Γιώργος Ι. Ρίζος

Στο δρόμο για τον PISA

Τα μαθηματικά στο διεθνή διαγωνισμό PISA

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΜΑΥΡΙΔΗ

Στο δρόμο για τον PISA

Τα μαθηματικά στο διεθνή διαγωνισμό PISA

Γιώργος Ι. Ρίζος

Στο δρόμο για τον PISA

Τα μαθηματικά στο διεθνή διαγωνισμό PISA

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΜΑΥΡΙΔΗ

Γιώργος Ι. Ρίζος

Στο δρόμο για τον PISA

(Τα μαθηματικά στο διεθνή διαγωνισμό PISA)

ISBN: 978 – 960 – 89901 – 5 – 9

Σπ. Νικοκάβουρα 7, Τ.Κ. 491 00,
τηλ. 2661047669, e-mail:rizosgeo@sch.gr

Ηλεκτρονική σχεδίαση-σελιδοποίηση, σχήματα:
Ρίζος Γιώργος

Γλωσσική επιμέλεια:
Χατζηγεωργίου Κατερίνα

Παραγωγή films:
Act Repro Hall, Λαγκαδά 21, Θεσσαλονίκη, 546 29
Τηλ. 2310 517457, e-mail: actrepro@otenet.gr

Εξώφυλλο:
ΠΑΠΥΡΟΣ, Αρμενοπούλου 27, Θεσσαλονίκη
Τηλ. - fax: 2310 206838 www.papyrosprint.gr

Εκτύπωση:
Τσιαρτσιάνης Αθανάσιος, Θεσσαλονίκη, Τηλ. 2310 682080

Κεντρική διάθεση:

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΜΑΥΡΙΔΗ

Τηλ. 2310 228009, Fax: 2310 287097
e-mail: glmavridis@gmail.com

Στη μνήμη

των γονιών μου *Γιάννη και Σταματέλλας Ρίζου*

και του *Δημήτρη Χατζηγεωργίου*.

Περιεχόμενα

Πρόλογος 11

Εισαγωγή 13

Η αφορμή... 13
Πώς αυτοπροσδιορίζεται ο διαγωνισμός PISA: 15
*Ο **μαθηματικός αλφαβητισμός** του PISA* 17
Δεσπόζουσες έννοιες 17
Μαθηματικοποίηση 18
Φωτισμός Πάρκου 19
Υπολογισμοί τραπεζικού λογαριασμού 21
Το μαθηματικό περιεχόμενο του PISA 22
Τι μένει «απ' έξω»; 24
Σχήματα 24
Μελετώντας το ύψος των εφήβων 27
Η μέθοδος βαθμολόγησης των θεμάτων του PISA 29
Μηλιές 29
Στο δρόμο για τον PISA 35

Αλγεβρικός Λογισμός – Συναρτήσεις 37

1. Αγώνες δρόμου 39
2. Αθήνα 2004 41
3. Σκάλα αλουμινίου 42
4. Απλή αλλά παχυντική 42
5. Καρτέλες μαθητών 42
6. Ρέστα από το περίπτερο 43
7. Shopping therapy 43
8. Γονείς μαθηματικοί 44

9. *Τουρνουά ποδοσφαίρου* ... 45
10. *Τιμοκατάλογοι τηλεφωνικών κλήσεων* ... 46
11. *Συντελεστές βαρύτητας* ... 47
12. *Μηχανήματα αυτόματης ανάληψης χρημάτων* ... 48
13. *Συνάλλαγμα* ... 48
14. *Διεθνή τηλεφωνήματα* ... 49
15. *Ο θείος Σκρουτζ* ... 50
16. *Στα καντούνια της Κέρκυρας* ... 51
17. *Cheesecake* ... 52
18. *Γλυκά μαθηματικά* ... 53
19. *Πατατάκια* ... 53
20. *Κόστος κλήσης* ... 53
21. *Το άδειο ντεπόζιτο* ... *54*
22. *Άνω – Κάτω Περιστέρι* ... 55
23. *Δοσολογία φαρμάκου* ... 56
24. *Απογραφή* ... 57
25. *Φυλάξτε τους θησαυρούς σας* ... 58
26. *Δεξαμενή πετρελαίου* ... 60
27. *Η εξέλιξη του φυτού* ... 61
28. *Cars* ... 62
29. *Καμπύλη αύξησης ύψους – βάρους* ... 63
30. *Ψηλώνοντας* ... 64
31. *Πίστα αγώνων* ... 65
32. *Δοχεία νερού* ... 66
33. *Φύσα αεράκι* ... 67
34. *Ανακαλύπτοντας τους τύπους* ... 67
35. *Μαθηματικά διαίτης* ... 68
36. *ISBN* ... 69
37. *Βηματισμός* ... 70

Γεωμετρία ... 71

38. *Πυραμίδα των Μάγιας* ... 72
39. *Πλακάκια* ... 74
40. *Ζάρια* ... 75
41. *Κύβοι* ... 76
42. *Ο μονταδόρος* ... 77
43. *Να γκρεμίσουμε τη ντουλάπα;* ... 78
44. *Κάποιος κλέβει...* ... 79
45. *Προσοχή, ο σκύλος δαγκώνει!* ... 80
46. *Απόσταση* ... 81
47. *Αποστάσεις σε κάτοψη* ... 81
48. *Ο ναυαγός* ... 82
49. *Οικογενειακή πίτσα* ... 82

50. Στροφόμετρο 83
51. Παπάκι ή scooter; 84
52. Ποδήλατο 84
53. Ξύλινα τρίγωνα 85
54. Λαχανόκηποι 85
55. Έχει κανείς ένα αλφάδι; 86
56. Χάρτης πόλης 86
57. Ανταρκτική 87
58. Ο πονηρός βενζινοπώλης 88
59. Συμμετρία 89
60. Κορνίζες 89

Στατιστική – Πιθανότητες – Συνδιαστική 91

61. Η αγωνία του Ιούνη 92
62. Ύψος μαθητών 92
63. Ενόργανη γυμναστική 93
64. Ζυγίζοντας τους μαθητές 94
65. Καμένες λάμπες 95
66. Διαγωνισμός σκοποβολής 96
67. Προεκλογική δημοσκόπηση 97
68. Μηνιαία έξοδα 97
69. Ο σταφυλοπαραγωγός 98
70. Midtown madness 99
71. Απατηλό ραβδόγραμμα 100
72. Διαβάζοντας τα διαγράμματα 101
73. Ωρολόγιο πρόγραμμα 102
74. Επαρχιακό Γυμνάσιο 103
75. Δελτίο καιρού 104
76. Ο τυχερός παίχτης 104
77. Η επιδημία 105
78. Τα νούμερα του Τζόκερ 106
79. Χίλια ευρώ 107
80. Τυπικά προσόντα 108
81. Οικογενειακό δεντρόγραμμα 108
82. Σετ ζωγραφικής 109
83. Πιτσαρία 109
84. Τιμοκατάλογος 110
85. Το πρόβλημα του μπογιατζή 110

Απαντήσεις – Προεκτάσεις 111

Βιβλιογραφία 157

Θέλω να ευχαριστήσω την **Κατερίνα Χατζηγεωργίου** για τη φιλολογική επιμέλεια των κειμένων του βιβλίου· τον **Δημήτρη Ντρίζο**, Σχολικό Σύμβουλο Μαθηματικών των ν. Τρικάλων και Καρδίτσας και τον **Μανόλη Μαραγκάκη,** καθηγητή Μαθηματικών στο ΤΕΙ Κρήτης για τις παρατηρήσεις τους· τον **Βασίλη Βισκαδουράκη**, εκδότη του περιοδικού "***το φ***", που έδωσε τ' όνομα στο βιβλίο, αυθόρμητα, με την πρώτη σκέψη.

Επίσης, ευχαριστώ θερμά τον **Μιχάλη Λάμπρου**, καθηγητή του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Κρήτης, για την προθυμία του να προλογίσει το βιβλίο.

Τέλος, ευχαριστώ τον εκδότη, συνάδελφο **Γιώργο Μαυρίδη**, ο οποίος ανέλαβε το βάρος της έκδοσης και της διακίνησης ενός βιβλίου, που δεν ακολουθεί τα στενά όρια των νόμων της αγοράς, με μόνο κίνητρο το μεράκι του για τα μαθηματικά.

Γ. Ρ.
Ιανουάριος 2009,
Κέρκυρα

Πρόλογος

Στα Σχόλιά του των περίφημων Στοιχείων του Ευκλείδη, ο Πρόκλος (410–485 μ.Χ.) γράφει μια ιστορική εισαγωγή για τις ρίζες των Μαθηματικών. Στο σημείο αυτό αναφέρει ρητά ότι η Γεωμετρία και οι άλλες επιστήμες ξεκίνησαν από τις πρακτικές ανάγκες και ότι αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό, επισημαίνοντας ότι «*καὶ θαυμαστὸν οὐδὲν ἀπὸ τῆς χρείας ἄρξασθαι τὴν εὕρεσιν ταύτης (τῆς γεωμετρίας) καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν*». Συγκεκριμένα, περιγράφει πώς ξεκίνησε η Γεωμετρία από την ανάγκη αναμετρήσεως των χωραφιών μετά την άνοδο του Νείλου, ο οποίος έσβηνε τα μεταξύ τους όρια, επαναλαμβάνοντας μια γνωστή περιγραφή από την Ιστορία του Ηροδότου. Αλλά και η Αριθμητική, επιμένει ο Πρόκλος, ξεκίνησε από τους Φοίνικες λόγω πρακτικών αναγκών και εμπορικών συναλλαγών: «*ὥσπερ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξιν διὰ τὰς ἐμπορείας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις*».

Το γεγονός ότι η γέννηση των Μαθηματικών ξεκίνησε από πρακτικές ανάγκες είχε τα τελευταία χρόνια το αντίκτυπό της στην διδασκαλία τους. Την σύγχρονη εποχή όλο και περισσότεροι εκπαιδευτικοί και ιθύνοντες στα θέματα Παιδείας υιοθετούν την άποψη ότι η σωστή διδασκαλία των Μαθηματικών γίνεται με συνεχή αναδρομή σε πρακτικές ανάγκες και προβλήματα της καθημερινότητας. Με λίγα λόγια, η θέση τους είναι ότι η κατανόηση των εννοιών είναι ευκολότερη και φυσικότερη, αν θα περάσει από την εμπειρία. Απηχούν σε αυτό το σημείο τα λόγια του Πρόκλου στα Σχόλιά του, ο οποίος γράφει «*ἀπὸ αἰσθήσεως οὖν εἰς λογισμὸν καὶ ἀπὸ τούτου ἐπὶ νοῦν ἡ μετάβασις γένοιτο ἂν εἰκότως*».

Ένας από τους πιο σημαντικούς διεθνείς φορείς οι οποίοι εφαρμόζουν την παραπάνω θέση είναι ο Οργανισμός για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη (ΟΟΣΑ) στο Πρόγραμμα για την Διεθνή Εκτίμηση Σπουδών (Programm for International Student Assessment) γνωστότερος από το ακρωνύμιό του ως PISA.

Ο PISA διεξάγει κάθε τρία χρόνια έναν διεθνή μαθηματικό διαγωνισμό για να αξιολογήσει, μεταξύ άλλων, το επίπεδο γνώσεων των μαθητών. Τα θέματα σε αυτό το διαγωνισμό, αν και απλά, είναι κάπως διαφορετικά από τα πιο θεωρητικού χαρακτήρα θέματα που συνήθως διδάσκουμε στα σχολεία της χώρας μας. Το αποτέλεσμα είναι, όπως αναμένεται, η χώρα μας να βαθμολογείται με χαμηλή επίδοση συγκριτικά με τις ξένες χώρες. Αν σε αυτό προσθέσουμε και το αρνητικό στοιχείο για τη δική μας παιδεία ότι δίνει έμφαση στην άκριτη αναπαραγωγή διδαχθείσας γνώσης, τα αποτελέσματα της αξιολόγησης του PISA είναι ανησυχητικά. Η Ελλάδα συγκαταλέγεται, στην καλύτερη περίπτωση, στο κάτω 30%, ενώ το 2000 ήρθαμε τέταρτοι από το τέλος σε σύνολο 31 χωρών!

Το ανά χείρας βιβλίο συμπληρώνει το κενό της ελληνικής βιβλιογραφίας σε μαθηματικά θέματα από την οπτική των εφαρμογών και της καθημερινότητας. Μέχρι τώρα η ελληνική βιβλιογραφία, δυστυχώς, δεν είχε ούτε ένα βιβλίο το οποίο να υιοθετούσε αυτή την υγιή πρακτική. Ευτυχώς τώρα προστίθεται ένα καλογραμμένο, χρήσιμο και διδακτικό εγχειρίδιο, το οποίο διαβάζεται ευχάριστα. Είμαι βέβαιος ότι θα αποτελέσει σταθμό για την βελτίωση της αναιμικής μαθηματικής παιδείας στη χώρα μας.

Μιχαήλ Λάμπρου

Καθηγητής

Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Κρήτης

Εισαγωγή

Η αφορμή...

Σίγουρα έχουμε όλοι δει τα σχόλια ειδικών και μη στα μέσα ενημέρωσης σχετικά με τη χαμηλή επίδοση των μαθητών μας στο διαγωνισμό PISA.

ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ 25-9-2005

Πέσαμε κάτω από τη βάση της PISA
Στη 38η θέση οι Ελληνες μαθητές ανάμεσα σε 15χρονους από 57 χώρες, στον διαγωνισμό φυσικών επιστημών

ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗ 1-12-2007

ΤΟ ΒΗΜΑ 30-11-2007
ΟΟΣΑ: Ουραγός η Ελλάδα στην κατάταξη PISA

Βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο της κατάταξης, μπροστά από την Τουρκία και το Μεξικό

ΡΕΠΟΡΤΑΖ Τ. ΑΝΑΣΤΑΣΙΑΔΗΣ

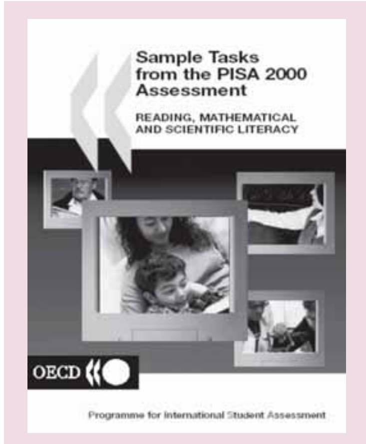
Παρόμοια σχόλια είχαν γραφτεί και μετά την ανακοίνωση των αποτελεσμάτων των προηγούμενων διαγωνισμών.

