Από το πρόβλημα των νομισμάτων, στην εξίσωση του Pell

Γεώργιος Αποστολόπουλος
Καθηγητής Μαθηματικών
2ο ΓΕΛ Μεσολογγίου
30200 Μεσολόγγι

Μιχαήλ Τζούμας
Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών
Ιωσήφ Ρωγών και Βεΐκου
302 00 Μεσολόγγι
mtzoumas@sch.gr

Περίληψη

Η εξίσωση $x^2 - \delta y^2 = 1$ είναι γνωστή ως εξίσωση του Pell. Πολλοί μεγάλοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με αυτή, μεταξύ των οποίων οι Lagrange και Euler. Την παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιούμε για να βρούμε τον αριθμό των νομισμάτων ίδιας αξίας, που χωρούν συγχρόνως σε τετράγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο. Κατά την επίλυση προκύπτει ένα πλήθος από επιμέρους προβλήματα, τα οποία, καθώς λύνονται, γίνονται πηγή έμπνευσης για δημιουργικές δραστηριότητες στην τάξη μας.

From the problem of coins to Pell's equation.

George Apostolopoulos
Teacher of Mathematics

Michael Tzoumas
Advisor of Math teachers

Abstract

The equation $x^2 - \delta y^2 = 1$ is known as Pell's equation. It has been studied by many famous mathematicians, with Lagrange and Euler among them. We use the above equation to find the number of coins of the same value that fill both a square and an equilateral triangle. Solving the equation,

one faces a number of individual problems that can be the source of creative activities.

1. Εισαγωγή.

Τα Μαθηματικά είναι και παιγνίδι! Τα Μαθηματικά είναι και για παιγνίδι! Τα Μαθηματικά μαθαίνονται και με το παιγνίδι! Οι τρεις προηγούμενες προτάσεις είναι ή θα πρέπει να είναι αληθείς για όλους μας, αφού από πολλούς επιστήμονες (π.χ. [1], [2]) έχει υποστηριχθεί ότι η χρήση του παιγνιδιού, επειδή αυτό έλκει ιδιαίτερα τα παιδιά, είναι ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό εργαλείο διδασκαλίας. Δημιουργεί θετική ατμόσφαιρα στην τάξη και ως εκ τούτου αναμένεται ένα θετικό αποτέλεσμα στη διδασκαλία. Οι μαθητές απασχολούνται δημιουργικά και ενθαρρύνεται η συνεργασία μεταξύ τους, ενώ οι συνθήκες γίνονται κατάλληλες, ώστε να ενσωματωθούν συναισθηματικά στην ομάδα και οι πλέον δύσκολοι μαθητές.

Η διδασκαλία αλλά και η εκμάθηση των Μαθηματικών είναι επίπονη και δεν είναι λίγες οι φορές, που η προσπάθεια, εκτός της επιτυχίας, ενίοτε συνοδεύεται και από την αποτυχία. Όμως, στο παιγνίδι η αποτυχία αντί να σε απογοητεύει σε δυναμώνει, ατσαλώνει τη θέλησή σου για επιτυχία και νίκη. Έτσι, αφού το παιγνίδι δίνει χαρά αλλά και δύναμη σε εκείνον που παίζει, η διδασκαλία των Μαθηματικών, μέσα από το παιγνίδι, διώχνει τη «Μαθηματικοφοβία», που είναι ένα παγκόσμιο φαινόμενο και όχι ειδική νόσος των Ελληνοπαίδων [4].

Γενικά, το παιγνίδι ενέχει δράση, αυτοσχεδιασμό, πρωτοβουλία, οπότε ένα πρόβλημα ή μια δραστηριότητα θαυμάσια συνδυάζονται με αυτό, κάνοντας τη διδασκαλία ελκυστική και αποτελεσματική. Παροτρύνει τους μαθητές να κρατήσουν ψηλά το ενδιαφέρον τους για το μάθημα, αλλά και δίνει στο διδάσκοντα ένα γενικό πλαίσιο, για να εντάξει τη διδασκαλία του όπου το αντικείμενο που διδάσκει γίνεται χρήσιμο και σημαντικό.

