ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

Αθήνα, 22 Φεβρουαρίου 2022

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

“Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΑ ΚΕΝΤΡΑ

- Τα θέματα του Διαγωνισμού θα αποσταλούν στο email που δηλώσατε γύρω στις 09:20-09:30. Μαζί θα σταλούν οι ονομαστικές βεβαιώσεις συμμετοχής των μαθητών που ανήκουν στο κέντρο σας για να τις μοιράσετε σε αυτούς, καθώς και ευχαριστήριες επιστολές για τους επιτηρητές και τον Πρόεδρο του Εξεταστικού Κέντρου
- Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει **απαραίτητα** να γράψουν ***ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΣΤΑΘΕΡΟ και ΚΙΝΗΤΟ ΤΗΛΕΦΩΝΟ,*** πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει **διανομή φωτοτυπιών** των θεμάτων στους μαθητές.
- Η εξέταση θα διαρκέσει **τρεις (3) ώρες για τους μαθητές του Γυμνασίου** και **τρεις ώρες και τριάντα λεπτά για τους μαθητές Λυκείου** από τη στιγμή που θα γίνει η διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές. **Δεν θα επιτρέπεται** σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει **μια ώρα** από **την έναρξη της εξέτασης**.
- Οι επιτηρητές των αιθουσών **έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν** τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν **χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα**, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών.
- **Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου καθώς και η χρήση κινητών απαγορεύονται**.
- Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου, θα πρέπει **οπωσδήποτε** τα γραπτά να παραδοθούν στην ACS (**Σάββατο μέχρι 14.00**), και να σταλούν στα Γραφεία της ΕΜΕ στην Αθήνα (Πανεπιστημίου 34, 10679 Αθήνα), ώστε η Επιτροπή Διαγωνισμών να τα παραλάβει τη Δευτέρα.
- Σας υπενθυμίζουμε ότι είναι ουσιώδες να τηρηθούν αυστηρά τα υγειονομικά πρωτόκολλα με υποχρεωτικό self test 24ώρου. Επίσης στην αίθουσα θα βρίσκονται μόνο οι μαθητές και ο επιτηρητής, κανένας άλλος.

Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους/ες τους/τις συναδέλφους που συμβάλλουν με την εθελοντική τους συμμετοχή στην οργάνωση της Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Για το Διοικητικό Συμβούλιο
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Ο Πρόεδρος	Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Π. Εμμανουήλ Καθηγητής ΕΚΠΑ	Ιωάννης Τυρλής Καθηγητής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

(A) Να προσδιορίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού k για την οποία το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια, για την τιμή του k που θα βρείτε, να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - kx + 2$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές.

(B) Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν την εξίσωση $2a + b + \frac{4}{ab} = 10$, να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του a.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του, τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^0,\ \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 50^0,\ \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 55^0.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 80^0$

(β) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα γράφουμε σε μία σειρά n αριθμούς, $n \geq 40$, όπου καθένας από αυτούς ισούται με 1 ή -1, ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω συνθήκες:
(i) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 40 διαδοχικών αριθμών είναι ίσο με 0.
(ii) Το άθροισμα οποιωνδήποτε 42 διαδοχικών αριθμών δεν είναι ίσο με 0.
Ονομάζουμε Σ_n το μέγιστο δυνατό άθροισμα των n αριθμών του πίνακα. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του Σ_n για τις διάφορες τιμές του n.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλα τα ζεύγη μη μηδενικών ακεραίων (x, y) που είναι τέτοιοι, ώστε ο ακέραιος $x^2 + y^2$ να είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων $x^5 + y$ και $y^5 + x$.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

39η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022
Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Δίνεται τρίγωνο ABC με $\mathrm{AB} < \mathrm{AC} < \mathrm{BC}$. Στο ευθύγραμμο τμήμα BC θεωρούμε τα σημεία D, E ώστε $\mathrm{BD} = \mathrm{BA}$ και $\mathrm{CE} = \mathrm{CA}$. Αν K είναι το περίκεντρο του τριγώνου ADE, F είναι η τομή των ευθειών AD, KC και G είναι η τομή των ευθειών AE, KB, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KDE, έστω c_1, ο κύκλος με κέντρο το σημείο F και ακτίνα FE, έστω c_2, και ο κύκλος με κέντρο το σημείο G και ακτίνα GD, έστω c_3, περνάνε από το ίδιο σημείο, το οποίο βρίσκεται πάνω στην ευθεία AK.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ένας θετικός ακέραιος $n > 4$, που διαιρείται από τον αριθμό 4. Συμβολίζουμε με A_n το άθροισμα όλων των θετικών περιττών διαιρετών του n. Συμβολίζουμε με B_n το άθροισμα όλων των θετικών άρτιων διαιρετών του n, εξαιρουμένου του n. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή της παράστασης $f(n) = B_n - 2A_n$, για τις διάφορες τιμές του n. Για ποιους θετικούς ακεραίους n επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή;

Πρόβλημα 3
Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ικανοποιούν την ισότητα

$$\alpha + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta + \frac{1}{\alpha\beta^2\gamma^2\delta^2} = 18.$$

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του α.

Πρόβλημα 4
Έστω Q_n το σύνολο των n-άδων $x = (x_1, \dots, x_n)$ με $x_i \in \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Μία τριάδα (x, y, z), όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, διακεκριμένων στοιχείων του Q_n λέγεται *καλή,* αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα συνόλων: $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0,1,2\}$. Ένα υποσύνολο A του Q_n λέγεται *καλό*, αν οποιαδήποτε τρία στοιχεία του A σχηματίζουν μια *καλή* τριάδα. Να αποδείξετε ότι κάθε *καλό* υποσύνολο του Q_n έχει το πολύ $2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ στοιχεία.

Να απαντήσετε και στα 4 προβλήματα
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία!