Μαθηματικά και Φυσική: Το πρόβλημα της ολισθαίνουσας σκάλας.

Σωτήριος Δ. Χασάπης
Μαθηματικός
shasapis@sch.gr

Δρ. Χρήστος Φανίδης
Φυσικός
cdfan@sch.gr

Θεματική ενότητα: *Η ταυτότητα των Μαθηματικών μέσα στην αλληλεπίδραση της μαθηματικής επιστήμης με τις εφαρμογές της*

Περίληψη

Ξεκινώντας από ένα πρόβλημα Μαθηματικών του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου περιγράφονται και αναλύονται οι προβληματισμοί των μαθητών που μπορούν να προκύψουν από τη Φυσική και Μαθηματική θεώρηση του προβλήματος μέσα στη σχολική τάξη. Σε ένα μεικτό τμήμα μαθητών θετικής κατεύθυνσης, στο οποίο όλοι διδάσκονταν Μαθηματικά, αλλά κάποιοι από αυτούς στις Πανελλαδικές εξετάσεις εξετάζονταν στα Μαθηματικά και κάποιοι στη Βιολογία, οργανώθηκε και έλαβε χώρα μία δίωρη συνδιδασκαλία από έναν Μαθηματικό και έναν Φυσικό, με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές πώς συνδέονται κάποιες μαθηματικές έννοιες με τους φυσικούς νόμους στο συγκεκριμένο πρόβλημα και πώς μπορούν να διερευνηθούν και αιτιολογηθούν κάποια μη λογικά αποτελέσματα τούτων δοθέντων. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται αφενός η Μαθηματική και η Φυσική οπτική του προβλήματος, η θεώρησή του στην τάξη, συνδυάζοντάς τις με πειράματα (πραγματικά και εικονικά στον ΗΥ), που οδηγούν στην αναθεώρηση των σκέψεων των μαθητών.

Abstract

Using a variation of the “Slipping Ladder problem,” contained as an exercise in the Mathematics coursebook of the 12^{th} grade, the student’s concerns about the Mathematics and Physics aspects of the problem are presented. A two hours co-teaching scenario based on this problem is introduced. The co-teaching was conducted from a Mathematics and a Physics teacher to students attending the 12th grade. Its objective was the students to comprehend the connection between the Mathematics aspects and the Physics laws governing the problem and how their use can explain some irrational results that are deduced due to problem approximations. The combination of mathematical formulation of the problem, of experiment, of computer simulations and of physics laws expressed in higher Mathematics is used, in order to study the problem and students to discover the irrationality of obtained results. As a next step, using the same tools, students reconsider and cure approximations that lead to previous erroneous results and also understand how Mathematics and Physics can collaborate to describe with accuracy a given physical problem.

Εισαγωγή

Το πρόβλημα της ολισθαίνουσας σκάλας και το σχετικό παράδοξο, έχει, γενικά, πλούσιες αναφορές στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία [1,2,3 κ.ά.] με πολλές διαφορετικές οπτικές. Σε αυτήν την εργασία παρουσιάζεται μία διδακτική πρόταση που έχει τις καταβολές της σε ένα πρόβλημα μαθηματικών του σχολικού βιβλίου προσανατολισμού θετικών σπουδών Γ΄ λυκείου [4], και στις παρατηρήσεις - ερωτήσεις των μαθητών στην τάξη των Μαθηματικών που έχουν προκύψει κατά τη διδασκαλία αυτού κατά καιρούς. Στόχος της διδασκαλίας ήταν η απάντηση στους προβληματισμούς που είχαν προκύψει στην τάξη για το πρόβλημα, μέσω της διερεύνησής τους από Φυσική και Μαθηματική οπτική. Παρουσιάζονται επίσης και τα συμπεράσματα της εφαρμογής της. Στη διδασκαλία ενσωματώνεται ένα ζωντανό πείραμα μέσα στην τάξη και χρησιμοποιείται ο ΗΥ και λογισμικό για την επανάληψη και καλύτερη κατανόηση του πειράματος μέσω προσομοίωσης, όπου αναδεικνύεται πώς μπορεί το λογισμικό να βοηθήσει στην καλύτερη παρατήρηση του πειράματος. Η πορεία που ακολουθείται στη διδασκαλία επικεντρώνει στη διαλογική αντιμετώπιση του προβλήματος, μεταξύ των μελών της τάξης(μαθητών και δασκάλων), με στοχευμένες ερωτήσεις, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται κατευθυνόμενος διάλογος, με στόχο την ενεργή εμπλοκή και διαρκή εγρήγορση των μαθητών. Επιπλέον, εφαρμόζεται διαθεματική διδακτική προσέγγιση με εναλλαγές παράλληλης και εναλλασσόμενης διδασκαλίας [5].

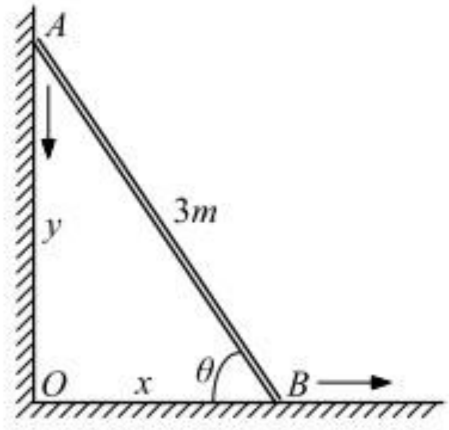
Το πρόβλημα και η λύση του

Ας ξεκινήσουμε από το πρόβλημα στο σχολικό βιβλίο [4] σελ.127, άσκηση 7. Το πρόβλημα εξετάζεται στην παράγραφο του Ρυθμού μεταβολής δύο μεγεθών, οπότε η φυσική ερμηνεία της παραγώγου μίας συνάρτησης έχει σημαντική θέση εδώ και ως συνέπεια αυτού τα διάφορα προβλήματα που εξετάζονται προσφέρονται για σύνδεση εννοιών της φυσικής με τα αντίστοιχα μαθηματικά εργαλεία. Από τη διδασκαλία που έγινε οι μαθητές φάνηκε να χαίρονται τη σύνδεση των εννοιών από δύο, έως τότε, θεωρούμενα διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα ων Μαθηματικών και της Φυσικής.

Άσκηση 7, σελ.127. Μία σκάλα μήκους 3 μέτρων είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστρά στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρεθούν:

i) Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ.

ii) Η ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.



;

Με συζήτηση μέσα στην τάξη προκύπτει ότι η ταχύτητα πτώσης της κορυφής Α αφορά στο ρυθμό μεταβολής της απόστασης του Α από το Ο ως προς το χρόνο t. Τα δεδομένα της άσκησης είναι το μήκος της σκάλας και ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ΟΒ, δηλαδή της ταχύτητας της κάτω άκρης της σκάλας Β. Οπότε για το δεύτερο ερώτημα της άσκησης, το οποίο εξετάζουμε εδώ και από το οποίο θα προκύψουν τα διαφοροποιημένα ερωτήματα, αρκεί να συνδεθούν οι αποστάσεις ΟΑ και ΟΒ μεταξύ τους. Δοθέντος ότι η γωνία Ο είναι ορθή γωνία, σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ, για το οποίο ισχύει το «Πυθαγόρειο θεώρημα», άρα: $OA^2+OB^2 = AB^2$. Αντικαθιστώντας στη συνέχεια με τα δεδομένα και τις σχετιζόμενες μεταβλητές έχουμε διαδοχικά:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2 = 9 \Leftrightarrow$$
$$x^2(t) + y^2(t) = 9 \Rightarrow$$
$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή Α απέχει από το Ο 2,5 μέτρα θα ισχύει ότι $y(t_0) = 2{,}5$mκαι η ταχύτητα με την οποία γλιστρά η κορυφή Β είναι σταθερή και άρα και τη χρονική στιγμή $x'(t_0) = 0{,}1\frac{m}{sec}$. Οπότε η σχέση γίνεται: $x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow y'(t_0) = -\frac{x(t_0)x'(t_0)}{y(t_0)}$.

Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος για $t = t_0$ έχουμε ότι $x(t_0) = \sqrt{0{,}5}$m, οπότε τελικά προκύπτει ότι: $y'(t_0) = -\frac{\sqrt{2}}{50}\frac{m}{sec}$.

Επέκταση του προβλήματος, διερευνήσεις και «εκπλήξεις»

Δοθέντος ότι η σχέση $x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0 \Leftrightarrow y'(t) = -\frac{x(t)x'(t)}{y(t)}$ ισχύει για τις χρονικές στιγμές t που πέφτει η σκάλα και $y(t) \neq 0$, η ερώτηση που τίθεται προς τους μαθητές τι συμβαίνει όταν η σκάλα τείνει να γίνει οριζόντια, δηλαδή να γίνει $y(t) \to 0$, οδηγεί στην έκπληξη ότι η ταχύτητα της άνω κορυφής Α της σκάλας τείνει να γίνει άπειρη! Και αυτό συμβαίνει διότι στην παραπάνω σχέση το μήκος $x(t)$ εξακολουθεί να είναι πεπερασμένο και η ταχύτητα κίνησης της κάτω κορυφής Β εξακολουθεί να είναι σταθερή και ίση με $x'(t) = 0{,}1\frac{m}{sec}$. Δηλαδή, μέσω αυτού του πειράματος «επιτύχαμε» ταχύτητα πτώσης του σημείου Α της σκάλας μεγαλύτερης της ταχύτητας του φωτός! Προφανώς, μία αποκάλυψη πρωτοφανής για τους μαθητές και όσα γνωρίζουν, ιδιαίτερα δε ενδιαφέρουσα και για εκείνους τους μαθητές, οι οποίοι δεν εξετάζονταν στα μαθηματικά τη συγκεκριμένη σχολική χρονιά πανελλαδικά, αλλά μόνο στη βιολογία και σίγουρα τους κίνησε ιδιαιτέρως το ενδιαφέρον. Η έκπληξη ως στοιχείο μίας διδασκαλίας εμπλέκει, αφενός μία συναισθηματική αντίδραση, αφετέρου χρησιμοποιείται και ως γνωστικός στόχος, διότι καθοδηγεί την προσοχή στο να αιτιολογηθεί η προέλευσή της στο πρόβλημα και γενικότερα μπορεί να έχει σημαντικό ρόλο στη μάθηση [6]. Γιατί όμως οι μαθητές δεν παρατήρησαν πώς και γιατί δεν ισχύει κάτι από τις υποθέσεις με τις οποίες «λύθηκε» το πρόσθετο ερώτημα του προβλήματος; Η κίνηση που επιφέρει την αλλαγή κατάστασης δεν αποτελεί συνηθισμένο πεδίο στα προβλήματα Μαθηματικών. Ειδικά, μάλιστα, αν αυτή είναι συνεχής, όπως στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι μαθητές δεν έχουν συνηθίσει να εντοπίζουν στα προβλήματα Μαθηματικών διαφοροποιήσεις στα δεδομένα και τα ζητούμενα, κατά τη διάρκεια διεξαγωγής του φαινομένου που περιγράφεται από το πρόβλημα. Έτσι, φαίνεται να έχουν συνηθίσει στο μαθηματικό πλαίσιο να βλέπουν μία αρχική και μία τελική κατάσταση. Οι μαθητές μπορούν να οδηγούνται σε διαφορετικές λύσεις σε ένα πρόβλημα (πχ μία διαφορική εξίσωση), βασιζόμενοι στη διαφορετική κατανόηση που έχουν (διακριτή ή συνεχής) για τη μεταβολή κάθε φορά [7]. Η εισαγωγή ενός σχετικού πειράματος στη διδασκαλία, όχι μόνο τους βοηθά να εντοπίσουν τη «συνεχή φύση» του προβλήματος, αλλά ταυτόχρονα τους οδηγεί να συνδυάσουν στη σκέψη τους μία διαφορετική οπτική, σε άλλο πλαίσιο (context), αυτή της φυσικής θεώρησης του προβλήματος.

Το πείραμα και η διερεύνησή του με τη βοήθεια λογισμικού

Η συζήτηση στην τάξη και η ανταλλαγή απόψεων που ακολουθεί δίνει την ευκαιρία για τη διερεύνηση και τον εντοπισμό του λάθους που μπορεί να υπάρχει στην προηγούμενη σκέψη. Η εξέταση με ένα ζωντανό πείραμα στην τάξη μπορεί να δώσει κάποιες ιδέες, οπότε με τη βοήθεια μίας ράβδου διάφοροι μαθητές δοκίμασαν την πτώση της ράβδου μέσα στην τάξη (Εικόνα 2). Στο συγκεκριμένο πείραμα βέβαια δεν μπορεί να εξασφαλιστεί η σταθερή ταχύτητα κίνησης του κατώτερου σημείου πτώσης της ράβδου, αλλά μπορεί να γίνει σαφές, ότι κάτι δεν πάει καλά με τις υποθέσεις του πειράματος. Όσες φορές όμως και να εκτελεστεί το πείραμα, εφόσον δεν βιντεοσκοπηθεί, δεν είναι εύκολο να παρατηρηθεί ότι σε κάποιο σημείο της κίνησης της ράβδου (και αντίστοιχα της σκάλας) το άνω σημείο της, Α, **αποκολλάται** από τον τοίχο.

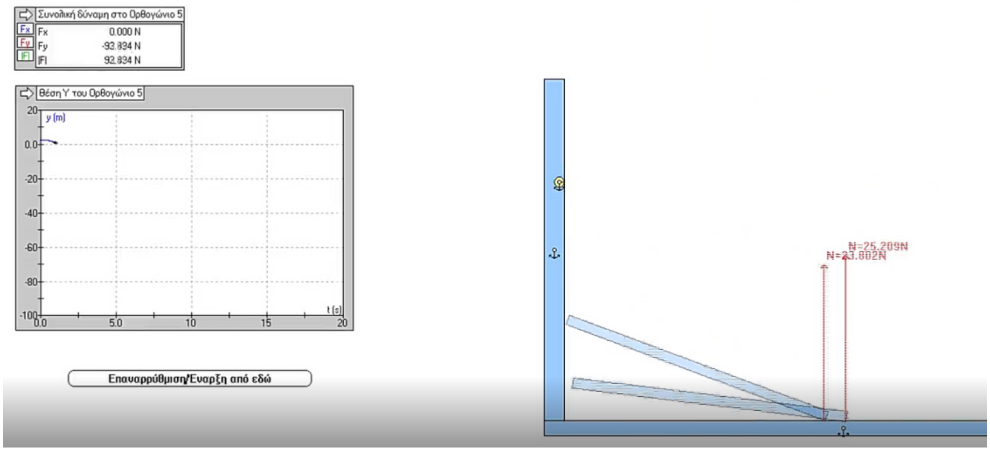
Εικόνα 2. Το πείραμα στην τάξη

Η Μαθηματική εξήγηση

Ισχύει λοιπόν ότι κατά τη διάρκεια της πτώσης της σκάλας ή της ράβδου αντίστοιχα στο πείραμα σε κάποιο σημείο της διαδρομής το σημείο Α (άνω σημείο) αποκολλάται από τον τοίχο. Ως συνέπεια αυτού, το ΟΑΒ δεν αποτελεί ορθογώνιο τρίγωνο, αφού το Α δε βρίσκεται στην κάθετη πλευρά του τοίχου και άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτό το «πυθαγόρειο θεώρημα».

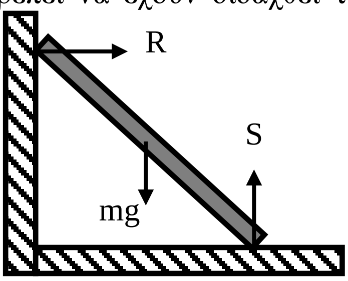
Φυσική διερεύνηση

Η διερεύνηση του προηγούμενου ερωτήματος μπορεί να γίνει καλύτερα, εφόσον χρησιμοποιηθεί λογισμικό προσομοίωσης του πειράματος. Με αυτό είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί εικονικά πολλές φορές το πείραμα μέσα στην τάξη και να επικεντρωθεί η προσοχή των μαθητών, παγώνοντάς το στα σημεία ενδιαφέροντος (εικόνα 3). Έτσι, γίνεται εμφανές ότι περίπου στο 1/3 της διαδρομής, η ράβδος αφήνει το μέρος του τοίχου στο οποίο ολίσθαινε και πλέον δεν ισχύουν οι μαθηματικές υποθέσεις. Στη συνέχεια της διδασκαλίας αποκτά ενδιαφέρον, αν μπορεί να προσδιοριστεί επακριβώς το σημείο αυτό.



Εικόνα 3. Στιγμιότυπο από την προσομοίωση του πειράματος στο πρόγραμμα Interactive Physics.