Συμπερασματικά, λοιπόν, το παιγνίδι στην τάξη προσφέρει:

- Διακοπή της καθημερινής ρουτίνας της διδασκαλίας, κάνοντας ένα ευχάριστο διάλειμμα.
- Προκαλεί τους μαθητές στη δραστηριοποίηση και τον αυτοσχεδιασμό.
- Ενεργοποιεί αυτούς, ωθώντας τους στη συνεργασία και την ενσωμάτωση στην ομάδα.
- Τους φέρνει σε κατάσταση, ώστε να αποδέχονται και να συγκρατούν τα αποτελέσματα, δηλαδή τη γνώση.

Σε τεύχος του Crux, v35, n4 (May 2009), προτάθηκε από τον Hidetoshi Fukagawa (Kani, Gifu, Japan) το παρακάτω πρόβλημα:

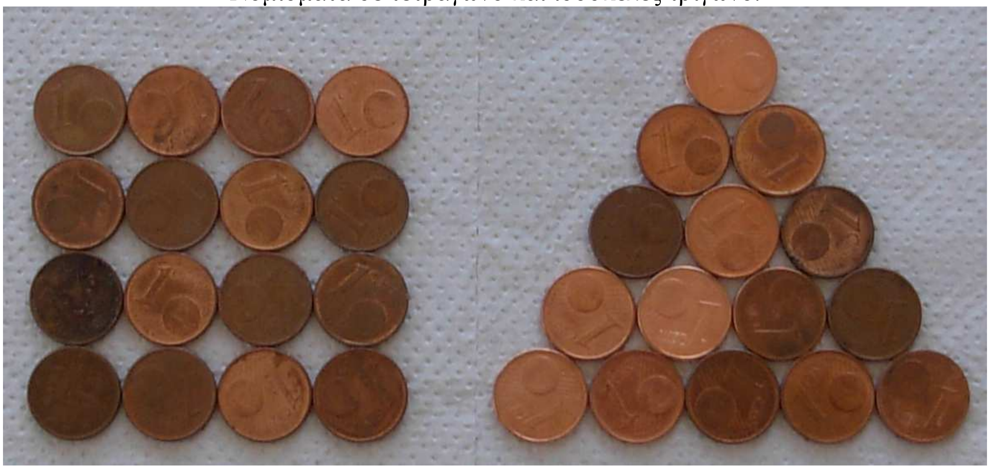
Πρόβλημα 1(Problem 3440): «Πάνω σ' ένα τραπέζι υπάρχουν Ν νομίσματα, όλα του ίδιου μεγέθους. Τα νομίσματα αυτά μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα τετράγωνο, αλλά και σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Βρέστε τον αριθμό Ν των νομισμάτων».

