΘ είναι δεδομένη, άρα και το σημείο Δ είναι δεδομένο (Δεδομένα, 7). Αυτό σημαίνει ότι και το ΑΔ είναι δεδομένο (Δεδομένα, 28). Όμως η τομή είναι δεδομένη, άρα και το Α δεδομένο (Δεδομένα, 25). Αλλά το Ζ είναι δεδομένο, δηλαδή και η ευθεία ΖΑΕ δεδομένη.

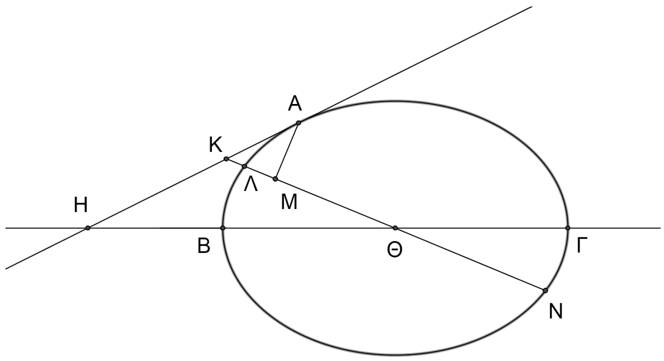
ΣΥΝΘΕΣΗ

Έστω ο κλάδος της υπερβολής ΑΒ με ΘΖ, ΘΕ ασύμπτωτες της υπερβολής. Έστω Ζ το δεδομένο σημείο, το οποίο αποτελεί σημείο μιας εκ των δύο ασύμπτωτων. Έστω Δ το μέσο του ΘΖ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στην ασύμπτωτη ΘΕ, η οποία τέμνει την υπερβολή στο σημείο Α. Ενώνουμε τα σημεία Ζ, Α. Ισχύει ότι ΖΔ = ΔΘ, το οποίο σημαίνει ότι ΖΑ = ΑΕ (Στοιχεία VI, 2). Άρα ΖΑΕ εφάπτεται της τομής.

(III)

Έστω ΑΒΓ η δοθείσα έλλειψη και Κ το δεδομένο σημείο από το οποίο ζητείται να φέρουμε την εφαπτόμενη σε αυτή. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη θέση του Κ: (α) ανήκει στην έλλειψη, (β) βρίσκεται σε τυχαίο σημείο στο εξωτερικό της.

(β)



ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω Κ τυχαίο εξωτερικό σημείο της έλλειψης. Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει κατασκευαστεί και είναι η ΚΑ, όπου Α το σημείο επαφής. Έστω Θ το κέντρο της έλλειψης. Φέρουμε την ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Κ και το κέντρο της έλλειψης. Έστω Λ, Ν τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με την έλλειψη. Τα Λ, Ν είναι δεδομένα (Δεδομένα, 26). Από το σημείο Α φέρουμε κάθετη στη ΛΝ, η οποία την τέμνει στο σημείο Μ. Τότε $\frac{NK}{K\Lambda}=\frac{NM}{M\Lambda}$ (Κωνικά Ι, 36). Όμως ο λόγος $\frac{NK}{K\Lambda}$ είναι δεδομένος (Δεδομένα, 1), άρα και ο λόγος $\frac{NM}{M\Lambda}$ είναι δεδομένος. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Μ είναι δεδομένο, δηλαδή και η ΜΑ δεδομένη (Δεδομένα, 29). Επομένως το σημείο Α είναι δεδομένο (Δεδομένα, 25). Αλλά και το σημείο Κ είναι δεδομένο, άρα και η εφαπτομένη ΚΑ είναι δεδομένη.

ΣΥΝΘΕΣΗ

Από το σημείο Κ φέρουμε την ευθεία ΚΘ, όπου Θ κέντρο της έλλειψης. Ονομάζουμε Λ, Ν τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με την έλλειψη. Άρα Κ, Λ, Ν δεδομένα και υπάρχει σημείο Μ στην ευθεία τέτοιο ώστε $\frac{NK}{K\Lambda}=\frac{NM}{M\Lambda}$ (Κωνικά Ι, 36). Άρα το σημείο Μ είναι δεδομένο. Φέρουμε κάθετη στην ΚΘ στο σημείο Μ, το οποίο τέμνει την έλλειψη στο σημείο Α. Ενώνουμε τα δεδομένα σημεία Α, Κ. Η ΑΚ εφάπτεται της έλλειψης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η ανάλυση ξεκινά υποθέτοντας τη ζητούμενη κατασκευή και προχωρά συνδυάζοντας τα δεδομένα του προβλήματος με άλλες γνωστές προτάσεις μέχρι να καταλήξει στο ότι πέρα από το δεδομένο σημείο της εφαπτομένης, υπάρχει και δεύτερο το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί. Η σύνθεση ξεκινά από τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας τις βοηθητικές κατασκευές οι οποίες έχουν παρουσιαστεί κατά την ανάλυση καταλήγει στη ζητούμενη κατασκευή. Όμως, η σύστασή της δεν προκύπτει αντιστρέφοντας τα βήματα της ανάλυσης. Στην περίπτωση (Ια) ανάλυση και σύνθεση ακολουθούν σχεδόν την ίδια σειρά παραγωγικών βημάτων και δεν παρατηρείται καμία αντιστροφή. Το ίδιο ισχύει και στις περιπτώσεις (ΙΙε), (ΙΙΙβ) με εξαίρεση το βήμα για τον προσδιορισμό των σημείων Δ, Α και Μ, Α αντίστοιχα. Τόσο στην ανάλυση όσο και στη σύνθεση χρησιμοποιείται σε μεγάλο βαθμό η θεωρία των «Δεδομένων» του Ευκλείδη.

Κάποιες φορές, η σύνθεση ακολουθείται από ένα σχόλιο, το οποίο άλλες φορές εστιάζει στο πλήθος των δυνατών λύσεων (αν και δεν γίνεται σε όλες τις περιπτώσεις όπου η λύση δεν είναι μονοσήμαντη), ενώ άλλες φορές γίνεται για να διευκρινίσει ότι οι υποπεριπτώσεις τις οποίες εξετάζει σε κάθε κωνική δεν αποτελούν διαμέριση του συνόλου των λύσεων (για παράδειγμα οι περιπτώσεις (α) και (β) στην παραβολή δίνουν την ίδια λύση όταν το δεδομένο σημείο είναι η κορυφή της παραβολής). Ο Απολλώνιος αναφέρεται επίσης και στην περίπτωση όπου το πρόβλημα είναι αδύνατο, η οποία εντοπίζεται σε μια από τις περιπτώσεις της υπερβολής. Η σύνθεση της περίπτωσης (β) της έλλειψης δεν παρουσιάζεται στον Απολλώνιο, αναφέρεται απλώς ότι γίνεται με παρόμοιο τρόπο.

3.2.2. ΠΕΡΙ ΕΠΑΦΩΝ

Το έργο «Περί Επαφών» δεν έχει διασωθεί και γνωρίζουμε για το περιεχόμενό του από τα σχετικά αποσπάσματα τα οποία περιλαμβάνονται στη «Συναγωγή» του Πάππου. Πρόκειται για μια εργασία η οποία εκτεινόταν σε δύο βιβλία και περιελάμβανε όλες τις δυνατές περιπτώσεις του ακόλουθου προβλήματος: *«Να κατασκευαστεί κύκλος εφαπτόμενος σε άλλους τρεις δεδομένους κύκλους, όπου κάθε κύκλος – και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο – μπορεί να εκφυλιστεί σε σημείο (συρρικνούμενος) ή σε ευθεία (εκτεινόμενος απεριόριστα)»*[66]. Το πρόβλημα είναι γνωστό ως το *«Απολλώνιο πρόβλημα»* και αναλύεται στις ακόλουθες δέκα δυνατές περιπτώσεις :

Να κατασκευαστεί κύκλος που :

[1] Να διέρχεται από τρία δεδομένα σημεία.

[2] Να εφάπτεται τριών δεδομένων ευθειών.

[3] Να διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία και να εφάπτεται δεδομένης ευθείας.

[4] Να εφάπτεται σε δύο δεδομένες ευθείες και να διέρχεται από δεδομένο σημείο.

[5] Να διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία και να εφάπτεται δεδομένου κύκλου.

[6] Να εφάπτεται δύο δεδομένων κύκλων και να διέρχεται από δεδομένο σημείο.

[7] Να εφάπτεται δύο δεδομένων ευθειών και να ενός δεδομένου κύκλου.

[8] Να εφάπτεται δύο δεδομένων κύκλων και μιας δεδομένης ευθείας.

[9] Να εφάπτεται ενός δεδομένου κύκλου, μιας δεδομένης ευθείας και να διέρχεται από δεδομένο σημείο.

[10] Να εφάπτεται τριών δεδομένων κύκλων.

Στον Πάππο δεν αναφέρονται οι λύσεις οι οποίες δόθηκαν από τον Απολλώνιο και αυτό ώθησε πολλούς μαθηματικούς να ασχοληθούν με το πρόβλημα, μεταξύ των οποίων συγκαταλέγονται οι Romanus, Viète, Descartes, Newton, Euler και Gergonne. Όσον αφορά τις δύο πρώτες περιπτώσεις είχαν ήδη αποδειχθεί από τον Ευκλείδη στα «Στοιχεία». Πρόκειται για τις προτάσεις IV.4 και IV.5.

66 Bunt, Jones, Bedient, *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών* (1981, 225)

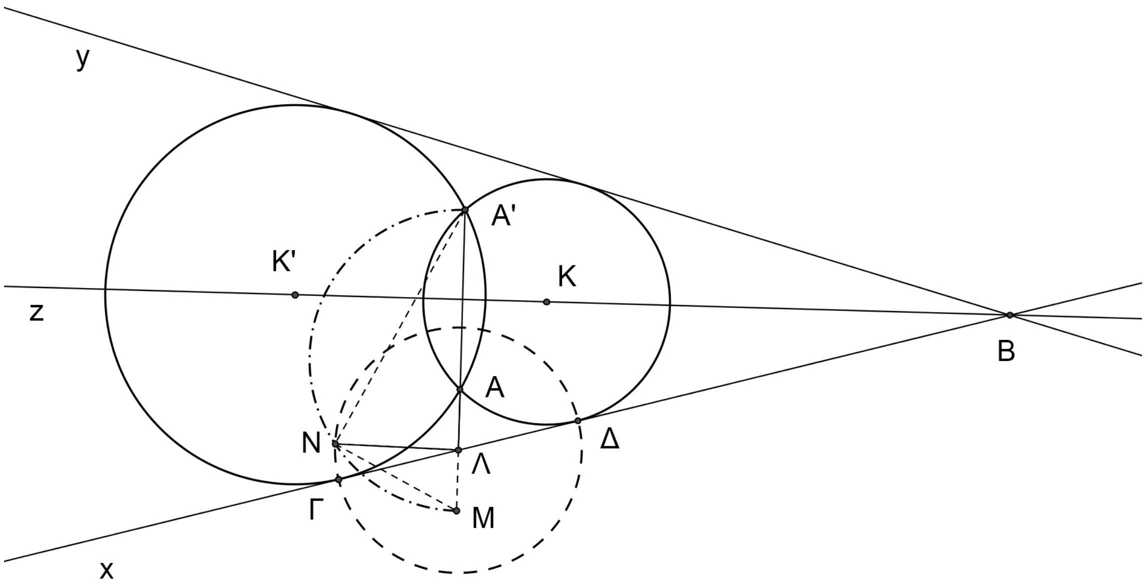
Στη συνέχεια ακολουθεί μόνο το μέρος της ανάλυσης για την τέταρτη περίπτωση του προβλήματος. Η σύνθεση προκύπτει εύκολα αντιστρέφοντας τα βήματα της ανάλυσης[67].

[4] *«Να κατασκευαστεί κύκλος που να εφάπτεται δύο δεδομένων ευθειών και να διέρχεται από δεδομένο σημείο»*

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις σύμφωνα με τις δυνατές σχετικές θέσεις μεταξύ των δεδομένων ευθειών x, y και του δεδομένου σημείου Α :

(Ι) Οι ευθείες x, y τέμνονται και το σημείο Α :

(α) αποτελεί τυχαίο σημείο στο εσωτερικό των δύο ευθειών :



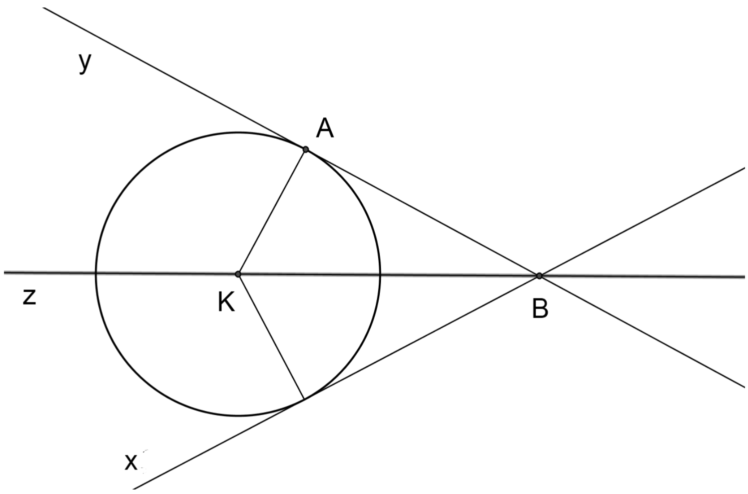
ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Έστω Β το σημείο τομής των δύο ευθειών x, y και Bz η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{B}y$. Το κέντρο του κύκλου Κ θα βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{B}y$. Έστω Α' το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τη Bz. Το Α' θα ανήκει στον κύκλο (Κ, ρ). Όμως, το σημείο Α είναι δεδομένο άρα και το Α' είναι δεδομένο. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στην

67 Η σύνθεση δεν παρουσιάζεται καθώς οι προσεγγίσεις που ακολουθούν δεν είναι οι λύσεις του Απολλώνιου, συνεπώς δεν συνεισφέρουν στο κομμάτι της ερμηνείας.

κατασκευή του κύκλου που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία Α, Α' και εφάπτεται σε δεδομένη ευθεία x (ή y). Έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Α' και της ευθείας x. Τα Α, Α' και η ευθεία x είναι δεδομένα, άρα και το σημείο Λ. Κατασκευάζουμε τη μέση ανάλογο ΛΝ των ΛΑ, ΛΑ' : $\frac{ΛΑ}{ΛΝ}=\frac{ΛΝ}{ΛΑ'}$ και γράφουμε κύκλο με κέντρο το Λ και ακτίνα ΛΝ. Ο δεδομένος κύκλος (Λ, ΛΝ) έχει δύο σημεία τομής Γ, Δ με την ευθεία x. Όμως $ΛΓ^2=ΛΔ^2=ΛΑ\cdot ΛΑ'$. Άρα τα σημεία Γ, Δ αποτελούν τα σημεία επαφής για τις δύο δυνατές λύσεις του προβλήματος. Όμως τα σημεία Γ, Δ και οι ευθείες x, Bz είναι δεδομένα, άρα και τα σημεία Κ, Κ' είναι δεδομένα. Το πρόβλημα έχει δύο λύσεις.

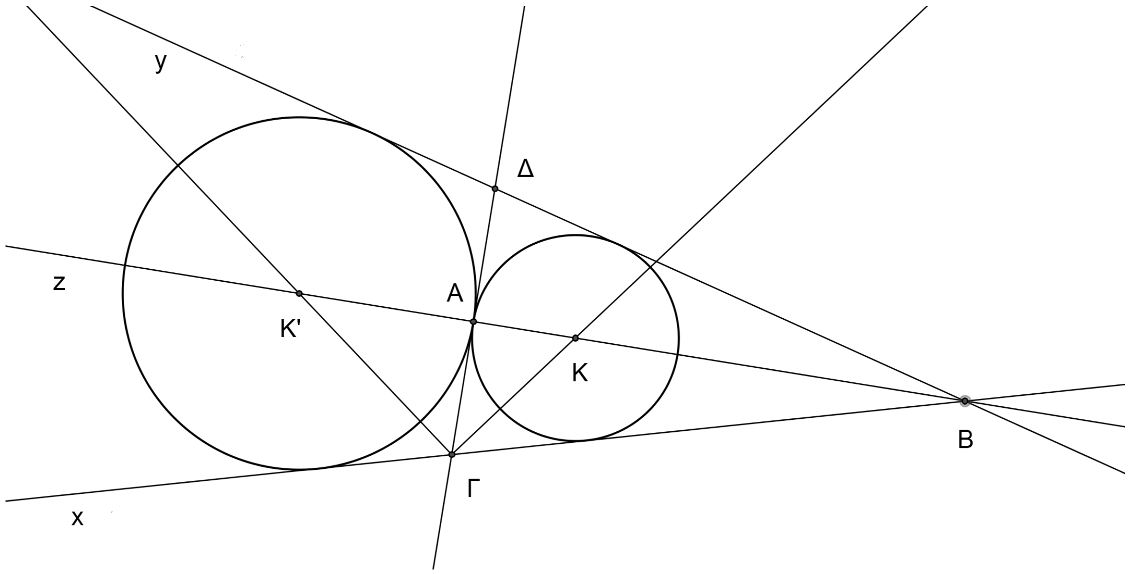
(β) αποτελεί σημείο μίας εκ των δύο ευθειών :



ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Έστω Β το σημείο τομής των δύο ευθειών x, y και Bz η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{B}y$. Το κέντρο του κύκλου Κ θα βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{B}y$. Όμως Α σημείο επαφής, άρα το σημείο Κ θα βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη ευθεία στη By. Αλλά Bz δεδομένη και Α, By δεδομένα (άρα και η κάθετη στο Α), επομένως και το σημείο Κ είναι δεδομένο. Η λύση είναι μοναδική.

(γ) βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο των δύο ευθειών :



ΑΝΑΛΥΣΗ

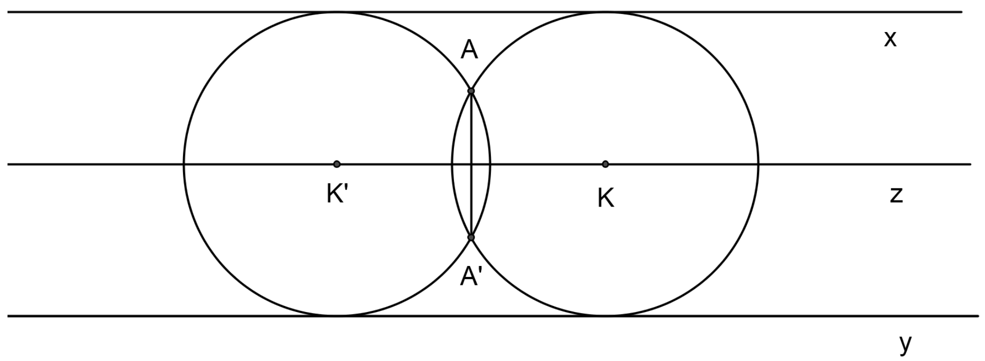
Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Έστω Β το σημείο τομής των δύο ευθειών x, y και Bz η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{B}y$. Το κέντρο του κύκλου Κ θα βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{B}y$. Από το σημείο Α φέρουμε κάθετη στη Bz. Η Bz τέμνει τις δεδομένες ευθείες x, y στα σημεία Γ, Δ. Τα Γ, Δ είναι δεδομένα, άρα και το τρίγωνο ΓΒΔ. Άρα το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή του εγγεγραμμένου κύκλου (Κ, ρ) στο δεδομένο τρίγωνο ΓΒΔ. Άρα το Κ είναι δεδομένο αφού αποτελεί το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου. Υπάρχει όμως και δεύτερη λύση, η οποία είναι ο παρεγγεγραμμένος κύκλος (Κ', ρ') του τριγώνου ΓΒΔ που εφάπτεται στην πλευρά ΓΔ. Το Κ' είναι δεδομένο αφού αποτελεί το σημείο τομής της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$ του δεδομένου τριγώνου ΓΒΔ με τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$.

(δ) είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών :

Σε αυτή την περίπτωση το σημείο Α συμπίπτει με το σημείο Β (των προηγούμενων αναλύσεων) και ο ζητούμενος κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο. Η λύση είναι μοναδική.

(ΙΙ) Οι ευθείες x, y είναι παράλληλες και το σημείο Α :

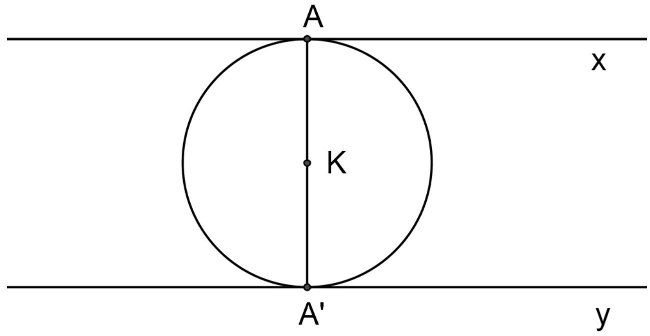
(α) βρίσκεται στο εσωτερικό των δύο ευθειών :



ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Έστω z η μεσοπαρράλληλος των δύο ευθειών. Έστω Α' το συμμετρικό του σημείου Α ως προς τη z. Όμως Α, z δεδομένα, άρα και το Α' δεδομένο. Το Α' θα ανήκει στον κύκλο (Κ, ρ). Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή του κύκλου που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία Α, Α' και εφάπτεται σε δεδομένη ευθεία x (ή y). Η σχετική κατασκευή έχει περιγραφεί στην περίπτωση (Ια), από την οποία προκύπτουν δύο δυνατές λύσεις.

(β) αποτελεί σημείο μίας εκ των δύο ευθειών :



ΑΝΑΛΥΣΗ

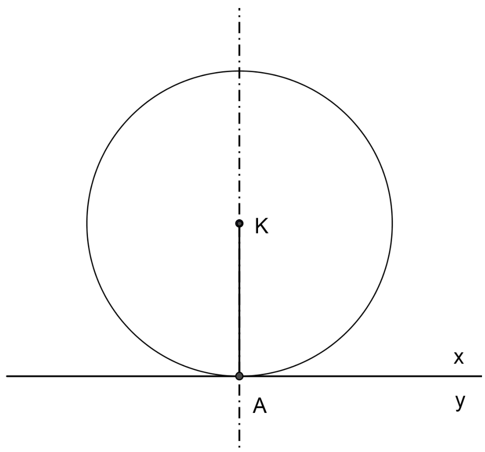
Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Φέρουμε κάθετη στη δεδομένη ευθεία x στο δεδομένο σημείο Α. Έστω Α' το σημείο τομής της καθέτου με τη δεδομένη ευθεία y. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ' είναι η διάμετρος του ζητούμενου κύκλου. Όμως ΑΑ' δεδομένη, άρα και το σημείο Κ είναι δεδομένο. Η λύση είναι μοναδική.

(γ) βρίσκεται στο εξωτερικό των δύο ευθειών :

Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα είναι αδύνατο.

(ΙΙΙ) Οι ευθείες x, y ταυτίζονται και το σημείο Α :

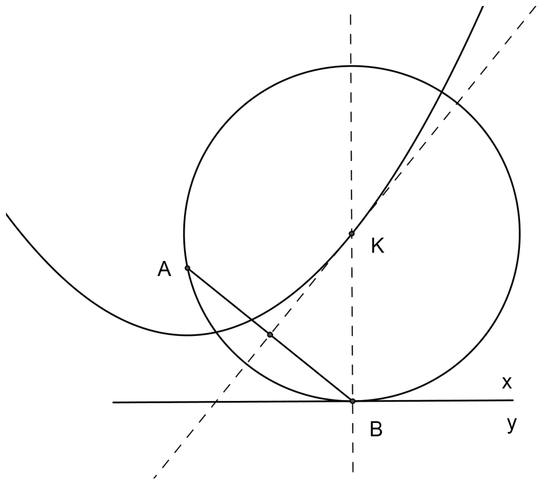
(α) αποτελεί σημείο των δύο ευθειών :



ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Το σημείο Α θα αποτελεί το σημείο επαφής του κύκλου με την ευθεία $x \equiv y$, άρα το κέντρο του κύκλου Κ θα βρίσκεται στην κάθετη στην ευθεία x στο σημείο Α. Δεν υπάρχει κανένας άλλος περιορισμός για τη θέση του σημείου Κ, άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις, οι οποίες βρίσκονται όλες σε αυτή την ευθεία. Στην ειδική περίπτωση όπου $Κ \equiv Α$, ο κύκλος εκφυλίζεται σε σημείο.