Αν κάποιος θελήσει να αναζητήσει τα θέματα ή λεπτομέρειες για το διαγωνισμό θα βρεθεί προ εκπλήξεως! Για λόγους «ασφαλείας», όπως αναφέρεται, τα θέματα του διαγωνισμού PISA δε δημοσιοποιούνται, αλλά δίνονται απλά κάποια παραδείγματα με τις αντίστοιχες οδηγίες βαθμολόγησης, καθώς και κάποια επιλεγμένα θέματα από τους προγενέστερους διαγωνισμούς και τα στατιστικά τους αποτελέσματα. Τα θέματα αυτά περιέχονται στις εκδόσεις του PISA.[1]

[1] Συνδέσεις με σελίδες που περιέχουν τέτοια θέματα και πληροφορίες υπάρχουν στη βιβλιογραφία.

Τα περισσότερα κείμενα είναι ξενόγλωσσα και οι πληροφορίες που δίνονται επιλεκτικά συγκεκριμένες. Για παράδειγμα, η αναζήτηση των ενοτήτων στις οποίες υστέρησαν οι μαθητές μας είναι μάταιη!

Θα λέγαμε, μεταφορικά, ότι απ' αυτό το διαγωνισμό αποκρύπτεται ο ήχος. Στ' αυτιά μας φτάνει μόνο η ηχώ...



Θέλοντας να συμβάλουμε στην προσπάθεια να γίνει ευρύτερα γνωστό το περιεχόμενο του διαγωνισμού, δίνουμε σ' αυτό το βιβλίο **πληροφορίες** για το διαγωνισμό, παραδείγματα της **μεθόδου βαθμολόγηση**ς των θεμάτων του, μια συλλογή **πρωτότυπων** θεμάτων, καθώς και λίγες παραλλαγές γνωστών προβλημάτων, στο **ύφος** των προβλημάτων του διαγωνισμού.

Δεν σχολιάζουμε εδώ, την ουσία, τους σκοπούς και την επίδραση του διαγωνισμού στη διαμόρφωση του εκπαιδευτικού μας συστήματος. Στη βιβλιογραφία, άλλωστε, αναφέρονται σύνδεσμοι που οδηγούν σε σχετικά κείμενα και βιβλία.

Μένουμε απλά στο **μαθηματικό περιεχόμενο** του διαγωνισμού, δηλαδή στην έννοια του ***μαθηματικού αλφαβητισμού***, όπως τον εννοούν οι διαμορφωτές του. Αποφεύγουμε κρίσεις για το αν επιβάλλεται να προσαρμόσουμε τα προγράμματά μας στο πρότυπο αυτό ή αντιθέτως να αποσυρθούμε από το διαγωνισμό. Περιγράφοντας τους «κανόνες του παιχνιδιού», πετάμε το «μπαλάκι» και περιμένουμε...

Πώς αυτοπροσδιορίζεται ο διαγωνισμός PISA:

Από το 2000 άρχισε να εφαρμόζεται σε διεθνές επίπεδο το πρόγραμμα **PISA** (**Programm for International Student Assessment**: Πρόγραμμα για τη Διεθνή Εκτίμηση Σπουδών) του Οργανισμού για την Οικονομική Συνεργασία και Ανάπτυξη (ΟΟΣΑ).

Το πρόγραμμα περιλαμβάνει τη διεξαγωγή ανά τρία χρόνια (2000, 2003, 2006, 2009 κ.ο.κ.) διεθνούς μαθητικού διαγωνισμού, στον οποίο συμμετέχουν 15ετείς μαθητές. Στην Ελλάδα ως φορέας υλοποίησης του PISA ορίστηκε το ΚΕΕ (Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας).

Σύμφωνα με τα επίσημα κείμενα του PISA:

Στόχος του PISA είναι **να αξιολογήσει** εκείνες τις **δεξιότητες** των δεκαπεντάχρονων μαθητών, οι οποίες κατά την κοινή αντίληψη είναι σημαντικές για την επιτυχία των **ατόμων** και των **κοινωνιών** στο σύγχρονο κόσμο.

Η αξιολόγηση επικεντρώνεται στην ανάδειξη της πνευματικής ικανότητας των μαθητών να προσεγγίσουν, διαχειριστούν, ολοκληρώσουν και εκτιμήσουν τις πληροφορίες για ένα γνωστικό αντικείμενο στα παρακάτω τρία πεδία μάθησης, με ιδιαίτερη έμφαση κάθε φορά σε ένα από αυτά:

1. Την **Επεξεργασία Κειμένου**: μέσω αυτής αναδεικνύεται η πνευματική ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιήσουν γραπτό υλικό, να το ερμηνεύσουν, να σκεφθούν πάνω σε αυτό και να καταλήξουν σε συμπεράσματα.
2. Τις **Φυσικές Επιστήμες**: όπου αναδεικνύεται η πνευματική ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίσουν επιστημονικές ερωτήσεις και να διατυπώσουν συμπεράσματα, τα οποία βασίζονται σε ολοκληρωμένες αποδείξεις.
3. Τα **Μαθηματικά**: όπου αξιολογείται κυρίως όχι η ικανότητα αναπαραγωγής της διδαχθείσας μαθηματικής γνώσης, αλλά δίνεται έμφαση στην ικανότητα της εφαρμογής της σε προβλήματα της καθημερινής ζωής, τα οποία διατυπώνονται με πολλαπλές διαφορετικές εκφράσεις και η επίλυσή τους ποικίλει και εξαρτάται από τον τρόπο σκέψης και την οξυδέρκεια των μαθητών.

Η πρώτη εφαρμογή του PISA έγινε το 2000 με θέματα που αφορούσαν και στα τρία πεδία μάθησης, αλλά η ιδιαίτερη έμφαση είχε δοθεί στην κατανόηση και επεξεργασία κειμένου. Η δεύτερη εφαρμογή του PISA έγινε το 2003. Σε αυτή την αξιολόγηση, η ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στα μαθηματικά. Η τρίτη εφαρμογή του PISA έγινε το 2006, με έμφαση στις φυσικές επιστήμες.

Τα αποτελέσματα αξιολογούνται, επεξεργάζονται στατιστικά και οι χώρες κατατάσσονται σε μία σειρά, σε σχέση με την επίδοση των μαθητών τους.

Κατάταξη της Ελλάδας στους διαγωνισμούς του PISA

Έτος	Κατανόηση Κειμένου	Φυσικές Επιστήμες	Μαθηματικά
2000: 31 χώρες	**25η**	**25η**	**28η**
2003: 40 χώρες	**30η**	**30η**	**32η**
2006: 57 χώρες	**36η**	**38η**	**39η**

Η επίσημη ερμηνεία των αποτελεσμάτων του PISA σε γενικές γραμμές συνοψίζεται στο παρακάτω:

> (...) Σύμφωνα με τις Επιστημονικές Ενώσεις, τα συγκεκριμένα αποτελέσματα μπορούν να αποδοθούν στο γεγονός ότι οι σχετικές ερωτήσεις ήταν προσαρμοσμένες στα Αναλυτικά Προγράμματα των Αγγλοσαξονικών κυρίως χωρών· και για το λόγο αυτό χώρες με διαφορετική παράδοση εμφανίζονται με μικρότερη επίδοση. Η διαφορετική παράδοση αφορά στην προτίμηση της διδασκαλίας των Φυσικών Επιστημών στη βάση μαθηματικής μοντελοποίησης.

Ανακοίνωση του ΥΠΕΠΘ, για το διαγωνισμό PISA, Δεκ. 2004

Για να συμφωνήσουμε με την παραπάνω διαπίστωση, πρέπει να γνωρίζουμε το περιεχόμενο του διαγωνισμού.

Παρουσιάζουμε παρακάτω με μερικά παραδείγματα, το **μαθηματικό περιεχόμενο** του PISA.

Ο μαθηματικός αλφαβητισμός του PISA

Ο μαθηματικός αλφαβητισμός για το πρόγραμμα PISA είναι η **ικανότητα** του ατόμου να προσδιορίζει και να κατανοεί πλήρως το ρόλο των μαθηματικών στον κόσμο, να διατυπώνει τεκμηριωμένες κρίσεις, να χρησιμοποιεί και να ενασχολείται με τα μαθηματικά με τρόπο τέτοιο, ώστε να αντιμετωπίζει τις ανάγκες της ζωής του ως σκεπτόμενος, δημιουργικός, και ενεργός πολίτης.

«The PISA 2003, Assessment Framework», σελ. 24

Ο όρος **«αλφαβητισμός»** επιλέχθηκε, για να δοθεί έμφαση στη **μαθηματική γνώση**, όταν αυτή τίθεται σε πρακτική εφαρμογή για την επίλυση πληθώρας προβλημάτων της καθημερινής ζωής, τα οποία εκφράζονται με ποικίλους τρόπους και η επίλυσή τους απαιτεί σκέψη και βαθιά γνώση. Φυσικά, για να είναι εφικτή η πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών, προϋποτίθεται ότι υπάρχουν θεμελιώδεις γνώσεις και δεξιότητες οι οποίες προσδιορίζουν μέρος του όρου «αλφαβητισμός».

Ο μαθηματικός αλφαβητισμός επίσης, προϋποθέτει εκ μέρους του ατόμου γνώση των μαθηματικών όρων και των διαδικασιών, όπως επίσης και την ικανότητα εκτέλεσης πράξεων και εφαρμογής συγκεκριμένων μεθόδων.

Ο μαθηματικός αλφαβητισμός απαιτεί το δημιουργικό συνδυασμό όλων αυτών των στοιχείων, για να επιλυθούν προβλήματα της σύγχρονης πραγματικότητας.

Έκδοση Κ.Ε.Ε. για το διαγωνισμό PISA

Δεσπόζουσες έννοιες

...Το πρόγραμμα PISA, λαμβάνοντας υπόψη του την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών, τις ουσιώδεις μαθηματικές έννοιες και τα συνηθισμένα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών χρησιμοποιεί τέσσερις δεσπόζουσες έννοιες (overarching ideas): **Ποσότητα**, **Χώρος και Σχήμα**, **Μεταβολή και Σχέσεις** και **Αρχή της Αβεβαιότητας**...

Ενδιαφέρον για την έρευνα PISA παρουσιάζει το εάν οι 15χρονοι (είναι η ηλικία που οι περισσότεροι μαθητές έχουν ολοκληρώσει την υποχρεωτική εκπαίδευση στα μαθηματικά) μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά, που έχουν διδαχθεί, για να βοηθηθούν να κατανοήσουν καταστάσεις, που καλούνται να αντιμετωπίσουν στην καθημερινή ζωή.

Στόχος των τεστ του PISA είναι η ανάδειξη δεικτών για το μέχρι ποιο σημείο τα εκπαιδευτικά συστήματα των συμμετεχόντων στο πρόγραμμα χωρών, έχουν προετοιμάσει τους 15χρονους να παίξουν δημιουργικό ρόλο ως πολίτες στην κοινωνία. Τα τεστ δεν περιορίζονται στο τι έχουν μάθει οι μαθητές, αλλά στοχεύουν στη διαπίστωση, εάν οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτά που έχουν μάθει.

Το περιεχόμενο των θεμάτων των μαθηματικών του τεστ είναι ευρύτερο των εφαρμογών των μαθηματικών που έχουν διδαχθεί οι 15χρονοι και επικεντρώνεται σε προβλήματα που είναι «αυθεντικά», με την έννοια ότι συναντώνται στην καθημερινή ζωή.

Στον τομέα των μαθηματικών το πρόγραμμα PISA δίνει έμφαση στα εξής:

♦ στη **μαθηματικοποίηση** πραγματικών καθημερινών προβλημάτων,

♦ στις **συνθήκες** που αναδεικνύουν τα προβλήματα αυτά και που σχετίζονται με το περιβάλλον του μαθητή,

♦ στη **μαθηματική έννοια** που δεσπόζει στο μαθηματικό περιεχόμενο των προβλημάτων και στις αντικειμενικές συνθήκες από τις οποίες προκύπτουν τα προβλήματα,

♦ στις **μαθηματικές διεργασίες** για την επίλυση των προβλημάτων τα οποία θα αντιμετωπίσει ο μαθητής ως πολίτης,

♦ στις **ικανότητες του μαθητή** για την αντιμετώπιση των προβλημάτων.

Μαθηματικοποίηση

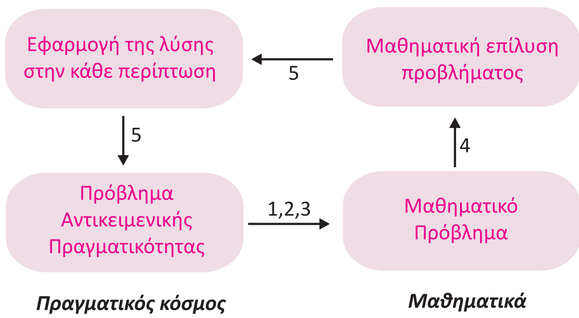
Αν θεωρήσουμε ότι τα μαθηματικά είναι ένας κώδικας, όπως ακριβώς και η γλώσσα, τότε είναι απαραίτητο οι μαθητές να μάθουν τα βασικά συστατικά της γλώσσας των μαθηματικών. Αυτά τα συστατικά συμπεριλαμβάνουν τις **έννοιες** και τα **σύμβολα** των μαθηματικών, τους **αλγόριθμους** και τις **αποδεικτικές διαδικασίες** που συνήθως διδάσκονται στα σχολεία.

Ενδέχεται κανείς να γνωρίζει αρκετά για τα συστατικά των μαθηματικών, αλλά να αγνοεί τον τρόπο χρησιμοποίησής τους για τη λύση προβλημάτων.

Για το λόγο αυτό το πρόγραμμα PISA εξετάζει την ικανότητα των μαθητών να αναλύουν, να αιτιολογούν και να εκφράζουν τις μαθηματικές τους σκέψεις με αποτελεσματικό τρόπο, για να μορφοποιούν, να επιλύουν και να ερμηνεύουν μαθηματικά προβλήματα σε θέματα της καθημερινής ζωής.

Τέτοιου είδους προβλήματα απαιτούν από το μαθητή να επιστρατεύσει τις εμπειρίες του καθώς και τις ικανότητες και δεξιότητες που απέκτησε στο σχολείο. Η θεμελιώδης διαδικασία της επίλυσης τέτοιων προβλημάτων αναφέρεται ως **«μαθηματικοποίηση»**.

Σύμφωνα με το θεωρητικό πλαίσιο του PISA, η διαδικασία της «μαθηματικοποίησης» ακολουθεί πέντε στάδια:[2]



1. Εκκίνηση από ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζει κανείς σε πραγματικές καθημερινές συνθήκες.

2. Οργάνωση του προβλήματος με βάση μαθηματικές έννοιες και προσδιορισμός της περιοχής των μαθηματικών που σχετίζεται με το πρόβλημα.

3. Σταδιακή απομάκρυνση από την πραγματική κατάσταση με διεργασίες, όπως υποθέσεις, γενικεύσεις, μορφοποιήσεις, οι οποίες προάγουν τα μαθηματικά στοιχεία και μεταμορφώνουν το αντικειμενικό πρόβλημα σε μαθηματικό πρόβλημα, που όμως αναπαριστά πιστά την πραγματικότητα.

4. Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος.

5. Διερεύνηση της λύσης του μαθηματικού προβλήματος σε πραγματικές συνθήκες.

[2] OECD,(2004), "*The Pisa 2003 Assessment Framework*", σελ. 38.

Δίνουμε παρακάτω δύο χαρακτηριστικά θέματα του PISA, σχολιάζοντας τους κυριάρχους όρους «**μαθηματικοποίηση**» και «**αυθεντικό πρόβλημα**»:

Φωτισμός Πάρκου

Το Δημοτικό Συμβούλιο αποφάσισε να εγκαταστήσει στήλο φωτισμού σε ένα μικρό τριγωνικό πάρκο, έτσι ώστε να φωτίζει όλο το πάρκο. Πού πρέπει να τοποθετηθεί;

***The PISA 2003, Assessment Framework*, εκδ. ΟΟΣΑ, 2004**

ΣΧΟΛΙΑ έκδοσης Κ.Ε.Ε. για τον PISA:

Το πρόβλημα που αναφέρεται πιο πάνω, αν και «κοινωνικό» λύνεται μόνο, αν ακολουθήσουμε την τακτική της **«μαθηματικοποίησης»**.

1) Εκκίνηση από πρόβλημα της πραγματικότητας.

Οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν το σημείο, όπου θα τοποθετηθεί το φως.

2) Οργάνωση και διάταξη του προβλήματος σύμφωνα με μαθηματικές έννοιες.

Το πάρκο μπορεί να παρασταθεί σαν τρίγωνο και ο φωτισμός που προέρχεται από το φως, μπορεί να παρασταθεί σαν ένας κύκλος που έχει ως κέντρο του το φως.

3) Σταδιακή αποσύνδεση των στοιχείων της πραγματικότητας με εικασίες, γενικεύσεις, τυποποιήσεις και διεργασίες, οι οποίες προάγουν τα χαρακτηριστικά των μαθηματικών και μεταμορφώνουν το πρόβλημα σε μαθηματικό, το οποίο όμως απεικονίζει την πραγματικότητα με ακρίβεια.

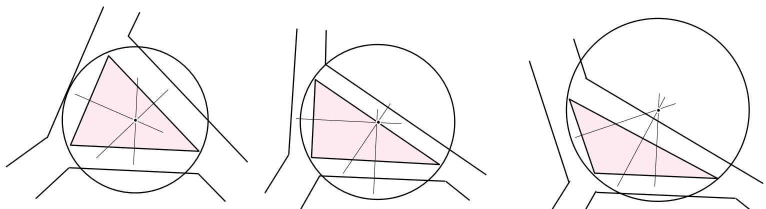
Στην περίπτωση του προβλήματος του φωτισμού του πάρκου, το πρόβλημα μετατίθεται από τον εντοπισμό του κατάλληλου σημείου όπου θα τοποθετηθεί το φως, στον εντοπισμό του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου.

4) Επίλυση του μαθηματικού προβλήματος.

Χρησιμοποιώντας το γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ότι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου βρίσκεται στο σημείο που τέμνονται οι μεσοκάθετες των πλευρών του, τις κατασκευάζουμε και έτσι ορίζουμε το ζητούμενο σημείο.

5) Εφαρμογή της μαθηματικής λύσης στα πλαίσια του προβλήματος.

Η διερεύνηση της λύσης θα οδηγήσει το μαθητή στην απόρριψη της περίπτωσης του αμβλυγωνίου τριγώνου, αφού στην περίπτωση αυτή το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου θα βρίσκεται έξω από το τρίγωνο, οπότε και το φως, αντίστοιχα, τοποθετείται έξω από το πάρκο.



τρίγωνο οξυγώνιο — τρίγωνο ορθογώνιο — τρίγωνο αμβλυγώνιο

Σημαντική παράμετρο, επίσης, αποτελεί η κατανόηση ότι η θέση και το ύψος των δέντρων στο πάρκο αποτελούν παράγοντες που θα μπορούσαν να επηρεάσουν τη λειτουργικότητα της μαθηματικής λύσης.

Σε όλες τις πιο πάνω διεργασίες βλέπουμε με ποιο τρόπο, με την ευρεία έννοια, μπορούν οι άνθρωποι να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά σε πληθώρα ασχολιών τους. Στην πραγματικότητα, η τέχνη της «μαθηματικοποίησης» πρέπει να είναι ένας από τους βασικούς εκπαιδευτικούς στόχους.

Υπολογισμοί τραπεζικού λογαριασμού

1000 zed τοποθετούνται σε τραπεζικό λογαριασμό. Έχουμε δύο επιλογές: να παίρνουμε 4% τόκο ή να πάρουμε αμέσως 10 zed δώρο από την τράπεζα και 3% ετήσιο τόκο. Ποια επιλογή είναι καλύτερη μετά από ένα χρόνο; Μετά από δύο χρόνια;

Φυλλάδιο Αξιολόγησης PISA 2003

ΣΧΟΛΙΟ:

Δεν διευκρινίζεται αν τα 10 zed τα αποσύρουμε αμέσως ή παραμένουν στο λογαριασμό και τοκίζονται κι αυτά.

Έστω ότι παραμένουν στο λογαριασμό.

Με 4% παίρνουμε: 40 zed και στο 2ο χρόνο (σύνολο): 81,6 zed

Με 3% παίρνουμε: 30,3 + 10 = 40,3 zed και στο 2ο χρόνο 71,5 zed.

ΣΧΟΛΙΟ PISA:

Προβλήματα όπως το παραπάνω είναι μέρος καθημερινής δραστηριότητας του «πραγματικού κόσμου». Δίνει ένα αυθεντικό περιεχόμενο στη χρήση των μαθηματικών, από τη στιγμή που η εφαρμογή των μαθηματικών είναι το κύριο εργαλείο για τη λύση του προβλήματος. Η **αυθεντικότητα** του προβλήματος έρχεται συχνά σε αντίθεση με τα συνήθη προβλήματα των σχολικών διαγωνισμάτων, όπου προτεραιότητά τους είναι η εξάσκηση με τα μαθηματικά, αντί της χρήσης των μαθηματικών για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Η αυθεντικότητα στη χρήση των μαθηματικών είναι ένας σημαντικός παράγοντας στο σχεδιασμό και την ανάλυση των περιεχομένων των διαγωνισμών PISA, στενά συνδεδεμένων με τον ορισμό της μαθηματικής γνώσης (επάρκειας).

Σημειώστε ότι ο όρος **«αυθεντικό»** δεν χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι τα περιεχόμενα είναι με μια έννοια γνήσια και πραγματικά. Ο **PISA** χρησιμοποιεί τον όρο **«αυθεντικό»** για να δηλώσει ότι η χρήση των μαθηματικών χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων, σε αντίθεση με την κατασκευή «προβλημάτων» ως όχημα για την εξάσκηση στα μαθηματικά.

ΣΧΟΛΙΟ:

Αυτή είναι η άποψη των υπευθύνων του PISA. Σε αντίθεση, στο «***Principles and Standards***» της NCTM, 2000, (Πρόγραμμα Σπουδών μαθηματικών της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρείας, αναφέρεται στη σελ. 255: «*Μέσω της επίλυσης προβλημάτων οι μαθητές **εξερευνούν** τη δύναμη και τη χρησιμότητα των μαθηματικών*». Τα προβλήματα, δηλαδή, χρησιμοποιούνται ως όχημα για την εξάσκηση στα μαθηματικά.

Το μαθηματικό περιεχόμενο του PISA

Κυρίαρχο ρόλο στη διαμόρφωση του μαθηματικού περιεχόμενου του διαγωνισμού PISA παίζει το Ινστιτούτο Freudenthal της Ολλανδίας. Πολλά θέματα του διαγωνισμού περιέχονται σχεδόν αυτούσια στα υλικά του Ινστ. Freudenthal. Ο διαγωνισμός έχει επηρεαστεί από τη φιλοσοφία της «αυθεντικής εκτίμησης» και της «Ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης» (R.M.E.). Επίσης στελέχη του Ινστιτούτου, με προεξέχοντα τον πρόεδρό του, Jan de Lange, συμμετείχαν στο σχεδιασμό του PISA.

Γι' αυτό, αρκετά από τα θέματα που προτείνονται παρακάτω έχουν ως πηγή τις εκδόσεις του Ινστ. Freudenthal είτε αυθεντικά (με την καταγραφή της πηγής), είτε διασκευασμένα και προσαρμοσμένα στα ελληνικά δεδομένα.

Αντιστοιχίζοντας τα θέματα σε ενότητες,[3] με βάση το διαχωρισμό της ύλης που ισχύει στο δικό μας αναλυτικό πρόγραμμα, παρατηρούμε το εξής:

- Το 31% των θεμάτων αφορά θέματα Στατιστικής και Πιθανοτήτων, όπου ζητείται κυρίως ανάγνωση πινάκων, διαγραμμάτων, αλλά περιέχονται και προχωρημένες ερωτήσεις κατανόησης.
- Το 22% αφορά θέματα Γεωμετρίας. Μη φανταστείτε ασκήσεις που σχετίζονται με τη δική μας Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η συντριπτική τους πλειοψηφία μοιάζει με ερωτήσεις χωροαντιληπτικής ικανότητας.
- Το 25% αφορά προβλήματα που αφορούν μετρήσεις, πράξεις αριθμητικής και ανάγνωσης πινάκων.
- Το 8% αφορά θέματα συναρτήσεων. Κυρίως ασχολούνται με την κατανόηση γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.
- Το 6% αφορά προβλήματα με μονάδες χρόνου, νομισματικές μονάδες. Υπάρχουν ακόμα ελάχιστα προβλήματα αναλογιών, κλιμάκων κ.λπ. Κάποια περιέχουν έννοιες από διαφορετικές ενότητες.

Όλα (σχεδόν) τα θέματα του PISA αφορούν «πραγματικές καταστάσεις» ή έστω περιέχουν σενάρια στις εκφωνήσεις τους.

Percentage of items that address the NAEP mathematics Content Strands

	NAEP	TIMSS-R	PISA
Number sense, properties, and operations	32	46	9
Measurement	15	15	25
Geometry and spatial sense	20	12	22
Data analysis, statistics, and probability	14	11	31
Algebra and functions	20	19	19

Note: Percentages for TIMSS-R and PISA do not add to 100 since some items were given more than one category designation.

National Center for Education Statistics,
A comparition of the NAEP, TIMMS-R and PISA,
working paper No. 2001-07, U.S. Department Education, June 2001.

[3] Με βάση πληροφορίες που έχουμε συγκεντρώσει και μεταφέρονται με κάθε επιφύλαξη, αλλά και με βάση στατιστικές μελέτες διεθνών ερευνητικών κέντρων.

Τι μένει «απ' έξω»;

Δεν βρήκαμε θέματα (ή βρήκαμε ελάχιστα ίχνη...) που να αφορούν:

- Πράξεις μεταξύ ακεραίων, δεκαδικών, κλασμάτων (*οι ελάχιστες εξαιρέσεις περιέχουν πράξεις επιπέδου Δ΄ Δημοτικού*).
- Δυνάμεις, ιδιότητες δυνάμεων, ταυτότητες, παραγοντοποιήσεις.
- Επίλυση εξισώσεων 1ου, 2ου βαθμού, κλασματικών, επίλυση συστημάτων.
- Υπολογισμό εμβαδών ορθογωνίων ή τριγώνων ή κυκλικών δίσκων, όγκων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων,
- Είδη, σύγκριση γωνιών, άθροισμα γωνιών τριγώνου κ.α.
- Ισότητα, ομοιότητα τριγώνων.
- Πυθαγόρειο Θεώρημα, Θεώρημα Θαλή.
- Ούτε ίχνος τριγωνομετρίας κ.α.

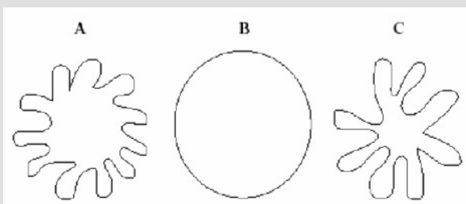
Το **σύνολο**, σχεδόν, των **διδασκομένων μαθηματικών** στο Γυμνάσιό μας δεν αποτελεί αντικείμενο ελέγχου μέσω του PISA. Π.χ. τα θέματα Στατιστικής και Πιθανοτήτων του PISA απαιτούν κριτική ικανότητα και κατανόηση εννοιών που δεν περιέχονται στα Αναλυτικά Προγράμματα του Γυμνασίου, αν παραβλέψουμε το γεγονός ότι συνήθως δεν διδάσκονται τα κεφάλαια αυτά, λόγω έλλειψης χρόνου.