Ως θέμα για διδασκαλία στην τάξη, όπου θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε και το παιγνίδι, μας φάνηκε ιδιαίτερα ελκυστικό, τη στιγμή μάλιστα που σκεφτήκαμε ότι τα νομίσματα θα μπορούσαν να αντικατασταθούν με βώλους για μικρότερα παιδιά ή με μπίλιες μπιλιάρδου για μεγαλύτερα. Για παράδειγμα, το Πρόβλημα 2 θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στις μεγάλες τάξεις του Δημοτικού (Δ′, Ε′, ΣΤ′), όπου οι μαθητές θα μπορούσαν να διαπιστώσουν, παίζοντας με τα νομίσματα, ότι δημιουργούνται, μέσα από τη διαδικασία αυτή, αριθμητικά μοτίβα και στη συνέχεια να διατυπώσουν, κάνοντας παρατηρήσεις, κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού κάτω από την καθοδήγηση του δασκάλου, έναν κανόνα γι' αυτά. Με τα Προβλήματα 3, 4 και 5 οι μαθητές της Α′ Λυκείου θα μπορούσαν να δραστηριοποιηθούν στο κεφάλαιο 3 της Γεωμετρίας, τόσο στην παράγραφο που αναφέρεται στην εφαπτομένη του κύκλου, όσο και στην παράγραφο που αναφέρεται στους εφαπτόμενους κύκλους. Εδώ, οι μαθητές, εκτός από τα προβλήματα που εμφανίζονται από τη στενή έννοια που διαπραγματεύονται, θα αντιμετωπίσουν και αρκετά άλλα προβλήματα, που θα τους δώσουν τη δυνατότητα, στην προσπάθειά τους για επίλυση, να ανακαλέσουν προηγούμενες γνώσεις τους. Επίσης, τα προβλήματα 2 και 6, καθώς και οι επεκτάσεις αυτών, Προβλήματα 7, 8 και 9, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως δραστηριότητες στη διδασκαλία της επαγωγής στη Β′ Λυκείου. Οι μαθητές μας περιμένουμε να κατανοήσουν ότι η μαθηματική επαγωγή είναι ένα εργαλείο που βοηθάει στη λύση των προβλημάτων και δεν είναι ακόμη μια έννοια ή ακόμη μια μέθοδος απόδειξης. Τέλος, αντίστοιχα προβλήματα του χώρου, όπως αυτά που φαίνονται στα σχήματα 6 και 7 θα μπορούσαν να δραστηριοποιήσουν, με εξωσχολικές εργασίες, μαθητές που έχουν έντονο το ενδιαφέρον στο να χρησιμοποιούν τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή δημιουργικά, για τη λύση απλών ή σύνθετων προβλημάτων.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να δειχτεί ότι μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες μπορούμε να φτάσουμε σε υψηλά επίπεδα μαθηματικών. Μπορούμε να ξεκινήσουμε παίζοντας από τις μικρές ηλικίες και να συνεχίσουμε στις μεγάλες, διδάσκοντας ή μαθαίνοντας ευχάριστα τα Μαθηματικά. Παράλληλα να θυμίσουμε την εξίσωση του Pell, η οποία θα μπορούσε, ίσως, να αποτελέσει αντικείμενο για συνθετική εργασία των μαθητών μας.

2. Προβλήματα και δραστηριότητες μέσα από το παιγνίδι.

Νομίσματα σε τετράγωνο και ισοσκελές τρίγωνο.



Σχήμα 1

Η πρώτη προσέγγιση στο παραπάνω πρόβλημα ήταν να εξασφαλίσουμε ικανό αριθμό νομισμάτων και να πειραματιστούμε, να δούμε δηλαδή πως είναι δυνατόν να βάλουμε τα νομίσματα σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ή ένα τετράγωνο. Αντιληφθήκαμε αμέσως ότι δεν μπορούμε να βάλουμε τα νομίσματα σε οποιοδήποτε ισόπλευρο τρίγωνο ή τετράγωνο, αλλά μάλλον θα έπρεπε να βάλουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ή το τετράγωνο σε κατάλληλο αριθμό νομισμάτων, που θα ήταν κατάλληλα τοποθετημένα ώστε να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο ή τετράγωνο. Έτσι, έχουμε το παρακάτω πρόβλημα-παιγνίδι, στο οποίο καλούνται οι μικροί μαθητές, εργαζόμενοι και σε ομάδες, να δώσουν λύση.

Πρόβλημα 2. Να τοποθετήσετε νομίσματα ίδιας αξίας, ώστε το ένα να ακουμπά στο άλλο και με αυτό τον τρόπο να σχηματίσετε ισόπλευρο τρίγωνο ή τετράγωνο. Καταγράψτε κάθε φορά τον αριθμό των νομισμάτων που απαιτούνται.