(β) βρίσκεται στο εξωτερικό των δύο ευθειών :



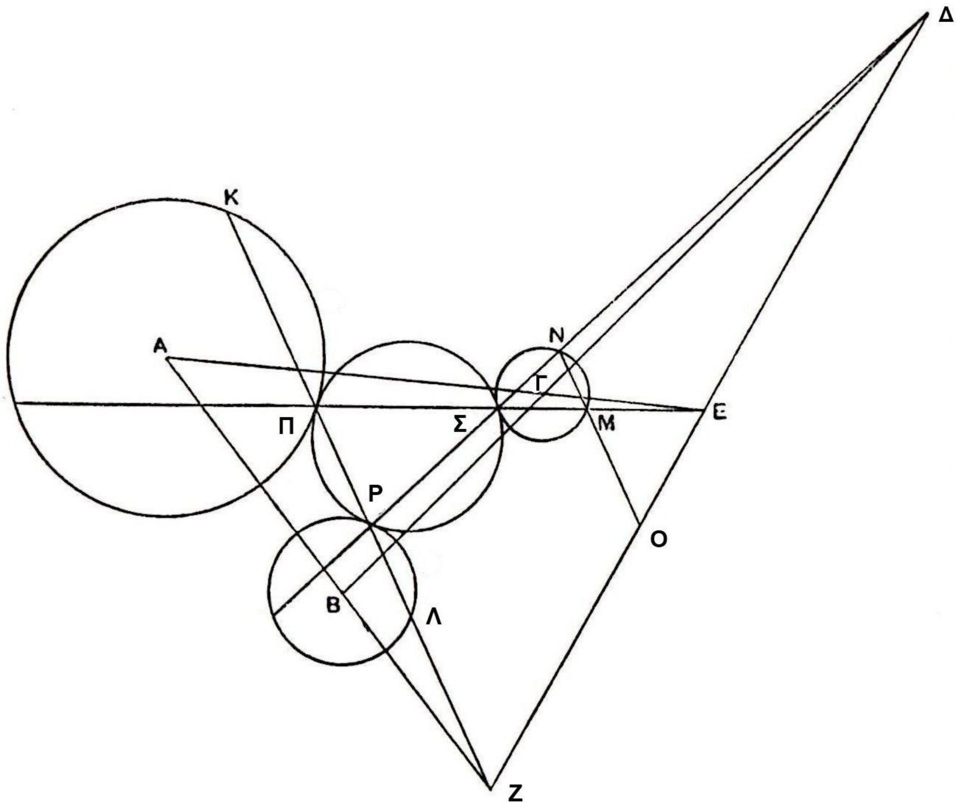
ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Έστω Β το σημείο επαφής του κύκλου με την ευθεία x ≡ y. Το κέντρο Κ του κύκλου βρίσκεται στην κάθετη ευθεία στη x στο σημείο Β. Τα Α, Β είναι σημεία του κύκλου, άρα το Κ βρίσκεται στη μεσοκάθετη της χορδής ΑΒ. Άρα το σημείο Κ αποτελεί το σημείο τομής των δύο ευθειών. Όμως το σημείο Β μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο στην x, άρα σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν άπειρες λύσεις. Έχουμε ότι ΚΑ = ΚΒ =ρ και ΚΒ κάθετη στην ευθεία x, ανεξαρτήτως της θέσης του Β, άρα το Κ ισαπέχει από το δεδομένο σημείο Α και τη δεδομένη ευθεία x, επομένως ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων Κ είναι η παραβολή με εστία το σημείο Α και διευθετούσα την ευθεία x.

Η δέκατη και τελευταία περίπτωση του «*Απολλώνιου προβλήματος*» είναι και η δυσκολότερη. Ο Heath[68] παρουσιάζει μια λύση του προβλήματος για την ειδική περίπτωση όπου ο ζητούμενος κύκλος εφάπτεται εξωτερικά των τριών δεδομένων κύκλων. Η λύση που προτείνει στηρίζεται στη γεωμετρία του επιπέδου και επιτυγχάνεται μέσω διαδοχικών αναγωγών σε προτάσεις οι οποίες αναφέρονται στον Πάππο. Ακολουθεί μόνο η ανάλυση του προβλήματος, η σύνθεση προκύπτει εύκολα αντιστρέφοντας τα βήματα της ανάλυσης.

68 Heath (1981, τόμος ΙΙ, 182 – 185)

[10] *«Να γραφεί κύκλος ο οποίος να εφάπτεται εξωτερικά τριών δοθέντων κύκλων»*



ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος έχει κατασκευαστεί. Έστω (Α, α), (Β, β) και (Γ, γ) οι τρεις δεδομένοι κύκλοι και Π, Ρ, Σ τα σημεία επαφής των τεσσάρων κύκλων. Θεωρούμε επίσης τα κέντρα ομοιότητας Δ, Ε, Ζ των κύκλων, έτσι ώστε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{\alpha}{\gamma}$ και $\frac{ΖΑ}{ΖΒ}=\frac{\alpha}{\beta}$. Τα Δ, Ε, Ζ θα είναι δεδομένα. Φέρουμε την ευθεία ε η οποία διέρχεται από τα Π, Ρ. Έστω Κ, Λ τα άλλα δύο σημεία τομής της ε με τους κύκλους (Α, α), (Β, β). Τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΠ, ΡΛ θα είναι και τα δύο ανάλογα με το ΠΡ, άρα ανάλογα και μεταξύ τους (Συναγωγή, IV.9). Αυτό όμως σημαίνει ότι το ΠΡ θα διέρχεται από το σημείο Ζ. Για τον ίδιο λόγο τα ΡΣ, ΠΣ θα διέρχονται από τα σημεία Δ, Ε.

Έστω Μ, Ν τα σημεία τομής των ευθύγραμμων τμημάτων ΠΕ, ΡΔ με τον κύκλο (Γ, γ). Τότε, επειδή τα ευθύγραμμα τμήματα ΠΣ, ΣΜ είναι ανάλογα (Συναγωγή, IV.9), οι γωνίες $Π\hat{Ρ}Σ\,,Σ\hat{Ν}Μ$ θα είναι ίσες, το οποίο σημαίνει ότι το ΜΝ θα είναι παράλληλο με το ΠΡ. Προεκτείνουμε το ΝΜ και έστω Ο το σημείο τομής με την ευθεία η οποία διέρχεται από τα Ζ, Ε. Τότε θα έχουμε ότι $ΕΟ:ΕΖ=ΕΜ:ΕΠ=ΕΓ:ΕΑ=γ:α$. Επομένως το σημείο Ο θα είναι δεδομένο.

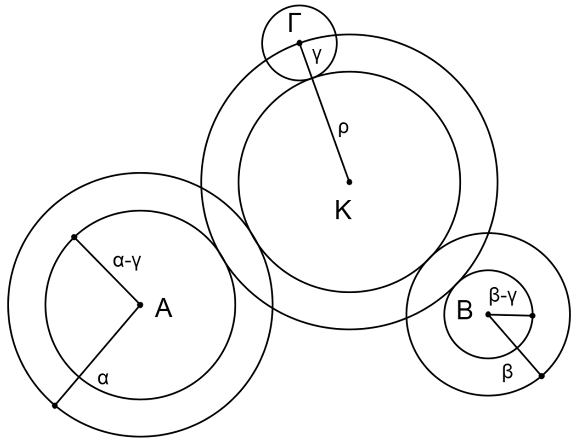
Πλέον η επίλυση του προβλήματος ανάγεται στην ακόλουθη κατασκευή: «Δεδομένων τριών συνευθειακών σημείων Ο, Ε, Δ, να προσδιοριστεί ένα σημείο Σ δεδομένου κύκλου (Γ, γ), τέτοιο ώστε αν Μ, Ν τα σημεία τομής των ΔΣ, ΕΣ με τον κύκλο, τα σημεία Μ, Ν, Ε να είναι συνευθειακά». Η κατασκευή αυτή όμως αποτελεί το πρόβλημα VII.22 στη «Συναγωγή» του Πάππου, άρα το σημείο Σ είναι προσδιορίσιμο.

Όμως, παρατηρούμε ότι τα σημεία Π, Ρ αποτελούν σημεία τομής των δεδομένων ευθειών ΔΣ, ΕΣ, άρα όλα τα σημεία επαφής είναι προσδιορίσιμα.

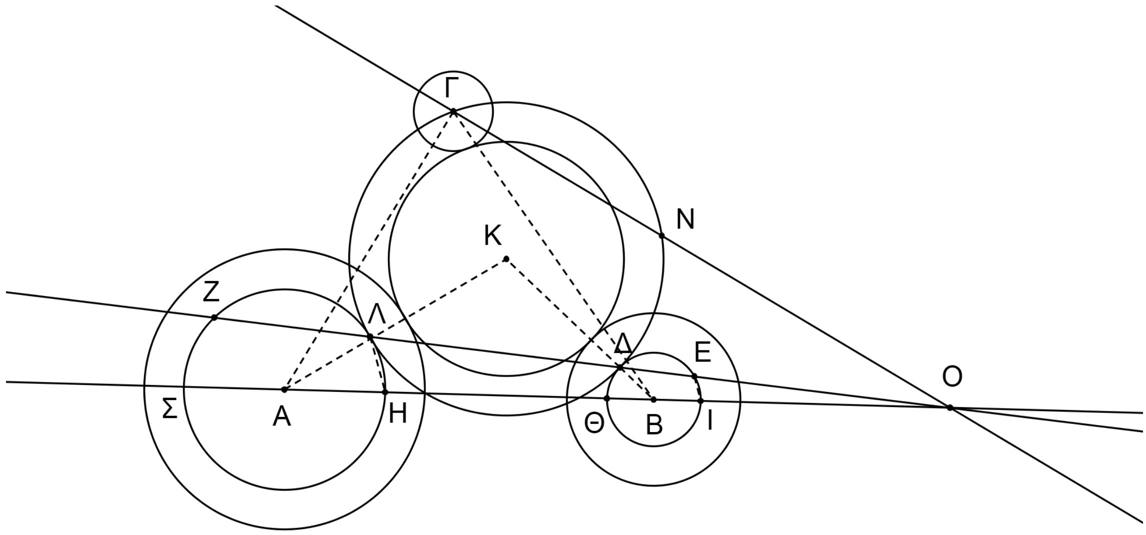
Ο Viète παρουσίασε μια διαφορετική ανάλυση για το ίδιο πρόβλημα. Η προσέγγισή του αποτελείται από μια ακολουθία διαδοχικών αναγωγών κατά τις οποίες αντικαθιστά σταδιακά τους κύκλους με σημεία.

ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και ο ζητούμενος κύκλος (Κ, ρ) έχει κατασκευαστεί. Έστω (Α, α), (Β, β) και (Γ, γ) οι τρεις δεδομένοι κύκλοι με $γ < β < α$. Γράφουμε τους κύκλους (Α, $α - γ$), (Β, $β - γ$) και παρατηρούμε ότι ο κύκλος (Κ, $ρ + γ$) εφάπτεται σε αυτούς και διέρχεται από το σημείο Γ.



Έτσι, το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ενός κύκλου ο οποίος διέρχεται από το δεδομένο σημείο Γ και εφάπτεται στους δεδομένους κύκλους (Α, α – γ), (Β, β – γ) στα σημεία Λ, Δ αντίστοιχα).



Έστω Ο το εξωτερικό κέντρο ομοιότητας των κύκλων (Α, α – γ), (Β, β – γ). Η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο ομοιότητας Ο και τα κέντρα των κύκλων (Α, α – γ), (Β, β – γ), τέμνει τον (Α, α – γ) στα Ι, Θ, και τον (Β, β – γ) στα Η, Σ.

Το τρίγωνο ΚΛΔ είναι ισοσκελές, άρα $K\hat{\Lambda}\Delta = K\hat{\Delta}\Lambda$, επομένως $Z\hat{\Lambda}A = B\hat{\Delta}E$ ως κατακορυφήν γωνίες ίσων γωνιών. Όμως το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές, άρα $B\hat{\Delta}E = B\hat{E}\Delta$. Αυτό σημαίνει ότι $Z\hat{\Lambda}A = B\hat{E}\Delta$, το οποίο σημαίνει ότι $A\hat{\Lambda}O = B\hat{E}O$ ως παραπληρωματικές γωνίες ίσων γωνιών. Άρα από τα τρίγωνα ΑΛΟ, ΒΕΟ θα έχουμε ότι $\Lambda\hat{A}O = E\hat{B}O$. Αυτό σημαίνει ότι τα τρίγωνα ΟΕΙ, ΟΛΗ είναι όμοια, άρα $\frac{OI}{OE} = \frac{OH}{O\Lambda}$ (1).

Αλλά $OI \cdot O\Theta = OE \cdot O\Delta$, επομένως $\frac{OI}{OE} = \frac{O\Delta}{O\Theta}$ (2). Από τις (1), (2) έχουμε ότι $\frac{OH}{O\Lambda} = \frac{O\Delta}{O\Theta}$, δηλαδή $OH \cdot O\Theta = O\Lambda \cdot O\Delta$ (3)

Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Γ. Έστω Ν το σημείο στο οποίο τέμνει τον (Κ, ρ + γ). Τότε $O\Gamma \cdot ON = O\Lambda \cdot O\Delta$ (4). Από τις (3), (4) έχουμε ότι $OH \cdot O\Theta = O\Gamma \cdot ON$, ,το οποίο σημαίνει ότι το σημείο Ν είναι προσδιορίσιμο.

Τώρα το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή ενός κύκλου, ο οποίος διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία Γ, Ν και εφάπτεται στο δεδομένο κύκλο (Β, β – γ), η οποία ανάγεται με τη σειρά της στην κατασκευή ενός κύκλου ο οποίος διέρχεται από 3 δεδομένα σημεία (Στοιχεία ΙΙΙ.1).

3.2.3. ΠΕΡΙ ΛΟΓΟΥ ΑΠΟΤΟΜΗΣ

Το «Περί λόγου αποτομής» αποτελείται από 2 βιβλία τα οποία έχουν διασωθεί στα αραβικά. Ο Πάππος αναφέρεται σε αυτό στη «Συναγωγή» αλλά περιορίζεται σε μια απλή περιγραφή του έργου και δεν προσφέρει καμία πληροφορία σε σχέση με τα αίτια της συγγραφής του. Το 1706 ο Edmund Halley το δημοσίευσε στα λατινικά, ολοκληρώνοντας μια προσπάθεια την οποία είχε ξεκινήσει νωρίτερα ο Edward Bernard, συμπληρώνοντας και αποσαφηνίζοντας δυσνόητα μέρη του κειμένου. Ο Απολλώνιος στο «Περί λόγου αποτομής» ασχολείται με ένα και μόνο πρόβλημα : *«Δεδομένων εις το επίπεδον δύο ευθειών και ενός σημείου εφ' εκάστης, να άχθη εκ τίνος σημείου του επιπέδου ευθεία αποτέμνουσα επί των δοθεισών ευθειών τμήματα, μετρούμενα από των δοθέντων σημείων, τοιαύτα ώστε να έχουν μεταξύ των δοθέντα* *λόγον»,* κατά τη διαπραγμάτευση του οποίου χρησιμοποιεί αποκλειστικά την αναλυτικοσυνθετική μέθοδο[69].

Στο πρώτο βιβλίο οργανώνονται, εξετάζονται και παρουσιάζονται ξεχωριστά οι λύσεις για όλες τις δυνατές περιπτώσεις βάσει των σχετικών θέσεων των δεδομένων γεωμετρικών αντικειμένων, ενώ στο δεύτερο βιβλίο ο Απολλώνιος διατυπώνει και πάλι το ίδιο πρόβλημα, συνοδευόμενο από ένα τυχαίο σχήμα, και προσπαθεί να αναδείξει το πώς όλες οι δυνατές περιπτώσεις οι οποίες περιγράφονται στο πρώτο βιβλίο, μπορούν να παραχθούν από αυτό[70]. Πιο συγκεκριμένα, η αντιμετώπιση του προβλήματος οργανώνεται ως εξής: αρχικά γίνεται μια πρώτη διάκριση περιπτώσεων που αναφέρονται ως *τόποι* και παρουσιάζουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς σχετικά με τη θέση των δύο δεδομένων ευθειών και του δεδομένου σημείου που δεν ανήκει σε αυτές, ενώ στη συνέχεια, κάθε *τόπος* διακρίνεται με τη σειρά του σε υποπεριπτώσεις, οι οποίες αναφέρονται ως *πτώσεις*, και παρουσιάζουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς σε σχέση με τη θέση των δεδομένων σημείων που βρίσκονται στις ευθείες. Κάθε πτώση, η οποία οδηγεί σε λύση, αποτελείται από τέσσερα μέρη: την ανάλυση, το διορισμό, τη σύνθεση και τη διερεύνηση. Η ολοκλήρωση της διαπραγμάτευσης όλων των πτώσεων ενός τόπου καταλήγει σε μια συνοπτική παρουσίαση των λύσεων του τόπου βάσει των επιμέρους διορισμών.

Οι Sidoli και Saito[71] βασιζόμενοι στον τρόπο με τον οποίο έχει οργανωθεί το «Περί λόγου αποτομής» υποστηρίζουν ότι η πρόθεση του Απολλώνιου ήταν να προσφέρει ένα διδακτικό εγχειρίδιο σε σχέση με την αναλυτικοσυνθετική μέθοδο. Οι Rashed και Bellosta αναγνωρίζουν ότι το έργο του Απολλώνιου αποτελεί σημαντικό υλικό για την κατανόηση της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου υποστηρίζουν όμως μια άλλη εκδοχή σε σχέση με τα αίτια της συγγραφής του. Θεωρούν ότι ο Απολλώνιος δεν τη χρησιμοποίησε προκειμένου να προσφέρει ένα διδακτικό εγχειρίδιο για αυτή, αλλά γιατί ήταν η καταλληλότερη για την ανάδειξη του διορισμού. Ο βασικός στόχος του «Περί λόγου αποτομής» πιστεύουν ότι ήταν να προσφέρει μια μεθοδολογία για το χειρισμό προτάσεων που σχετίζονται με τη θεωρία των χωρίων[72].

69 Σε αντίθεση με τον συνθετικό τρόπο παρουσίασης των άλλων έργων του.

70 Στην πραγματικότητα όμως υπάρχουν 14 περιπτώσεις οι οποίες αναφέρονται στο δεύτερο βιβλίο και δεν είναι αναγώγιμες σε κανένα γεωμετρικό τόπο του πρώτου βιβλίου (Vandoulakis, 2012).

71 Sidoli & Saito (2010, 596)

72 Vandoulakis (2012, 141 – 142)

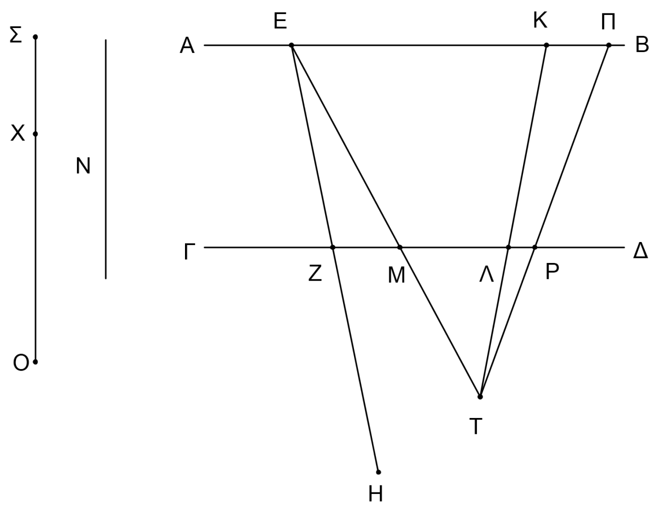
Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση δύο συγκεκριμένων περιπτώσεων από το πρώτο βιβλίο. Η διατύπωση του προβλήματος σύμφωνα με τα σχήματα που ακολουθούν έχει ως εξής: «Αν Ε, Ζ δύο δεδομένα σημεία στις δεδομένες ευθείες ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα, και Τ δεδομένο σημείο του επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στις ΑΒ, ΓΔ, να κατασκευαστεί ευθεία ΤΛΚ, η οποία διέρχεται από το Τ και τέμνει τις ΑΒ, ΓΔ στα σημεία Κ, Λ, έτσι ώστε $\frac{EK}{Z\Lambda}=\lambda$, όπου λ δεδομένο».

ΤΟΠΟΣ 1

Οι ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες και το σημείο Τ βρίσκεται στο εξωτερικό των ΑΒ, ΓΔ.

Ο πρώτος τόπος περιλαμβάνει τρεις δυνατές πτώσεις ανάλογα με τη θέση των σημείων Λ, Κ. Έτσι, έχουμε ότι τα σημεία Λ, Κ θα βρίσκονται (1) στο εσωτερικό των ΖΔ, ΕΒ ή (2) στο εσωτερικό των ΕΑ, ΖΔ ή (3) στο εσωτερικό των ΕΑ, ΖΓ αντίστοιχα.

[1.1]



ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και η ζητούμενη ευθεία ΤΛΚ έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε $\frac{EK}{Z\Lambda}=\lambda$. Τα σημεία Ε, Τ είναι δεδομένα, επομένως το ΕΤ είναι δεδομένο. Τα ΕΤ, ΓΔ είναι δεδομένης θέσης, άρα το σημείο Μ είναι δεδομένο. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος $\frac{EM}{MT}$ είναι δεδομένος, άρα και ο λόγος $\frac{ET}{MT}$. Όμως ΑΒ // ΓΔ, συνεπώς $\frac{ET}{MT}=\frac{EK}{M\Lambda}$ (Στοιχεία VI.4), άρα ο λόγος $\frac{EK}{M\Lambda}$ είναι δεδομένος. Σε συνδυασμό με το ζητούμενο, προκύπτει ότι τότε και ο λόγος $\frac{Z\Lambda}{M\Lambda}$ είναι δεδομένος και επειδή $\frac{Z\Lambda}{M\Lambda}=\frac{ZM+M\Lambda}{M\Lambda}$, έχουμε ότι και ο $\frac{ZM}{M\Lambda}$ δεδομένος. Όμως ΖΜ δεδομένο και Μ δεδομένο, άρα ΜΛ δεδομένο. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Λ είναι προσδιορίσιμο, επομένως και η ευθεία ΤΛΚ.

ΔΙΟΡΙΣΜΟΣ

Δεδομένου ότι $M\Lambda < Z\Lambda$, έχουμε ότι $\frac{EK}{M\Lambda}>\frac{EK}{Z\Lambda}$. Αλλά $\frac{EK}{M\Lambda}=\frac{ET}{TM}$, άρα πρέπει $\frac{ET}{TM}>\frac{EK}{Z\Lambda}$ δηλαδή $\frac{ET}{TM}>\lambda$.

ΣΥΝΘΕΣΗ

Τα σημεία Ε, Τ είναι δεδομένα, επομένως το ΕΤ είναι δεδομένο. Τα ΕΤ, ΓΔ είναι δεδομένης θέσης, άρα το σημείο Μ είναι δεδομένο. Έστω δύο τμήματα ΣΟ, Ν τέτοια ώστε $\frac{N}{\Sigma O}=\lambda$, όπου λ δεδομένο, με $\frac{N}{\Sigma O}<\frac{ET}{TM}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται ο διορισμός. Έστω Χ, Λ τέτοια ώστε $\frac{ET}{TM}=\frac{N}{\Sigma X}$ και $\frac{OX}{X\Sigma}=\frac{ZM}{M\Lambda}$ (Στοιχεία VI.12). Τότε $\frac{EK}{Z\Lambda}=\frac{N}{\Sigma O}=\lambda$.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

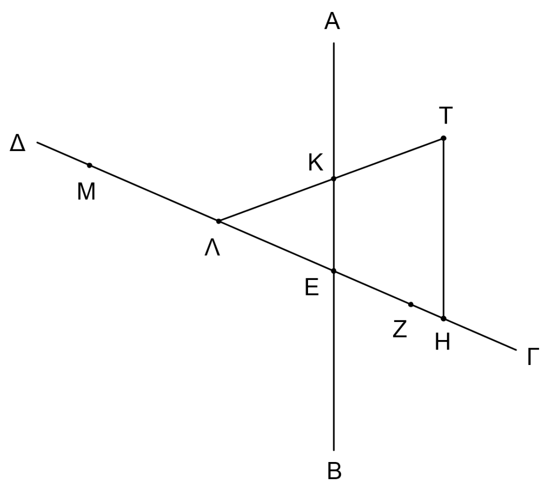
Η ΤΛΚ είναι η μόνη ευθεία που λύνει το πρόβλημα. Αν υπήρχε και μια άλλη ευθεία, έστω ΤΡΠ, η οποία έλυνε το πρόβλημα, τότε επειδή $ΜΛ < ΖΛ$, θα είχαμε ότι $\frac{ΡΛ}{ΜΛ} > \frac{ΡΛ}{ΖΛ}$ (Στοιχεία V.8), με αποτέλεσμα $\frac{ΠΕ}{ΠΖ} > \frac{ΕΚ}{ΖΛ} = \lambda,$ άτοπο.

ΤΟΠΟΣ 6

Οι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

Ο έκτος τόπος περιλαμβάνει τέσσερις δυνατές πτώσεις ανάλογα με τη θέση των σημείων Κ, Λ. Έτσι, έχουμε ότι τα σημεία Κ, Λ θα βρίσκονται (1) στις ΕΑ, ΖΓ ή (2) στις ΕΒ, ΖΓ ή (3) στις ΕΒ, ΖΔ ή (4) στις ΕΑ, ΖΔ αντίστοιχα.

[6.4]



ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και η ζητούμενη ευθεία ΤΛΚ έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε $\frac{ΕΚ}{ΖΛ} = \lambda.$ Από το δεδομένο σημείο Τ φέρουμε παράλληλη ε στη δεδομένη ευθεία ΑΒ. Έστω Η το σημείο τομής της ε με τη ΓΔ. Παίρνουμε σημείο Μ στην ΓΔ τέτοιο ώστε $\frac{ΤΗ}{ΖΜ} = \lambda.$

Όμως $\frac{EK}{Z\Lambda}=\lambda$, άρα $\frac{TH}{ZM}=\frac{EK}{Z\Lambda}$ ή $\frac{TH}{EK}=\frac{ZM}{Z\Lambda}$. Όμως $\frac{TH}{EK}=\frac{H\Lambda}{E\Lambda}$ (Στοιχεία V.16), άρα $\frac{H\Lambda}{HE}=\frac{ZM}{M\Lambda}$, δηλαδή $H\Lambda\cdot M\Lambda=HE\cdot ZM$ (Στοιχεία VI.16). Τα τμήματα ΗΕ, ΖΜ είναι δεδομένα, άρα το σημείο Λ μπορεί να προσδιοριστεί αν εφαρμόσουμε στην ΗΜ ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ελαττωμένο κατά ένα τετράγωνο πλευράς ΜΛ[73].