Κάποια θέματα φτωχά σε μαθηματικό περιεχόμενο, με βάση το αναλυτικό μας πρόγραμμα, μπορεί δυσκολέψουν τους καλούς μαθητές που έχουν συνηθίσει να αποδεικνύουν και να τεκμηριώνουν τις απαντήσεις τους. Π.χ. δίνουμε παρακάτω ένα χαρακτηριστικό θέμα του PISA, που θυμίζει περισσότερο άσκηση λογικής και χωροαντιληπτικής ικανότητας παρά Γεωμετρίας, όπως εμείς τη διδάσκουμε στο σχολείο.

Σχήματα

Ερώτηση 1η

Ποια από τις φιγούρες έχει τη μεγαλύτερη επιφάνεια; Εξηγήστε την απάντησή σας.



Φυλλάδιο Αξιολόγησης PISA 2000

Οι παρακάτω οδηγίες βαθμολογίας δίνονται από τον PISA

(1 βαθμός)

Απαντήσεις που επιλέγουν το σχήμα Β, συνοδευόμενες από εύλογη δικαιολόγηση, όπως π.χ.

- Β. Δεν έχει δαντελωτό σχήμα το οποίο να του αφαιρεί επιφάνεια. Τα Α, Γ έχουν ανοίγματα.
- Β, γιατί είναι πλήρης κύκλος, ενώ τα άλλα μοιάζουν με κύκλους, που τους λείπουν κομματάκια.

(0 βαθμοί)

Απαντήσεις που επιλέγουν το σχήμα Β, δίχως εύλογη απόδειξη.

ΣΧΟΛΙΟ:

Εδώ, η απάντηση είναι προφανής. Το δύσκολο είναι να **εξηγήσεις** την απάντησή σου! Οι παραπάνω απαντήσεις έχουν φτωχό **μαθηματικό περιεχόμενο**. Σε μία μαθηματική απάντηση οφείλουμε να αποδεικνύουμε αυτό που ισχυριζόμαστε, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία της υπόθεσης. Εδώ όμως δεν δίνονται στοιχεία (π.χ. μεγέθη σχημάτων) στην εκφώνηση, άρα δεν έχει **μαθηματικό περιεχόμενο** η εκφώνηση.

Ας αντιμετωπίσουμε το ίδιο θέμα από τη σκοπιά της **Συλλογιστικής**, που διδάσκεται στην Έκφραση-Έκθεση του Λυκείου.[4]

---

[4] Από το βιβλίο "*Έκφραση-Έκθεση Γ΄ Λυκείου*", ΟΕΔΒ, 2001:

Εγκυρότητα, αλήθεια, ορθότητα ενός επιχειρήματος

Ένα επιχείρημα θεωρείται **έγκυρο**, όταν οι προκείμενες οδηγούν με λογική αναγκαιότητα σε ένα βέβαιο συμπέρασμα. Η **εγκυρότητα** δηλαδή του επιχειρήματος **εξαρτάται από τη λογική μορφή του** και συγκεκριμένα αφορά τη σχέση σύμφωνα με καθορισμένους κανόνες, μεταξύ των προκειμένων και του συμπεράσματος.

Αντίθετα, η **αλήθεια** του επιχειρήματος **εξαρτάται από το περιεχόμενό του**, και συγκεκριμένα αφορά τη (νοηματική) σχέση προκειμένων και συμπεράσματος με την πράγματικότητα. Αν οι προκείμενες και το συμπέρασμα ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, τότε τις θεωρούμε αληθείς κρίσεις - προτάσεις. Επομένως εγκυρότητα και αλήθεια σε ένα επιχείρημα είναι δύο έννοιες διαφορετικές, που δεν πρέπει συγχέονται.

Πάντως, για να θεωρηθεί ένα επιχείρημα (ή ένας συλλογισμός) **λογικώς ορθό(ς)** πρέπει να είναι συγχρόνως έγκυρο(ς) και οι προκείμενες του αληθείς. Στην τυπική λογική μας ενδιαφέρει κυρίως η εγκυρότητα, ενώ στις εφαρμογές της λογικής αποκλειστικά η ορθότητα. Ο συλλογισμός που δίνει ορθό συμπέρασμα λέγεται (και) **απόδειξη**.

Οι συλλογισμοί των προτεινόμενων απαντήσεων, μπορεί να είναι **έγκυροι**, όμως στερούνται **αλήθειας** (ως υποκειμενικές κρίσεις), άρα δεν μπορούμε να πούμε ότι είναι **ορθοί**. Επομένως δεν έχουμε **απόδειξη**, παρά μόνον εκτίμηση.

Ερώτηση 2η

Περιγράψτε μια μέθοδο για να προσεγγίσετε το εμβαδόν του σχήματος Γ.

(1 βαθμός)

Απαντήσεις που θα δίνουν οποιαδήποτε λογική μέθοδο, όπως π.χ.

- Χωρίστε σε τετράγωνα το σχήμα και μετρήστε τα τετράγωνα που καλύπτονται περισσότερο από το μισό από την επιφάνεια του σχήματος.
- Αφαιρέστε τις προεξοχές από το σχήμα και συναρμολογήστε το ξανά, ώστε σχηματίζει τετράγωνο και υπολογίστε την πλευρά του τετραγώνου.
- Κατασκευάστε ένα τρισδιάστατο μοντέλο με βάση το σχήμα. Γεμίστε το νερό, μετρήστε τον όγκο του νερού, το ύψος του στερεού και διαιρέστε τον όγκο με το ύψος.

ΣΧΟΛΙΟ:

Η τρίτη μέθοδος σίγουρα ξενίζει τους Έλληνες μαθητές, επειδή είναι πολύ **ασαφής** ως διαδικασία. Στις εξετάσεις τους αντιμετωπίζουν σαφείς ερωτήσεις, που δέχονται, συνήθως, μοναδικές και προβλέψιμες απαντήσεις. Έχουν συνηθίσει να απαντούν με βάση τα δεδομένα της ερώτησης και όχι να δημιουργούν υποθετικά σενάρια.

Είναι τόσο «ανοιχτή» η ερώτηση, ώστε τα όρια αποδεκτών ή μη απαντήσεων είναι συγκεχυμένα.

Ερώτηση 3η

Περιγράψτε μια μέθοδο για να προσεγγίσετε την περίμετρο του σχήματος Γ.

(1 βαθμός)

Απαντήσεις που θα δίνουν οποιαδήποτε λογική μέθοδο, όπως π.χ.

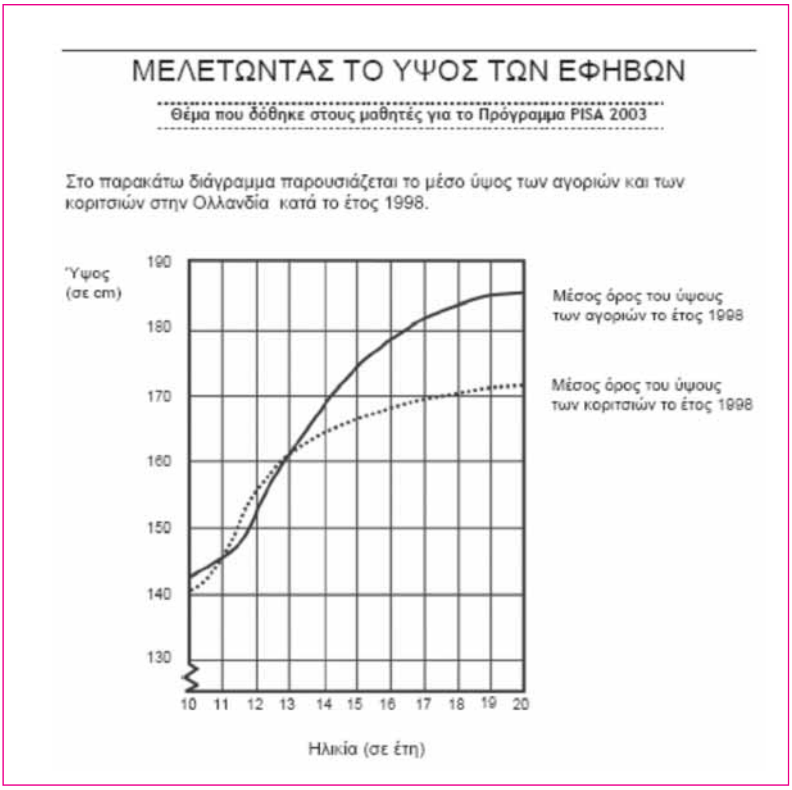
- Τοποθετούμε ένα κομμάτι σπάγκο στην περίμετρο του σχήματος και στη συνέχεια μετράμε το μήκος του.
- Κόβουμε το σχήμα σε μικρά σχεδόν ευθύγραμμα τμήματα, τα ενώνουμε σε ευθεία και μετράμε το μήκος της.

- Μετράμε το μήκος από κάποια προεξοχή, και πολλαπλασιάζουμε επί 8 (αριθμός προεξοχών).

ΣΧΟΛΙΟ:

Οι ερωτήσεις είναι ξεκάθαρες: «**give explanations**» (δώστε εξήγηση)˙ δεν λένε «**prove**» (αποδείξτε). Λένε: «**method for estimating**» (προσέγγιση), δεν λένε «**calculate**» (υπολογίστε). Βαθμολογούνται απαντήσεις που θα δίνουν οποιαδήποτε **λογική** μέθοδο προσέγγισης κι όχι **μαθηματική** μέθοδο. Τα **μαθηματικά** που χρησιμοποιούνται στην άσκηση είναι **φτωχά**. Η άσκηση αφορά περισσότερο έλεγχο στοιχειώδους λογικής και έλεγχο πρακτικής αντίληψης και τεχνικών ικανοτήτων.

Πολλές ερωτήσεις του PISA απαιτούν κατανόηση εννοιών και κριτική ικανότητα εκ μέρους των μαθητών, που θα ξένιζε και τον πιο καλόπιστο αναγνώστη. Π.χ.



Ερώτηση 1: ΜΕΛΕΤΩΝΤΑΣ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΩΝ ΕΦΗΒΩΝ

Μετά το έτος 1980, το μέσο ύψος των εικοσάχρονων κοριτσιών αυξήθηκε κατά 2,3 cm φτάνοντας στα 170,6 cm. Να γράψεις παρακάτω ποιο ήταν το μέσο ύψος ενός εικοσάχρονου κοριτσιού το έτος 1980.

Απάντηση: .... cm

Ερώτηση 2: ΜΕΛΕΤΩΝΤΑΣ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΩΝ ΕΦΗΒΩΝ

Να εξηγήσεις πώς αυτό το διάγραμμα δείχνει ότι κατά μέσον όρο, ο ρυθμός ανάπτυξης των κοριτσιών μειώνεται από τα 12 χρόνια τους και μετά.

....

....

....

Ερώτηση 3: ΜΕΛΕΤΩΝΤΑΣ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΩΝ ΕΦΗΒΩΝ

Σύμφωνα με αυτό το διάγραμμα, σε ποια χρονική περίοδο της ζωής τους τα κορίτσια είναι, κατά μέσον όρο, ψηλότερα από τα συνομήλικά τους αγόρια;

....

....

Δείτε την αναμενόμενη απάντηση στα φυλλάδια του PISA:

Κωδικός 12: Αναφέρεται στην κλίση της καμπύλης γραμμής που μειώνεται από τα 12 χρόνια και μετά, χρησιμοποιώντας μαθηματική γλώσσα.
- Μπορείτε να δείτε ότι η κλίση είναι μικρότερη.
- Ο ρυθμός μεταβολής της γραφικής παράστασης μειώνεται από τα 12 και πάνω.
- [Το παιδί υπολόγισε τις γωνίες της καμπύλης σε σχέση με τον άξονα των Χ πριν και μετά τα 12 χρόνια.]

Γενικά, όταν χρησιμοποιούνται λέξεις όπως «κλίση», «ρυθμός», ή «ρυθμός μεταβολής» τότε θεωρούμε ότι χρησιμοποιεί μαθηματική γλώσσα.

Μία εξαιρετική ιδέα για την κατανόηση γραφημάτων. Πώς να σχολιάσουμε, όμως, τη 2η ερώτηση;

Είναι θέμα στοχοθέτησης και προτεραιοτήτων των Προγραμμάτων Σπουδών. Τι είναι προτιμότερο; Να προσανατολίσουμε τα Πρ. Σπουδών μας, ώστε να δίνουμε σε μαθητές Γυμνασίου τη γεωμετρική ερμηνεία της συμπεριφοράς των παραγώγων; (δίχως, βέβαια, να τους το λέμε) ή θα χτίσουμε τα θεμέλια της άλγεβρας και της γεωμετρίας, που πάνω τους θα πατήσει ο διαφορικός λογισμός στο Λύκειο; Και τα δύο μαζί δε γίνεται!

Η μέθοδος βαθμολόγησης των θεμάτων του PISA

Τα θέματα του PISA δεν βαθμολογούνται ισοδύναμα. Δηλαδή, αν ένας μαθητής απαντήσει π.χ. στις μισές ερωτήσεις δεν είναι δεδομένο ότι θα πάρει τη βάση. Υπάρχουν συντελεστές δυσκολίας για κάθε ερώτηση, σε σχέση με τους οποίους υπολογίζεται η συνολική βαθμολογία.

Επίσης, οι ελλιπείς ή λάθος απαντήσεις χαρακτηρίζονται με έναν κωδικό ανάλογα με το σφάλμα της απάντησης. Δίνουμε παρακάτω ένα χαρακτηριστικό αυθεντικό θέμα του PISA 2000 με τη βαθμολογία του και την κατάταξή του στους συντελεστές δυσκολίας.

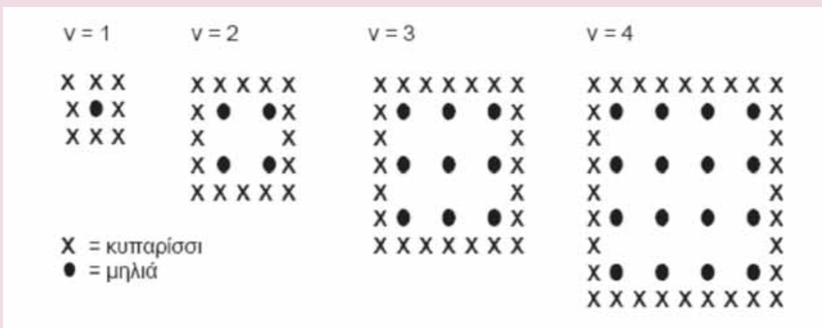
Μηλιές

Ένας αγρότης θέλει να φυτέψει μηλιές σε σειρές και σε τετράγωνο σχήμα. Σκέφτεται να προστατέψει τις μηλιές από τον αέρα, περιφράζοντάς τις με κυπαρίσσια.

Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τη διάταξη των δέντρων, όπως τα φαντάζεται ο αγρότης. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει διαφορετικές σειρές από μηλιές.

(ν = σειρές από μηλιές)

PISA 2000



Ερώτηση 1: ΜΗΛΙΕΣ

Συμπληρώστε τα στοιχεία που λείπουν στον παρακάτω πίνακα:

ν	Πλήθος δέντρων μηλιάς	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

ΕΡΩΤΗΣΗ 2: ΜΗΛΙΕΣ

Οι τύποι που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να υπολογίσετε το πλήθος των δέντρων μηλιάς και το πλήθος των κυπαρισσιών στα παραπάνω διαγράμματα, είναι δύο:

Πλήθος δέντρων μηλιάς = $ν^2$

Πλήθος κυπαρισσιών = 8ν, όπου ν είναι ο αριθμός των σειρών που σχηματίζουν οι μηλιές.

Υπάρχει μια τιμή του ν, για την οποία το πλήθος των δέντρων μηλιάς ισούται με το πλήθος των κυπαρισσιών. Να βρείτε αυτήν την τιμή του ν και να περιγράψετε παρακάτω τον τρόπο, με τον οποίο την υπολογίσατε.

ΕΡΩΤΗΣΗ 3: ΜΗΛΙΕΣ

Ας υποθέσουμε ότι ο αγρότης μεγαλώνει συνέχεια το περιβόλι του προσθέτοντας συνεχώς σειρές δέντρων. Ενώ ο αγρότης μεγαλώνει το περιβόλι του προσθέτοντας σειρές, θα χρειαστεί περισσότερες μηλιές ή κυπαρίσσια;

Γράψτε παρακάτω τον τρόπο με τον οποίο βρήκατε την απάντησή σας.

Βαθμολόγηση

ΜΗΛΙΕΣ: ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 1

ΣΤΟΧΟΣ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ: Αξιολόγηση ικανότητας αναπαραγωγής και συσχετισμών

ΔΕΣΠΟΖΟΥΣΑ ΕΝΝΟΙΑ: Μεταβολή και σχέσεις

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Εκπαιδευτική

ν	Πλήθος δέντρων μηλιάς	Πλήθος κυπαρισσιών
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

Σωστό

Κωδικός 1: Και οι 7 καταχωρίσεις του πίνακα είναι σωστές.

Κωδικός 0: Άλλες απαντήσεις.

Κωδικός 9: Λείπει η απάντηση.

ΜΗΛΙΕΣ: ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 2

ΣΤΟΧΟΣ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ: Αξιολόγηση ικανότητας αναπαραγωγής και συσχετισμών

ΔΕΣΠΟΖΟΥΣΑ ΕΝΝΟΙΑ: Μεταβολή και σχέσεις

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Εκπαιδευτική

Σωστό

[Οι παρακάτω κωδικοί αφορούν τη σωστή απάντηση που ν = 8, που δίνεται με διαφορετικούς τρόπους επίλυσης]

Κωδικός 11: ν=8. Στην απάντηση χρησιμοποιεί εμφανώς αλγεβρική μέθοδο. Π.χ.

- $ν^2 = 8ν$, $ν^2 – 8ν = 0$, $ν(ν – 8)=0$, $ν = 0$ & $ν = 8$, άρα $ν =8$

Κωδικός 12: ν=8. Δεν φαίνεται αναλυτικά η αλγεβρική μέθοδος ή δεν φαίνεται ο τρόπος επίλυσης. Π.χ.

- $ν^2 = 8^2 = 64$, $8ν = 8 \cdot 8 = 64$
- $8 \cdot 8 = 64$, ν=8
- $8 \cdot 8 = 8^2$
- $ν^2 = 8ν$. Αυτό συνεπάγεται ν=8.
- ν = 8

Κωδικός 13: ν=8. Χρησιμοποιούνται άλλες μέθοδοι, π.χ. χρησιμοποιούν σχέδιο ή αναπτύσσουν την ακολουθία.

[Οι παρακάτω κωδικοί αφορούν τη σωστή απάντηση, ν=8, ΚΑΙ επιπλέον την απάντηση ν=0, με διαφορετικούς τρόπους επίλυσης.]

Κωδικός 14: Όπως και για τον Κωδικό 11 (εμφανής αλγεβρική μέθοδος), αλλά δίνει ταυτόχρονα δύο απαντήσεις ν=8 ΚΑΙ ν=0. Π.χ.

• $ν^2 = 8ν$, $ν^2 – 8ν = 0$, $ν(ν – 8)=0$, $ν = 0$ & $ν = 8$

Κωδικός 15: Όπως και για τον Κωδικό 12 (όχι εμφανής αλγεβρική μέθοδος), αλλά δίνει ταυτόχρονα δύο απαντήσεις ν=8 ΚΑΙ ν=0

Λάθος

Κωδικός 00: Οποιαδήποτε άλλη απάντηση, συμπεριλαμβανόμενης και της απάντησης ν=0.

• $ν^2 = 8ν$ (επαναλαμβάνει το ζητούμενο της ερώτησης)

• $ν^2 = 8$

• ν=0. Δεν μπορούμε να 'χουμε τον ίδιο αριθμό, γιατί σε κάθε μηλιά, αντιστοιχούν 8 κυπαρίσσια.

Κωδικός 09: Λείπει η απάντηση

ΜΗΛΙΕΣ: ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 3

ΣΤΟΧΟΣ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ: Αξιολόγηση ικανότητας στοχασμού

ΔΕΣΠΟΖΟΥΣΑ ΕΝΝΟΙΑ: Μεταβολή και σχέσεις

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Επιστημονική

Σωστό

Κωδικός 21: Σωστή απάντηση (μηλιές) συνοδευόμενη από έγκυρη επεξήγηση: Π.χ.

• Μηλιές = ν · ν και κυπαρίσσια = 8 · ν και οι δύο τύποι έχουν έναν παράγοντα ν, αλλά ο τύπος με τις μηλιές έχει έναν ακόμη παράγοντα ν, ο οποίος μεταβαλλόμενος (ή για τις διάφορες τιμές του ν) μεγαλώνει ενώ ο παράγων 8 στον τύπο των κυπαρισσιών παραμένει ο ίδιος. Το πλήθος των δέντρων μηλιάς αυξάνεται γρηγορότερα.

• Ο αριθμός των μηλιών αυξάνεται γρηγορότερα επειδή υψώνεται στο τετράγωνο, αντί να πολλαπλασιάζεται επί 8.

• Ο αριθμός των μηλιών αντιστοιχεί σε τέλειο τετράγωνο. Ο αριθμός των κυπαρισσιών υπολογίζεται με γραμμική σχέση. Άρα οι μηλιές αυξάνονται γρηγορότερα.

• Στην απάντηση χρησιμοποιεί γραφική παράσταση για να δείξει ότι το $ν^2$ υπερβαίνει το 8ν αν το ν λάβει τιμές μεγαλύτερες του 8.

[Σημειώστε πως ο κωδικός 21 αποδίδεται αν το παιδί δώσει κάποιες αλγεβρικές εξηγήσεις βασισμένες στους τύπους $ν^2$ και 8ν].

Μερικώς σωστό

Κωδικός 11: Σωστή απάντηση (μηλιές) βασισμένη σε συγκεκριμένα παραδείγματα ή βασισμένη στην επέκταση του πίνακα.

• Αν χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα της προηγούμενης σελίδα θα διαπιστώσουμε ότι ο αριθμός των μηλιών αυξάνει γρηγορότερα από τον αριθμό των κυπαρισσιών. Αυτό συμβαίνει ειδικότερα μετά τον αριθμό εκείνον, για τον οποίο το πλήθος των μηλιών ισούται με τον αριθμό των κυπαρισσιών.

• Ο πίνακας δείχνει ότι ο αριθμός των μηλιών αυξάνει γρηγορότερα. Ή

Σωστή απάντηση (μηλιές) με ΚΑΠΟΙΑ απόδειξη ότι η σχέση μεταξύ των $ν^2$ και 8ν έχει γίνει κατανοητή, αλλά δεν εκφράζεται τόσο ξεκάθαρα όπως στις περιπτώσεις του Κωδικού 21.

• Οι μηλιές για $ν > 8$.

• Μετά από 8 σειρές, ο αριθμός των μηλιών θα αυξηθεί γρηγορότερα απ’ ότι ο αριθμός των κυπαρισσιών.

• Τα κυπαρίσσια μέχρι να φθάσουμε στις 8 σειρές, μετά θα είναι περισσότερες οι μηλιές.

Λάθος

Κωδικός 01: Σωστή απάντηση (οι μηλιές) με ανεπαρκή ή με λανθασμένη εξήγηση.

• Οι μηλιές

• Οι μηλιές γιατί γεμίζουν το εσωτερικό του περιβολιού που είναι μεγαλύτερο από την περίμετρο.

• Οι μηλιές γιατί περιστοιχίζονται από κυπαρίσσια.

Κωδικός 02: Οποιαδήποτε άλλη λανθασμένη απάντηση.

• Τα κυπαρίσσια

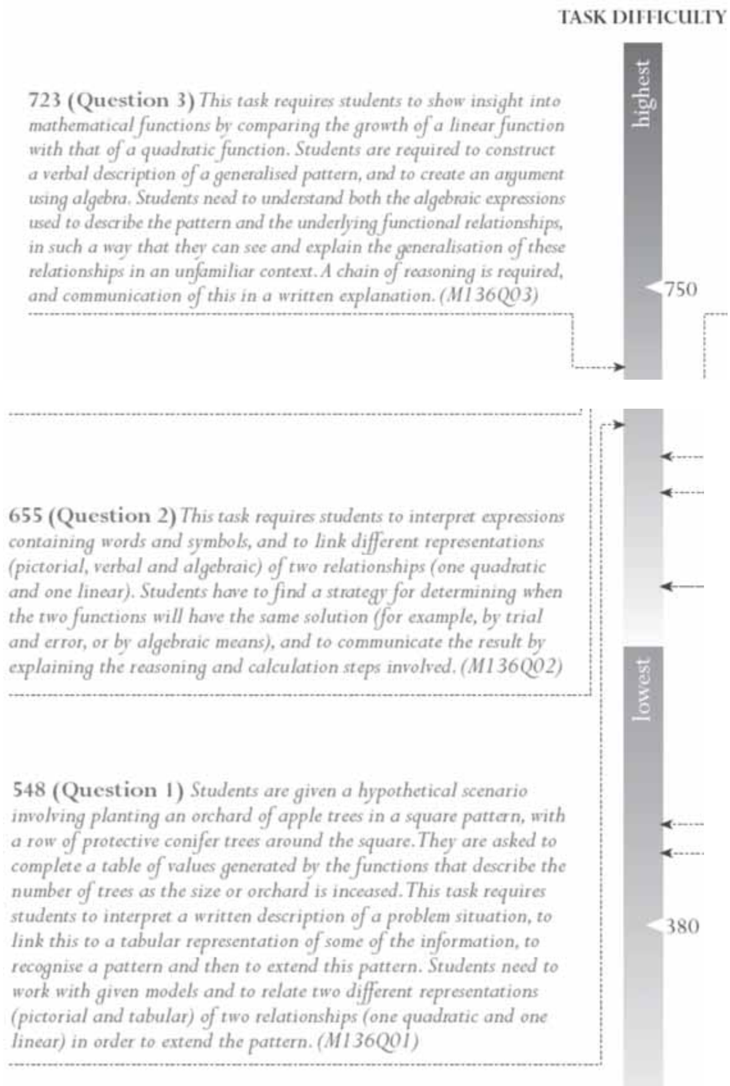
• Τα κυπαρίσσια γιατί για κάθε πρόσθετη σειρά μηλιών χρειάζονται πολλά κυπαρίσσια

• Τα κυπαρίσσια. Γιατί για κάθε μηλιά υπάρχουν 8 κυπαρίσσια.

• Δεν ξέρω.

Κωδικός 09: Λείπει η απάντηση.

Η ταξινόμηση των παραπάνω ερωτήσεων στην κλίμακα δυσκολίας γίνεται με συντελεστή 548 για την ερώτηση 1, με συντελεστή 655 για την ερώτηση 2 και με 723 (από τους υψηλότερους) για την ερώτηση 3.



Sample Tasks from PISA 2000 assessment, OECD 2002, σελ. 88

Στο δρόμο για τον PISA...

Τα θέματα του PISA προέρχονται από μία τράπεζα θεμάτων και επαναλαμβάνονται από χρονιά σε χρονιά. Δίνεται έτσι, η δυνατότητα σε κάποια κράτη να «προετοιμαστούν» οι μαθητές για το διαγωνισμό.

Αν σε κάποιες χώρες γίνεται **προετοιμασία** των μαθητών μέσω των Προγραμμάτων Σπουδών τους, η απόδοσή τους επηρεάζεται σημαντικά.

Για παράδειγμα σε κείμενο για τους λόγους που δικαιολογούν την επιτυχία της Φινλανδίας στον PISA, η Marjatta Näätänen, μεταξύ άλλων, αναφέρει:

> Τα φινλανδικά σχολικά εγχειρίδια περιέχουν **πολλά προβλήματα της μορφής των θεμάτων του PISA**. (**Training of PISA**: Finnish math textbooks contain lots of PISAtype problems.)

Marjatta Näätänen, Department of Mathematics and Statistics,
University of Helsinki, Finland,
PISA –survey, Finnish schools, teacher training and math education

Εδώ θέλω να κάνω έναν παραλληλισμό με τους μαθηματικούς διαγωνισμούς της ΕΜΕ (Θαλής, Ευκλείδης κ.α.). Τα τελευταία χρόνια διακρίνονται σ' αυτούς πολλοί μαθητές, όχι επειδή έχουν έμφυτο ταλέντο, αλλά επειδή παρακολουθούν ομάδες προετοιμασίας (ιδίως σε μεγάλα ιδιωτικά σχολεία) και είναι εξοικιωμένοι με τα θέματα των διαγωνισμών. Παρ' όλο που οι μαθητές αυτοί είναι αξιέπαινοι, καθώς συμμετέχουν εθελοντικά σε αυτά τα προγράμματα, εντούτοις, αλλοιώνεται η ουσία και το πνεύμα του διαγωνισμού, αφού οι προετοιμασμένοι συναγωνίζονται από καλύτερες συνθήκες τους υπόλοιπους.