Οι μαθητές μπορούν να σχηματίσουν ισόπλευρα τρίγωνα και τετράγωνα, όπως στο Σχήμα 1. και μετρώντας τα νομίσματα μπορούν να καταγράψουν τον αριθμό αυτών που χρειάζονται, δηλαδή

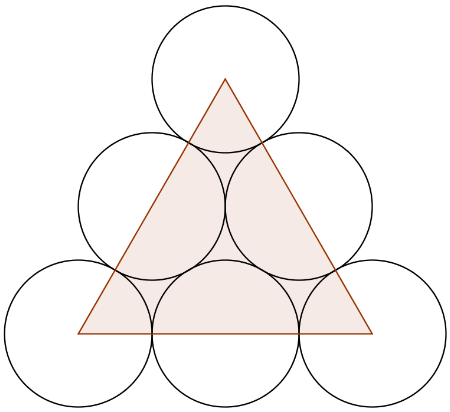
Αρ.ν.τρ.: **1**, 3, 6, 10, 15, 21, 28, **36**, 45, 55, …

Αρ.ν.τετρ.: **1**, 4, 9, 16, 25, **36**, 49, 64, …

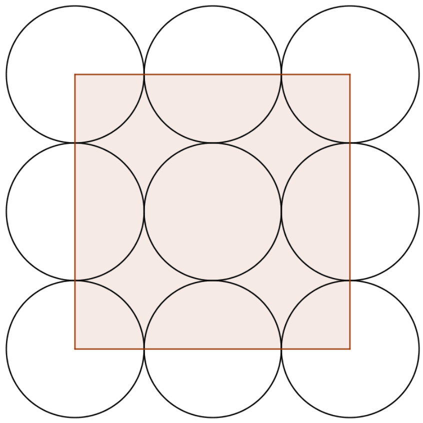
Ήδη, έχουν δώσει και μια πρώτη λύση στο αρχικό πρόβλημα, βρήκαν δηλαδή οι μαθητές μας ότι με 36 νομίσματα μπορούμε να σχηματίσουμε και ισόπλευρο τρίγωνο και τετράγωνο ή ότι 36 νομίσματα χωρούν συγχρόνως σε ισόπλευρο τρίγωνο και σε τετράγωνο.

Μεγαλύτεροι μαθητές, προχωρώντας από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, μπορούν να αντικαταστήσουν πλέον τα νομίσματα με σχήματα (ίσους κύκλους) και να διατυπώσουν, αλλά και να λύσουν τα παρακάτω προβλήματα:

Εφαπτόμενοι κύκλοι τοποθετημένοι σε ισοσκελές τρίγωνο και τετράγωνο



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Πρόβλημα 3: Να σχεδιάσετε με ένα λογισμικό δυναμικής Γεωμετρίας (λ.δ.Γ.) $m \in (10,20)$ (αντίστοιχα $n \in (10,20)$) εφαπτόμενους ίσους μεταξύ τους κύκλους, έτσι ώστε να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο (αντίστοιχα τετράγωνο), παρόμοια με τα Σχήματα 2 και3.

Πρόβλήμα 4: Να σχεδιάσετε το κυρτό περίβλημα του παραπάνω προβλήματος.

Πρόβλημα 5: Με ένα λ.δ.Γ. να γεμίσετε ένα τετράγωνο (αντίστοιχα τρίγωνο) με $n \in (10,20)$ (αντίστοιχα $m \in (10,20)$), ίσους εφαπτόμενους κύκλους.

Οι μαθητές που επεξεργάζονται τα προβλήματα 3, 4 και 5 μπορούν τώρα να διατυπώσουν και να λύσουν τα εξής προβλήματα.

Πρόβλημα 6: Ποιος είναι, γενικά, ο αριθμός των νομισμάτων ίσης αξίας, που χωρά ακριβώς σε ισόπλευρο τρίγωνο, όταν στη βάση βάλουμε **n** νομίσματα (ή τετράγωνο, όταν στη βάση βάλουμε **m** νομίσματα); Πόσα νομίσματα χωρούν συγχρόνως σε ισόπλευρο τρίγωνο και τετράγωνο;

Πλέον οι μαθητές μας είναι έτοιμοι να δώσουν τους τύπους:

Αρ.ν.τρ.: $n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n+1)$

Αρ.ν.τετρ.: $m\cdot m=m^2$

Φυσικά ο ίδιος αριθμός νομισμάτων σημαίνει:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}n(n+1)=m^2 \Leftrightarrow n^2+n=2m^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2-1=2(2m)^2\\ &\Leftrightarrow (2n+1)^2-2(2m)^2=1 \ \acute{\eta} \ \kappa^2-2\lambda^2=1,\end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\kappa=2n+1$ και $\lambda=2m$. Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι η τελευταία της (1) έχει μια προφανή λύση το ζεύγος **(1,0)**. Η λύση αυτή όμως οδηγεί στην ισότητα $(n,m)=(0,0)$, η οποία δεν μπορεί να θεωρηθεί λύση. Εμπειρικά ο μαθητής μπορεί να βρει, επίσης, ότι και το ζεύγος **(3,2)** είναι λύση αυτής, δηλαδή ότι με **n=1** και **m=1** μπορούμε να γεμίσουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο (τετριμμένη λύση). Με τη βοήθειά μας ο μαθητής μπορεί να δει ότι η αναδρομική ακολουθία

$$(\kappa_{\nu+1},\lambda_{\nu+1})=(3\kappa_\nu+4\lambda_\nu, 2\kappa_\nu+3\lambda_\nu) \text{ με } (\kappa_0,\lambda_0)=(1,0), \tag{2}$$

δίνει άπειρες λύσεις στην (1), αφού

$$\kappa_{\nu+1}^2-2\lambda_{\nu+1}^2=\cdots=\kappa_\nu^2-2\lambda_\nu^2=1. \tag{3}$$

Από τον τύπο (2) προκύπτει ότι μια άλλη λύση αυτής είναι η **(17,12)**, οπότε με **n=8** και **m=6** σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο και τετράγωνο αντίστοιχα, δηλαδή **36** νομίσματα χωρούν ακριβώς σε ισόπλευρο τρίγωνο και τετράγωνο συγχρόνως, κ.ο.κ. Η τελευταία εξίσωση της (1) είναι γνωστή ως εξίσωση του **Pell**.

3. Η Εξίσωση του Pell.

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$P(x,y)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}y+a_{n-2}x^{n-2}y^2+\cdots+a_1x^1y^{n-1}+a_oy^n \tag{4}$$

με $n,a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\in\mathbb{Z}$ και $n\geq 2$. Αν $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $P(x,y)=m$ έχει άπειρες λύσεις ή δεν έχει καμία στο σύνολο των $\mathbb{Z}$. Η ειδική περίπτωση της (4)

$$P(x,y)=x^2-\delta y^2=m, \tag{5}$$

όπου $0<\delta\in\mathbb{Z}$ και ο δ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, είναι γνωστή ως εξίσωση του Pell. Ακόμη πιο απλή μορφή αυτής αποτελεί η επόμενη

$$x^2-\delta y^2=1. \tag{6}$$

Ίσως εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε πως οι γνωρίζοντες λένε ότι η εξίσωση αυτή αποδίδεται στον Pell από λάθος του Euler. Οι ίδιοι αποδίδουν την εξίσωση στον Fermat και ότι με τη λύση της ασχολήθηκαν οι Ινδοί Βραχμαγκούπτα (7ος αι. μ.Χ.) και Μπασκάρα ΙΙ (12ος αι. μ.Χ.) [6].
Η διοφαντική εξίσωση (6) εκτός της προφανούς λύσης (x_0, y_0) (στην περίπτωση όπου έχουμε $\delta = 2$ μια προφανής λύση είναι $(3,2)$) έχει άπειρες θετικές ακέραιες λύσεις. Πράγματι, αν (x_0, y_0) είναι μια τέτοια, τότε

$$x_0^2 - \delta y_0^2 = 1.$$

Αλλά τότε ισχύει και η επόμενη σχέση

$$(x_0 + y_0\sqrt{\delta})(x_0 - y_0\sqrt{\delta}) = 1.$$

Επιπλέον έχουμε ότι ισχύει:

$$(x_0 + y_0\sqrt{\delta})^n (x_0 - y_0\sqrt{\delta})^n = 1 = (x_n + y_n\sqrt{\delta})(x_n - y_n\sqrt{\delta}).$$