ΔΙΟΡΙΣΜΟΣ

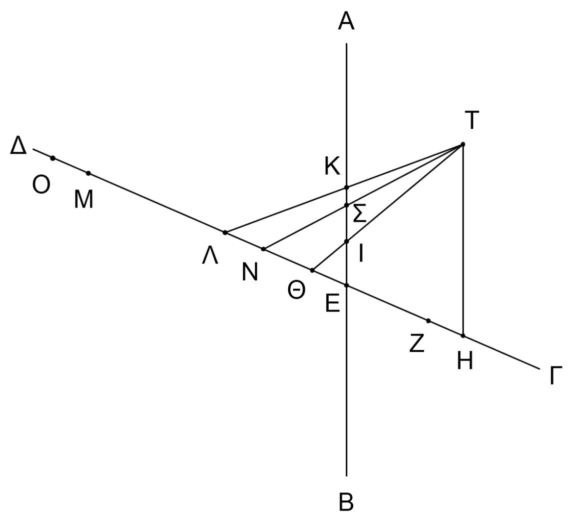
Η ανάλυση του προβλήματος ολοκληρώνεται με τον προσδιορισμό του επιθυμητού σημείου Λ. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι το πρόβλημα έχει πάντοτε λύση. Πρέπει το σημείο Λ να είναι τέτοιο ώστε να βρίσκεται στο εσωτερικό του ΕΜ και ταυτόχρονα να ισχύει η σχέση $H\Lambda\cdot M\Lambda=HE\cdot ZM$ (1). Ο Απολλώνιος αναφέρει ότι το πρόβλημα έχει τουλάχιστον μια λύση. Πράγματι στην περίπτωση όπου το σημείο Λ είναι μέσο του τμήματος ΗΜ, έχουμε ότι : $\frac{TH}{ZM}=\frac{EK}{Z\Lambda}$, το οποίο σημαίνει ότι το Λ βρίσκεται ανάμεσα στο Η και το Μ, και επειδή το $H\Lambda\cdot M\Lambda$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή για $H\Lambda=M\Lambda$ (2) και το ΗΕ είναι δεδομένο, θα έχουμε ότι για $H\Lambda=M\Lambda$ θα πρέπει και το ΖΜ να παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή. Από (1), (2) προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση για $HE\cdot ZM\leq\frac{1}{4}HM^2$. Επειδή όμως η θέση του σημείου Μ καθορίζεται από τη σχέση $\frac{TH}{ZM}=\frac{EK}{Z\Lambda}$, όπου το ΤΗ είναι δεδομένο όπως και το σημείο Ζ, η περίπτωση όπου το Λ είναι μέσο του ΗΜ, το οποίο απαιτεί το ΖΜ να παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή, θα προκύπτει ως οριακή τιμή για το λόγο $\frac{EK}{Z\Lambda}$.

Έτσι ο διορισμός προχωρά αποδεικνύοντας ότι (α) η ευθεία ΤΛΚ τέμνει τις ΕΑ, ΖΔ ορίζοντας λόγο $\frac{EK}{Z\Lambda}$ με τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη ευθεία η οποία

73 Η αναγωγή αυτή συνδέεται με τις προτάσεις III.41 – 43 των «Κωνικών», όπου οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ αντιστοιχούν σε εφαπτομένες κωνικών τομών. Το είδος της κωνικής εξαρτάται από την τιμή του λ. Έτσι, Halley, Zeuthen και Heath υποστηρίζουν ότι η συγγραφή του «Περί λόγου αποτομής» προέκυψε μέσα από τη διαπραγμάτευση των προτάσεων III.41 – 43 και το συνδέουν με τη μελέτη της θεωρίας των κωνικών τομών (Heath, 1981, 177, Vandoulakis, 2012, 141).

διέρχεται από το Τ και τέμνει τις ΕΑ, ΖΔ, και (β) ότι όσο μια ευθεία προσεγγίζει την ευθεία ΤΛΚ τόσο αυξάνεται η τιμή του λόγου που σχηματίζεται. Οι δύο προτάσεις αποδεικνύονται μέσω ανάλυσης και σύνθεσης, αλλά εμφανίζουν μια σημαντική διαφορά σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα. Και στις δύο περιπτώσεις, η ανάλυση δεν ξεκινά από μια συγκεκριμένη σχέση η οποία περιγράφει το ζητούμενο αλλά από ένα επιχείρημα σύμφωνα με το οποίο οι λόγοι που σχηματίζονται συνδέονται με κάποια ανισοτική σχέση, η οποία δεν δίνεται εξαρχής αλλά ανακαλύπτεται με την ολοκλήρωση της ανάλυσης. Οι δύο αναλύσεις προχωρούν με παρόμοιο τρόπο. Ακολουθεί η ανάλυση της πρώτης πρότασης :

(α)



Έστω ότι η ευθεία ΤΚΛ, η οποία κατασκευάστηκε προηγουμένως, αποτελεί μια από τις λύσεις του προβλήματος. Έστω μια άλλη ευθεία η οποία διέρχεται από το Τ και τέμνει τις ΕΚ, ΕΛ. Έστω Σ το σημείο τομής της ευθείας αυτής με την ΕΚ και Ν το σημείο τομής με τη ΕΛ. Οι λόγοι $\frac{EK}{Z\Lambda}$, $\frac{E\Sigma}{ZN}$ θα πρέπει να συνδέονται με κάποια σχέση * . Γνωρίζουμε ότι

$\frac{EK}{Z\Lambda}=\frac{TH}{ZM}$, άρα αν $\frac{EK}{Z\Lambda}$ * $\frac{E\Sigma}{ZN}$, τότε $\frac{TH}{ZM}$ * $\frac{E\Sigma}{ZN}$ δηλαδή $\frac{ZN}{ZM}$ * $\frac{E\Sigma}{TH}$ (1).

Όμως τα τρίγωνα ΣΕΝ, ΤΗΝ είναι όμοια, επομένως $\frac{E\Sigma}{TH}=\frac{EN}{NH}$ (2).

Από τις (1), (2) έχουμε ότι $\frac{EN}{NH} * \frac{ZN}{ZM}$. Αυτό σημαίνει ότι $\frac{EN+NH}{NH} * \frac{ZN+ZM}{ZM}$,

δηλαδή $\frac{EH}{NH} * \frac{MN}{ZM}$ ή $EH \cdot ZM * NH \cdot MN$. Όμως από την αρχική ανάλυση του προβλήματος έχουμε ότι $EH \cdot ZM = H\Lambda \cdot M\Lambda$, επομένως $NH \cdot MN * H\Lambda \cdot M\Lambda$. Το σημείο Λ είναι μέσο του ΗΜ, άρα $NH \cdot MN < H\Lambda \cdot M\Lambda$.

Η σύσταση της σύνθεσης γίνεται εύκολα ακολουθώντας τα βήματα της ανάλυσης με την αντίστροφη σειρά.

Η ανάλυση της (β) γίνεται με παρόμοιο τρόπο, θεωρώντας μια άλλη ευθεία η οποία διέρχεται και αυτή από το σημείο Τ και τέμνει τις ΕΣ, ΕΝ στα σημεία Ι, Θ αντίστοιχα, μέσω της οποίας αναζητείται η σχέση η οποία συνδέει τους λόγους $\frac{E\Sigma}{ZN}$, $\frac{EI}{Z\Theta}$. Τελικά αποδεικνύεται ότι

$\frac{E\Sigma}{ZN} > \frac{EI}{Z\Theta}$. Η σύνθεση και εδώ προκύπτει αντιστρέφοντας τα βήματα της ανάλυσης όπως και στην πρόταση (α).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η πρόταση 1.1 αποτελεί μια σχετικά απλή περίπτωση και η αντιμετώπισή της ακολουθεί παρόμοια τακτική με αυτή που ακολούθησε ο Αρχιμήδης κατά τη διαπραγμάτευση των προτάσεων στο «Περί Σφαίρας και Κυλίνδρου». Έτσι ο Απολλώνιος ξεκινά από το ζητούμενο, δηλαδή την ύπαρξη – δυνατότητα κατασκευής ευθείας ΤΛΚ σύμφωνα με τις απαιτήσεις του προβλήματος, και προσπαθεί μέσα από την ανάλυση να εντοπίσει τον τρόπο με τον οποίο το μη δεδομένο σημείο Λ μπορεί να προσδιοριστεί με βάση τα δεδομένα του προβλήματος. Τελικά η ανάλυση καταλήγει σε μια σχέση βάσει της οποίας το σημείο Λ μπορεί πράγματι να προσδιοριστεί αλλά αυτό δε σημαίνει ότι το πρόβλημα έχει πάντα λύση. Η δυνατότητα προσδιορισμού του σημείου Λ εξαρτάται από μια συνθήκη $(\frac{ET}{TM} > \lambda)$ η οποία συσχετίζει τη θέση του σημείου Μ με την τιμή του δεδομένου λόγου λ. Η συνθήκη αυτή αποτελεί το διορισμό, ο οποίος ενώ προέκυψε μέσα από την ανάλυση η οποία προηγήθηκε, απαιτεί την κατασκευή τριών βοηθητικών αντικειμένων (τμήματα ΣΟ, Ν και σημείο Χ), τα οποία δεν περιλαμβάνονται σε αυτή. Έτσι, η σύνθεση δεν προκύπτει απλώς αντιστρέφοντας τα βήματα της ανάλυσης, ενώ ο διορισμός υποχρεώνει τον Απολλώνιο να ξεκινήσει και από ένα καινούριο σχήμα, όπως και στην περίπτωση της πρότασης ΙΙ.7 στον Αρχιμήδη.

Η πρόταση 6.4 αντιμετωπίζεται σε γενικές γραμμές ακολουθώντας την ίδια τακτική. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι το κομμάτι του διορισμού, καθώς για να προσδιοριστεί η συνθήκη επιλυσιμότητας απαιτείται μια κατασκευή $(H\Lambda=M\Lambda)$ και δύο αναλυτικοσυνθετικές αποδείξεις (προτάσεις (α), (β))[74]. Το ενδιαφέρον όμως δεν είναι η έκταση του διορισμού αλλά το γεγονός ότι το ζητούμενο στις προτάσεις (α), (β) δεν είναι σαφές. Η ανάλυση των (α), (β) ξεκινά από μερική γνώση του ζητούμενου, δηλαδή από το επιχείρημα ότι οι δύο λόγοι συνδέονται με κάποια ανισοτική σχέση. Η σχέση όμως αυτή δεν δίνεται εξαρχής. Έτσι, ο ρόλος της ανάλυσης εδώ είναι διπλός: αφενός να εντοπίσει συσχετισμούς μεταξύ δεδομένων και μη δεδομένων αντικειμένων και αφετέρου να ανακαλύψει εν μέρει το ζητούμενο. Αυτό το είδος ανάλυσης αναφέρεται ως «συγκριτική ανάλυση»[75]. Αυτό που αξίζει επίσης να σημειωθεί είναι ο τρόπος με τον οποίο αναπτύσσεται ο διορισμός αυτός παρά την έκτασή του, αλλά και η συμβολή του στην οργάνωση της σύστασης της σύνθεσης της αρχικής πρότασης.

Ανεξάρτητα από το λόγο ο οποίος οδήγησε τον Απολλώνιο στη συγγραφή του «Περί λόγου αποτομής», αυτό που έχει τελικά κάποια σημασία είναι η συνεισφορά του ως προς την ανάδειξη μεθοδολογικών χαρακτηριστικών της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου. Χαρακτηριστικά τα οποία σχετίζονται με βασικές διαδικασίες οι οποίες ακολουθούνται κατά την επίλυση προβλημάτων όπως η συστηματική οργάνωση των δυνατών περιπτώσεων, η αναγωγή των πολυπλοκότερων από αυτές σε απλούστερες και η συστηματική διερεύνηση που πρέπει να ακολουθείται προκειμένου να προσδιοριστούν ενδεχόμενοι περιορισμοί.

74 Στη «Συναγωγή» αναφέρονται ως διορισμοί μόνο αυτές οι περιπτώσεις.
75 *comparative analysis* (Sidoli & Saito, 2012)

4. Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ Η ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΤΟΝ ΠΑΠΠΟ

4.1. ΓΕΝΙΚΑ

Ο Πάππος έζησε στα τέλη του 3ου αιώνα μ.Χ. Μαζί με το Διόφαντο θεωρούνται οι τελευταίοι μεγάλοι Έλληνες μαθηματικοί της αρχαιότητας. Για τη ζωή του δεν γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα, με εξαίρεση το γεγονός ότι είχε ένα γιο, τον Ερμόδωρο. Το μαθηματικό του έργο αναζωογόνησε τη γεωμετρία σε μια περίοδο γενικής στασιμότητας. Ανάμεσα στα έργα του ξεχωρίζουν τα σχόλια στο «Ανάλημμα» του Διοδώρου, στη «Μεγάλη Σύνταξη» του Πτολεμαίου, τη γνωστή με τον αραβικό τίτλο «Αλμαγέστη», στη «Σφαιροποιία» και την «Αρμονία» του Πτολεμαίου αλλά και στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Στο έργο του βέβαια συμπεριλαμβάνονται και δικά του θεωρήματα, που αποτελούν σήμερα τη βάση της προβολικής γεωμετρίας.

Το σπουδαιότερο από τα έργα του είναι η «Συναγωγή», η οποία χρονολογείται γύρω στα 340 μ.Χ. Αποτελεί μια συλλογή των σπουδαιότερων θεωρημάτων και προβλημάτων της αρχαιότητας, καλύπτοντας ζητήματα αυξημένης δυσκολίας για την εποχή. Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι ο Πάππος προχώρησε πέρα από την οργάνωση της υπάρχουσας γνώσης, σχολίασε, διόρθωσε και γενίκευσε πολλές από τις προτάσεις προγενέστερων γεωμετρών, ενώ παράλληλα πρόσθεσε και ένα μεγάλο αριθμό δικών του λημμάτων. Πρωτοδημοσιεύθηκε στα λατινικά το 1589 σε μετάφραση του Fredericus Commandinus. Ακολούθησαν κι άλλες μεταφράσεις, όπως αυτή του John Wallis, μέχρι το 1878 και την ολοκληρωμένη μετάφραση του Friedrich Hultsch.

Η «Συναγωγή» φαίνεται να μην έχει γραφεί ως ένα ενιαίο έργο αλλά ως μια σειρά βιβλίων, καθένα από τα οποία έχει μια δική του εισαγωγή. Αποτελείται από 8 βιβλία, από τα οποία δεν έχει διασωθεί το πρώτο και ένα μεγάλο κομμάτι από την αρχή του δεύτερου. Το βιβλίο VII αναφέρεται από τον Πάππο ως ο *«θησαυρός της ανάλυσης».* Είναι ένας κατάλογος αποτελούμενος από 33 έργα, με σπουδαιότερους εκπροσώπους τον Ευκλείδη, τον Απολλώνιο και τον Αρισταίο. Στο βιβλίο VII περιλαμβάνεται ο δεύτερος ορισμός της ανάλυσης και σύνθεσης, ο κατά κοινή ομολογία πληρέστερος ορισμός της μεθόδου.

4.2. Ο ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗΣ

«Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων, καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ἐπί τι ὁμολογούμενον συνθέσει·

Ο καλούμενος αναλυόμενος (τόπος) παιδί μου Ερμόδωρε, είναι μια ιδιαίτερη σύλληψη, οργανωμένη μαζί με τα κοινά γεωμετρικά στοιχεία για αυτούς που επιθυμούν να διαθέτουν μια ευρετική μέθοδο για τα προτεινόμενα σε αυτούς προβλήματα, και είναι χρήσιμη μόνο για το σκοπό αυτό. Έχει δε διασωθεί από τρεις άνδρες τον Ευκλείδη το στοιχειωτή, τον Απολλώνιο τον Περγαίο και τον Αρισταίο τον πρεσβύτερο. Η μέθοδος αυτή αποτελείται από την ανάλυση και τη σύνθεση. Η ανάλυση λοιπόν είναι η πορεία από το ζητούμενο, όπως έχει τεθεί, προς κάτι που η σύνθεσή του είναι γνωστή.

ἐν μὲν γὰρ τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων· καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν.

Μέσα στα πλαίσια της ανάλυσης το ζητούμενο τίθεται ως γεγονός γνωστό και αναζητείται εκείνο από το οποίο προκύπτει και από αυτό αναζητείται το προηγούμενο. Και βαδίζοντας έτσι προς τα πίσω μέχρι να φτάσουμε σε κάποιο από τα ήδη γνωστά ή αυτά που αποτελούν αρχές. Τη μέθοδο αυτή την ονομάζουμε ανάλυση, δηλαδή αντίστροφη λύση.

ἐν δὲ τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον

Μέσα στα πλαίσια δε της σύνθεσης, με αντιστροφή, ορμώμενοι από αυτό που *ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ ἑπόμενα τὰ ἐκεῖ [ἐνταῦθα] προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν.*

κατά την ανάλυση έχει προσδιοριστεί ως κατασκευάσιμο κατά το τελευταίο βήμα, κατασκευάζουμε τα σύμφωνα με τη φυσική σειρά επόμενα, που στην ανάλυση είναι προηγούμενα. Έτσι φτάνουμε στο τέλος (σκοπό) που είναι η κατασκευή του ζητούμενου. Και αυτό το ονομάζουμε σύνθεση.

Διττὸν δ' ἐστὶν ἀναλύσεως γένος, τὸ μὲν ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν, τὸ δὲποριστικὸν τοῦ προταθέντος [λέγειν], ὃ καλεῖται προβληματικόν.

Υπάρχουν δύο είδη ανάλυσης, αυτό που είναι για την αναζήτηση της αλήθειας, το ζητητικό, το οποίο ονομάζεται θεωρητικό, και το ευρετικό αυτό που βοηθά να βρεθεί το ζητούμενο, το οποίο καλείται προβληματικό.

ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι καὶ ὡς ἀληθές, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν καὶ ὡς ἔστιν καθ' ὑπόθεσιν προελθόντες ἐπί τι ὁμο-λογούμενον, ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον.

Κατά το θεωρητικό είδος υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ως υπαρκτό και αληθινό και στη συνέχεια μέσω των προϋποθέσεων (τι πρέπει να αληθεύει ώστε…) της αλήθειας αυτής φτάνουμε σε κάτι γνωστό. Και αν μεν αυτό το γνωστό είναι αληθινό, αληθινό θα είναι και το ζητούμενο, και η απόδειξη η αντίστροφη της ανάλυσης αυτής πορεία. Εάν δε το γνωστό αυτό είναι ψευδές, ψεύδος θα είναι και το ζητούμενο.

ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶν προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον, ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ

Σχετικά δε με το προβληματικό είδος, υποθέτοντας ότι αυτό που έχει προταθεί (προς κατασκευήν) είναι γνωστό, δηλαδή κατασκευασμένο και στη συνέχεια μέσω των προϋποθέσεων της

ποριστόν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθέν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθέν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει, ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα.	κατασκευής αυτής (τι πρέπει να είναι κατασκευάσιμο ώστε…) φτάνουμε σε κάτι κατασκευάσιμο, το οποίο οι μαθηματικοί ονομάζουν δοθέν. Οπότε είναι δυνατόν να κατασκευαστεί και αυτό που έχει προταθεί. Και πάλι η πορεία είναι η αντίστροφη της ανάλυσης. Εάν δε τύχει να φτάσουμε σε αδύνατη κατασκευή, αδύνατο θα είναι και το πρόβλημα.
Διορισμὸς δέ ἐστιν προδιαστολὴ τοῦ πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα.	Διορισμός δε είναι ο προσδιορισμός του πότε, με ποιά διαδικασία και με πόσους τρόπους είναι δυνατό το πρόβλημα.

Ο ορισμός του Πάππου ξεκινά με μια περιγραφή της ανάλυσης ως μια παραγωγική πορεία βημάτων, η οποία ξεκινά από το ζητούμενο και προχωρά μέσω διαδοχικών συνεπαγωγών μέχρι να καταλήξει σε κάτι το οποίο είναι γνωστό και ανεξάρτητο από αυτό:

«*ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ...**διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων** ἐπί τι ὁμολογούμενον* συνθέσει·» [1]

Αμέσως μετά, ακολουθεί μια δεύτερη περιγραφή, η οποία παρουσιάζει την ανάλυση ως μια διαισθητική ανοδική πορεία, η οποία ξεκινά και πάλι από το ζητούμενο, αλλά αντί να προχωρά αναζητώντας τι έπεται από αυτό, στρέφεται στην αναζήτηση εκείνων που θα έπρεπε να ισχύουν, προκειμένου να είναι το ζητούμενο αληθές:

*«ἐν **μὲν γὰρ** τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι **τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει** σκοπούμεθα ...ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν **δὲ** τῇ συνθέσει ἐξ ὑποστροφῆς τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ ἑπόμενα ...καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν»* [2]

Η σύνθεση και στις δύο περιπτώσεις περιγράφεται ως μια παραγωγική διαδικασία η οποία ξεκινά από αυτό το οποίο είναι τελευταίο στην ανάλυση και καταλήγει στο ζητούμενο.

Ο Πάππος συνεχίζει αναφερόμενος στα δύο είδη της ανάλυσης, την ανάλυση θεωρήματος, όταν έχουμε να αποδείξουμε ένα θεώρημα, και την ανάλυση προβλήματος, όταν έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα. Η ανάλυση θεωρήματος καταλήγει σε ένα θεώρημα γνωστό ως αληθές, ενώ η ανάλυση προβλήματος σε ένα επιλύσιμο πρόβλημα (δηλαδή σε κάτι το οποίο είναι κατασκευάσιμο). Αν η ανάλυση οδηγεί σε κάτι το οποίο είναι ψευδές ή αδύνατο, τότε, όπως αναφέρει, το προς απόδειξη θεώρημα ή το προς επίλυση πρόβλημα θα είναι αντίστοιχα ψευδές ή αδύνατο.

Όλοι οι σχολιαστές έχουν επισημάνει την έλλειψη αυστηρότητας η οποία παρατηρείται στον ορισμό του Πάππου. Οι δύο περιγραφές δεν είναι συνεπείς μεταξύ τους ως προς τη λογική φύση της μεθόδου και αυτό αποτέλεσε το έναυσμα για μια σειρά από άρθρα σε σχέση με το λεγόμενο «ζήτημα της κατεύθυνσης»[76].

4.3. ΤΟ ΖΗΤΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Το απόσπασμα [1] περιγράφει και την ανάλυση και τη σύνθεση ως παραγωγικές λογικές διαδικασίες. Ο Robinson αναφέρει ότι «*οι ιστορικοί των μαθηματικών που ασχολούνται με τα ελληνικά μαθηματικά συμφωνούν ως προς το ότι αυτή είναι η μια και μοναδική μέθοδος την οποία οι Έλληνες γεωμέτρες καλούσαν ανάλυση*»[77] παραθέτοντας τα ονόματα των Hankel, Cantor και Heath μεταξύ αυτών.

$$\text{ΑΝΑΛΥΣΗ :} \quad A \to A_1 \to A_2 \to \ \dots\ \to A_\nu \to \Sigma$$

$$\text{ΣΥΝΘΕΣΗ :} \quad \Sigma \to A_\nu \to \ \dots\ \to A_2 \to A_1 \to A$$

Το πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζει η αποδοχή της πρώτης περιγραφής, είναι ότι σύμφωνα με τον ορισμό του Πάππου, αν κατά την ανάλυση οδηγηθούμε σε κάτι το οποίο είναι αληθές,

76 Behboud (1994, 52)
77 Robinson (1936, 464)

τότε θα είναι αληθές και το ζητούμενο. Η αλήθεια όμως της πρότασης Σ, δεν εξασφαλίζει την αλήθεια της πρότασης Α. Μόνο στην περίπτωση που η Σ είναι ψευδής μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι και η Α είναι ψευδής. Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη περιγραφή συμφωνεί με τον ορισμό του Πάππου μόνο αν μεταξύ των βημάτων της ανάλυσης δεν έχουμε απλώς συνεπαγωγές αλλά ισοδυναμίες, με εξαίρεση την περίπτωση όπου η Σ είναι ψευδής. Η αποκατάσταση των ισοδυναμιών γίνεται μέσω της σύνθεσης, η οποία λειτουργεί ως εργαλείο ελέγχου προς εντοπισμό ενδεχόμενων λαθών. Η απαγωγή σε άτοπο φαίνεται να αποτελεί ειδική περίπτωση της ανάλυσης.

Ο σχετικός διάλογος για το «ζήτημα της κατεύθυνσης» ξεκίνησε το 1932 με ένα άρθρο του Cornford στο περιοδικό Mind. Η πρώτη περιγραφή του ορισμού του Πάππου αποτελούσε τη μόνη ερμηνεία του ορισμού, ή τουλάχιστον την κοινώς αποδεκτή ερμηνεία μεταξύ των ιστορικών των μαθηματικών μέχρι τότε. Ο Cornford ήταν ο πρώτος ο οποίος βασιζόμενος στο απόσπασμα [2], υποστήριξε μια εναλλακτική ερμηνεία, με λεπτομερή επιχειρήματα, σύμφωνα με τον Gulley[78]. Σύμφωνα με αυτή, αν Α είναι η πρόταση προς απόδειξη ή το πρόβλημα προς επίλυση, η ανάλυση ξεκινά υποθέτοντας ότι αυτό είναι αληθές ή επιλύσιμο αντίστοιχα, αναζητώντας την προκείμενη A_1 από την οποία θα μπορούσε να έχει αυτό προέλθει, και εν συνεχεία αναζητώντας μια άλλη προκείμενη A_2, η οποία αν ίσχυε θα καθιστούσε αληθή την πρόταση A_1 και ούτω καθεξής, μέχρι να οδηγηθούμε σε κάτι το οποίο να είναι γνωστό και ανεξάρτητο από το ζητούμενο, έστω Σ. Η σύνθεση προχωρά όπως και στην πρώτη ερμηνεία. Η απαγωγή σε άτοπο, σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία, στερείται νοήματος, επομένως δεν μπορεί να αποτελεί ειδική περίπτωση της ανάλυσης.

ΑΝΑΛΥΣΗ : $A \leftarrow A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow \ \dots \ \leftarrow A_\nu \leftarrow \Sigma$

ΣΥΝΘΕΣΗ : $\Sigma \rightarrow A_\nu \rightarrow \ \dots \ \rightarrow A_2 \rightarrow A_1 \rightarrow A$

Ο Cornford υποστηρίζει ότι η πρώτη ερμηνεία των ιστορικών των μαθηματικών βασίζεται σε μια μεγάλη παρανόηση. Η φράση «*διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων*» στο απόσπασμα [1], δεν έχει λογικό αλλά χρονικό χαρακτήρα, συνεπώς δεν πρέπει να ερμηνεύεται ως «μέσω λογικών

78 Gulley (1958, 2)

συνεπαγωγών» αλλά ως «μέσω διαδοχικών βημάτων». Εξάλλου, όπως αναφέρει, δεν είναι δυνατό να ακολουθήσει κανείς ακριβώς τα ίδια βήματα και προς τις δύο κατευθύνσεις. Η πεποίθησή του αυτή ενισχύεται τόσο από τη χρήση της λέξης «*ἑξῆς*», η οποία γι' αυτόν έχει χρησιμοποιηθεί ακριβώς για να τονίσει το ότι δεν πρόκειται για λογικές συνεπαγωγές, όπως ενδεχομένως ο όρος *«ἀκόλουθα»* από μόνος του θα μπορούσε να υπονοεί, όσο και από το γεγονός ότι για τους αρχαίους Έλληνες, ο καθιερωμένος τεχνικός όρος για τις λογικές συνεπαγωγές ήταν ο όρος «συμβαινοντα» και όχι «ακόλουθα». Οι Hintikka & Remes συμφωνούν με τον Cornford, αναφέροντας ότι δεν υπάρχει κανένα απόσπασμα στον Πάππο, στο οποίο ο όρος *«ἀκόλουθα»* να χρησιμοποιείται ως λογική συνέπεια και προτείνουν ότι θα έπρεπε να αποδοθεί ως «συνακόλουθα» ή ως «αυτά που πάνε μαζί»[79].

Ο Robinson αντικρούει τον ισχυρισμό του Cornford, αναφέροντας ότι αν η ανάλυση συνίσταται στην εύρεση των κατάλληλων προκείμενων, η περιγραφή του Πάππου, σε σχέση με την περίπτωση που η ανάλυση οδηγεί σε κάτι ψευδές ή αδύνατο, δεν έχει λογική ισχύ[80]. Ο Πάππος αναφέρει ότι αν καταλήξουμε σε κάτι το οποίο είναι ψευδές ή αδύνατο, τότε και το ζητούμενο θα είναι ψευδές ή αδύνατο. Αυτό όμως δεν ισχύει στην εναλλακτική ερμηνεία που προτείνει ο Cornford. Και μπορεί η φράση *«τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει»* στο απόσπασμα [2], να ενισχύει τη θέση του Cornford, σε καμία περίπτωση όμως δεν αναιρεί την πρώτη ερμηνεία. Ο Cornford κατηγορείται για το ότι στηρίζεται κυρίως σε πηγές που μελετούν τη μέθοδο της ανάλυσης σε ένα καθαρά θεωρητικό πλαίσιο χωρίς καμία αναφορά σε κάποιο από τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα που υπάρχουν στο έργο του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου ή του Πάππου.

Ο Mahoney αναφέρει ότι η «Συναγωγή» του Πάππου περιέχει αρκετές μετέπειτα προσθήκες, τις περισσότερες από τις οποίες κατάφερε να εντοπίσει ο Hultsch[81]. Έτσι, θεωρεί αρκετά πιθανό το απόσπασμα [2] να προστέθηκε αργότερα από κάποιον άλλο. Η χρήση του όρου *«γὰρ»* δείχνει ότι αποτελεί επεξήγηση του αποσπάσματος [1], αυτό όμως δεν φαίνεται λογικό, αφού οι περιγραφές είναι διαφορετικές. Επιπλέον, στο απόσπασμα [2] ακολουθείται η δομή *«μὲν... δὲ...»*, παρουσιάζοντας μια αντίθεση η οποία στις περιγραφές της θεωρητικής και της προβληματικής ανάλυσης που ακολουθούν στη συνέχεια αγνοείται. Και στις δύο περιπτώσεις,

79 Hintikka & Remes (1974, 14)
80 Robinson (1936, 472)
81 Mahoney (1968, 324)

ο Πάππος αναφέρει ως αντίθετο της ανάλυσης την απόδειξη και όχι τη σύνθεση. Έτσι, καταλήγει στο ότι το περιεχόμενο του αποσπάσματος [2] είναι άνευ σημασίας ως προς το ζήτημα το οποίο θέλει να αναδείξει στη συνέχεια. Θα μπορούσε να παραληφθεί και ο ορισμός να εξακολουθεί να παρουσιάζει απόλυτη συνοχή. Η πιθανότερη εκδοχή, κατά τον Mahoney, είναι ότι «*κάποιος μετέπειτα συντάκτης παρατηρώντας ότι η μοναδική αναφορά στη σύνθεση είναι στο 634.10, αισθάνθηκε την ανάγκη να προσθέσει έναν ορισμό για αυτή, μαζί με έναν ορισμό της ανάλυσης έτσι όπως αυτός την κατάλαβε*»[82].

4.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗΣ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ

Ο Πάππος διακρίνει τις προτάσεις σε προβλήματα και θεωρήματα αναφέροντας στο βιβλίο III της «Συναγωγής» ότι : *«πρόβλημα μὲν ἀξιοῦσι καλεῖν ἐφ' οὗ προβάλλεταί τι ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, θεώρημα δὲ ἐν ᾧ τινῶν ὑποκειμένων τὸ ἑπόμενον αὐτοῖς καὶ πάντως ἐπισυμβαῖνον θεωρεῖται»*[83]. Η διαφορά προβλημάτων και θεωρημάτων είχε απασχολήσει αρκετά τους αρχαίους Έλληνες. Για κάποιους, όλες οι προτάσεις μπορούσαν να ειδωθούν ως θεωρήματα, ενώ για άλλους όλες οι προτάσεις μπορούσαν να ειδωθούν ως προβλήματα και υπό μια έννοια και οι δύο απόψεις είναι σωστές. Έχουν διατυπωθεί αρκετά επιχειρήματα προς υπεράσπιση όλων των παραπάνω ισχυρισμών[84].

Στο βιβλίο VII της «Συναγωγής» περιλαμβάνονται γύρω στις 240 προτάσεις. Ο Behboud επιχειρεί μια ταξινόμηση αυτών και αναφέρει ότι οι 16 δίνονται ως προβλήματα (κατασκευές) και πέρα των τετριμμένων περιπτώσεων VII.1, VII.2 και VII.176, οι υπόλοιπες[85] λύνονται μέσω της γεωμετρικής μεθόδου της ανάλυσης. Η πλειοψηφία των προτάσεων έχει χαρακτήρα θεωρήματος. Η ταξινόμηση σε προβλήματα και θεωρήματα δεν έχει γίνει αυστηρά και αναφέρει ότι ενδεχομένως να υπάρχουν περιπτώσεις όπου προβλήματα έχουν καταχωρηθεί ως θεωρήματα, αλλά αυτό οφείλεται αφενός στο γεγονός ότι σε αρκετές περιπτώσεις δεν υπάρχει το κομμάτι της σύνθεσης στο πρωτότυπο και αφετέρου στο ότι προβλήματα και θεωρήματα μοιράζονται αρκετά κοινά χαρακτηριστικά, το οποίο πολλές φορές επιτρέπει να χειριστεί κανείς προβλήματα ως θεωρήματα και το αντίστροφο. Οι προτάσεις VII.236 – 238 αναφέρονται ξεχωριστά στην ταξινόμηση ως προτάσεις γεωμετρικών τόπων. Η επίλυσή τους

82 Αναφέρεται στο απόσπασμα [2], Mahoney (1968, 325)
83 Συναγωγή 3.30.4
84 Heath (1956, 124 - 129)
85 Behboud (1994) : VII.72, 85, 87, 105, 107 – 109, 117, 155, 164, 176, 204, 218.

γίνεται μέσω της μεθόδου της ανάλυσης. Για τον Πάππο, οι γεωμετρικοί τόποι δεν είναι ούτε προβλήματα ούτε θεωρήματα, αλλά πορίσματα.

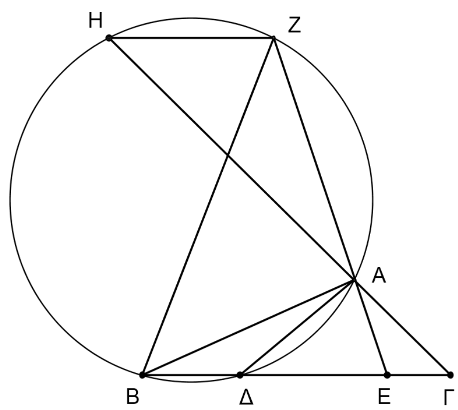
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο - ΑΝΑΛΥΣΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

(Ι) ΠΡΟΤΑΣΗ VII.26

«Ἐὰν ᾖ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ δύο διαχθῶσιν ὡς ΑΔ ΑΕ, ὥστε τὰς ὑπὸ ΒΑΓ ΔΑΕ γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ»

(Ια) Δεδομένα : τρίγωνο ΑΒΓ, τμήματα ΑΔ, ΑΕ, $B\hat{A}\Gamma$, $\Delta\hat{A}E$ παραπληρωματικές

(Ιβ) Ζητούμενο : $\frac{B\Gamma\cdot\Gamma\Delta}{BE\cdot E\Delta}=\frac{\Gamma A^2}{AE^2}$



(II) ΑΝΑΛΥΣΗ

(α) Κύρια Ανάλυση (Transformation[86])

[1] Έχουμε ότι $B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}E = 2\pi$ (από υπόθεση)

και θεωρούμε ότι ισχύει το ζητούμενο $\frac{B\Gamma \cdot \Gamma\Delta}{BE \cdot E\Delta} = \frac{\Gamma A^2}{AE^2}$

[2] Φέρουμε τον κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Δ.

[3] Προεκτείνουμε τα ΕΑ, ΓΑ και έστω Ζ, Η τα σημεία στα οποία τέμνουν τον κύκλο.

[4] $B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = \Gamma H \cdot \Gamma A$ και $BE \cdot E\Delta = ZE \cdot EA$ (Στοιχεία, ΙΙΙ.36)

[5] Από τις σχέσεις [1], [4] έχουμε ότι $\frac{\Gamma H}{ZE} = \frac{\Gamma A}{AE}$ ή αλλιώς $\frac{\Gamma H}{\Gamma A} = \frac{ZE}{EA}$

[6] Άρα ΗΖ//ΒΓ

(β) Resolution[87]

[7] $B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}E = 2\pi$, συνεπώς $B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}E = Z\hat{A}E$

$$B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}E = Z\hat{A}H + H\hat{A}B + B\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}E$$

$$B\hat{A}\Gamma = Z\hat{A}H + H\hat{A}B + B\hat{A}\Delta$$

$$B\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}E + E\hat{A}\Gamma = Z\hat{A}H + H\hat{A}B + B\hat{A}\Delta$$

$$\Delta\hat{A}E + E\hat{A}\Gamma = Z\hat{A}H + H\hat{A}B$$

Όμως $E\hat{A}\Gamma = Z\hat{A}H$ ως κατακορυφήν, άρα $\Delta\hat{A}E = H\hat{A}B$

[8] Όμως $\Delta\hat{A}E = Z\hat{B}\Delta$

($\Delta\hat{A}E$ απέναντι εξωτερική της $Z\hat{B}\Delta$ στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΔΑΖ, άρα $\Delta\hat{A}E = Z\hat{B}\Delta$)

[9] $H\hat{A}B = Z\hat{B}\Delta$ (από [7], [8])

[10] Όμως $H\hat{A}B = H\hat{Z}B$ (ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

[11] άρα ΗΖ//ΒΓ

86 Ο όρος *transformation* χρησιμοποιείται από τον Hankel (1874), οι Hintikka και Remes (1974) χρησιμοποιούν τον όρο *κύρια ανάλυση (analysis proper)*.

87 Ο όρος resolution χρησιμοποιείται από τον Hankel (1874) για πρώτη φορά και εν συνεχεία από όλους τους υπόλοιπους μελετητές.

(ΙΙΙ) ΣΥΝΘΕΣΗ[88]

(α) Κατασκευή

(β) Απόδειξη

Η απόδειξη ξεκινά επαναλαμβάνοντας τα βήματα [7] - [11] της resolution και συνεχίζει ως εξής:

[5] Τα τρίγωνα ΗΖΑ, ΑΕΓ είναι ίσα, συνεπώς $\frac{AH}{A\Gamma}=\frac{ZA}{AE}$

[6] Άρα $\frac{AH+A\Gamma}{A\Gamma}=\frac{ZA+AE}{AE}$, δηλαδή $\frac{H\Gamma}{A\Gamma}=\frac{ZE}{AE}$

[7] $\frac{H\Gamma}{A\Gamma}=\frac{H\Gamma\cdot A\Gamma}{A\Gamma^2}$ και $\frac{ZE}{AE}=\frac{ZE\cdot AE}{AE^2}$

[8] Η [6] λόγω της [7] γίνεται $\frac{H\Gamma\cdot A\Gamma}{A\Gamma^2}=\frac{ZE\cdot AE}{AE^2}$

[9] επομένως $\frac{H\Gamma\cdot A\Gamma}{ZE\cdot AE}=\frac{A\Gamma^2}{AE^2}$

[10] Όμως $H\Gamma\cdot A\Gamma=B\Gamma\cdot\Gamma\Delta$ και $ZE\cdot AE=BE\cdot E\Delta$

[11] Επομένως από τις [5], [6] έχουμε ότι $\frac{B\Gamma\cdot\Gamma\Delta}{BE\cdot E\Delta}=\frac{\Gamma A^2}{AE^2}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2º - ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

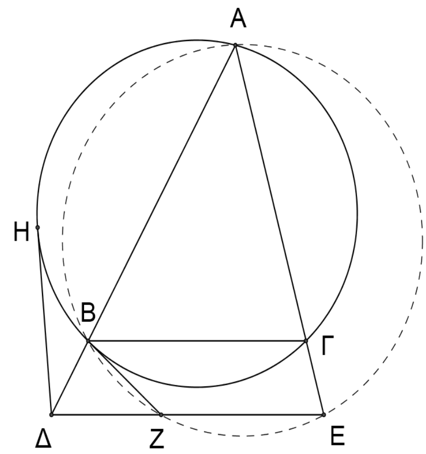
(Ι) ΠΡΟΤΑΣΗ VII.107

«Θέσει ὄντος κύκλου τοῦ ΑΒΓ, καὶ δύο δοθέντων τῶν Δ, Ε, κλᾶν τὴν ΔΑΕ καὶ ποιεῖν παράλληλον τὴν ΒΓ τῇ ΔΕ».

(Ια) Δεδομένα : Κύκλος $AB\Gamma$, σημεία Δ, E εξωτερικά του κύκλου

(Ιβ) Ζητούμενο : Σημείο A , έτσι ώστε $B\Gamma \;//\; \Delta E$

88 Το μέρος της σύνθεσης δεν παρουσιάζεται στον Πάππο, όπως και στις περισσότερες περιπτώσεις θεωρημάτων.



(II) ΑΝΑΛΥΣΗ

(α) Κύρια Ανάλυση

[1] Φέρω BZ εφαπτόμενη στον κύκλο $AB\Gamma$ στο σημείο B .

[2] $B\Gamma$ χορδή του κύκλου.

[3] $Z\hat{B}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ (Στοιχεία I.32, I.21)

[4] $B\Gamma$ // ΔE

[5] $B\hat{Z}\Delta = Z\hat{B}\Gamma$ (Στοιχεία I.29)

[6] $B\hat{Z}\Delta = B\hat{A}\Gamma$

[7] $B\hat{Z}\Delta + B\hat{Z}E = B\hat{A}\Gamma + B\hat{Z}E$

[8] $B\hat{Z}\Delta + B\hat{Z}E = \pi$ (Δ,Ζ, Ε συνευθειακά)

[9] $B\hat{A}\Gamma + B\hat{Z}E = \pi$

[10] Άρα τα σημεία A, B, Z, E θα βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο (Στοιχεία III.22, αντίστροφο)

[11] $\Delta B \cdot \Delta A = \Delta Z \cdot \Delta E$ (Στοιχεία III.35)

(β) Resolution

[12] $ΔB \cdot ΔA = ΔH^2$ (Στοιχεία III.36)

[13] Όμως $ΔH^2$ δεδομένου μήκους (από υπόθεση και Δεδομένα 90),

[14] άρα και το $ΔB \cdot ΔA$ δεδομένου μήκους,

[15] δηλαδή και το $ΔZ \cdot ΔE$ δεδομένου μήκους (από [11], [14]).

[16] Όμως $ΔE$ δεδομένο (από υπόθεση),

[17] άρα και $ΔZ$ δεδομένου μήκους (Δεδομένα 57),

[18] συνεπώς $ΔZ$ δεδομένης θέσης (Δεδομένα 31).

[19] Η θέση του σημείου $Δ$ είναι δεδομένη (από υπόθεση),

[20] άρα και η θέση του σημείου Z είναι δεδομένη (Δεδομένα 27).

[21] Και αφού η θέση του κύκλου είναι δεδομένη (από υπόθεση),

[22] το BZ είναι δεδομένου μήκους και θέσης (Δεδομένα 90).

[23] Άρα η θέση του B είναι δεδομένη (Δεδομένα 27),

[24] το οποίο σημαίνει ότι και η θέση του $AΔ$ είναι δεδομένη (από [19], [23] και Δεδομένα 26),

[25] επομένως και η θέση του A (από [21], [24] και Δεδομένα 25).

(III) ΣΥΝΘΕΣΗ

(α) Κατασκευή

[1] Έστω $ABΓ$ ο δεδομένος κύκλος και $Δ$, E τα δεδομένα σημεία (από υπόθεση).

[2] Από το σημείο $Δ$ φέρω εφαπτόμενο τμήμα στον κύκλο, έστω $ΔH$ (Στοιχεία III.17).

[3] Παίρνω σημείο Z στη $ΔE$ τέτοιο ώστε $EΔ \cdot ΔZ = ΔH^2$ (Στοιχεία I.44).

[4] Από το σημείο Z , φέρω το εφαπτόμενο τμήμα BZ στον κύκλο.

[5] Η προέκταση της $ΔB$ τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο, έστω A .

[6] Το ευθύγραμμο τμήμα EA τέμνει τον κύκλο σε ένα σημείο, έστω $Γ$.

(β) Απόδειξη

[1] $\Delta E \cdot \Delta Z = \Delta H^2$

[2] $\Delta A \cdot \Delta B = \Delta H^2$ (Στοιχεία III.36, ΔH εφαπτομένη)

[3] $\Delta A \cdot \Delta B = \Delta E \cdot \Delta Z$

[4] Άρα τα σημεία A, B, Z, E θα βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο (Στοιχεία III.35, αντίστροφο)

[5] $B\hat{A}\Gamma + B\hat{Z}E = \pi$ (Στοιχεία III.22)

[6] $B\hat{Z}\Delta + B\hat{Z}E = \pi$ (Δ,Ζ, Ε συνευθειακά)

[7] $B\hat{A}\Gamma + B\hat{Z}E = B\hat{Z}\Delta + B\hat{Z}E$

[8] $B\hat{A}\Gamma = Z\hat{B}\Gamma$

[9] Όμως BZ εφαπτόμενη στον κύκλο $AB\Gamma$ στο σημείο B

[10] και το $B\Gamma$ ευθύγραμμο τμήμα με άκρα σημεία του κύκλου,

[11] άρα $Z\hat{B}\Gamma = B\hat{A}\Gamma$ (από [9], [10] και Στοιχεία III.32, III.21) και

[12] $B\hat{Z}\Delta = Z\hat{B}\Gamma$ (από [8] και [11])

[13] Επομένως $B\Gamma$ // ΔE (Στοιχεία I.27).

4.4.1 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

Οι Hintikka & Remes, βασιζόμενοι στη «Συναγωγή» του Πάππου, όρισαν ότι κατά τη μέθοδο της ανάλυσης, τόσο των προβλημάτων όσο και των θεωρημάτων, μπορεί κανείς να διακρίνει τρία στάδια[89]: **(I)** την πρόταση, η οποία με τη σειρά της διακρίνεται στη διατύπωση των δεδομένων και στη διατύπωση του ζητούμενου[90], **(II)** την ανάλυση, η οποία διακρίνεται και αυτή σε δύο μέρη· στο πρώτο μέρος (analysis proper) συνάγονται συμπεράσματα από το ζητούμενο, καταλήγοντας ενδεχομένως και σε νέες μαθηματικές οντότητες ενώ στο δεύτερο

89 Hintikka & Remes (1974, 22)

90 Δηλαδή σε αυτό που οι Έλληνες γεωμέτρες καλούσαν «έκθεση» και «διορισμό». Ο όρος «διορισμός» εδώ έχει διαφορετική σημασία από αυτή στο τέλος του ορισμού του Πάππου.

μέρος (resolution) εξηγείται το γιατί τα συμπεράσματα που προέκυψαν είναι αληθή ή τα νέα αντικείμενα τα οποία εισήχθησαν είναι κατασκευάσιμα με χρήση των δεδομένων και μόνο, και **(ΙΙΙ)** τη σύνθεση, η οποία αποτελείται από την κατασκευή και την απόδειξη. Η περιγραφή τους, ακολουθεί το μοτίβο που παρουσίασε πρώτος ο Hankel για την ανάλυση προβλήματος[91]. Η μόνη διαφορά είναι ότι ο Hankel ονομάζει το πρώτο μέρος της ανάλυσης «μετασχηματισμό» (transformation). Την ίδια δομή υιοθετεί και ο Heath[92].

Οι Hintikka & Remes γενικεύουν το σχήμα που είχε προτείνει ο Hankel μόνο για τα προβλήματα, θεωρώντας ότι η πορεία η οποία ακολουθείται και στα προβλήματα και στα θεωρήματα είναι κοινή. Μπορεί η εσωτερική λογική δομή τους να διαφέρει, και αυτό να συμβάλλει στον τρόπο θεμελίωσης της λύσης – απόδειξης, αλλά το γενικότερο πλαίσιο στο οποίο αυτή παρουσιάζεται θεωρούν ότι είναι κοινό. Ούτε ο Πάππος στις περιγραφές του φαίνεται να διακρίνει την πορεία η οποία ακολουθείται στα προβλήματα από αυτή που ακολουθείται στα θεωρήματα.

Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι η ανάλυση στην πράξη, φέρει πολύ περισσότερες πληροφορίες από ότι ο ορισμός του Πάππου. Υπάρχουν αρκετά χαρακτηριστικά τα οποία μπορεί κανείς να συνάγει μελετώντας συγκεκριμένα παραδείγματα.

(Ι) Πρόταση

Όσον αφορά το πρώτο στάδιο της μεθόδου της ανάλυσης, παρατηρούμε ότι τα θεωρήματα δεν διατυπώνονται με τη μορφή ενός γενικού ισχυρισμού, υποθετικο – συμπερασματικού χαρακτήρα, ο οποίος στη συνέχεια ακολουθείται από την έκθεση και το διορισμό. Τα θεωρήματα παρουσιάζονται κατευθείαν με τη μορφή έκθεσης. Τα προβλήματα, αν και υπάρχουν κάποιες μεμονωμένες περιπτώσεις που ακολουθούν τη διατύπωση των θεωρημάτων, στην πλειοψηφία τους αποτελούν αιτήματα κατασκευών.