Έτσι λοιπόν, και στον PISA, αν οι μαθητές μιας χώρας είναι προετοιμασμένοι για τα θέματα, θα υπερισχύσουν των άλλων, αλλοιώνοντας τα προσδοκόμενα αποτελέσματα.

Τι να κάνουμε, λοιπόν; Να εντάξουμε κάποια θέματα, σαν τα παραπάνω, στη διδασκαλία μας προετοιμάζοντας τους μαθητές μας για τους επόμενους διαγωνισμούς ή να περιμένουμε στωικά τα επόμενα αποτελέσματα ως «το χρονικό ενός προαναγγελθέντος θανάτου»;

Είναι σαφές ότι μια αποσπασματική, συνοπτική προετοιμασία ούτε αποτελέσματα θα φέρει, αντιθέτως θα προκαλέσει σύγχυση σε εκπαιδευτικούς και μαθητές. Πώς να διδάξουν κάτι άγνωστο σ' αυτούς οι καθηγητές και μάλιστα να φορτώσουν κι άλλο το βαρύ φορτίο των μαθητών;

Μήπως να αφαιρέσουμε κάτι από τα Αναλυτικά Προγράμματα; Οι όποιες αλλαγές δεν μπορούν να γίνονται εν κρυπτώ σε μια νύχτα. Οι Ολλανδοί μετά 30 χρόνια λειτουργίας του προγράμματος *Ρεαλιστικών Μαθηματικών* αναφέρονται σ' αυτό ως «πρόγραμμα σε διαμόρφωση»![5]

Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω, πιστεύω ότι προβλήματα σαν αυτά του PISA, θα μπορούσαν να προσθέσουν κάποιες ιδέες και να πλουτίσουν το μάθημα, δίνοντας παραδείγματα σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινή πραγματικότητα. Αυτό που με φοβίζει είναι μήπως ο ενθουσιασμός και μάλιστα σε όρια υπερβολής, (χαρακτηριστικό των μεσογειακών ανθρώπων), μας οδηγήσει σε ανεξέλεγκτη «εισαγωγή» στη διδασκαλία μας εξωπραγματικών και αλλοπρόσαλλων θεμάτων δήθεν Ρεαλιστικών Μαθηματικών, όπως π.χ. τα περιβόητα «προβλήματα», που είχαν εισαχθεί ως 4ο θέμα στις Γενικές Εξετάσεις μετά το 1998.

Δίνουμε στη συνέχεια μία **συλλογή προβλημάτων**. Όσα έχουν αντληθεί από κάποια δημοσιευμένη εργασία ή βιβλίο αναγράφουν κάτω από την εκφώνηση την προέλευσή τους.[6] Τα υπόλοιπα είναι φτιαγμένα ή διασκευασμένα με πηγή έμπνευσης προβλήματα από την τράπεζα θεμάτων του PISA. Σε κάποια δίνονται προεκτάσεις, που δεν θα μπορούσαν να είναι αντικείμενο εξέτασης του PISA, παρουσιάζουν όμως, ενδιαφέρον για επεξεργασία στην τάξη.

Με χαρά θα δεχτούμε κάθε γνώμη, παρατήρηση, κριτική, διαφωνία στις απόψεις που εκφράζει το βιβλίο αυτό. Τα στοιχεία επικοινωνίας αναγράφονται στην 4η σελίδα του βιβλίου.

Γ. Ρ.

---

[5] Van den Heuvel-Panhuizen, Marja, *Realistic Mathematics Education as Work in Progress*, Freudenthal Institute, 2002

[6] Καταγράφω τις πηγές από όπου άντλησα τα θέματα ή απλά «δανείστηκα» κάποιες ιδέες. Πρώτον˙ γιατί πρέπει να τιμάται έτσι ο εμπνευστής του θέματος, δεύτερον˙ γιατί δίνεται η δυνατότητα σε όποιον θέλει να ψάξει, να ανατρέξει στις πηγές και τρίτον˙ γιατί είναι ηθικό και σωστό. Αν έχω παραλείψει κάτι, (π.χ. κάτι που έχει δημοσιευτεί και δεν το αναφέρω) αυτό έγινε επειδή απλά αγνοώ την ύπαρξή του. Η «ανακύκλωση» των ιδεών και των θεμάτων πρέπει να γίνεται σωστά, τίμια και **με σεβασμό στις πηγές**.

Αλγεβρικός Λογισμός Συναρτήσεις

1η ενότητα

Στην εισαγωγή κάθε ενότητας δίνουμε τον ορισμό των **δεσποζουσών εννοιών**, σύμφωνα με τον PISA. Αντιστοιχήσαμε τις έννοιες *Ποσότητα* και *Μεταβολή και σχέσεις* με τις πιο οικείες σε μας *Αλγεβρικός Λογισμός* και *Συναρτήσεις*.

Οι έννοιες *Χώρος και Σχήμα* αντιστοιχούν στη 2η ενότητα *Γεωμετρία* και η έννοια *Αρχή της Αβεβαιότητας* με την ενότητα *Στατιστική, Πιθανότητες, Συνδυασμοί*.

Αυτήν, εξάλλου, την αντιστοίχηση έκανε και το Κ.Ε.Ε. στην ενημερωτική του έκδοση με θέματα του PISA.

Ποσότητα

Για να οργανώσουμε τον κόσμο που μας περιβάλλει, πρέπει να τον ποσοτικοποιήσουμε. Τα σημαντικότερα στοιχεία της ποσότητας είναι η αντίληψη του απόλυτου και σχετικού μεγέθους, η αναγνώριση αριθμητικών τύπων και η χρήση αριθμών για το συμβολισμό της ποσότητας αλλά και άλλων χαρακτηριστικών του περιβάλλοντος που μπορούμε να τα εκφράσουμε με ποσότητα (απαριθμήσεις και μετρήσεις).

Μια επίσης πολύ σημαντική πλευρά της έννοιας της ποσότητας είναι η συλλογιστική ικανότητα με ποσοτικούς όρους, η οποία προϋποθέτει να έχει κάποιος αίσθηση των αριθμών, κατανόηση της σημασίας των πράξεων και αντίληψη της τάξης μεγέθους ενός αριθμού, να μπορεί να κάνει πράξεις και συγκρίσεις, αναλογίες ή ποσοστιαίες αναλογίες, καθώς και νοερούς υπολογισμούς και προσεγγίσεις.

Μεταβολή και Σχέσεις

Κάθε φυσικό φαινόμενο εκφράζει μια **μεταβολή**. Όλο το περιβάλλον μας περιέχει μόνιμες ή παροδικές σχέσεις ανάμεσα σε διάφορα φαινόμενα, όπως είναι η μεταβολή των οργανισμών καθώς αναπτύσσονται, ο κύκλος των εποχών, η πλημμυρίδα και η άμπωτη στην παλίρροια, οι κύκλοι ανεργίας, οι μεταβολές του καιρού, οι δείκτες των μετοχών κλπ. Κάποιες από τις διαδικασίες μεταβολής μπορούν να εκφραστούν ή να τυποποιηθούν με **μαθηματικές συναρτήσεις**: γραμμικές, εκθετικές, περιοδικές, λογαριθμικές, συνεχείς ή ασυνεχείς. Πολλές όμως περιπτώσεις σχέσεων εμπίπτουν σε διαφορετικές κατηγορίες και η ανάλυση των δεδομένων είναι αναγκαία, για να προσδιοριστεί το είδος τους. Οι μαθηματικές σχέσεις παίρνουν τη μορφή εξισώσεων, ανισώσεων αλλά και άλλων σχέσεων, όπως ισοδυναμία ή διαιρετότητα.

Ο **«συναρτησιακός»** τρόπος σκέψης, δηλαδή να σκέπτεται κανείς με τους όρους των σχέσεων και των συναρτήσεων, είναι ένας από τους θεμελιώδεις στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Οι σχέσεις **απεικονίζονται** με διαφορετικούς τρόπους: αλγεβρικούς, γεωμετρικούς, με γραφικές παραστάσεις και σε μορφή πίνακα. Φυσικά η κάθε διαφορετική παρουσίαση εξυπηρετεί διαφορετικούς σκοπούς και έχει διαφορετικές ιδιότητες και συνεπώς η ανίχνευση των ιδιοτήτων αυτών είναι αποφασιστικής σημασίας για την επίλυση προβλημάτων.

Έκδοση Κ.Ε.Ε. για τον PISA

1. *Αγώνες δρόμου*

Στους Ολυμπιακούς Αγώνες του Πεκίνου τα αποτελέσματα (νικητές και ο χρόνος τους) στους τελικούς αγώνες δρόμου ανδρών και γυναικών είναι τα εξής:

	ΑΝΔΡΕΣ		**ΓΥΝΑΙΚΕΣ**	
100 m	Γιουσέιν Μπολτ	9,69 s	Σέλι-Αν Φρέιζερ	10,78 s
200 m	Γιουσέιν Μπολτ	19,30 s	Βερόνικα Κάμπελ-Μπράουν	21,74 s
400 m	Λασόουν Μέριτ	43,75 s	Κριστίν Οχουρουόγκου	
800 m	Γουίλφρεντ Μπουνγκέι	1min 44.65 s	Πάμελα Τζελίμο	1 min 54,87 s

Ερώτηση 1: ΑΝΤΡΕΣ-ΓΥΝΑΙΚΕΣ

Μία από τις παρακάτω επιδόσεις είναι ο χρόνος της νικήτριας των 400 m γυναικών. Ποια νομίζετε ότι είναι; Εξηγήστε πώς επιλέξατε την απάντησή σας.

Α. 43,45 s **Β.** 44,36 s **Γ.** 49,62 s **Δ.** 1 min 23,25 s

Ερώτηση 2: ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΡΟΝΟΥ

Μετατρέψτε σε δευτερόλεπτα το χρόνο της νικήτριας των 800 m γυναικών.

Ερώτηση 3: ΠΙΟ ΓΡΗΓΟΡΑ, ΠΙΟ ΨΗΛΑ, ΠΙΟ ΔΥΝΑΤΑ


Τόμι Σμιθ, νικητής στα 200 m στο Μεξικό το 1968.

Καταγράψαμε παρακάτω τις επιδόσεις μερικών ανδρών ολυμπιονικών στα 200 m.

(*Τα στοιχεία δίνονται με κάθε επιφύλαξη μετά από αναζήτηση στην εγκυκλοπαίδεια **Wikipedia***)

Έτος	Όνομα	Χρόνος σε sec
1948	**Μελ Πάττον**	**21,10**
1956	Μπόμπυ Τζόε Μόρροου	20,60
1968	Τόμι Σμιθ	19,83
1972	Βαλερί Μπορζόφ	20,00
1976	**Ντον Κουόρι**	**20,22**
1980	Πιέτρο Μενέα	19,72
1984	Καρλ Λιούις	19,80
1988	Τζο Ντελόουτς	19,75
1992	**Μάικ Μαρς**	**20,01**
1996	Μάικλ Τζόνσον	19,32
2000	Κώστας Κεντέρης	20,09
2004	Σον Κρόφορντ	19,80
2008	**Γιουσέιν Μπολτ**	**19,30**

Με την πάροδο του χρόνου οι επιδόσεις των αθλητών, αναμφισβήτητα, **βελτιώνονται**, με κάποιες αυξομειώσεις. Δώστε δύο λόγους που να αιτολογούν το **γεγονός** αυτό.

Ερώτηση 4: ΠΡΟΒΛΕΠΟΝΤΑΣ ΤΟ ΜΕΛΛΟΝ

Α. Μπορεί να προβλεφθεί επιστημονικά η επίδοση του νικητή των 200 m ανδρών στους επόμενους Ολυμπιακούς αγώνες;

Β. Μπορεί να απαντηθεί με επιστημονική έρευνα το ερώτημα: «*Θα γίνει παγκόσμιο ρεκόρ στον τελικό των 200 m στους επόμενους Ολυμπιακούς αγώνες;*»

Γ. Μπορεί να απαντηθεί με επιστημονική έρευνα το ερώτημα: «*Αν οι αθλητές έτρεχαν τα 200 m σε ευθεία, οι επιδόσεις θα ήταν καλύτερες;*»

2. *Αθήνα 2004*

Ερώτηση 1:

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα του τελικού ακοντισμού γυναικών στους Ολυμπιακούς Αγώνες στην Αθήνα το 2004. Βρείτε τη διαφορά 1ης - 2ης , 3ης - 4ης και 1ης - 6ης.

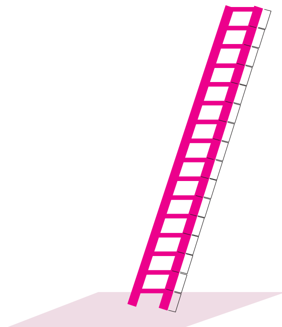
Σειρά	Όνομα	Χώρα	**Βολή σε m**
1	Menendez Osleidys	CUB	**71.53**
2	Nerius Steffi	GER	**65.82**
3	Manjani Mirela	GRE	**64.29**
4	Brejchova Nikola	CZE	**64.23**
5	Bisset Sonia	CUB	**63.54**
6	Eve Laverne	BAH	**62.77**

Ερώτηση 2:

Στον πίνακα φαίνονται οι χρόνοι των αθλητών που συμμετείχαν στον τελικό των 100 m ανδρών. Πόσο χρόνο μετά το νικητή τερμάτισε ο Asafa Powell; Θα μπορούσαμε να κατατάξουμε τους αθλητές, αν είχαν αυτές τις επιδόσεις, πριν μερικές δεκαετίες; Γιατί;

Rank	Athlete	Time	
1	Justin Gatlin (USA)	9.85	PB
2	Francis Obikwelu (POR)	9.86	CR
3	Maurice Greene (USA)	9.87	SB
4	Shawn Crawford (USA)	9.89	
5	Asafa Powell (JAM)	9.94	
6	Kim Collins (SKN)	10.00	SB
7	Obadele Thompson (BAR)	10.10	
—	Aziz Zakari (GHA)	DNF	

3. *Σκάλα αλουμινίου*

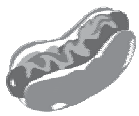


Η σκάλα έχει 16 σκαλοπάτια πάχους 2 cm, που ισαπέχουν. Αν έχει ύψος 3,52 m, πόσο είναι το κενό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών σκαλοπατιών;

4. *Απλή αλλά παχυντική...*

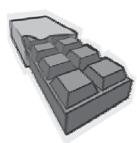
Οι παρακάτω τροφές είναι νόστιμες και ελκυστικές, αλλά με ελάχιστη θρεπτική αξία και ανθυγιεινές. Ακόμα, συνδυάζοντας δύο απ' αυτές παίρνουμε περίπου 600 θερμίδες. Ποιες;

χάμπουργκερ
393 θερμ.