Έτσι κάθε ζεύγος (x_n, y_n) με

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}[(x_0 + y_0\sqrt{\delta})^n + (x_0 - y_0\sqrt{\delta})^n] \\ y_n &= \frac{1}{2\sqrt{\delta}}[(x_0 + y_0\sqrt{\delta})^n - (x_0 - y_0\sqrt{\delta})^n] \end{aligned}, \qquad (7)$$

είναι λύση της (6). Η μικρότερη θετική λύση αυτής λέγεται «πρωτεύουσα λύση».

Στον Πίνακα 1 αναγράφονται ορισμένες πρωτεύουσες λύσεις της (6) για διάφορες τιμές του δ, όπου κάποιος μπορεί να παρατηρήσει ότι ορισμένες δεν είναι καθόλου προφανείς, όπως συμβαίνει στην περίπτωση π.χ. όπου $\delta = 13$ ή $\delta = 19$.

Πρωτεύουσες λύσεις της (6)για διάφορες τιμές του δ.

δ	x_0	y_0	δ	x_0	y_0
2	3	2	11	10	3
3	2	1	12	7	2
5	9	4	13	649	180
7	8	3	17	33	8
8	3	1	19	170	39

Πίνακας 1.

Με την εύρεση του αλγόριθμου, που βρίσκει μια πρωτεύουσα λύση της διοφαντικής εξίσωσης (6), ασχολήθηκαν πολλοί και μεγάλοι μαθηματικοί, μεταξύ των οποίων και οι Lagrange και Euler [3].

Στην μορφή (6) και στη λύση αυτής ανάγονται και άλλες, γενικότερες μορφές αυτής, όπως

$$x^2-\delta y^2=-1$$

$$x^2-\delta y^2=k,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\} \tag{8}$$

$$ax^2-by^2=1,\ ab\neq k^2,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}.$$

Όμως τις μορφές αυτές δε θα τις συζητήσουμε. Κάποιος μπορεί να βρει υλικό γι' αυτές σε πολλά βιβλία της θεωρίας αριθμών, π.χ. [3], [5].

4. Επεκτάσεις ή προεκτάσεις.

Στα Προβλήματα 2, 3, 4, 5 και 6 μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ή το τετράγωνο με κανονικό εξάγωνο ή οχτάγωνο (Σχήμα 4 και Σχήμα 5). Οι μαθητές μας τώρα μπορούν να δώσουν, ίσως λίγο πιο δύσκολα, λύσεις στα αντίστοιχα προβλήματα. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό των νομισμάτων που χωρούν σε κανονικό εξάγωνο θα μπορούσαν να καταλήξουν στον παρακάτω τύπο:

Αρ.ν.εξ.= $2[k+(k+1)+\cdots+(2k-2)]+(2k-1)=\cdots=3k^2-3k+1$.

Επίσης, για τον υπολογισμό των νομισμάτων σε οχτάγωνο, τούτη τη φορά όμως όχι σε κανονικό, θα μπορούσαν να καταλήξουν στο εξής:

Αρ.ν.οχτ.= $2[k+(k+1)+\cdots+(2k-1)]+(k-2)(2k-1)=\cdots=5k^2-6k+2$.

Μπορούν να καταλήξουν σε εξισώσεις του Pell, διατυπώνοντας και λύνοντας προβλήματα, όπως τα επόμενα:

Νομίσματα σε εξάγωνο και οχτάγωνο

Σχήμα 4

Σχήμα 5

Πρόβλημα 7. Ποιος είναι ο αριθμός των νομισμάτων που χωράει ταυτόχρονα σε τετράγωνο και κανονικό εξάγωνο;

Οι μαθητές μας τώρα θα καταλήξουν, όπως και προηγούμενα, σε εξίσωση παρόμοιας μορφής, δηλαδή

$$3k^2-3k+1=m^2 \Leftrightarrow 12k^2-12k+4=4m^2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^2-3y^2=1,$$

όπου $x=2m$ και $y=2k-1$. Εφαρμόζοντας τη θεωρία της προηγούμενης παραγράφου, θα βρουν ότι, εκτός της προφανούς λύσης του ενός νομίσματος, ο επόμενος αριθμός νομισμάτων που χωράει ακριβώς σε τετράγωνο και κανονικό εξάγωνο είναι ο **169,** δημιουργώντας γεμάτο τετράγωνο με **13** νομίσματα στη βάση του και γεμάτο κανονικό εξάγωνο με **8** νομίσματα σε κάθε πλευρά του.

Πρόβλημα 8. Ποιος είναι ο αριθμός των νομισμάτων που χωράει ταυτόχρονα σε ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο;

Με ανάλογα σκεπτικά καταλήγουμε στη λύση της επόμενης εξίσωσης

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}n(n+1)=3k^2-3k+1 \Leftrightarrow n(n+1)=6k^2-6k+2 \Leftrightarrow \\ 4n(n+1)=24k^2-24k+8 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^2-6y^2=3\end{gathered}, \tag{9}$$

όπου $x=2n+1$ και $y=2k-1$.

Πρόβλημα 9. Ποιος είναι ο αριθμός των νομισμάτων που χωράει ταυτόχρονα σε τετράγωνο και οχτάγωνο;

Ομοίως καταλήγουμε στη επόμενη εξίσωση

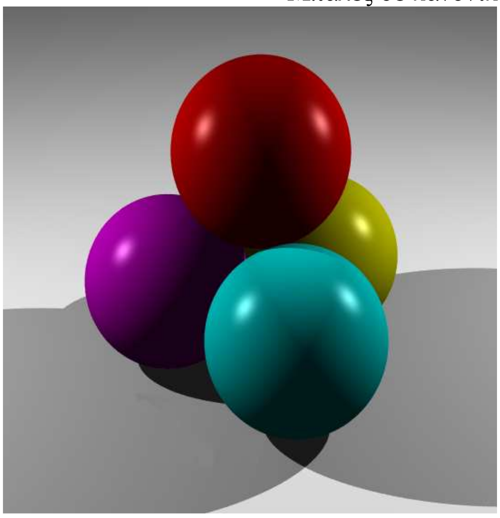
$$m^2=5k^2-6k+2 \Leftrightarrow 5m^2=25k^2-30k+10 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^2-5m^2=-1, \tag{10}$$

όπου $x=5k-3$.

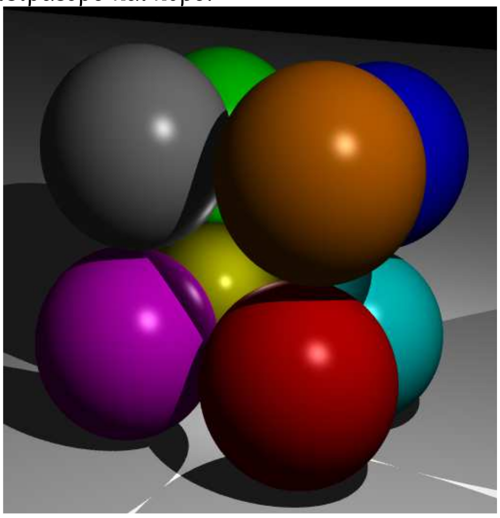
Οι εξισώσεις (9) και (10) είναι παρόμοιες με τη δεύτερη και πρώτη αντίστοιχα της (8). Με τη θεωρία που αναπτύχθηκε περιληπτικά στην τρίτη παράγραφο δεν μπορούν να λυθούν. Όμως, χρησιμοποιώντας το «ταπεινό» Excel μπορεί κάποιος να βρει λύσεις. Έτσι, θα βρούμε ότι, όταν λύνουμε το Πρόβλημα 8, μια λύση της (9) είναι το ζεύγος **(27,11)**, δηλαδή μπορούμε να τοποθετήσουμε **91** νομίσματα σε ισόπλευρο τρίγωνο (**13** στη βάση του) και σε κανονικό εξάγωνο (**6** σε κάθε πλευρά του). Ενώ για το Πρόβλημα 9 η «πρωτεύουσα λύση» της (10) είναι το ζεύγους **(2,1)** που οδηγεί στην προφανή λύση του ενός νομίσματος. Η επόμενη λύση αυτής **(38,17)** δεν αποτελεί και λύση του προβλήματός μας, αφού το **5** δε διαιρεί το **41**. Όμως η λύση **(682,305)** μας λέει ότι **93025** νομίσματα της ίδιας αξίας μπορούν να γεμίσουν συγχρόνως τετράγωνο και οχτάγωνο, βάζοντας **305** και **137** αντίστοιχα σε κάθε πλευρά τους.