(ΙΙ) Ανάλυση

Το δεύτερο στάδιο της μεθόδου διακρίνεται και αυτό σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος (analysis proper) εμφανίζεται με τον ίδιο τρόπο και στα προβλήματα και στα θεωρήματα. Το δεύτερο μέρος (resolution) είναι πάρα πολύ σύντομο στα θεωρήματα, καμιά φορά και ανύπαρκτο, ενώ στα προβλήματα είναι εκτενέστερο από το πρώτο. Ο Πάππος δεν αναφέρει τίποτα σχετικά με

91 Behboud (1994, 59)
92 Heath (1956, 141)

τη διάκριση της ανάλυσης σε δύο μέρη, παρ' όλα αυτά στα παραδείγματά του τα δύο αυτά μέρη είναι εύκολα αναγνωρίσιμα.

Ο Πάππος στις περιγραφές του αναφέρει ότι η ανάλυση ξεκινά από το ζητούμενο και καταλήγει σε μια πρόταση που είναι γνωστή ανεξάρτητα από αυτό. Παρατηρώντας όμως τα παραπάνω παραδείγματα, φαίνεται ότι η ανάλυση δεν ξεκινά μόνο από το ζητούμενο, αλλά από ένα συγκεκριμένο σχήμα, στο οποίο συμπεριλαμβάνονται δεδομένα και ζητούμενο, από το οποίο προσπαθούμε να συνάγουμε μια λύση για το πρόβλημα ή μια απόδειξη για το θεώρημα, βασιζόμενοι παράλληλα και σε ένα σύνολο γνωστών προτάσεων. Η δυσκολία ως προς την επίλυση ή την απόδειξη αντίστοιχα, έγκειται στον προσδιορισμό αυτού του συνόλου. Αυτό είναι το κρίσιμο σημείο στο οποίο εστιάζεται η ευρετική ικανότητα της μεθόδου της ανάλυσης, καθώς από αυτό εξαρτάται η επιλογή των κατάλληλων βοηθητικών κατασκευών. Η επιλογή αυτή βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην εκμετάλλευση της δομής του συγκεκριμένου προβλήματος ή θεωρήματος, αλλά σίγουρα και στην εμπειρία – ικανότητα του λύτη. Το πρώτο μέρος της ανάλυσης ολοκληρώνεται με την παρουσίαση όλων των βοηθητικών κατασκευών και είναι αυτό στο οποίο εντοπίζεται κυρίως η ευρετική ικανότητα της μεθόδου.

Το δεύτερο μέρος (resolution), έχει περισσότερο βοηθητικό χαρακτήρα[93] και η φύση του διαφοροποιείται σε προβλήματα και θεωρήματα.

Στην περίπτωση των προβλημάτων, ο ρόλος του είναι να εξηγήσει γιατί τα νέα γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία εισήχθησαν στο πρώτο μέρος, είναι κατασκευάσιμα ανεξάρτητα από το ζητούμενο[94] παρά το γεγονός ότι η ανάλυση ξεκίνησε από τα δεδομένα και το ζητούμενο μαζί[95]. Η αιτιολόγηση αυτή γίνεται με διαδοχικά συμπεράσματα χρησιμοποιώντας την ορολογία και τις προτάσεις των «Δεδομένων» του Ευκλείδη. Αυτό που είναι ιδιαίτερα σημαντικό είναι ότι ενώ το δεύτερο μέρος της ανάλυσης μοιάζει να ισοδυναμεί με μια απόδειξη για το ζητούμενο, κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Το γεγονός ότι τα υποθετικά γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία παρουσιάστηκαν στον πρώτο μέρος, είναι πράγματι κατασκευάσιμα

93 Hintikka & Remes (1974, 54)

94 Στην περίπτωση του προβλήματος VII.107, τα βήματα [12] – [20] εξηγούν γιατί το σημείο Ζ είναι προσδιορίσιμο βάσει των δεδομένων και μόνο, ενώ τα βήματα [20] – [25] αναδεικνύουν γιατί το σημείο Α μπορεί να προσδιοριστεί μέσω του Ζ.

95 Προβλήματα τα οποία λύνονται χωρίς τη χρήση βοηθητικών κατασκευών, αποτελούν απλές περιπτώσεις, οι οποίες δεν έχουν ανάγκη ανάλυσης. Η ανάλυση αποτελεί μια μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται, όπως αναφέρει και ο Heath (1956, 127) για πραγματικά δύσκολα προβλήματα.

δεν εξασφαλίζει ότι η ανάλυση είναι πετυχημένη. Ενδεχομένως το αρχικό σχήμα να βασίζεται σε παραδοχές οι οποίες δεν διέπονται από γενικότητα, ενώ οι βοηθητικές κατασκευές μπορεί να είναι πραγματοποιήσιμες αλλά ενδεχομένως ανεπαρκείς ή άσχετες με τη θεμελίωση του ζητούμενου[96]. Οι ιδιότητες και οι σχέσεις μεταξύ των γεωμετρικών αντικειμένων που διατυπώνονται στο πρώτο μέρος, δεν αξιολογούνται στο δεύτερο. Αυτό σημαίνει ότι η δυνατότητα σύστασης του δεύτερου μέρους δεν ισοδυναμεί με τη δυνατότητα αντιστροφής των βημάτων της ανάλυσης. Το δεύτερο μέρος δεν εξασφαλίζει ότι το πρόβλημα λύνεται μέσω των συγκεκριμένων κατασκευών. Η σύστασή του δεν αποτελεί καν κριτήριο επιλυσιμότητας. Το ίδιο ισχύει και για τη μη δυνατότητα σύστασής του, η οποία επίσης δεν αποτελεί κριτήριο μη επιλυσιμότας, ακόμα κι αν έχουν εξαντληθεί όλοι οι δυνατοί τρόποι αιτιολόγησης της κατασκευασιμότητας των γεωμετρικών αντικειμένων στη βάση των δεδομένων ενός προβλήματος. Το δεύτερο μέρος προχωρά χρησιμοποιώντας προτάσεις των «Δεδομένων», ο αριθμός των οποίων είναι πεπερασμένος. Έτσι, πάντα μπορεί κάποιος να εικάσει ότι η εισαγωγή ενός νέου θεωρήματος θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα. Ο Hankel υποστηρίζει ότι το δεύτερο μέρος της ανάλυσης μπορεί να υποδείξει πότε ένα πρόβλημα είναι επιλύσιμο, αφού σε αυτό προσδιορίζονται οι συνθήκες[97] κάτω από τις οποίες μπορεί κάτι να κατασκευαστεί. Οι Hintikka & Remes θεωρούν ότι ο Hankel κάνει λάθος : *«ακόμα κι αν είναι γνωστές οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα πρόβλημα έχει λύση, εξακολουθεί να μην είναι αποφασίσιμο αν αυτό συμβαίνει μέσω των συγκεκριμένων κατασκευών»*[98]. Το δεύτερο μέρος της ανάλυσης μπορεί να θεμελιώσει εκ των προτέρων μόνο αναγκαίες συνθήκες επιλυσιμότητας, και όχι τις ικανές και αναγκαίες. Αυτό θα γίνει κατά τη σύνθεση.

Όσον αφορά την περίπτωση των θεωρημάτων, το δεύτερο μέρος της ανάλυσης είναι αρκετά σύντομο και πολλές φορές επαναλαμβάνεται κατά τη σύνθεση. Οι Hintikka & Remes αναφέρουν ότι ρόλος του φαίνεται να είναι η πρόβλεψη του πρώτου βήματος της σύνθεσης ή η πιστοποίηση ότι το βήμα αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί[99]. Το μέρος αυτό φαίνεται να λειτουργεί περισσότερο σαν επίλογος της ανάλυσης και δεδομένου ότι τα παραδείγματα αναλύσεων θεωρημάτων είναι ελάχιστα, είναι δύσκολο να εξάγει κανείς βέβαια συμπεράσματα.

96 Behboud (1994, 71)

97 Οι συνθήκες αυτές αποτελούν αυτό που ο Πάππος ονομάζει «διορισμό» στο τέλος του ορισμού της ανάλυσης.

98 Hintikka & Remes (1974, 58) Παραθέτουν και πηγή σύμφωνα με την οποία και ο Heath έχει την ίδια άποψη με αυτούς.

99 Hintikka & Remes (1974, 62)

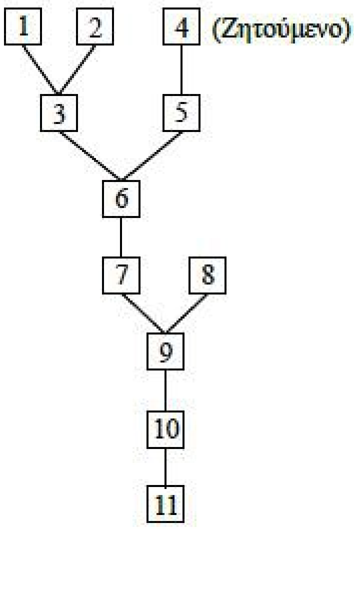
(III) Σύνθεση

Το τρίτο στάδιο της μεθόδου, η σύνθεση, αποτελείται από δύο μέρη: την κατασκευή και την απόδειξη. Στα θεωρήματα δεν υπάρχει το πρώτο μέρος. Αυτό φαίνεται να συμφωνεί με την περιγραφή της ανάλυσης θεωρήματος στον Πάππο, όπου ορίζει ως αντίστροφο της ανάλυσης την απόδειξη. Το πρόβλημα όμως είναι ότι με τον ίδιο τρόπο περιγράφει και την ανάλυση προβλήματος, στην οποία υπάρχει κατασκευή. Η σύσταση της σύνθεσης είναι εφικτή αν η ανάλυση η οποία έχει προηγηθεί είναι επιτυχημένη.

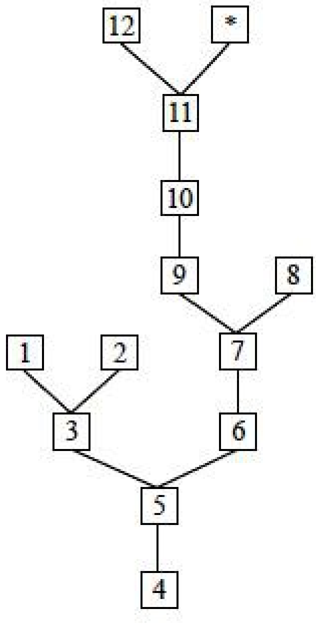
4.4.2 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Όσον αφορά το «ζήτημα της κατεύθυνσης», τα παραπάνω παραδείγματα δείχνουν ότι ανάλυση είναι περισσότερο συμβατή με την πρώτη ερμηνεία, δηλαδή με μια πορεία διαδοχικών συμπερασμάτων, παρά με μια αναζήτηση προκείμενων. Αυτό που μένει να εξεταστεί είναι το κατα πόσο είναι δυνατό να συσταθεί η σύνθεση απλώς αντιστρέφοντας τα βήματα της ανάλυσης.

Τα δέντρα του παρακάτω σχήματος αναπαριστούν την πορεία η οποία ακολουθήθηκε στο πρώτο μέρος της ανάλυσης (κύρια ανάλυση) και στο δεύτερο μέρος της σύνθεσης (απόδειξη) στην ανάλυση του προβλήματος VII.107 που παρουσιάστηκε προηγουμένως :



(κύρια ανάλυση)



(απόδειξη)

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, η ακολουθία των βημάτων δεν είναι γραμμική. Το δέντρο της απόδειξης, δεν παράγεται απλώς αντιστρέφοντας το δέντρο της κύριας ανάλυσης. Πράγματι, αν παραβλέψουμε τους ισχυρισμούς [12][100], [*][101] που εμφανίζονται μόνο στο δέντρο της απόδειξης, η ακολουθία των ισχυρισμών < 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 > στο δέντρο της κύριας ανάλυσης, με [4], [11] άκρα του δέντρου, εμφανίζεται στο δεντρο της απόδειξης με αντίστροφη σειρά. Όμως, οι ισχυρισμοί [6], [9] στο δέντρο της κύριας ανάλυσης, προέκυψαν από τον συνδυασμό δύο επιμέρους δέντρων, ακόμα κι αν στην περίπτωση του ισχυρισμού [9], αυτό αποτελείται από μια και μόνο πρόταση. Αντίστοιχα, στο δέντρο της απόδειξης < 11, 10, 9, 7, 6, 5, 4 >, ο ισχυρισμός [7] δεν προκύπτει μόνο από τον [9], ενώ η μετάβαση από τον [6] στον [5] είναι δυνατή λόγω του [3], ο οποίος όμως έχει προκύψει από τους [1] και [2], οι οποίοι παράγονται ανεξάρτητα σε μια παράλληλη πορεία.

Ο Gardies υποστηρίζει ότι σπάνια παρατηρείται ισοδυναμία μεταξύ όλων των ενδιάμεσων βημάτων της ανάλυσης. Συνήθως η ισοδυναμία αποκαθίσταται μεταξύ ενός συνόλου βημάτων με ένα άλλο σύνολο βημάτων[102]. Η άποψη η οποία υποστηρίζεται από τους περισσότερους σχολιαστές είναι ότι το πρώτο μέρος της ανάλυσης (analysis proper) αποτελεί συνολικά το αντίστροφο της απόδειξης και το δεύτερο μέρος της ανάλυσης (resolution) το αντίστροφο της κατασκευής. Στην πρώτη περίπτωση, η θεμελίωση των ισοδυναμιών ενδεχομένως να είναι δυνατή μεταξύ όλων των ενδιάμεσων βημάτων. Στην δεύτερη περίπτωση όμως, αυτό είναι αδύνατο. Το μόνο το οποίο μπορεί να ισχυριστεί κανείς με βεβαιότητα είναι ότι το δεύτερο μέρος της ανάλυσης υποδεικνύει την πορεία η οποία πρέπει να ακολουθηθεί κατά την κατασκευή, αναδεικνύοντας παράλληλα ότι ο ρόλος της σύνθεσης δεν περιορίζεται μόνο στην επιβεβαίωση της αντιστρεψιμότητας των βημάτων της ανάλυσης.

Οι Hintikka & Remes μελέτησαν τη δομή της μεθόδου προκειμένου να εξετάσουν κατά πόσο είναι δυνατό να συγκροτηθεί ένα ερμηνευτικό μοντέλο με τη βοήθεια των ταμπλό Beth[103]. Στην προσπάθειά τους αυτή επισημαίνουν ότι ίσως το πιο παραπλανητικό στοιχείο ως προς τη μέθοδο της ανάλυσης στον ορισμό του Πάππου, είναι το γεγονός ότι δεν είναι ξεκάθαρο το τι είναι αυτό το οποίο αναλύεται. Μιλούν για δύο πιθανές εκδοχές: την «προτασιακή ερμηνεία» ή «ανάλυση αποδείξεων» και την «ερμηνεία της συγκεκριμενοποίησης» ή «ανάλυση

100 (12), το πρώτο βήμα του δεύτερου μέρους (resolution) της ανάλυσης.

101 (*), σχέση η οποία δεν υπάρχει καθόλου στην ανάλυση, αλλά παράγεται στο κατασκευαστικό μέρος της σύνθεσης που προηγήθηκε.

102 Gardies (2001, 27)

103 Hintikka (Analyzing and synthesizing analysis)

σχήματος»[104]. Απορρίπτουν την «προτασιακή ερμηνεία» κατά την οποία προχωραμε από πρόταση σε πρόταση ακολουθώντας *μια* γραμμική πορεία βημάτων, ξεκινώντας από το ζητούμενο και αναζητώντας τις δεδομένες προκείμενες από τις οποίες θα μπορούσε να έχει προέλθει. Υποστηρίζουν την «ερμηνεία της συγκεκριμενοποίησης», κατά την οποία επιλέγεται ένα συγκεκριμένο σχήμα, το οποίο εκπροσωπεί την κλάση των αντικειμένων στα οποία αναφέρεται το ζητούμενο, και αναλύεται η πολυπλοκότητά του, δηλαδή οι αλληλοεξαρτήσεις των επιμέρους γεωμετρικών αντικειμένων από τα οποία αυτό αποτελείται. Έτσι, τα βήματα της ανάλυσης δεν αφορούν τη μετάβαση από πρόταση σε πρόταση αλλά από γεωμετρικό αντικείμενο σε γεωμετρικό αντικείμενο. Η πορεία αυτή μοιάζει περισσότερο με ένα σύνθετο δίκτυο συνδέσεων και η ευρετική ικανότητα της μεθόδου έγκειται στη δυνατότητα αναγνώρισης του τρόπου με τον οποίο αποκαθίστανται τελικά οι επιμέρους συνδέσεις. Αυτό όμως εξασφαλίζεται μόνο αν γίνει αντιληπτό το μέγιστο των πληροφοριών ως προς τις σχέσεις μεταξύ των εμπλεκόμενων γεωμετρικών αντικειμένων, το οποίο συντελείται αφενός μέσα από την ανακάλυψη – αξιοποίηση των πληροφοριών που φέρει το ζητούμενο και αφετέρου από την επιλογή των κατάλληλων βοηθητικών κατασκευών.

Βέβαια αν παρατηρήσουμε την περίπτωση του θεωρήματος VII.26 το οποίο αναφέρθηκε προηγουμένως, βλέπουμε ότι ξεκινώντας από την τελευταία σχέση της κύριας ανάλυσης $HZ \| B\Gamma$, η resolution θα μπορούσε να έχει προχωρήσει ως εξής:

[12] $Z\hat{B}\Delta = B\hat{Z}H$ (ως εντός εναλλάξ)

[13] $B\hat{Z}H = B\hat{A}H$ (ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

[14] $Z\hat{B}\Delta = \Delta\hat{A}E$

(ως απέναντι εσωτερική – εξωτερική εγγεγγραμμένου τετραπλεύρου)

[15] $Z\hat{B}\Delta = B\hat{A}H$ (από [12], [13])

το οποίο ισχύει αφού $\Delta\hat{A}E + B\hat{A}\Gamma = 2\pi$, δηλαδή $B\hat{A}\Gamma + B\hat{A}H = 2\pi$

[16] $\Delta\hat{A}E = B\hat{A}H$ (από [14], [15])

[17] Όμως $B\hat{A}H + B\hat{A}\Gamma = 2\pi$,

[18] δηλαδή $\Delta\hat{A}E + B\hat{A}\Gamma = 2\pi$, που ισχύει.

και τα βήματα της σύνθεσης να ακολουθούν ακριβώς την αντίστροφη πορεία από αυτή των βημάτων της ανάλυσης, ο Πάππος όμως βλέπουμε ότι προτίμησε να προχωρήσει διαφορετικά

104 Hintikka& Remes (1974, 31)

κινούμενος μέσα από τη διατύπωση υποθέσεων (προτάσεων) και όχι μέσα από την ανάλυση ενός σχήματος. Επιπλέον οι φράσεις που χρησιμοποιεί είναι: «*δεήσει ...ζητῆσαι*», «*τοῦτο δὲ ταὐτόν ἐστιν τῷ ζητεῖν, εἰ ἔστιν ὡς ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ*» υποδηλώντας τη μετάβαση από πρόταση σε πρόταση.

Ο Gardies[105] ταξινομεί τα σωζόμενα παραδείγματα ανάλυσης και σύνθεσης στις ακόλουθες κατηγορίες:

[1] Τέλειες Αναλύσεις[106]

Σε αυτή την κατηγορία συγκαταλέγονται τα παραδείγματα όπου ανάλυση και σύνθεση διατυπώνονται με σαφήνεια σε δύο διακριτά μέρη. Η πρόταση στην οποία καταλήγει η ανάλυση ταυτίζεται με την πρόταση με την οποία ξεκινά η σύνθεση, εξασφαλίζοντας την ισοδυναμία υπόθεσης συμπεράσματος, χωρίς όμως να είναι απαραίτητο να ακολουθείται ακριβώς η ίδια πορεία βημάτων με αντίστροφη σειρά.

[2] Ατελείς Αναλύσεις

Εδώ, συμπεριλαμβάνονται οι κατασκευές – αποδείξεις στις οποίες η πρόταση στην οποία καταλήγει η ανάλυση δεν ταυτίζεται με αυτή με την οποία ξεκινά η σύνθεση, δημιουργώντας αμφιβολίες σε σχέση με τη δυνατότητα σύστασης της σύνθεσης. Οι ατελείς περιπτώσεις διακρίνονται σε δύο επιμέρους κατηγορίες: σε αυτές που αρκεί μια μικρή τροποποίηση ή προσθήκη για να αποτελέσουν τέλειες περιπτώσεις και σε αυτές που ο γεωμέτρης εκλαμβάνει την ανάλυση ως ένα προπαρασκευαστικό στάδιο επεξεργασίας των στοιχείων τα οποία θα χρησιμοποιηθούν αργότερα κατά τη σύνθεση χωρίς όμως να παρέχει το σύνολο των πληροφοριών, με αποτέλεσμα η ανάλυση απλώς να σκιαγραφεί τον τρόπο με τον οποίο θα προχωρήσει η σύνθεση.

[3] Ημιτελείς Αναλύσεις

Σε αυτή την κατηγορία, περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις όπου παρουσιάζεται μόνο το μέρος της ανάλυσης. Παράδειγμα ημιτελούς περίπτωσης αποτελεί το θεώρημα VII.26 του Πάππου το οποίο παρουσιάστηκε προηγουμένως. Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο

105 Gardies (2001, 32, 39)
106 Ο Gardies αναφέρεται σε αναλύσεις αλλά εννοεί και τα δύο μέρη της μεθόδου.

τρόπος με τον οποίο έχει προχωρήσει η ανάλυση καθιστά προφανές ότι τα βήματα αντιστρέφονται και οι γεωμέτρες αντιλαμβανόμενοι τη σύνθεση ως επανάληψη της ανάλυσης την παραλείπουν.

5. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΑΒΙΚΗ ΠΑΡΑΔΟΣΗ

Η μέθοδος της ανάλυσης και σύθεσης αποτέλεσε πεδίο έρευνας και για αρκετούς Άραβες μαθηματικούς του 10ου και 11ου αιώνα μ.Χ., μεταξύ των οποίων ο Ibn al – Haytham, ο Abū Sahl al – Kūhī και ο Ibrāhīm Ibn Sinān. Και οι τρεις βασίστηκαν σε μεγάλο βαθμό στη γεωμετρική μέθοδο της ανάλυσης που εφάρμοζαν οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες με στόχο να αναγάγουν τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων της εποχής σε κατασκευές οι οποίες μπορούσαν να επιτευχθούν με χρήση κωνικών τομών[107]. Ο Ibn al – Haytham έγραψε δύο πραγματείες με τίτλο «Ανάλυση και Σύνθεση» και «Δεδομένα»[108]. Ασχολήθηκε ιδιαίτερα με γεωμετρικά προβλήματα στο χώρο, αλλά χρησιμοποίησε τη μέθοδο και κατά την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε αναλυτικότερα σε παραδείγματα από τον Abū Sahl al – Kūhī και τον Ibrāhīm Ibn Sinān.

5.1. Abū Sahl al – Kūhī (ή al – Qūhī)

Ο Abū Sahl al – Kūhī ήταν Ιρανός μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος του 10ου αιώνα. Ήταν σπουδαίος γεωμέτρης και μελέτησε εκτεταμένα το έργο των αρχαίων Ελλήνων γεωμετρών εστιάζοντας στο έργο του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Έγραψε μάλιστα και σχόλια στο δεύτερο βιβλίο του «Περί σφαίρας και κυλίνδρου». Τα αποτελέσματά του αφορούσαν κατά κύριο λόγο προβλήματα τα οποία ανάγονταν στην επίλυση εξισώσεων με βαθμό μεγαλύτερο του δύο, αρκετά από τα οποία ήταν αυξημένης δυσκολίας[109]. Η προσπάθειά του να αναγάγει γεωμετρικά προβλήματα της εποχής σε προβλήματα που σχετίζονταν με την κατασκευή κωνικών τομών δεν συνδέεται με κάποια πεποίθηση ότι οι κωνικές τομές μπορούσαν να κατασκευαστούν αποκλειστικά με κανόνα και διαβήτη. Είχε γράψει μάλιστα και μια πραγματεία με τίτλο «On the perfect compass» στην οποία περιέγραφε ένα όργανο το οποίο επέτρεπε την κατασκευή κωνικών τομών, το οποίο είναι αρκετά πιθανό να ήταν δικής του επινόησης. Η επιλογή της αναλυτικοσυνθετικής μεθόδου φαίνεται να οφείλεται περισσότερο στην χρησιμότητά της σε σχέση με την ταξινόμηση των

107 http://www.britannica.com/topic/mathematics/Mathematics-in-the-Islamic-world-8th-15th-century#ref536197

108 Rashed R.(1994, 123)

109 Μεταξύ των οποίων προβλήματα ανάλογα με αυτά τα οποία παρουσιάζονται στο «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» ενώ είναι αρκετά γνωστή και η λύση του σε σχέση με την κατασκευή κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε δεδομένο κύκλο.

γεωμετρικών προβλημάτων και στην ανάδειξη των συνθηκών επιλυσιμότητάς τους.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε δύο συγκεκριμένα προβλήματα. Το πρώτο αποτελεί το αντικείμενο μελέτης μίας πραγματείας με τίτλο «On Drawing Two Lines From a Point at a Known Angle»[110] κατά την οποία ο Abū Sahl al – Kūhī μελετά τις πιθανές λύσεις ενός γενικού προβλήματος, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τη μέθοδο της ανάλυσης και της σύνθεσης αλλά και την ορολογία των «Δεδομένων». Η οργάνωση και ο χαρακτήρας της συγκεκριμένης πραγματείας είναι ανάλογη με αυτή που παρατηρούμε στις «Επαφές» και στο «Περί Λόγου Αποτομής» του Απολλώνιου. Το δεύτερο πρόβλημα αφορά στην κατασκευή του κανονικού επταγώνου με χρήση ανάλυσης και σύνθεσης.