Η επιβεβαίωση και η ακριβής θέση της εμπειρικής παρατήρησης θα γίνει με χρήση των νόμων της Φυσικής και των Μαθηματικών. Οι μαθητές πρέπει να έχουν διδαχθεί την Μηχανική στερεού σώματος. Στο επόμενο σχήμα θεωρούμε ράβδο μήκους 2l (προς διευκόλυνση στις πράξεις) και μάζας m (R και S είναι η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον τοίχο και το πάτωμα αντίστοιχα), η οποία ολισθαίνει χωρίς σταθερή ταχύτητα κάτω άκρου, όπως και στο ζωντανό πείραμα που χρησιμοποιήθηκε στην τάξη. Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον κατακόρυφο τοίχο και g η επιτάχυνση της βαρύτητας, τότε ισχύουν για την θέση του κέντρου μάζας, την ταχύτητά του και την επιτάχυνσή του οι σχέσεις:



Εικόνα 4. Στο κέντρο μάζας της ράβδου ασκείται δύναμη mg κατακόρυφη.

$$x_G = l\,sin\theta\,, \qquad y_G = l\,cos\theta$$
$$\dot{x_G} = l\,\dot{\theta}cos\theta \qquad \dot{y}_G = -lsin\theta\,\dot{\theta}$$
$$\ddot{x_G} = l\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\ \ddot{y}_G = l\left(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

Επομένως η ταχύτητα του κέντρου μάζας (Εικόνα 4) υπολογίζεται ως $\overrightarrow{v_G} = \dot{x}_G\vec{\imath} + \dot{y}_G\vec{\jmath} = l\,\dot{\theta}cos\theta\vec{\imath} - l\dot{\theta}sin\theta\vec{\jmath}$με μέτρο $v_G = l\,\dot{\theta}$

Η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι :

$$E_\kappa = \frac{1}{2}m\upsilon_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2$$

με ροπή αδράνειας $I_G = \frac{1}{12}ml^2$.

Η αρχική κινητική ενέργεια είναι μηδενική, ενώ η δυναμική ενέργεια για γωνία θ είναι $E_\Delta(\theta) = mgl\cos\theta$ και η αρχική δυναμική ενέργεια είναι $E_\Delta(0) = mgl\cos a$, όπου a η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με το οριζόντιο επίπεδο. Εφόσον, οι R,S δεν παράγουν έργο θα έχουμε ότι:

$$\frac{2}{3}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta = mgl\cos a \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}\cdot(\cos a - \cos\theta) \Rightarrow$$
$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}\sin\theta$$

(και $2\,\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l}\sin\theta \Rightarrow \ \dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}\sin\theta$).

Εργαζόμενοι στον άξονα $x'x$ έχουμε: $R = m\,\ddot{x_G} = ml\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = \frac{3}{4}mg\sin\theta\ (3\cos\theta - 2\cos a)$, οπότε για R=0, που θα έχουμε τη στιγμή που η ράβδος θα εγκαταλείψει τον τοίχο, θα ισχύει ότι:

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos a \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{OB}{AB} \Leftrightarrow OA = \frac{2}{3}OB.$$