Τέλος, ορισμένα από τα προβλήματα που αναφέρθηκαν προηγουμένως μπορούν να διατυπωθούν και για τις τρεις διαστάσεις, π.χ. πόσες μπάλες μπιλιάρδου μπορούν να τοποθετηθούν σε έναν κύβο (Σχήμα 7), ένα κανονικό τετράεδρο (Σχήμα 6), μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα , κλπ.

Μπάλες σε κανονικό τετράεδρο και κύβο.



Σχήμα 6



Σχήμα 7

5. Επίλογος.

Στην παρούσα εργασία έγινε μια προσπάθεια να δειχθεί ότι τα Μαθηματικά μαθαίνονται και με το παιγνίδι. Θαυμάσιες ιδέες θα μπορούσε κάποιος να αντλήσει από το [7]. Επίσης, να θυμίσει ότι οι δημιουργικές εργασίες των μαθητών, υποχρεωτικές για την Α′ και Β′ Λυκείου και προαιρετικές για τη Γ′ (Άρθρο 8, παράγραφος 2 του ΠΔ 60/2006), όχι μόνο δεν πρέπει να μένουν στο περιθώριο, αλλά μπορούν και πρέπει να έρθουν στο προσκήνιο. Ακόμη, να δειχθεί ότι η σύγχρονη τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει μαθηματικά προβλήματα, αλλά και ότι η μαθηματική σκέψη απαιτείται για την επίλυση προβλημάτων αυτής. Τέλος, ήταν μια προσπάθεια να προβάλει την Θεωρία Αριθμών, μια επιστήμη θεμελιωμένη από τους Έλληνες, μέσα από την εξίσωση του Pell και να δώσει ένα μικρό δείγμα των προβλημάτων που λύνει αυτή η εξίσωση.

Φυσικά, η εργασία αυτή δεν έχει δοκιμαστεί στην πράξη. Είναι ένα θέμα που θα μπορούσε να εξελιχθεί σε σενάριο διδασκαλίας και θα μπορούσε να εφαρμοστεί. Ήδη εργαζόμαστε στην κατεύθυνση αυτή, ελπίζοντας ότι σύντομα θα μπορέσουμε να πειραματιστούμε στην τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. P. Ernest, «Games. Teaching Mathematics and its Applications», 5(3), 97-102, 1986.

2. S. Papert, «Mind storms, children, computers and powerful Ideas», Springer-Verlag New York: Basic Books, 1980.

3. E. J. Barbeau, «Pell's Equation», Springer-Verlag New York, Ink, 2003.

4. Μ. Τουμάσης, «Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών», Αθήνα, Gutenberg, 1994.

5. G. Chrystal, «Algebra, an Elementary Text-Book, Part II», Dover, NY, 1961.
http://onlinebooks.library.upenn.edu/webbin/book/lookupid?key=olbp36404

6. Γ. Ντάλλα, «Τα Αρχαία Ινδικά Μαθηματικά μέχρι τον 7^{ο} μ.Χ. αιώνα», Διπλωματική Εργασία, Διαπανεπιστημιακό-Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών, Πανεπιστήμια Αθηνών-Κύπρου, 2006.
http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_ntala.pdf

7. D. Kirkby, Games in the teaching of Mathematics, Cambridge University Press, 2010.