5.1.1. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ο

Το βασικό πρόβλημα το οποίο διατυπώνεται στην πραγματεία «On Drawing Two Lines From a Point at a Known Angle» έχει ως εξής: «Δεδομένης μιας ευθείας (ή ενός κύκλου) και ενός σημείου, να κατασκευαστούν δύο ευθείες οι οποίες να διέρχονται από το δεδομένο σημείο, όπου η μεταξύ τους γωνία είναι δεδομένη, έτσι ώστε να τέμνουν τη δεδομένη ευθεία (ή τον κύκλο)σε δύο σημεία τέτοια ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία σχηματίζονται από αυτά και το δεδομένο σημείο να συνδέονται με μια δεδομένη συνθήκη». Αν Α το δεδομένο σημείο και Β, Γ τα σημεία τομής των ζητούμενων ευθειών με τη δεδομένη ευθεία (ή τον κύκλο), το πρόβλημα οργανώνεται ξεκινώντας από τις επτά υποπεριπτώσεις οι οποίες αναφέρονται σε δεδομένη ευθεία, ενώ οι δεδομένες συνθήκες οι οποίες συμπληρώνουν τη διατύπωση του προβλήματος, συνδέουν κάθε φορά τα Α, Β, Γ και βάσει των οποίων διατάσσονται τα υποπροβλήματα είναι οι εξής:

[1] ο λόγος $\frac{AB}{A\Gamma}$ είναι δεδομένος,

[2] η επιφάνεια $AB\cdot A\Gamma$ είναι δεδομένη,

[3] η επιφάνεια του τριγώνου ΑΒΓ είναι δεδομένη,

[4] το μήκος του ΒΓ είναι δεδομένο,

[5] η επιφάνεια $AB^2+A\Gamma^2$ είναι δεδομένη,

[6] το μήκος ΑΒ + ΑΓ είναι δεδομένο,

[7] το μήκος ΑΒ – ΑΓ είναι δεδομένο.

110 Berggren, Brummelen (2001)

Ακολουθούν οι τέσσερις υποπεριπτώσεις οι οποίες αναφέρονται σε δεδομένο κύκλο, οι οποίες συμπληρώνονται και διατάσσονται από τις συνθήκες :

[1] ο λόγος $\frac{AB}{A\Gamma}$ είναι δεδομένος,

[2] η επιφάνεια $AB \cdot A\Gamma$ είναι δεδομένη,

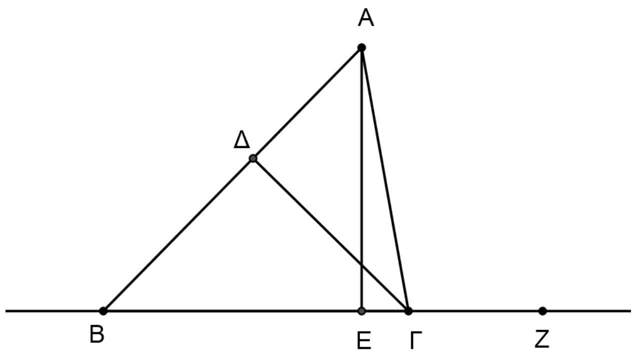
[3] η επιφάνεια του τριγώνου ΑΒΓ είναι δεδομένη,

[4] το μήκος του ΒΓ είναι δεδομένο.

Κατά τη διαπραγμάτευση των προτάσεων παραθέτει μόνο την ανάλυση ενώ οι διορισμοί παρουσιάζονται στο τέλος ξεχωριστά αφού έχουν παρουσιαστεί όλες οι δυνατές περιπτώσεις. Ακολουθεί η παρουσίαση της περίπτωσης [5] :

[5]

«Αν ε δεδομένη ευθεία και Α δεδομένο σημείο, να κατασκευαστούν δύο ευθείες οι οποίες να διέρχονται από το Α, να σχηματίζουν δεδομένη γωνία και να τέμνουν την ε στα Β, Γ, έτσι ώστε $AB^2 + A\Gamma^2$ *να ισούται με μια δεδομένη επιφάνεια».*



ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και οι ζητούμενες ευθείες έχουν κατασκευαστεί. Έστω Β, Γ τα σημεία τομής των δύο ευθειών με τη δεδομένη ευθεία ε. Από το Γ φέρω κάθετη στην ΑΒ. Έστω Δ το σημείο τομής της καθέτου με την ΑΒ. Τότε $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot BA \cdot A\Delta$ (Στοιχεία, ΙΙ.13), άρα $B\Gamma^2 + 2 \cdot BA \cdot A\Delta = AB^2 + A\Gamma^2$ με $AB^2 + A\Gamma^2$ δεδομένο, επομένως $B\Gamma^2 + 2 \cdot BA \cdot A\Delta$ δεδομένο. Όμως η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι δεδομένη και η $\Gamma\hat{\Delta}A$ είναι ορθή, άρα το τρίγωνο ΑΓΔ είναι δεδομένου είδους (Δεδομένα, 40), επομένως ο λόγος $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A}$ είναι δεδομένος.

Από το σημείο Α φέρω κάθετη στη ΒΓ. Έστω Ε το σημείο τομής της κάθετης με τη ΒΓ. Στη συνέχεια, παίρνω σημείο Ζ στη ΒΓ τέτοιο ώστε $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = \frac{AE}{\Gamma Z}$. Όμως $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A}$ δεδομένος, άρα $\frac{AE}{\Gamma Z}$ δεδομένος με ΑΕ δεδομένου μεγέθους, άρα ΓΖ δεδομένου μεγέθους.

Όμως $\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma\Delta \cdot AB}{\Delta A \cdot AB} = \frac{AE \cdot B\Gamma}{\Delta A \cdot AB}$ (1)

Επίσης έχουμε ότι $\frac{AE}{\Gamma Z} = \frac{AE \cdot B\Gamma}{\Gamma Z \cdot B\Gamma}$ (2). Από τις (1), (2) έχουμε ότι $\Delta A \cdot AB = \Gamma Z \cdot B\Gamma$.

Όμως $B\Gamma^2 + 2 \cdot BA \cdot A\Delta$ δεδομένο, άρα $B\Gamma^2 + 2 \cdot \Gamma Z \cdot B\Gamma$ δεδομένο. Όμως ΓΖ δεδομένου μεγέθους, άρα και το ΓZ^2 θα είναι δεδομένου μεγέθους, επομένως $B\Gamma^2 + 2 \cdot \Gamma Z \cdot B\Gamma + \Gamma Z^2$ δεδομένο,το οποίο ισούται με το BZ^2 , άρα το ΒΖ θα είναι δεδομένου μεγέθους. Άρα το $B\Gamma = BZ - \Gamma Z$ θα είναι δεδομένου μεγέθους. Κατόπιν η λύση του προβλήματος ανάγεται στην τέταρτη περίπτωση, κατά την οποία ζητείται να κατασκευαστούν οι δύο ευθείες αν το τμήμα το οποίο σχηματίζεται από τα Β, Γ είναι δεδομένου μεγέθους, το οποίο με τη σειρά του ανάγεται στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Ο Abū Sahl al – Kūhī εξετάζει την περίπτωση όπου η δεδομένη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι οξεία, αλλά αυτό δεν επηρεάζει την ορθότητα της πρότασης. Στην περιπτωση αμβλείας γωνίας η ανάλυση θα ξεκινούσε από τη σχέση $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2 \cdot BA \cdot A\Delta$ χωρίς ιδιαίτερες αλλαγές επί της ουσίας.

5.1.2. ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ο (Κατασκευή κανονικού επταγώνου)

Η κατασκευή του κανονικού επταγώνου δεν φαίνεται να απασχόλησε ιδιαίτερα τους Έλληνες γεωμέτρες κατά την αρχαιότητα[111]. Σε αντίθεση με άλλες κατασκευές[112], οι οποίες αποτέλεσαν αντικείμενο ενασχόλησης αρκετών μαθηματικών, με αποτέλεσμα να έχουμε μια πληθώρα περιγραφών για αυτές, αναφορές σε σχέση με την κατασκευή του κανονικού επταγώνου εντοπίζουμε μόνο σε βαβυλωνιακές πλάκες οι οποίες χρονολογούνται γύρω στα 1800 π.Χ. και στα «Μετρικά» του Ήρωνα[113], αναφορές οι οποίες δεν προσφέρουν ιδιαίτερες πληροφορίες. Η σπουδαιότερη, και επί της ουσίας η μοναδική περιγραφή της εν λόγω κατασκευής, ανιχνεύεται σε αραβικά κείμενα του 9ου αιώνα μ.Χ., και πιο συγκεκριμένα σε ένα έργο του Άραβα μαθηματικού Thabit ibn Qurra[114], ο οποίος μας μεταφέρει μια πραγματεία, την οποία αποδίδει στον Αρχιμήδη, με τίτλο «The Book of Construction of the Circle Divided Into Seven Equal Parts, by Archimedes»[115]. Η πραγματεία αποτελείται από 18 προτάσεις. Η τελευταία πρόταση, η οποία αφορά στην κατασκευή του κανονικού επταγώνου, ώθησε αρκετούς Άραβες μαθηματικούς της εποχής να ασχοληθούν με τη συγκεκριμένη κατασκευή[116], μια ενασχόληση η οποία με τη σειρά της συνέβαλε στην παραγωγή περαιτέρω αποτελεσμάτων στο πεδίο των γεωμετρικών κατασκευών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται συνοπτικά η συνθετική κατασκευή η οποία αποδίδεται στον Αρχιμήδη και ακολουθεί λεπτομερώς η αναλυτικοσυνθετική προσέγγιση του Abū Sahl al – Kūhī.

5.1.2.1. Η ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Ο Αρχιμήδης ξεκίνησε με την κατασκευή ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Σχεδίασε τη διαγώνιο ΒΔ και κατόπιν μια ευθεία η οποία να τέμνει τη ΒΔ σε σημείο Ε, την ΑΔ σε σημείο Ζ και την προέκταση της ΒΑ σε σημείο Η, έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΓΕΔ να είναι ισεμβαδικά. Στην πορεία κατασκεύασε ευθεία ΚΕΛ παράλληλη στην ΑΔ και απέδειξε ότι τα σημεία Κ, Α διαιρούν το τμήμα ΒΗ με τέτοιο τρόπο ώστε τα μήκη των τμημάτων ΒΚ, ΚΑ και ΑΗ να είναι τέτοια έτσι ώστε να μπορούν δυνητικά να αποτελέσουν πλευρές τριγώνου και επιπλέον να

111 Knorr (1989, 257), Martin (1998, 135 – 136), Rashed (2013, 292 – 293)

112 Ανεξάρτητα από το εάν πρόκειται για κατασκευές που πραγματοποιούνται αποκλειστικά με τη χρήση κανόνα και διαβήτη ή όχι.

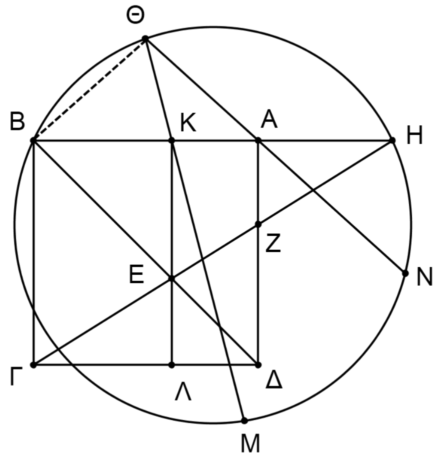
113 Heath (1981, 328), Rashed (2013, 292 – 293)

114 Ο οποίος είναι ιδιαίτερα γνωστός μέσα από τις μεταφράσεις έργων του Ευκλείδη στα αραβικά.

115 Martin (1998, 136)

116 Εκτός από τον Abū Sahl al – Kūhī, η προσέγγιση του οποίου θα παρουσιαστεί στην πορεία, με την εν λόγω κατασκευή ασχολήθηκε και ο Ibn al – Haytham ο οποίος αναφέρθηκε προηγουμένως.

συνδέονται με τις σχέσεις $BA \cdot BK = HA^2$ και $KH \cdot KA = KB^2$. Στη συνέχεια κατασκεύασε τρίγωνο ΚΘΑ τέτοιο ώστε ΚΘ = ΚΒ και ΑΘ = ΑΗ, σχεδίασε τον κύκλο ΒΘΗ και τελικά απέδειξε ότι το τόξο ΒΘ είναι το $\frac{1}{7}$ της περιφέρειας του κύκλου.



Η κατασκευή του Αρχιμήδη κρίθηκε ως ημιτελής από αρκετούς Άραβες μαθηματικούς[117]. Η ένσταση η οποία διατυπώνεται σχετίζεται με τη δυνατότητα σχηματισμού των ισεμβαδικών τριγώνων ΑΕΗ και ΓΕΔ, το οποίο πράγματι δεν εξηγείται πλήρως από τον Αρχιμήδη[118]. Ο Berggren υποστηρίζει ότι ο Αρχιμήδης πιθανότατα υπέθεσε ότι κατά την περιστροφή της ΓΖΗ γύρω από το Γ κατά μήκος του ΑΔ, αν ξεκινήσουμε από το Δ προς το Α, το εμβαδόν του ΑΖΗ σταδιακά προσεγγίζει το μηδέν τη στιγμή που το το εμβαδόν του ΓΕΔ πλησιάζει το ένα τέταρτο του τετραγώνου, ενώ ξεκινώντας την κίνηση από το Α προς το Δ παρατηρείται η αντίστροφη μεταβολή των δύο εμβαδών. Έτσι, δεν μπορεί παρά να υπάρχει σημείο της ΑΔ για το οποίο τα δύο εμβαδά να γίνονται ίσα[119]. Όμως η χρήση κινηματικής γεωμετρίας καθιστά για τον Berggren την προσέγγιση του Αρχιμήδη απόδειξη ύπαρξης και όχι κατασκευή[120]. Ως εκ τούτου, για τον Berggren, το πρόβλημα της κατασκευής του κανονικού επταγώνου παρέμεινε άλυτο για περίπου 1200 χρόνια, δηλαδή μέχρι την αναλυτικοσυνθετική επίλυσή του από τον Abū Sahl al – Kūhī[121].

117 Hogendijk, Sabra (2003, 180)

118 Έχει επισημανθεί ότι η αρχική μετάφραση του Thabit ibn Qurra έχει αλλοιωθεί αρκετά από τους μετέπειτα αντιγραφείς – σχολιαστές. (Knorr (1989, 257))

119 Berggren (1986, 78)

120 Berggren (1986, 78)

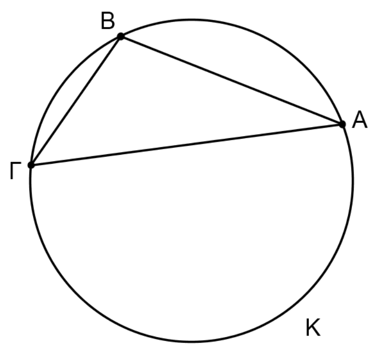
121 Κατά τον Hogendijk περίπου την ίδια περίοδο με τη λύση του al Kuhī χρονολογείται και μια κατασκευή του al – Saghani, η οποία ενδεχομένως και να είναι νωρίτερη. (Hogendijk (2003, 180))

5.1.2.1. Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ Abū Sahl al – Kūhī[122]

Ο Abū Sahl al – Kūhī ξεκινά από την υπόθεση ότι το κανονικό επτάγωνο έχει ήδη κατασκευαστεί και προχωρά μέσω μιας αναλυτικής, «προς τα πίσω» πορείας αποτελούμενης από τρεις διαδοχικές αναγωγές ως εξής:

ΑΝΑΛΥΣΗ

Έστω ότι η κατασκευή του κανονικού επταγώνου έχει επιτευχθεί και ας είναι η ΒΓ του παρακάτω σχήματος μια από τις επτά ίσες πλευρές του κανονικού επταγώνου και C ο αντίστοιχος περιγεγραμμένος κύκλος.

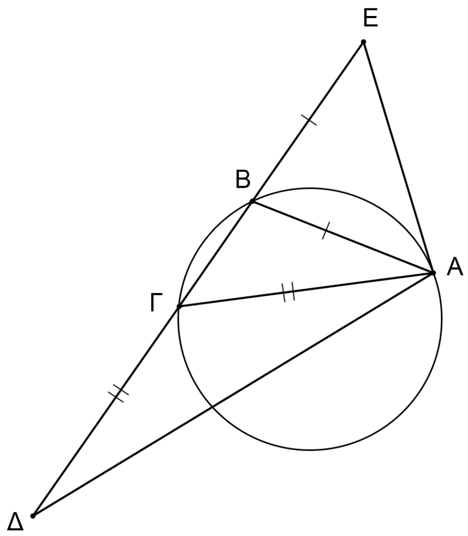


Θεωρούμε σημείο Α του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού επταγώνου τέτοιο ώστε το τόξο ΑΒ να είναι διπλάσιο από το τόξο ΒΓ. Αυτό σημαίνει ότι το τόξο ΑΒΓ θα είναι τριπλάσιο από το τόξο ΒΓ και δεδομένου ότι το ΒΓ είναι το $\frac{1}{7}$ της περιφέρειας του C, θα έχουμε ότι το τόξο ΑΚΓ θα είναι τετραπλάσιο του τόξου ΒΓ. Όμως, σύμφωνα με την πρόταση VI.33 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη[123], οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ανάλογες των τόξων που ορίζουν οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ στον κύκλο, συνεπώς $\hat{B}=4\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}=2\hat{A}$. Έτσι, η κατασκευή του κανονικού επταγώνου ανάγεται στην κατασκευή ενός τριγώνου, οι γωνίες του οποίου βρίσκονται σε αναλογία 1:4:2.

122 Η αναλυτικοσυνθετική προσέγγιση του Abū Sahl al – Kūhī βρίσκεται σε μια πραγματεία η οποία είναι αφιερωμένη στον τότε βασιλιά της Βαγδάτης Abud al – Daula.

123Πρόταση VI.33 *«Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι»*

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ένα τέτοιο τρίγωνο έχει ήδη κατασκευαστεί και είναι το τρίγωνο ΑΒΓ. Κατόπιν, προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ του τριγώνου και θεωρούμε στην πρέκτασή της σημείο Δ τέτοιο ώστε $ΓΔ=ΓΑ$ και σημείο Ε τέτοιο ώστε $BE=BA$, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Στη συνέχεια, ενώνουμε τα σημεία Δ, Ε με το σημείο Α με αποτέλεσμα να σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα. Η γωνία $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΔ, συνεπώς $\hat{Γ}=Γ\hat{Δ}Α+Γ\hat{Α}Δ = 2\,Α\hat{Δ}Γ$. Όμως $\hat{Γ}=2\,\hat{Α}$, άρα $Γ\hat{Δ}Α=Γ\hat{Α}Δ=\hat{Α}$.
Αντίστοιχα η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΕ, επομένως $\hat{B}=B\hat{E}A+B\hat{A}E=2\,B\hat{E}A$. Όμως $\hat{B}=2\,\hat{Γ}$, άρα $B\hat{E}A=B\hat{A}E=\hat{Γ}$.

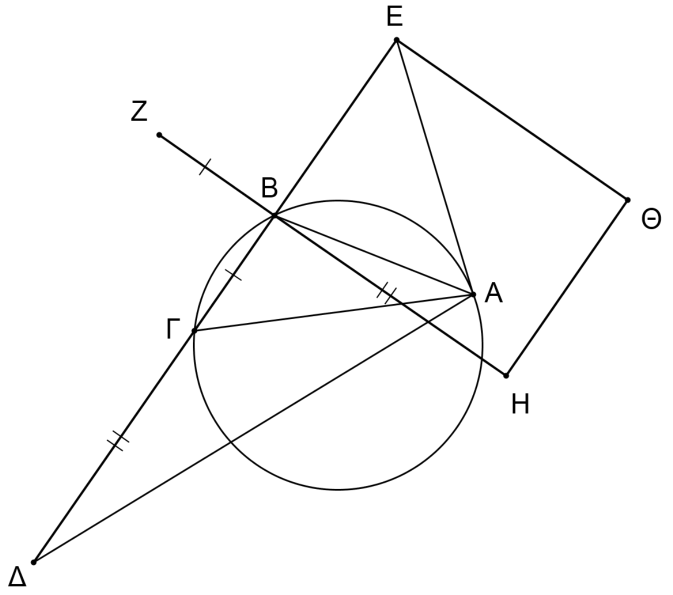
Έτσι, συμπεραίνουμε ότι:

- $ABΓ\sim ΔBA$, συνεπώς $\dfrac{AB}{ΔB}=\dfrac{BΓ}{AB}$, δηλαδή $AB^2=ΔB\cdot BΓ$ (1)
- $AEB\sim ΓEA$, συνεπώς $\dfrac{AE}{ΓE}=\dfrac{EB}{AE}$, δηλαδή $AE^2=ΓE\cdot EB$ (2)

Όμως $AB=EB$ και $B\hat{E}A=B\hat{A}E=\hat{Γ}$, άρα $AE=AΓ=ΓΔ$, συνεπώς οι σχέσεις (1), (2) γίνονται $BE^2=ΔB\cdot BΓ$ (3) και $ΓΔ^2=ΓE\cdot EB$ (4) αντίστοιχα.

Έτσι, η κατασκευή του τριγώνου ΑΒΓ ανάγεται στην τομή του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ σε σημεία Β, Γ έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις (3), (4).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η ζητούμενη τομή έχει ήδη επιτευχθεί σύμφωνα με τις απαιτήσεις των σχέσεων (3), (4). Στη συνέχεια, φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη στο ΔΕ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημεία Ζ, Η τέτοια ώστε $ZB = B\Gamma$ και $BH = \Gamma\Delta$, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



Κατόπιν, ολοκληρώνουμε την κατασκευή σχηματίζοντας το ορθογώνιο ΒΕΘΗ. Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (3) έχουμε ότι $HZ \cdot BZ = \Delta B \cdot B\Gamma = EB^2$. Όμως $BZ = B\Gamma$ και $EB = \Theta H$, επομένως $HZ \cdot B\Gamma = \Theta H^2$, συνεπώς το σημείο Θ ανήκει σε παραβολή με κορυφή το σημείο Ζ και παράμετρο το ΒΓ. Επιπλέον από τη σχέση (4) έχουμε ότι $\Gamma\Delta^2 = \Gamma E \cdot EB$, δηλαδή $E\Theta^2 = \Gamma E \cdot EB$, καθώς $\Gamma\Delta = BH = E\Theta$. Επομένως, το σημείο Θ ανήκει σε υπερβολή με κορυφή το σημείο Β και παράμετρο το ΒΓ. Άρα το σημείο Θ αποτελεί το σημείο τομής των δύο κωνικών τομών.

ΣΥΝΘΕΣΗ

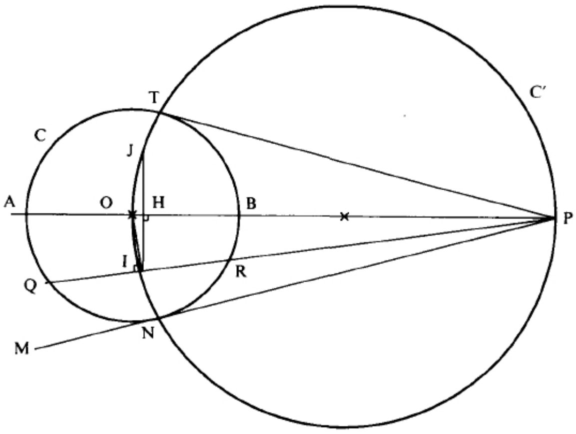
Η σύνθεση του προβλήματος πραγματοποιείται ακολουθώντας τα ίδια βήματα με αυτά της ανάλυσης αλλά με αντίστροφη σειρά. Κατασκευάζουμε μια παραβολή και μια υπερβολή με κοινή κορυφή και κοινή παράμετρο, η τομή των οποίων δίνει το σημείο Θ. Από το σημείο Θ προσδιορίζουμε τα σημεία Η, Ε, το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να γνωρίζουμε το μήκος των τμημάτων ΓΔ $(\Gamma\Delta = E\Theta)$, ΕΒ. Συνεπώς, από αυτά μπορούμε να κατασκευάσουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ και να προσδιορίσουμε σε αυτό τα σημεία Β, Γ σύμφωνα με τις σχέσεις $BE^2 = \Delta B \cdot B\Gamma$ και $\Gamma\Delta^2 = \Gamma E \cdot EB$. Έτσι, το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ είναι κατασκευάσιμο. Εν συνεχεία, από το ΒΓ κατασκευάζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε οι γωνίες του $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ να βρίσκονται σε αναλογία 1:4:2. Κατόπιν, προσδιορίζουμε το κέντρο του περιγγεγραμμένου κύκλου C του τριγώνου ΑΒΓ, το οποίο μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε το κανονικό επτάγωνο με πλευρά ΒΓ.