Η διδασκαλία, συμπεράσματα και παρατηρήσεις

Ένα απλό πρόβλημα Μαθηματικών Γ΄ λυκείου, οδήγησε σε μία τάξη συζήτησης, με σημαντικές ερωτήσεις – παρατηρήσεις από τους μαθητές και αυτό ώθησε τον δάσκαλο Μαθηματικών να το διερευνήσει και, συνεργαζόμενος με τον δάσκαλο Φυσικής, να προσπαθήσουν να το εντάξουν, ακολουθώντας και τις δύο οπτικές στην τάξη. Έτσι, οργανώθηκε αυτή η συνδιδασκαλία (σε άλλο τμήμα) με ταυτόχρονη συνεργασία του Φυσικού και του Μαθηματικού στην τάξη, διαλογικές διερευνήσεις και «πάσες» μεταξύ τους και των μαθητών. Η διδασκαλία μέσω διαλόγου μεταξύ των μελών της τάξης ακολουθεί, μερικώς, την πορεία του Imre Lakatos στο [8]. Έτσι, η διαλογική διδασκαλία εντείνει το ενδιαφέρον των μαθητών και τους παρωθεί σε ενεργή συμμετοχή [9, σελ.195 κ.ε.]. Η προσθήκη πειράματος σε αυτήν τη συνδιδασκαλία και λογισμικού για την εξερεύνηση του φαινομενικά αδιανόητου σημείου έκπληξης των μαθητών, με τη δημιουργία, θεωρητικά, ενός πειράματος άπειρης ταχύτητας, οδήγησε στην έξαψη του ενδιαφέροντος των μαθητών και την ανάγκη για περαιτέρω προσεκτικότερη διερεύνηση. Οι υποψίες για το πώς δημιουργείται το πρόβλημα, θεμελιώθηκαν θεωρητικά, εφαρμόζοντας τους φυσικούς νόμους και επιλύοντας τις κατάλληλες εξισώσεις. Η «συνεχής» οπτική στη διερεύνηση του προβλήματος επιλέχθηκε να ενεργοποιηθεί μέσω ενός πειράματος. Όμως, αυτή η προσέγγιση θα μπορούσε να έχει αναπτυχθεί ευκολότερα από τους μαθητές, αν είχε αναπτυχθεί μέσω «μη στατικών» προβλημάτων (αρχικά δεδομένα – τελικά ζητούμενα) στη σχολική μαθηματική τους πορεία. Για παράδειγμα, θα μπορούσαν να διδάσκονται στη γεωμετρία των προηγουμένων τάξεων προβλήματα γεωμετρικών τόπων, με έμφαση σε προβλήματα συνεχών αλλαγών κατάστασης. Διότι για τη γεωμετρία η κίνηση αποτελεί βασική παράμετρο. Ως προς το όλο εγχείρημα αυτής της διδασκαλίας, έχουμε να επισημάνουμε την ανάγκη για πολύ καλή οργάνωση και δοκιμές διδασκαλίας με προηγούμενες συζητήσεις μεταξύ των διδασκόντων. Όμως, οι απολαβές μέσα στην τάξη, αφενός από το ενδιαφέρον που προκαλείται στους μαθητές, έστω και αρχικά με την ταυτόχρονη παρουσία των δύο καθηγητών, αλλά κυρίως με την ανάδειξη της συνεργασίας μέσα στην τάξη, ως κύριο παράδειγμα που λείπει από την Ελληνική κοινωνία γενικότερα, αφετέρου με την μαθησιακή έκπληξη που προκαλείται από το απροσδόκητο αρχικό αποτέλεσμα και τη διαδικασία διερεύνησης, την ανάπτυξη ενός πραγματικού πειράματος και την προσεκτικότερη διερεύνησή του μέσω του λογισμικού, αποτελούν εφόδια για την κατάκτηση της διαδικασίας δημιουργίας γνώσης για τους μαθητές.

Αναφορές

1. Kapranidis Stelios and Koo Reginald (2008), “Variations of the Sliding Ladder Problem”, The College Mathematics Journal, vol.35, no.5, p.374 – 379, The Mathematical Association of America.
2. Freeman, M. and Palffy-Muhoray P., (1985), “On Mathematical and Physical ladders”, American Journal of Physics, vol.53, p.276 – 277.
3. Scholten P. and Simoson A. (1996), The falling ladder paradox, The College Mathematics Journal, vol.27, p. 49 – 54.The Mathematical Association of America.
4. Ανδρεαδάκης, Σ., κ.ά. (2016), «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΕΡΟΣ Β')», σελ.127, ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

5. Friend Marilyn, Reising Monica, Cook Lynne (1993) Co-Teaching: An Overview of the Past, a Glimpse at the Present, and Considerations for the Future, Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 37:4, 6-10, DOI: 10.1080/1045988X.1993.9944611
6. Wouters, Pieter & Oostendorp, H. & Vrugte, Judith & Vandercruysse, Sylke & Jong, Ton & Elen, Jan. (2016). The effect of surprising events in a serious game on learning mathematics: The effect of surprise in game-based learning. British Journal of Educational Technology. 48. 10.1111/bjet.12458. (Τελευταία ανάκτηση 20/08/2020: https://www.researchgate.net/publication/302054637_The_effect_of_surprising_events_in_a_serious_game_on_learning_mathematics_The_effect_of_surprise_in_game-based_learning).
7. Castillo-Garsow, Carlos. (2012). Continuous quantitative reasoning. Quantitative Reasoning and Mathematical Modeling: A Driver for STEM Integrated Education and Teaching in Context. 2. 55-73. (Τελευταία ανάκτηση:https://www.researchgate.net/publication/284959678_Continuous_quantitative_reasoning).
8. Lakatos, Imre. (1996). Αποδείξεις και ανασκευές : Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης - 1η έκδ. - Αθήνα : Τροχαλία.
9. Lerman, Stephen (editor) (2020). Encyclopedia of Mathematics Education, 2nd edition, Springer.