5.2. Ibrāhīm Ibn Sinān

Ο Ibrāhīm Ibn Sinān ήταν μαθηματικός και αστρονόμος του 10ου αιώνα, εγγονός του Thabit ibn Qurra. Θεωρείται ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς ο οποίος ασχολήθηκε με ζητήματα γεωμετρίας και ιδιαίτερα με προβλήματα τα οποία σχετίζονταν με εφαπτόμενες κύκλων. Στα έργα του περιλαμβάνεται και μια θεωρητική πραγματεία η οποία αναφέρεται εξ ολοκλήρου στη μέθοδο της ανάλυσης και της σύνθεσης κατά την αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων. Ο Ibrāhīm Ibn Sinān τονίζει τη συμβολή της αναλυτικής πορείας σε αυτό, αναφέροντας ότι είναι αυτή η οποία επιτρέπει να αποφανθεί κανείς σε σχέση με το εάν ένα πρόβλημα έχει ή όχι λύση, πόσες λύσεις και υπό ποιες προϋποθέσεις. Ενώ συνεχίζει προσθέτοντας ότι είναι και πάλι μέσω της ανάλυσης που καταφέρνει κανείς να προσδιορίσει τον τρόπο με τον οποίο θα βρεθούν. Ο ρόλος της σύνθεσης για τον Ibrāhīm Ibn Sinān περιορίζεται στο επίπεδο του ελέγχου των ισχυρισμών. Στη συνέχεια παρατίθεται μία περίπτωση αδύνατου προβλήματος από το έργο του:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

«Να κατασκευαστεί από δεδομένο σημείο P στο εξωτερικό ενός δεδομένου κύκλου C μια τέμνουσα PRQ, έτσι ώστε το διπλάσιο της γωνίας $\hat{APR}$ *που σχηματίζεται από την PRQ και τη διάμετρο AB του κύκλου, στην προέκταση της οποίας βρίσκεται το δεδομένο σημείο P, να είναι μικρότερο από τη γωνία* $\hat{APT}$ *που σχηματίζεται από τη διάμετρο αυτή και την εφαπτομένη PT στον κύκλο από το δεδομένο σημείο P. Επιπλέον, αν από το μέσο I του τμήματος RQ της τέμνουσας το οποίο αποκόπτεται από τον κύκλο, αρθεί κάθετος IH στη διάμετρο AB, το τμήμα αυτό να είναι ίσο με το ένα τέταρτο της διαμέτρου».*



ΑΝΑΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και η ζητούμενη τέμνουσα PRQ έχει κατασκευαστεί, με R, Q τα σημεία στα οποία τέμνει τον δεδομένο κύκλο C, I μέσο του RQ και AB η διάμετρος του C στην προέκταση της οποίας ανήκει το σημείο P, έτσι ώστε $IH=\frac{AB}{4}$ και $2\hat{APR}<\hat{APT}$.

Έστω O το κέντρο του κύκλου. Ενώνουμε τα σημεία O, I. Το σημείο I είναι μέσο της χορδής PQ, επομένως $OI\perp RQ$. Άρα το τρίγωνο OIP θα είναι ορθογώνιο στο I. Κατασκευάζουμε έναν κύκλο με διάμετρο OP, έστω C'. Τότε το σημείο I θα ανήκει σε αυτόν.

Παίρνουμε ένα σημείο του επιπέδου, έστω M, για το οποίο να ισχύει $\hat{MPO}=2\hat{APR}$. Ενώνουμε τα P, M και έστω N το σημείο τομής του PM με τον κύκλο C'.

Κατασκευάζουμε το συμμετρικό του σημείου I ως προς την AB το οποίο ονομάζουμε J. Τότε το J θα ανήκει στον κύκλο C' και από την υπόθεση θα έχουμε ότι $JI = 2\,IH = \frac{AB}{2}$. Επίσης θα ισχύει ότι το τόξο JI θα ισούται με το διπλάσιο του τόξου OI , το οποίο είναι ίσο με το τόξο ON . Επομένως το σημείο N ανήκει στον κύκλο C και θα έχουμε ότι $ON = JI = \frac{AB}{2}$. Επιπλέον ισχύει ότι $ON \perp NP$, αφού $O\hat{N}P$ εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, επομένως η PN εφάπτεται του C και $2\,A\hat{P}Q = A\hat{P}T$. Αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεση $2\,A\hat{P}R < A\hat{P}T$, άρα το πρόβλημα είναι αδύνατο.

5.2.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

O Ibrāhīm Ibn Sinān πέρα από την αναφορά του στη συμβολή της ανάλυσης σε σχέση με την ανακάλυψη της λύσης και την ανάδειξη του διορισμού, σημειώνει παράλληλα και τη χρησιμότητά της στο ζήτημα της ταξινόμησης των προβλημάτων[124]. Μιας ταξινόμησης η οποία δεν είχε το χαρακτήρα της ιεραρχικής οργάνωσης των υποπεριπτώσεων ενός γενικού προβλήματος με κριτήριο την κατασκευασιμότητα, όπως συνήθιζαν να κάνουν οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες και αναδεικνύεται πιο καθαρά στις «Επαφές» του Απολλώνιου, ή ακόμα και στο έργο του Abū Sahl al – Kūhī, αλλά αφορούσε την κατηγοριοποίηση[125] των προβλημάτων με βάση των αριθμό των λύσεων που επιδέχονται και την ανεξαρτησία των υποθέσεων μέσω των οποίων διατυπώνονται. Η ταξινόμηση η οποία πρότεινε ήταν η εξής:

[1] Καλώς ορισμένα προβλήματα

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν προβλήματα τα οποία δεν απαιτούν διορισμό, ούτε έχουν περισσότερες υποθέσεις από όσες απαιτούνται για την επίλυσή τους. Διακρίνονται σε αυτά που:

[1.1] Έχουν πεπερασμένο αριθμό λύσεων.

[1.2] Είναι αδύνατα.

124 Bellosta(1991)

125 Διαφορετικού χαρακτήρα από αυτή η οποία αναφέρθηκε προηγουμένως σε σχέση με το έργο του Abū Sahl al – Kūhī.

[2] Προβλήματα τα οποία δεν είναι καλώς ορισμένα

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν προβλήματα των οποίων η διατύπωση απαιτεί τροποποίηση. Διακρίνονται σε αυτά που:

[2.1] Απαιτούν διορισμό. Αφού προσδιοριστεί η συνθήκη (ή οι συνθήκες επιλυσιμότητας), διακρίνονται σε αυτά που:

[2.1.1] **Α**ν η συνθήκη ικανοποιείται έχουν πεπερασμένο αριθμό λύσεων αλλιώς είναι αδύνατα.

[2.1.2] Αν η συνθήκη ικανοποιείται έχουν άπειρο αριθμό λύσεων αλλιώς είναι αδύνατα.

[2.2] Έχουν περισσότερες υποθέσεις από όσες χρειάζονται. Εξετάζεται η ανεξαρτησία των υποθέσεων, τροποποιείται η διατύπωση και κατόπιν ταξινομούνται σε μια από τις κατηγορίες [1.1], [1.2], [2.1] .

6. Η ΝΕΩΤΕΡΗ ΕΠΟΧΗ

6.1. Η ΕΞΕΛΙΞΗ

Η γεωμετρική μέθοδος της ανάλυσης και σύνθεσης αποτέλεσε κατά την αρχαιότητα μια από τις κύριες μεθόδους επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων και μάλιστα αυτή που θεωρούσαν καταλληλότερη για την αντιμετώπιση των πραγματικά δύσκολων γεωμετρικών προβλημάτων.

Δεν περιορίστηκε όμως στα πλαίσια της γεωμετρίας και στην πορεία αποτέλεσε εννοιακό μοντέλο για κάποιες από τις σπουδαιότερες ιδέες στην ιστορία της φιλοσοφίας, της μεθοδολογίας και της επιστήμης. Ο Γαλιλαίος, ο Καρτέσιος, ο Νεύτωνας, Leibniz, ο Καντ, ο Riemann και πολλοί άλλοι άντλησαν έμπνευση από αυτή για να διατυπώσουν αργότερα φιλοσοφικές θεωρίες και μεθόδους.

Ο Καρτέσιος, για παράδειγμα, αναπτύσσοντας τη μεθοδολογία του, αναφέρει ότι υπάρχουν δύο είδη μεθόδων, μια για την ανακάλυψη της αλήθειας, η οποία είναι γνωστή ως ανάλυση ή μέθοδος της ανακάλυψης και μια η οποία χρησιμοποιείται αφού έχει βρεθεί η αλήθεια προκειμένου να παρουσιαστεί με έναν τέτοιο τρόπο ώστε να γίνει κατανοητή στους άλλους, η οποία ονομάζεται σύνθεση ή μέθοδος της εκμάθησης[126].

Ο Leibniz αναφέρεται και αυτός στην ανάλυση και τη σύνθεση ως μεθοδολογικές έννοιες, όπου ορίζει ότι «σύνθεση είναι η πορεία κατά την οποία ξεκινάμε από τις αρχές για να διατυπώσουμε θεωρήματα και προβλήματα, ενώ ανάλυση η πορεία κατά την οποία ξεκινάμε από ένα δεδομένο συμπέρασμα ή ένα προτεινόμενο πρόβλημα και αναζητάμε τις αρχές από τις οποίες μπορούμε να αποδείξουμε το συμπέρασμα ή να λύσουμε το πρόβλημα»[127].

Ο Riemann στο τελευταίο και ημιτελές του έργο «The Mechanism of the Ear» χρησιμοποιεί ως αφορμή τη μελέτη της φυσιολογίας του αυτιού για να αναδείξει την εφαρμογή της ανάλυσης και της σύνθεσης στην επιστημονική ερευνητική δραστηριότητα. Αναφέρει ότι αποτελούν δύο συμπληρωματικές μεθόδους, όπου ανάλογα με τη γνώση που έχουμε για το πρόβλημα επιλέγουμε και με ποια θα ξεκινήσουμε, τονίζει όμως ότι είναι η πορεία της ανάλυσης αυτή η οποία κινητοποιεί την επιστημονική ανακάλυψη μέσω της διατύπωσης

126 Peckhaus (2000, 8)
127 Ritchey (1996, 10)

υποθέσεων[128].

Ο Peckhaus σημειώνει την παρουσία του αναλυτικοσυνθετικού τρόπου σκέψης στην επιστημονική δραστηριότητα, την οποία και παραλληλίζει με τη διαδικασία που ακολουθείται κατά την επίλυση ενός προβλήματος, ενώ παράλληλα περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ενυπάρχει η αναλυτική πορεία τόσο σε ερευνητικό, όσο σε μεθοδολογικό αλλά και σε επίπεδο θεμελίων κατά τη διαμόρφωση μιας νέας θεωρίας[129].

Οι όροι ανάλυση και σύνθεση συναντώνται σε αρκετούς επιστημονικούς κλάδους, από τα μαθηματικά και τη λογική, τη τεχνητή νοημοσύνη και τη θεωρητική πληροφορική μέχρι την οικονομία και την ψυχολογία. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε διεξοδικότερα στον τρόπο με τον οποίο οι έννοιες της ανάλυσης και σύνθεσης εμφανίζονται στο σχεδιασμό προϊόντων.

128 Ritchey (1996, 4, 10)
129 Peckhaus (2000, 4)

6.2. Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

6.2.1. ΓΕΝΙΚΑ

Ο σχεδιασμός προϊόντων αποτελεί μια δημιουργική δραστηριότητα η οποία για πολλούς αιώνες βασίστηκε κατά κύριο λόγο στην εμπειρία και το ταλέντο. Μέχρι και τα μέσα του 20ου αιώνα δεν χαρακτηριζόταν από μια συγκεκριμένη δομή ή οργάνωση, γεγονός το οποίο οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη δυνατότητα που είχε μέχρι τότε ένα άτομο, ή μια μικρή ομάδα ατόμων, να σχεδιάσει και να κατασκευάσει ένα προϊόν από την αρχή μέχρι και το τέλος. Η πρόοδος της τεχνολογίας ωστόσο είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση της πολυπλοκότητας του επιθυμητού προϊόντος με αποτέλεσμα να απαιτείται η συνεργασία ενός πλήθους γνωστικών κλάδων, τα ιδιαίτερα γνωρίσματα των οποίων όφειλε κανείς να είναι σε θέση να γνωρίζει προκειμένου να μπορέσει να ολοκληρώσει επιτυχώς μια τέτοια προσπάθεια. Παράλληλα, παράγοντες όπως ο χρόνος κατασκευής, το κόστος και η ανταγωνιστικότητα μετέτρεψαν το σχεδιασμό σε μια απαιτητική δραστηριότητα η οποία δεν μπορούσε να βασίζεται πλέον στη διαίσθηση ή το ταλέντο λίγων ατόμων.

Έτσι, ξεκίνησαν οι πρώτες προσπάθειες συστηματικοποίησης μέσω των οποίων αναδείχθηκαν σημαντικά ερωτήματα σε σχέση με τη φύση και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του σχεδιασμού. Αναπτύχθηκαν σχολές σκέψης που επιχείρησαν να δώσουν απαντήσεις σε αυτά παρουσιάζοντας μεθοδολογίες, τεχνικές και μοντέλα προκειμένου να καθοδηγήσουν την πορεία της σκέψης και τις ενέργειες του σχεδιαστή. Προς το παρόν δεν έχει διατυπωθεί μια κοινώς αποδεκτή γενικευμένη θεωρία η οποία να εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο σχεδιαστικές έννοιες και διαδικασίες συμβάλλουν στην κατασκευή του τελικού προϊόντος επιτρέποντας κατ' επέκταση τη δημιουργία αποτελεσματικότερων μοντέλων.

Κοινά αποδεκτός ορισμός για το σχεδιασμό δεν έχει ακόμα διατυπωθεί. Μια προσπάθεια συνδυασμού των κυρίαρχων απόψεων είναι η εξής[130] :

> «Σχεδιασμός είναι η διαδικασία της διατύπωσης απαιτήσεων, βασιζόμενων στις ανθρώπινες ανάγκες, και η περαιτέρω μετατροπή τους σε προδιαγραφές

130 Μουλιανίτης Β. (2003), Evbuomwan N.F.O., Sivaloganathan S., Jebb A. (1995, 302)

και λειτουργίες, από τις οποίες θα προκύψουν σχεδιαστικές λύσεις, συμπεριλαμβανομένων των σχεδιαστικών περιορισμών, χρησιμοποιώντας την ανθρώπινη δημιουργικότητα, επιστημονικές αρχές και τεχνικές γνώσεις, με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν στη συνέχεια οικονομικά να παραχθούν και να κατασκευαστούν»

6.2.2. ΟΙ ΚΥΡΙΕΣ ΦΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ

Η πορεία προς την επιθυμητή κατασκευή επιτυγχάνεται μέσω μιας σειράς βημάτων, τα οποία οργανώνονται σε στάδια και δραστηριότητες. Ο αριθμός των σταδίων και η οργάνωση σε κάθε ένα από αυτά μπορεί να διαφέρει από μοντέλο σε μοντέλο, αλλά οι κύριες φάσεις είναι είναι κοινές :

[1] Καθορισμός Προδιαγραφών
[2] Θεμελιώδης Σχεδιασμός
[3] Λεπτομερής Σχεδιασμός

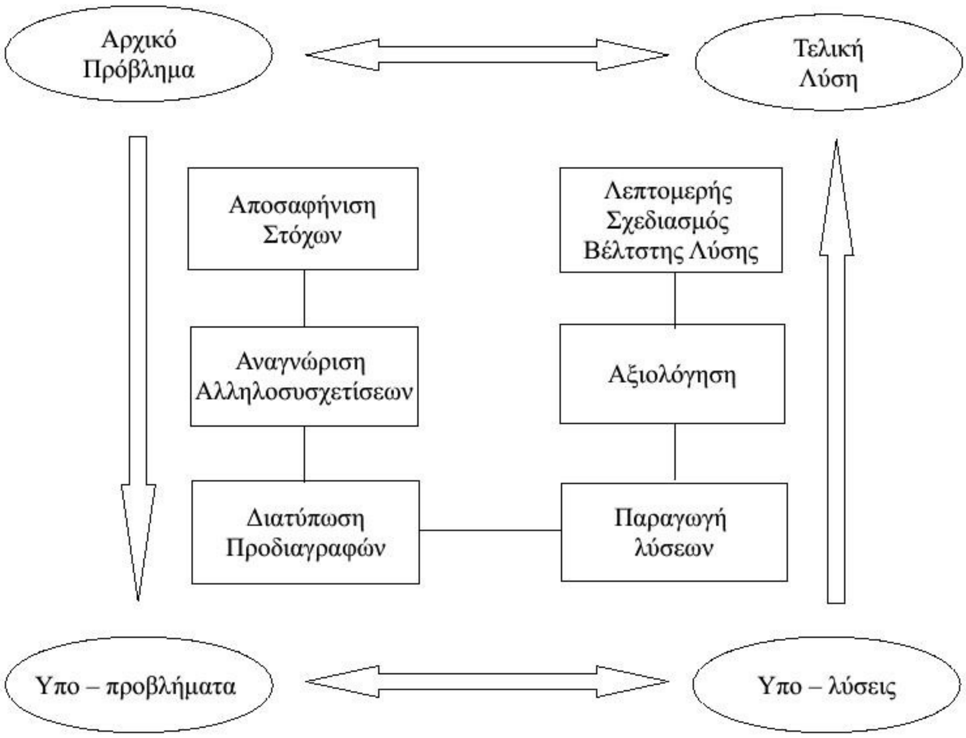
Ο σχεδιασμός αποσκοπεί στην κατασκευή ενός προϊόντος το οποίο καλείται να ικανοποιήσει μια ανάγκη της αγοράς. Η ανάγκη αυτή ικανοποιείται είτε με την κατασκευή ενός νέου προϊόντος είτε με την τροποποίηση ενός ήδη υπάρχοντος. Και στις δύο περιπτώσεις η περιγραφή η οποία δίνεται στη σχεδιαστική ομάδα είναι ασαφής και πολλές φορές δημιουργούνται αντικρουόμενες απόψεις σε σχέση με το τι είναι αυτό το οποίο ζητείται. Κατά την πρώτη φάση του σχεδιασμού, οι αρχικές περιγραφές αποσαφηνίζονται, αναλύονται και κατανοούνται σε βάθος, εντοπίζονται μη ρεαλιστικές ή μη συμβατές απαιτήσεις και τελικά μετασχηματίζονται σε συγκεκριμένες προδιαγραφές. Το σύνολο των προδιαγραφών αποτελεί τη διατύπωση του προβλήματος με την οποία ολοκληρώνεται η πρώτη φάση.

Στη δεύτερη φάση, η σχεδιαστική ομάδα προσπαθεί να εντοπίσει υποψήφιες λύσεις. Οι λύσεις αυτές αποτελούν περισσότερο αφηρημένες ιδέες, οι οποίες αρχικά περιγράφονται μέσω πρόχειρων σχεδίων ή σημειώσεων και κατόπιν αξιολογούνται. Στην τρίτη φάση, επιλέγεται η βέλτιστη λύση, η οποία αναπτύσσεται πλήρως και συνοδεύεται από την κατασκευή ενός πρωτοτύπου.

6.2.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΤΟ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ

Η ανάλυση και η σύνθεση αποτελούν, μαζί με την αξιολόγηση, τις κύριες δραστηριότητες οι οποίες συντελούνται κατά το σχεδιασμό. Η ανάλυση αντιστοιχεί στην πορεία προς την εύρεση του κατάλληλου προβλήματος και η σύνθεση στην πορεία για την επίλυσή του. Το μοντέλο του Jones περιγράφει τη σχεδιαστική διαδικασία αποκλειστικά μέσω των δραστηριοτήτων της ανάλυσης και της σύνθεσης[131].

Ο Cross περιγράφει το σχεδιασμό με το ακόλουθο διάγραμμα ροής:



Μοντέλο Cross

Ο αριστερός κλάδος αναπαριστά τη σταδιακή ανάλυση της αρχικής διατύπωσης, κατά την οποία αναγνωρίζονται οι στόχοι του σχεδιασμού, εντοπίζονται οι αλληλοσυσχετίσεις και τελικά διατυπώνονται οι απαιτούμενες προδιαγραφές, ενώ ο κλάδος στα δεξιά την πορεία για τη λύση.

Η ανάλυση της αρχικής διατύπωσης συντελείται με διάφορους τρόπους. Ο Cross χρησιμοποιεί δέντρα αντικειμενικών στόχων, ενώ σήμερα μια τεχνική η οποία εφαρμόζεται

131 Evbuomwan N.F.O., Sivaloganathan S., Jebb A. (1995, 305)

αρκετά συχνά είναι η Ανάπτυξη Συνάρτησης Ποιότητας (Quality Function Demployment), κατά την οποία η «φωνή του πελάτη» μεταφράζεται σε τεχνικά χαρακτηριστικά βαθμολογώντας παράλληλα τη βαρύτητα κάθε χαρακτηριστικού στο τελικό προϊόν.

Αρκετά μοντέλα περιγράφουν το σχεδιασμό μέσω κυκλικών διαγραμμάτων για να αναδείξουν ότι πρόκειται για μια επαναλαμβανόμενη διαδικασία. Αν η ανάλυση δεν είναι επιτυχημένη, δεν θα προκύψει το κατάλληλο προϊόν και η φάση του καθορισμού των προδιαγραφών θα πρέπει να επαναληφθεί.

Από τη στιγμή που το πρόβλημα έχει προσδιοριστεί πλήρως τα μέλη της σχεδιαστικής ομάδας προσπαθούν να εντοπίσουν πιθανές λύσεις. Οι λύσεις όμως αυτές αναφέρονται σε αρκετά πολύπλοκες κατασκευές και είναι αρκετά δύσκολο να προβεί κανείς σε μια ευθεία αντιμετώπιση του προβλήματος. Έτσι, πολλές φορές οι σχεδιαστές επιλέγουν να αναζητήσουν τις υποψήφιες λύσεις ακολουθώντας μεθόδους με κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω (top – down), αναλύοντας το αρχικό πρόβλημα σε υποπροβλήματα μικρότερης δυσκολίας.

Οι Pahl & Beitz αναφέρουν τη μέθοδο των «αντίστροφων βημάτων», όπου κανείς ξεκινά από την υπόθεση ότι το επιθυμητό προϊόν υπάρχει και ικανοποιεί όλες τις προδιαγραφές και προσπαθεί στη συνέχεια να ανακαλύψει πιθανές διαδρομές οι οποίες θα μπορούσαν να έχουν οδηγήσει σε αυτό. Μια παρόμοια περιγραφή γίνεται και από τον Nadler ο οποίος προτείνει ως σημείο εκκίνησης την «ιδέα» ενός ιδανικού συστήματος το οποίο θα ικανοποιεί όλες τις προδιαγραφές[132].

O Ullman αναφέρει ως μια από τις πιο συχνές τακτικές για την εύρεση λύσης την τεχνική της λειτουργικής αποσύνθεσης[133]. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, η σχεδιαστική ομάδα ξεκινώντας από το σύνολο των προδιαγραφών προσπαθεί να αναγνωρίσει ποια φαίνεται να είναι η βασική λειτουργία την οποία πρέπει να ικανοποιεί το σύστημα. Στην πορεία, την αποσυνθέτει σε υπολειτουργίες, τις οποίες ιεραρχεί, ερευνά τον τρόπο με τον οποίο αλληλεπιδρούν, αν αυτό συμβαίνει, και κατόπιν προσπαθεί να διαπιστώσει αν μπορεί να τις αναλύσει σε περαιτέρω υπολειτουργίες.

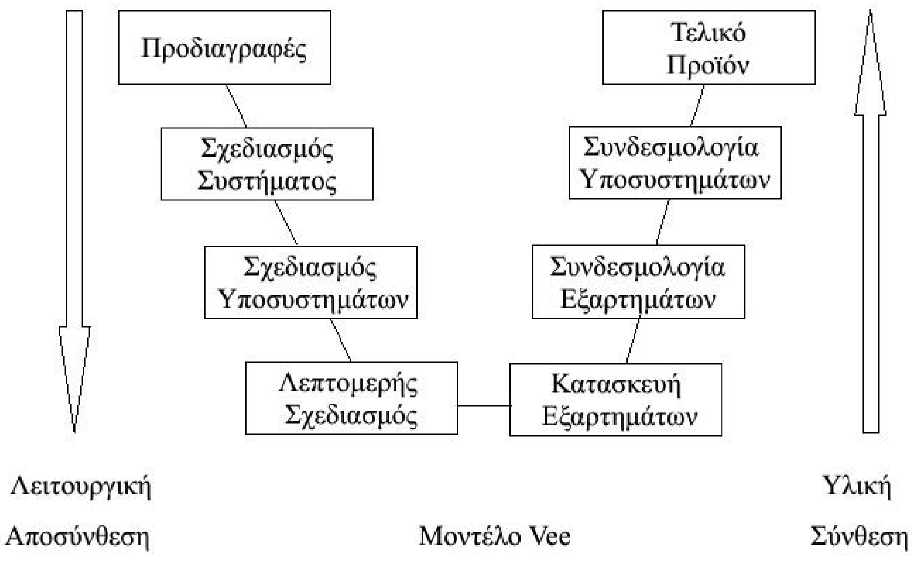
Αφού έχει ολοκληρωθεί η λειτουργική αποσύνθεση είναι πλέον ευκολότερο να αναζητήσει

132 Pahl & Beitz (1977, 34 – 35)
133 Ullman (2010, 181)

κανείς γνωστά εξαρτήματα τα οποία θα μπορούσαν να πραγματοποιήσουν την κάθε υπολειτουργία. Ακόμα όμως κι αν έχουν βρεθεί γνωστά εξαρτήματα για όλες τις υπολειτουργίες, η αναλυτική πορεία θα πρέπει να συμπληρωθεί με μια συνθετική πορεία συναρμολόγησης των επιμέρους εξαρτημάτων και την κατασκευή ενός πρωτοτύπου προκειμένου να επιβεβαιωθεί ότι πράγματι η βασική λειτουργία επιτυγχάνεται.

Η ανάλυση η οποία συντελείται συμβάλλει σημαντικά στην κατανόηση του προβλήματος, ο Ullman μάλιστα περιγράφει την πορεία της σκέψης του σχεδιαστή σε αυτά τα στάδια ως: κατανόηση – σύνθεση – αξιολόγηση – απόφαση[134]. Οι Pahl & Beitz αναφέρουν ότι αν είναι δύσκολο να εντοπιστεί η βασική λειτουργία του συστήματος είναι χρήσιμο να ανάγει κανείς το πρόβλημα σε μια γενικότερη περίπτωση, διευρύνοντας τα όρια του συνόλου των προδιαγραφών, κάτι το οποίο εφάρμοζαν συχνά και οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Η Auyang, αναφερόμενη στο σχεδιασμό συστημάτων, σημειώνει ότι οι σχεδιαστές – μηχανικοί προχωρούν μέσω δύο πορειών: λειτουργικής αποσύνθεσης και υλικής σύνθεσης, οι οποίες αναπαριστώνται μέσω του μοντέλου Vee ως εξής[135]:

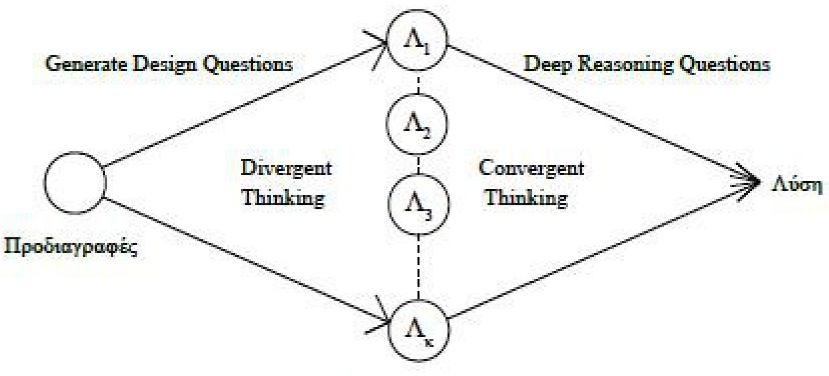


134 Ullman (2010, 56)
135 Auyang (Concepts of systems in engineering, 4)

Περιγράφοντας τον σχεδιασμό ενός αυτοκινήτου αναφέρει ότι οι σχεδιαστές ξεκινούν από μια ιδέα του επιθυμητού προϊόντος. Έτσι, όπως και κατά την αντιμετώπιση των γεωμετρικών προτάσεων, η επίλυση του προβλήματος ξεκινά από το ζητούμενο, το οποίο προς το παρόν δεν υπάρχει, ούτε είναι δεδομένο ότι μπορεί να κατασκευαστεί με την υπάρχουσα γνώση – εργαλεία. Ακόμα και στην περίπτωση που πρόκειται για ένα πρόβλημα επανασχεδιασμού, επιδιώκοντας για παράδειγμα την ενσωμάτωση μιας περαιτέρω λειτουργίας ή την τροποποίηση των διαστάσεων ενός στοιχείου, υπάρχει μια σχετική αβεβαιότητα για το αν αυτό είναι εφικτό αλλά κυρίως για το πώς μπορεί να επιτευχθεί έτσι ώστε να μην επηρεάσει τη συνολική λειτουργία ή συναρμολόγηση. Κάθε αλλαγή, όσο μικρή κι αν είναι, ενδέχεται να επιφέρει σημαντικές, μη αναμενόμενες αλλαγές με αποτέλεσμα να μην οδηγούμαστε σε προϊόν. Έτσι, η αναλυτική πορεία συμβάλλει στην ανάδειξη εκείνων των στοιχείων που θα εξασφαλίσουν τη συμβατότητα των επιμέρους επιθυμητών χαρακτηριστικών.

Η συμβολή της ανάλυσης στη εύρεση λύσης αναδεικνύεται και από το γεγονός ότι η ανάλυση υπαρχοντων συστημάτων αποτελεί μια από τις πιο συνηθισμένες τεχνικές παραγωγής ιδεών για τη δημιουργία νέων ή βελτιωμένων συστημάτων.

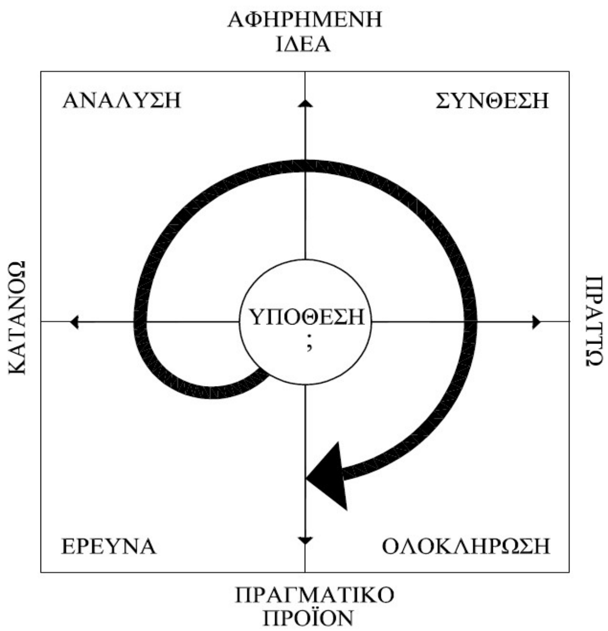
Ο Dym εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο σκέφτονται οι σχεδιαστές αναφέρει ότι πρόκειται για μια νοητική δραστηριότητα η οποία αποτελείται από μια πορεία συστηματικών ερωτήσεων, συνδέοντας τη φύση των ερωτήσεων αυτών με τη διαλεκτική του Αριστοτέλη[136]. Την ίδια άποψη εκφράζει και ο Eris αναφερόμενος στο μοντέλο DCIDT (Divergent Convergent Inquiry Design Thinking)[137].



136 Dym (2006, 423)
137 Eris (2006, 551)

Σύμφωνα με το μοντέλο DCIDT ο σχεδιασμός προχωρά μέσω διαδοχικών ερωτήσεων, οι οποίες διακρίνονται σε αυτές οι οποίες χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη υποψήφιων λύσεων (generative design questions) και σε αυτές που χρησιμοποιούνται για την δικαιολόγηση της λύσης η οποία έχει επιλεγεί ως η καταλληλότερη (deep reasoning questions). Στην πρώτη περίπτωση, οι ερωτήσεις αποσκοπούν στη διατύπωση εικασιών – υποθέσεων μέσα από διαδοχικές γενικεύσεις της αρχικής διατύπωσης του προβλήματος με στόχο την κατανόηση, ενώ στη δεύτερη περίπτωση οι ερωτήσεις συντελούν στην αξιολόγηση των εικασιών αυτών.

Ο σχεδιασμός ως μια πορεία διαδοχικών υποθέσεων περιγράφεται και στο μοντέλο του Kumar μέσα από το διάγραμμα που ακολουθεί[138] :



Μοντέλο Kumar

Ο Kumar διαφοροποιείται από τα μοντέλα των Jones και Cross, που περιγράφηκαν προηγουμένως, καθώς βασίζεται περισσότερο στη διαίσθηση, την εμπειρία και την ικανότητα του σχεδιαστή. Προτείνει μια προσέγγιση η οποία ξεκινά με τη διατύπωση μίας υπόθεσης (προτεινόμενη λύση), η οποία κατόπιν αναλύεται και αξιολογείται για να οδηγήσει σε μια νέα, καλύτερη υπόθεση και ούτω καθεξής μέχρι και την εύρεση της τελικής λύσης. Ένα

138 Dubberly H., Evenson S., Robinson R. (2008, 4)

αντίστοιχο μοντέλο κατά το οποίο ο σχεδιασμός προχωρά μέσα από τη διατύπωση υποθέσεων περιγράφει και ο March, η λογική του οποίου μοιάζει αρκετά με τη «μέθοδο της υπόθεσης» η οποία περιγράφεται στο έργο του Πλάτωνα.

Ο αναλυτικοσυνθετικός τρόπος σκέψης παρατηρείται τόσο στις περιγραφές των προτεινόμενων μοντέλων όσο και στις τεχνικές επίλυσης που ακολουθούνται. Τα μοντέλα των Jones και Cross και η τεχνική της λειτουργικής αποσύνθεσης, κατά το σχεδιασμό συστημάτων, ακολουθούν την ερμηνεία της ανάλυσης ως αποσύνθεσης του όλου στα μέρη από τα οποία αποτελείται (ανάλυση σχήματος), ενώ το μοντέλο του Kumar και η τεχνική των «αντίστροφων βημάτων» συμβαδίζουν με την ερμηνεία της ανάλυσης ως μία ανοδική πορεία εύρεσης προκείμενων μέσω της διατύπωσης υποθέσεων (προτασιακή ανάλυση).

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η γεωμετρική μέθοδος της ανάλυσης και σύνθεσης αποτέλεσε κατά την αρχαιότητα μια από τις σπουδαιότερες μεθόδους επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων και ο ορισμός του Πάππου αποτελεί επί της ουσίας τη μοναδική σωζόμενη περιγραφή. Η έλλειψη αυστηρότητας η οποία παρατηρείται οφείλεται στο γεγονός ότι βρίσκεται στην εισαγωγή ενός τεχνικού βιβλίου και οι εισαγωγές σε αυτές τις περιπτώσεις είχαν ως στόχο να παρουσιάσουν σε γενικές γραμμές το μεθοδολογικό ή φιλοσοφικό υπόβαθρο του ζητήματος το οποίο πραγματεύονταν αποφεύγοντας τεχνικές λεπτομέρειες. Συνεπώς αποτελεί απλώς μια περιγραφή και όχι έναν αυστηρό ορισμό. Εξάλλου οι ορισμοί στα έργα των καθαρών μαθηματικών της αρχαιότητας αφορούσαν μόνο γεωμετρικά αντικείμενα. Ακόμη και οι αλγόριθμοι, όπως για παράδειγμα ο αλγόριθμος για την εύρεση του Ε.Κ.Π. διατυπώνονταν μέσω θεωρημάτων και όχι μέσω ορισμών, ή μέσω παραδειγμάτων όπως για παράδειγμα έκανε ο Αρχιμήδης στο «Περί μηχανικών θεωρημάτων Ερατοσθένην έφοδος».

Παρ' όλα αυτά η ασάφεια με την οποία διατυπώνεται είδαμε ότι οδήγησε τους σύγχρονους μελετητές στο να επικεντρωθούν σε λογικά ζητήματα προσπαθώντας να προσφέρουν μια περιγραφή που να ισοδυναμεί με τον σημερινό ορισμό μιας μεθόδου. Αυτή η προσπάθεια αν και ανέδειξε για παράδειγμα τη συμβολή των βοηθητικών κατασκευών στον προσδιορισμό του κατάλληλου συνόλου προτάσεων, οι οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή απόδειξη – κατασκευή, σύμφωνα με τον Mahoney[139] δεν αναδεικνύει τη συμβολή της μεθόδου κατά την αρχαιότητα, ούτε εξηγεί το γιατί τη θεωρούσαν ως την καταλληλότερη για την αντιμετώπιση των δυσκολότερων και πλέον ασαφών προβλημάτων, σύμφωνα με τον Heath[140].

Στις απλούστερες περιπτώσεις η αναλυτικοσυνθετική μέθοδος προσέφερε στο γεωμέτρη μια συστηματική προσέγγιση για την εύρεση μιας απόδειξης ή μιας κατασκευής σε ένα καλώς ορισμένο θεώρημα ή πρόβλημα, αυτό που ήταν ιδιαίτερα σημαντικό όμως είναι ότι σε πολλές περιπτώσεις συνετέλεσε στην ανάδειξη νέων προβλημάτων ή ακόμα και στη διαμόρφωση

139 Mahoney (1968, 319)
140 Heath (1956, 127)

νέων μαθηματικών κλάδων. Για παράδειγμα, οι δώδεκα πρώτες προτάσεις στο βιβλίο XIII των «Στοιχείων» του Ευκλείδη προέκυψαν μέσα από τις προσπάθειες για την κατασκευή των πέντε πλατωνικών στερεών, το πρόβλημα VII. 107 από τη «Συναγωγή» του Πάππου, το οποίο παρουσιάστηκε στο τέταρτο κεφάλαιο, πρωτοδιατυπώθηκε ως λήμμα κατά την αντιμετώπιση των προβλημάτων στις «Επαφές» του Απολλώνιου, ενώ ήδη από την εποχή του Ιπποκράτη και του Μέναιχμου οι διαδοχικές αναγωγές οδήγησαν στη διαμόρφωση της θεωρίας των κωνικών τομών.

Πέρα όμως από τη συμβολή της αναλυτικής πορείας σε ένα γενικότερο πλαίσιο, το ερώτημα που προκύπτει είναι για ποιο λόγο να ανατρέξει κάποιος στην ανάλυση για την απόδειξη ενός θεωρήματος ή την επίλυση ενός προβλήματος και να μην κινηθεί εξαρχής συνθετικά. Όπως είδαμε στο «Περί λόγου αποτομής», οι Rashed & Bellosta επισήμαναν την αξία της μεθόδου σε σχέση με την ανάδειξη του διορισμού, αναφέροντας ότι η αναλυτική πορεία αποτελεί την καταλληλότερη προσέγγιση για την αποσαφήνιση της φύσης του προβλήματος. Παράλληλα ξεκινώντας κανείς από το ζητούμενο και τα δεδομένα μαζί, στην πραγματικότητα επιλέγει να κινηθεί από το σύνθετο στο απλό, δηλαδή μέσα από μια πορεία απλοποιήσεων, η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις είναι πολύ πιο εύκολη για το λύτη. Η επιλογή αυτή περιορίζει το εύρος των εναλλακτικών διαδρομών προς την αναζήτηση της απόδειξης, διατηρώντας παράλληλα μια εσωτερική σύνδεση δεδομένων – συμπεράσματος. Συμβάλλει στην κατανόηση των αλληλοσυσχετίσεων και απαλλάσσει το λύτη από το «τυφλό σημείο» μιας συνθετικής προσέγγισης, δηλαδή από εκείνο το σημείο όπου για να προχωρήσει κανείς θα πρέπει να φανταστεί κάτι το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές.

Η αναλυτική πορεία εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την εμπειρία, την ικανότητα και τη διαίσθηση του λύτη γι' αυτό και δεν μπορεί να τυποποιηθεί και να εκφραστεί μέσω ενός λογικού σχήματος, αν και στην περίπτωση των θεωρημάτων είναι δυνατό να αποκατασταθούν ισοδυναμίες ανάμεσα σε όλα τα επιμέρους βήματα, και μάλιστα τότε η αναλυτικοσυνθετική μέθοδος προσφέρει ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα σε σχέση με το ζητούμενο. Τα θεωρήματα όμως προκύπτουν μέσα από προβλήματα, η προσέγγιση των οποίων δεν τυποποιείται. Γι' αυτο και πολλές φορές η αναλυτική πορεία αναφέρεται ως ένα διαρκώς εξελισσόμενο σύνολο ευρετικών τεχνικών. Στις τεχνικές αυτές συγκαταλέγεται η τακτική του Αρχιμήδη, ο οποίος όπως είδαμε στο «Περί σφαίρας και κυλίνδρου» ανήγαγε κάθε πρόβλημα στο χώρο σε χειρισμό λόγων ευθύγραμμων τμημάτων καθώς και η αντιμετώπιση του Ιπποκράτη και του Μέναιχμου, στους οποίους εντοπίζουμε ως τεχνική επίλυσης τη μετάβαση σε ένα γενικότερο πρόβλημα προκειμένου να αναγνωρίσουν τον τρόπο με τον οποίο θα φθάσουν στη λύση (αντίστοιχη της πορείας διατύπωσης υποθέσεων στον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη).

Η αποτελεσματικότητά της κατά την αντιμετώπιση αλλά και την ταξινόμηση γεωμετρικών προβλημάτων αναδεικνύεται από το γεγονός ότι συνεχίστηκε να χρησιμοποιείται όπως είδαμε και από Άραβες μαθηματικούς του 10ου αιώνα, ενώ ως τρόπος σκέψης επηρέασε και τον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπισαν αργότερα αλγεβρικά προβλήματα (Ibn al – Haytham). Τους επόμενους αιώνες αποτέλεσε έναυσμα για τη διατύπωση θεωριών και μεθόδων, ενώ σήμερα ο αναλυτικοσυνθετικός τρόπος σκέψης εντοπίζεται σε αρκετούς επιστημονικούς κλάδους, συμβάλλοντας σε όλα τα επίπεδα της επιστημονικής δραστηριότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Αριστοτέλης, *Ηθικά Νικομάχεια (τόμος 7)*, Κάκτος.
2. Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά (τόμος 11)*, Κάκτος.
3. Αριστοτέλης, *Όργανον (τόμοι 24, 25, 26, 27)*, Κάκτος.
4. Εξαρχάκος (2001), *Ευκλείδη Στοιχεία*, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα.
5. Καρασμάνης, Β. (1992), *Η Ευρετική Ικανότης της Γεωμετρικής Μεθόδου της Ανάλυσης και Σύνθεσης* στο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας,* Τροχαλία, Αθήνα.
6. Παπαδοπετράκης Ε. (2013), *Φυσικές Γλώσσες και Μαθηματικός Λόγος*, Πάτρα.
7. Παπαδοπετράκης Ε., *Η Αριστοτελική Θεωρία των Ορισμών*, υπό έκδοση.
8. Πλάτωνας, Μένωνας, Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.
9. Πλάτωνας, Σοφιστής, Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.
10. Σταμάτης Ε. (1975), *Ευκλείδου Γεωμετρία: Στοιχεία*, ΟΕΔΒ, Αθήνα.
11. Σταμάτης Ε. (1976), *Απολλώνιου Κωνικά (τόμοι Α, Β)*, ΤΕΕ, Αθήνα.
12. Σπανδάγος Ε. (2001), *Η Μαθηματική Συναγωγή του Πάππου του Αλεξανδρέως (τόμος Α)*, Αίθρα, Αθήνα.
13. Asano K. (1998), *Mathematics and Dialectic in Plato' s Republic VI – VII*, Ph. D. dissertation submitted to the University of Texas at Austin in December, 1997.
14. Basmakova I.G. (2014), *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
15. Bellosta H. (1991), *Ibrahim Ibn Sinan: On Analysis and Synthesis*, Arabic Science and Philosophy, Vol.1, pp. 211 – 232.
16. Berggren J.L., Brummelen G.V. (2001), *Abu Sahl al Kuhi' s: On Drawing Two Lines From a Point at a Known Angle*.
17. Berggren J.L. (1986), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer – Verlag, New York.
18. Behboud A. (1994), *Greek Geometrical Analysis*, Centaurus, Vol.37, 52 – 86.
19. Bunt L., Jones P., Bedient J. (1981), *Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, Πνευματικός, Αθήνα.

20. Cornford, F.M. (1932), *Mathematics and Dialectic in the Republic VI.–VII.*, Mind, Vol.41, 37 – 52, 173 – 190.
21. Cooke R.L. (2005), *The History of Mathematics: A Brief Course*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
22. Dijksterhuis E.J. (1987), *Archimedes*, Princeton University Press, New Jersey.
23. During I. (1994), *Ο Αριστοτέλης: Παρουσίαση και Ερμηνεία της Σκέψης του*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης,Αθήνα.
24. Faller A.M. (2000), *Plato's Philosophical Use of Mathematical Analysis*, University of Georgia
25. Gardies J.L. (2001), *Qu' est – ce que et pourquoi l' analyse*, *Librairie Philosophique J.Vrin, Paris.*
26. Gulley N. (1958), *Greek Geometrical Analysis*, Phronesis, Vol.3, Issue 1.
27. Heath T. (1953), *The Works of Archimedes*, Dover Publications, Inc., New York.
28. Heath, T. (1956), *Euclid, The Thirteen Books of Elements*, Dover Publications, Inc., New York.
29. Heath T. (1981), *A History of Greek Mathematics, Vol. I, II*, Dover Publications, Inc., New York.
30. Hintikka, J. – Remes, U. (1974), *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and its General Significance*, D. Reidel, Dordrecht-Holland/Boston, USA.
31. Hintikka, J., *Analyzing (and Synthesizing) Analysis*.
32. Hogendijk J.P. , Sabra I.(2003), *The Enterprise of Science in Islam: New Perspectives*, MIT Press.
33. Knorr W.R. (1989), *On Archimedes Construction of the Regular Heptagon*, Centaurus, Vol.32, Issue 3, pp. 257 – 271.
34. Mahoney M.S. (1968), *Another Look in Greek Geometrical Analysis*, Archive for History of Exact Sciences 5, 319 – 348.
35. Martin G. (1991), *Πλάτων*, Πλέθρον, Αθήνα.
36. Martin G. E. (1998), *Geometric Constructions*, Springer, U.S.A.
37. Maula E. (1981), Essay Review, Annals of Science, 38 : 1, 109 – 122.
38. Mueller I. (1976), Essay Review, The Journal of Philosophy, Vol.73, No.6, pp. 158 – 162.

39. Papadopetrakis E., Skaltsas P. (2007), *Essay on Pre – Aristotelian Definition, in E.P. Avgerinos – A. Gagatsis(eds) Current Trends in Mathematics Education*, Proceedings of 5th MedConf, University of Aegean and Cyprus, Rhodes, pp. 323 – 330.
40. Peckahaus V. (2000), *Regressive Analysis*, Bled Conference in Philosophy on Philosophical Analysis.
41. Rideout B. (2008), P*appus Reborn:Pappus of Alexandria and the Changing Face of Analysis and Synthesis in Late Antiquity*, University of Canterbury.
42. Rashed R. (1994), *Analysis and Synthesis According to Ibn al – Haytham*, C.C.Gould and R.S. Cohen (eds.), Artifacts, Representations and Social Practice, pp.121 – 140.
43. Rashed R. (2013), *Ibn Al – Haytham' s Theory of Conics, Geometrical Constructions and Practical Geometry*, A History of Arabic Sciences and Mathematics, Vol.3, Routeledge and CAUS, New York.
44. Ritchey T. (1991), *Analysis and Synthesis: On Scientific Method – Based on a Study by Bernard Riemann*, Systems Research, Vol.8, No.4, pp.21 – 41.
45. Robinson, R. (1936), *Analysis in Greek Geometry*, Mind, Vol.45, 464 – 473.
46. Saito K., Sidoli N. (2010), *The Function of Diorism in Ancient Greek Geometry*, Historia Mathematica 37, 579 – 614.
47. Saito K., Sidoli N. (2012), *Comparative Analysis in Greek Geometry*, Historia Mathematica 39, 1 – 33.
48. Van der Waerden, B.L. (2000): *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, ΠΕΚ.
49. Vandoulakis I.M. (2012), *Essay Review: The Readings of Apollonius' On the Cutting off of a Ratio*, Arabic Sciences and Philosophy, vol. 22 (2012) pp. 137–149.
50. Zeuthen H.G. (1902), *Histoire des Mathématiques dans l' Antiquité et le Moyen Age*, Gauthier – Villars, Paris.
51. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β', Τεύχος 4, Περίοδος Απρίλιος – Μάιος – Ιούνιος 1992.
52. ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html
53. http://www.britannica.com

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ

1. Μουλιανίτης Β. (2003), *Μοντελοποίηση θεμελιώδους σχεδιασμού βασισμένη στην τεχνητή νοημοσύνη- Εφαρμογή στο μηχανοτρονικό σχεδιασμό*, Διδακτορική διατριβή.
2. Auyang Y.S., *Concepts of systems in engineering* (http://www.creatingtechnology.org/eng/system.pdf).
3. Codinhoto R., Koskela L.J., Tzortzopoulos P., Kagioglou M. (2006), *How analysis and Synthesis Have Been Understood In Design*, In Proceedings: 14th Annual Conference on Lean Construction, IGLC, Santiago, Chile, pp.121 – 134.
4. Dym L.C. (2006), *Engineering Design: So Much To Learn*, Int. J. Engng Ed. Vol.22, No.3, pp. 422 – 428.
5. Dubberly H., Evenson S., Robinson R. (2008), *The Analysis Synthesis Bridge Model*.
6. Eris O. (2006), *Insisting on Truth at the Expense of Conceptualization: Can Engineering Peortofolios Help?*, Int. J. Engng Ed. Vol.22, No.3, pp. 551 – 559.
7. Evbuomwan N.F.O, Sivaloganathan S., Jebb A. (1995), *A survey of design philosophies, models,methods and systems : Proc Insts Mech Engrs Part B*, Journal of Engineering Manufacture, 210:301-320.
8. Koskela L.J.,Kagioglou M. (2006), *The Proto – Theory of Design: The Method of Analysis and Synthesis of the Ancient Geometers*, In Proceedings: International Design Conference – Design 2006, Dubrovnik, Croatia, May 15 – 18, 2006.
9. Pahl G., Beitz W. (1988), *Engineering Design: A Systematic Approach*, Springer – Verlang, The Design Council, London, Great Britain.
10. Ullman DG. (2010), *The mechanical design process*, McGraw-Hill, Inc, USA.