χοτ ντογκ
298 θερμ.

παγωτό
214 θερμ.



σοκολάτα
268 θερμ.

NAEP (Δημοτικό-Γυμνάσιο)

5. *Καρτέλες μαθητών*

Σε ένα σχολείο με 120 μαθητές κατασκευάζονται καρτέλες των μαθητών αριθμημένοι ως εξής: 001, 002, ... 120. Οι υπεύθυνοι καθηγητές κολλούν στις καρτέλες αυτοκόλλητους αριθμούς (λετρασέτ).

Ερώτηση 1:

Πόσοι αριθμοί χρησιμοποιήθηκαν;

Ερώτηση 2:

Ποια είναι τα τρία ψηφία που χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο;

6. *Ρέστα από το περίπτερο*

Αγοράσαμε από το περίπτερο μία κάρτα μονάδων για καρτοκινητό και ένα οικογενειακό παγωτό. Δώσαμε χαρτονόμισμα των 50 ευρώ και πήραμε υπόλοιπα 24 ευρώ.

Ερώτηση 1:

Θα μπορούσαμε να πάρουμε ακόμα ένα ίδιο παγωτό και μία ίδια τηλεκάρτα με τα υπόλοιπα;

Ερώτηση 2:

Θα μπορούσαμε να πάρουμε ακόμα ένα ίδιο παγωτό με τα υπόλοιπα;

Ερώτηση 3:

Θα μπορούσαμε να πάρουμε ακόμα μία ίδια κάρτα με τα υπόλοιπα;

---

7. *Shopping therapy*

Σε ένα πολυκατάστημα αγοράζουμε ακριβώς ένα είδος από κάθε τμήμα από τα παρακάτω:

Ρούχα	Παπούτσια	Εργαλεία
Πουκάμισα: 11,38 €	Παιδικά: 30,48 €	Θήκη κατσαβιδιών: 17,90 €
Παντελόνια: 12,98 €	Γυναικεία: 79,90 €	Πολυεργαλείο: 23,90 €
Μπουφάν: 29,58 €	Ανδρικά: 39,40 €	Ηλεκτρικό τρυπάνι: 25,78 €

Δίνουμε 100 € στο ταμείο και παίρνουμε υπόλοιπα 5,24 €. Τι αγοράσαμε από κάθε τμήμα;

8. *Γονείς μαθηματικοί...*

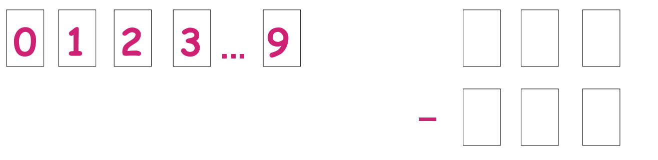
Η μητέρα, που είναι μαθηματικός, κέρδισε ένα αρκετά μεγάλο ποσό στο «τζόκερ» και για να μοιραστεί τη χαρά της ανακοινώνει στην κόρη της ότι θα της δώσει τόσα ευρώ όσα θα μείνουν, αν από οποιονδήποτε τριψήφιο αριθμό αφαιρέσει όποιον τριψήφιο αριθμό θέλει.

Ερώτηση 1:

Αν ήσασταν στη θέση της κόρης, ποιον θα διαλέγατε για αφαιρετέο και ποιον για αφαιρέτη; Πόσα ευρώ θα κερδίζατε;

Ερώτηση 2:

Ο πατέρας, επίσης μαθηματικός, για να «βοηθήσει» την κόρη του, προτείνει το εξής: Να κόψουν σε καρτελάκια τους αριθμούς 0, 1, 2, ..., 9 και να τους βάλουν στην παρακάτω διάταξη:



Το υπόλοιπο της αφαίρεσης είναι το ποσό που θα πάρει η κόρη. Τι λέτε, βοήθησε την κόρη του ο πατέρας ή όχι; Γιατί;

Ερώτηση 3:

Διατυπώστε τα παραπάνω προβλήματα με κλασική μαθηματική εκφώνηση

9. *Τουρνουά ποδοσφαίρου*

Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου συμμετείχαν 5 ομάδες, οι οποίες έπαιξαν όλες από ένα αγώνα μεταξύ τους. Κάθε νίκη δίνει 3 βαθμούς, η ισοπαλία 1 και η ήττα 0 βαθμούς. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα:

1η αγωνιστική	2η αγωνιστική
Νίκη Σπάτων – Δόξα Κερατέας: 3 – 2	Νίκη Σπάτων – Κεραυνός Δροσιάς: 2 – 2
Κεραυνός Δροσιάς – Μαραθώνας: 1 – 1	Ένωση Χαλκηδόνας – Δόξα Κερατέας: 3 – 1
Ρεπό: Ένωση Χαλκηδόνας	Ρεπό: Μαραθώνας

3η αγωνιστική	4η αγωνιστική
Νίκη Σπάτων – Μαραθώνας: 1 – 3	Νίκη Σπάτων – Ένωση Χαλκηδόνας: 0 – 2
Κεραυνός Δροσιάς– Ένωση Χαλκηδόνας: 1-2	Δόξα Κερατέας – Μαραθώνας: 4 – 2
Ρεπό: Δόξα Κερατέας	Ρεπό: Κεραυνός Δροσιάς

5η αγωνιστική
Κεραυνός Δροσιάς – Δόξα Κερατέας: 4 – 3
Μαραθώνας – Ένωση Χαλκηδόνας: 1-2
Ρεπό: Νίκη Σπάτων

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία, συμπληρώστε τον πίνακα βαθμολογίας των ομάδων:

Ομάδα	Βαθμοί	Νίκες	Ισοπαλίες	Ήττες	Τέρματα

10. *Τιμοκατάλογοι τηλεφωνικών κλήσεων*

Σε μια διαφημιστική καταχώρηση η εταιρεία σταθερής τηλεφωνίας Digi phone αντιπαραβάλλει σε έναν πίνακα το τιμολόγιό της με αυτό της ανταγωνίστριας εταιρείας (Data phone), προσπαθώντας να αποδείξει ότι είναι φθηνότερη.

	Μηνιαίο πάγιο	Αστικές κλήσεις	Υπεραστικές κλήσεις	Διεθνείς κλήσεις	Κλήσεις σε κινητά
Digi phone	0 €	0,08 €	0,12 €	0,20 €	0,16 €
Data phone	10 €	0,04 €	0,06 €	0,10 €	0,08 €

Δίνει, ως παράδειγμα, ένα λογαριασμό που περιλαμβάνει 100 μονάδες αστικών κλήσεων, 20 υπεραστικών, 10 διεθνών και 40 σε κινητό.

Ερώτηση 1:

Είναι φθηνότερο κοστολόγιο της Digi phone στο συγκεκριμένο παράδειγμα;

Ερώτηση 2:

Σε ποιες περιπτώσεις το τιμολόγιο της Digi phone είναι φθηνότερο; Γράψτε και δικαιολογήστε την άποψή σας.

Ερώτηση 3:

Σε ποια περίπτωση το κόστος των κλήσεων είναι το ίδιο με τα τιμολόγια και των δύο εταιρειών;

Ερώτηση 4:

Φτιάξτε ένα παράδειγμα όπου συμφέρει το συνδρομητή το τιμολόγιο της Data phone.

11. *Συντελεστές βαρύτητας*

Για την εισαγωγή σε σχολές της 1ης ομάδας του πανεπιστημίου το μάθημα Α έχει συντελεστή βαρύτητας 1,2 , το μάθημα Β 0,9 , το μάθημα Γ 1,1 και το Δ έχει 0,8.

Οι αντίστοιχοι συντελεστές κατά μάθημα για τις σχολές της 2ης ομάδας είναι: Α: 1, Β: 1,3 , Γ: 0,7 και Δ: 1.

Οι βαθμοί τριών μαθητών είναι:

	Α	Β	Γ	Δ	Σύνολο
Νίκος	16	12	13	09	
Γιάννης	14	15	11	10	
Ελένη	10	17	10	13	

Ερώτηση 1:

Ποιος μαθητής παίρνει την υψηλότερη βαθμολογία στην 1η ομάδα και ποιος στη 2η ομάδα;

Ερώτηση 2:

Σε ποια ομάδα έχει υψηλότερη βαθμολογία ο Γιάννης;

Ερώτηση 3:

Αν δεν υπήρχαν συντελεστές βαρύτητας, ποιος θα είχε την υψηλότερη βαθμολογία από τους τρεις μαθητές;

Ερώτηση 4:

Αν δεν υπήρχαν συντελεστές βαρύτητας, ποιος θα ωφελούταν και ποιος θα έχανε;

12. *Μηχανήματα αυτόματης ανάληψης χρημάτων*

Τα μηχανήματα αυτόματης ανάληψης χρημάτων (ΑΤΜ) διαθέτουν χαρτονομίσματα των 20 και των 50 ευρώ.

Ερώτηση 1:

Ποια από τα παρακάτω ποσά δεν μπορεί να δώσει το ΑΤΜ σε μια ανάληψη;

Α. 30 € Β. 90 € Γ. 130 € Δ. 210 €

Ερώτηση 2:

Ποια ποσά, πολλαπλάσια του 10 δεν μπορεί να δώσει το ΑΤΜ σε μια ανάληψη; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μέγιστη δυνατή ανάληψη 600 €).

Ερώτηση 3:

α) Με πόσα χαρτονομίσματα το λιγότερο θα πάρουμε το ποσό των 460 €;

β) Με πόσα χαρτονομίσματα το περισσότερο θα πάρουμε το ποσό των 460 €;

---

13. *Συνάλλαγμα*

Η ισοτιμία ευρώ (€) - δολαρίου ($) είναι: 1€ = 1,42 $. Σε ένα ταξίδι στις ΗΠΑ ο Νίκος αντάλλαξε 3.000 ευρώ με δολάρια.

Ερώτηση 1:

Πόσα δολάρια πήρε;

Ερώτηση 2:

Του έμειναν 756 $, που τα αντάλλαξε με ευρώ στην επιστροφή. Πήρε 540 €. Ποια η νέα ισοτιμία ευρώ – δολαρίου;

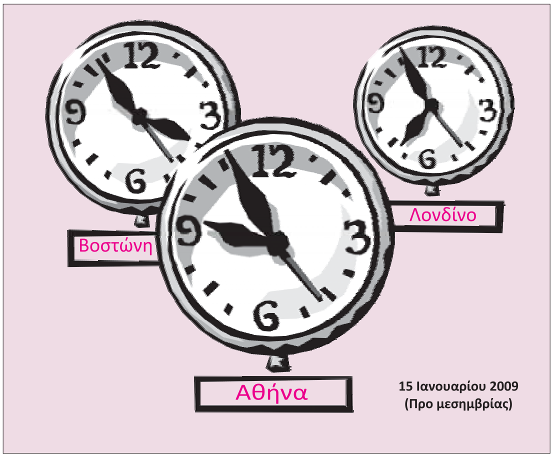
Ερώτηση 3:

Με τη νέα ισοτιμία ο Νίκος κέρδισε ή έχασε και πόσο;

14. *Διεθνή τηλεφωνήματα*

Τα παιδιά της Μαίρης, η Άννα και ο Βαγγέλης σπουδάζουν στο Λονδίνο και στη Βοστώνη αντίστοιχα.

Για να ξέρει ποια ώρα να επικοινωνήσει η Μαίρη μαζί τους τοποθέτησε τρία ρολόγια στα οποία γράφεται η ώρα σε κάθε πόλη.



Ερώτηση 1:

Στις 7 π.μ. στην Αθήνα, τι ώρα είναι σε Βοστώνη και Λονδίνο;

Ερώτηση 2:

Αν η Μαίρη μπορεί να μιλήσει με την Άννα 2-4 μ.μ. (ώρα Λονδίνου) τι ώρα Αθήνας πρέπει να τηλεφωνήσει;

Ερώτηση 3:

Αν η Μαίρη μπορεί να μιλήσει με τον Βαγγέλη 7-9 π.μ. (ώρα Βοστώνης) τι ώρα Αθήνας πρέπει να τηλεφωνήσει;

15. *Ο θείος Σκρουτζ*

Περιοδικό ΚΟΜΙΞ, τ. 195, Σεπτ. 2004,
«Ο Θησαυρός των δέκα Αβατάρ» του Ντον Ρόσα, σελ. 12.

Πόσο μας κάνουν πέντε ρουπίες σε δολλάρια; Απαντήστε, με βάση την περιγραφή στις παραπάνω εικόνες. Διατυπώστε με λόγια τη σκέψη σας.

(Ντουζίνα: Δωδεκάδα)

16. *Στα καντούνια της Κέρκυρας*

Στη φωτογραφία βλέπουμε μια παλιά πολυκατοικία. Ξέρουμε ότι ένα παντζούρι έχει ύψος 1,20 m. Βρείτε το ύψος της πολυκατοικίας.

Φωτογραφία: Παλιά πόλη της Κέρκυρας

17. *Cheesecake*

Σε ένα περιοδικό βρήκαμε την παρακάτω συνταγή για Cheesecake για 6 άτομα.

450 gr μπισκότα κανέλας θρυμματισμένα
150 gr βούτυρο
30 gr μαύρη ζάχαρη
300 gr ζάχαρη άχνη
6 κρόκους αυγού
600 gr τυρί κρέμα ή mascarpone
300 gr γιαούρτι
600 gr κρέμα γάλακτος
3 φύλλα ζελατίνης
480 gr φράουλες φρέσκιες

Συμπληρώστε στον παρακάτω πίνακα τις ποσότητες υλικών για να φτιάξουμε το ίδιο γλυκό για 4, 8 και 12 άτομα.

Υλικά	4 άτομα	6 άτομα	8 άτομα	12 άτομα
Μπισκότα κανέλας θρυματισμένα		450 gr		
Βούτυρο		150 gr		
Μαύρη ζάχαρη		30 gr		
Ζάχαρη άχνη		300 gr		
Κρόκοι αυγού		6 τεμ.		
Τυρί κρέμα ή mascarpone		600 gr		
Γιαούρτι		300 gr		
Κρέμα γάλακτος		600 gr		
Φύλλα ζελατίνης		3 τεμ.		
Φράουλες		480 gr		

18. *Γλυκά μαθηματικά*

Ποια μαρμελάδα φράουλα είναι γλυκύτερη. Γιατί:

Α. Περιέχει 400 γραμ. φράουλες και 300 γραμ. ζάχαρη.

Β. Περιέχει 1 κιλό φράουλες και 700 γραμ. ζάχαρη.

Freudenthal Institute, Utrecht University

19. *Πατατάκια*

Στη συσκευασία από πατατάκια, διαβάζουμε ότι τα 100 gr αντιστοιχούν σε 2.250 kcal (θερμίδες).

Συμπληρώστε τον πίνακα:

gr	50	75	100	125	150	200
kcal			2.250			

---

20. *Κόστος κλήσης*

Στον παρακάτω τιμοκατάλογο μιας τηλεφωνικής εταιρείας αναγράφεται το κόστος σε σχέση με τα λεπτά ομιλίας.

Χρόνος (σε λεπτά)	100	200	300	400	500	600
Κόστος (σε ευρώ)	12,5	19,4	27,6	34,0	40,0	45,0

Τα ποσά χρόνος και κόστος είναι ανάλογα ή όχι; Πώς το εξηγείτε;

21. *Το άδειο ντεπόζιτο*

Ερώτηση 1:

Έχετε οδηγήσει το αυτοκίνητό σας κατά τα 2/3 της απόστασης που θέλετε να καλύψετε και το ντεπόζιτο της βενζίνης είναι γεμάτο κατά το 1/4. Θα έχετε πρόβλημα;

Παράδειγμα ανοιχτού προβλήματος «ρεαλιστικών μαθηματικών».
Mathematics education and assessment
Heleen Verhage & Jan de Lange
Freudenthal Institute, 1997

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Το παραπάνω θέμα περιέχεται στο διαγωνισμό PISA 2000 με την προσθήκη ότι, όταν ξεκινήσαμε το ντεπόζιτο ήταν γεμάτο.[7]

Ερώτηση 2:

Η κατανάλωση βενζίνης ενός αυτοκινήτου είναι ανάλογη με:

α) τα χιλιόμετρα που διανύει το αυτοκίνητο;

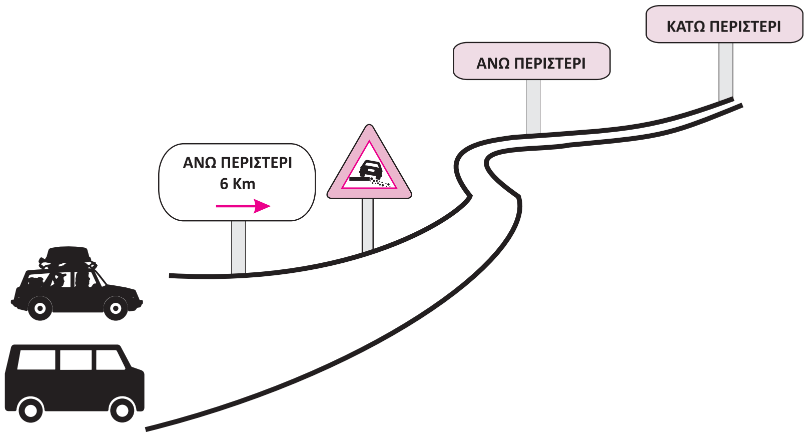
β) το χρόνο που κινείται το αυτοκίνητο;

Μπορείτε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας;

[7] Στο άρθρο: National Center for Education Statistics, *A comparition of the NAEP, TIMMS-R and PISA,* working paper No. 2001-07, U.S. Department Education, June 2001.

22. *Άνω – Κάτω Περιστέρι*

Το φορτηγάκι του Βίκτωρα διανύει 12 χιλιόμετρα κάθε 20 λεπτά, ενώ το αμάξι της Σάρας 20 χιλιόμετρα κάθε 25 λεπτά, στη συγκεκριμένη διαδρομή. Ξεκινούν μαζί την ίδια ώρα. Ο Βίκτωρ φτάνει στο Κάτω Περιστέρι σε 25 λεπτά.



Ερώτηση 1:

Ποιος θα φτάσει πρώτος στο Άνω Περιστέρι; Σε πόσο χρόνο;

Ερώτηση 2:

Πόσο επιπλέον χρόνο θα χρειαστεί το δεύτερο αμάξι για την ίδια διαδρομή;

Ερώτηση 3:

Πόση είναι η απόσταση μεταξύ Άνω και Κάτω Περιστερίου;

Ερώτηση 4:

Πόσο χρόνο θέλει η Σάρα για τη διαδρομή από την αρχή ως το Κάτω Περιστέρι;

Ερώτηση 5:

Αν δεν έχετε ήδη βρει τις ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων, βρείτε τις τώρα. Πώς κρίνετε τις ταχύτητες; Μπορείτε να γράψετε κάποιους λόγους για τους οποίους τα αυτοκίνητα αναπτύσσουν τέτοιες ταχύτητες;

23. *Δοσολογία φαρμάκου*

Στις εικόνες, φαίνονται η περιεκτικότητα και η δοσολογία ενός φαρμάκου για αντιμετώπιση συμπτωμάτων κνησμού (π.χ. από τσίμπημα εντόμου).

Σημείωση: 1mg/kg σ.β. σημαίνει ότι χορηγούμε 1 mg δραστικής ουσίας ανά κάθε κιλό σωματικού βάρους του ασθενούς.

Παιδιά (από 12 μηνών)
Για συμπτωματική αντιμετώπιση κνησμού:
-από 12 μηνών έως 6 ετών: 1mg/kg σ.β. ημερησίως, αυξανόμενο αν είναι απαραίτητο μέχρι το ανώτερο 2,5mg/kg σ.β. ημερησίως, σε διηρημένες δόσεις.
-άνω των 6 ετών:
1mg/kg σ.β. ημερησίως, αυξανόμενο αν είναι απαραίτητο μέχρι το ανώτερο 2mg/kg σ.β. ημερησίως, σε διηρημένες δόσεις.

Υδροξυζίνη υδροχλωρική
φιάλη 150 ml

ΔΕΝ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΖΑΧΑΡΗ
ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΓΙΑ ΔΙΑΒΗΤΙΚΟΥΣ.

ΧΟΡΗΓΕΙΤΑΙ ΜΕ ΑΠΛΗ ΙΑΤΡΙΚΗ ΣΥΝΤΑΓΗ.

5 ml ποσίμου διαλύματος περιέχουν : Hydroxyzine hydrochloride 10 mg.
Έκδοχα : sodium benzoate, ethanol, sorbitol, glycerol, propylene glycol κ.ά.

Για ενδείξεις και δοσολογία βλέπε οδηγία χρήσης.

Φυλάσσεται σε θερμοκρασία δωματίου, μακριά από τα παιδιά.

Ερώτηση 1:

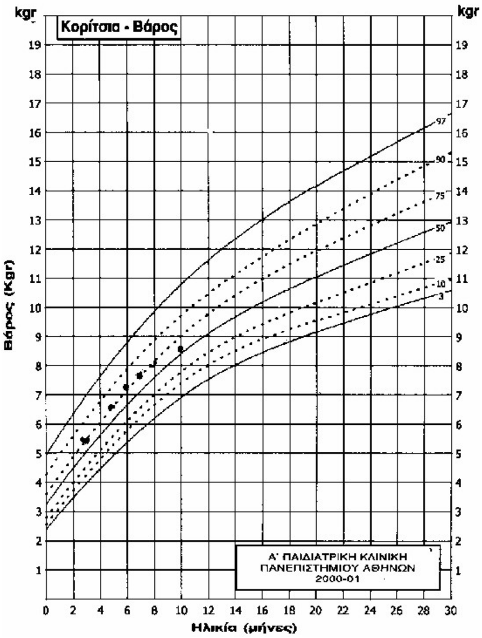
Θέλουμε να δώσουμε την ελάχιστη ημερήσια δόση σε ένα παιδί 18 μηνών και βάρους 12 Kg. Πόσα ml διαλύματος πρέπει να του χορηγήσουμε;

Ερώτηση 2:

Ποια η μέγιστη ημερήσια δόση διαλύματος που θα δίναμε στο ίδιο παιδί;

Ερώτηση 3:

Πόσα mg δραστικής ουσίας περιέχει η φιάλη;



Ερώτηση 4:

Ένα κορίτσι 20 μηνών έχει σωματικό βάρος στο μέσο όρο, όπως περιγράφεται στο διπλανό σχήμα. Ποια από τις παρακάτω δοσολογίες **θα μπορούσε** να της χορηγηθεί, ώστε να ταιριάζει με τις προβλεπόμενες οδηγίες;

Α. 4 ml έως 11 ml
Β. 4,5 ml έως 11,25 ml
Γ. 5,5 ml έως 13,75 ml
Δ. 7 ml έως 16,75 ml
Ε. 7,5 ml έως 11,25 ml

24. *Απογραφή*

Σε μια πόλη το 1981 στην απογραφή υπήρχαν 18.800 κάτοικοι και 2.850 επιβατικά αυτοκίνητα. Το 1991 αντίστοιχα: 24.300 κάτοικοι και 4.280 αυτοκίνητα και το 2001: 24.650 κάτοικοι και 5.430 αυτοκίνητα.

Ερώτηση 1:

Αν τοποθετήσουμε σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων τα σημεία με τετμημένες: αριθμός κατοίκων και τεταγμένες: αριθμός επιβ. αυτοκινήτων (κατά έτος), τα σημεία αυτά θα βρίσκονται πάνω σε ευθεία γραμμή; (*Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης*).

Ερώτηση 2:

Μπορείτε να εκτιμήσετε την αναλογία κατοίκων αυτοκινήτων τα έτη: 1985 και 1995;

Ερώτηση 3:

Μπορείτε να εκτιμήσετε την αναλογία κατοίκων αυτοκινήτων τα έτη: 1975, 2015; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

25. *Φυλάξτε τους θησαυρούς σας!*

Ένας εκδοτικός οίκος προσφέρει μια σειρά από θήκες για την ταξινόμηση και φύλαξη των παλαιών τευχών του παιδικού περιοδικού που εκδίδει. Στην εικόνα βλέπετε τη διαφήμιση των θηκών. Κάθε θήκη συνοδεύεται από 16 συνδετήρες για να στερεωθούν τα τεύχη.

Η διαφήμιση συνοδεύεται από το διπλανό δελτίο παραγγελίας.

ΔΕΛΤΙΟ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΑΣ

Επιθυμώ να μου στείλετε ταχυδρομικώς τον αριθμό των θηκών που σημειώνω με **X**

☐ **1** θήκη, € 8,20 ☐ **3** θήκες, € 21,30

☐ **2** θήκες, € 15,60 ☐ **4** θήκες, € 22,80 ☐ ...... θήκες

Για παραγγελίες πλέον των 5 θηκών η χρέωση είναι € 5,70 η θήκη.

και να πληρώσω το συνολικό ποσό των:

Αξία θηκών	Συσκευασία & Αποστολή	Σύνολο
€_____,__	+ € 4,00*	= €_____,__

* Έξοδα συσκευασίας & αποστολής

ΟΝΟΜΑ ΠΑΡΑΛΗΠΤΗ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ

Τ.Κ. & ΠΟΛΗ ΤΗΛ.

ηλ-διεύθυνση

Ερώτηση 1:

Ποια η τιμή κάθε θήκης σε παραγγελίες δύο, τριών, τεσσάρων και παραπάνω θηκών;

Ερώτηση 2:

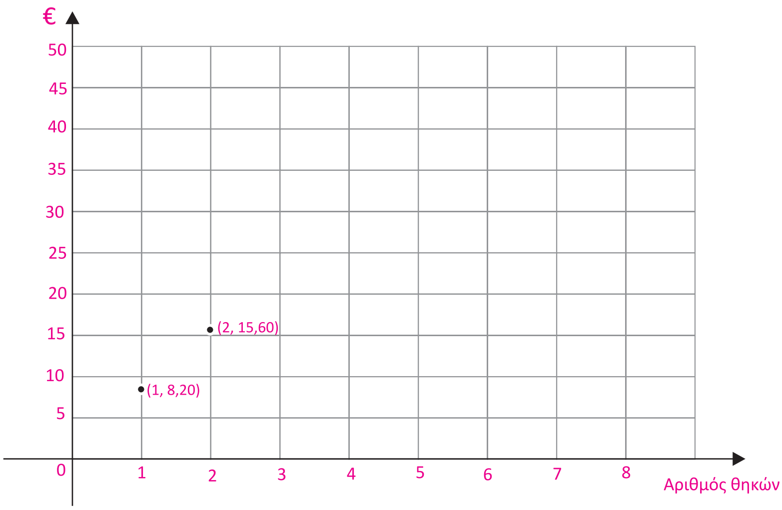
Λέει αλήθεια η διαφήμιση για το κέρδος 10 € σε αγορά 4 θηκών με ένα δελτίο; Γιατί;

Ερώτηση 3:

Τέσσερις φίλοι θέλουν να παραγγείλουν από δύο θήκες ο καθένας. Τι είναι προτιμότερο γι' αυτούς, να παραγγείλει ο καθένας ξεχωριστά ή όλοι μαζί με ένα δελτίο; Ποιο το **συνολικό ποσό** που θα πληρώσουν σε κάθε περίπτωση; Πόση η διαφορά;

Ερώτηση 4:

Στο παρακάτω σχήμα συμπληρώστε τις κουκίδες που δείχνουν το κόστος (δίχως έξοδα συσκευασίας – αποστολής) τριών, τεσσάρων, πέντε ... έως οκτώ θηκών. Ενώστε τα σημεία με μία συνεχή γραμμή. Τι παρατηρείτε;

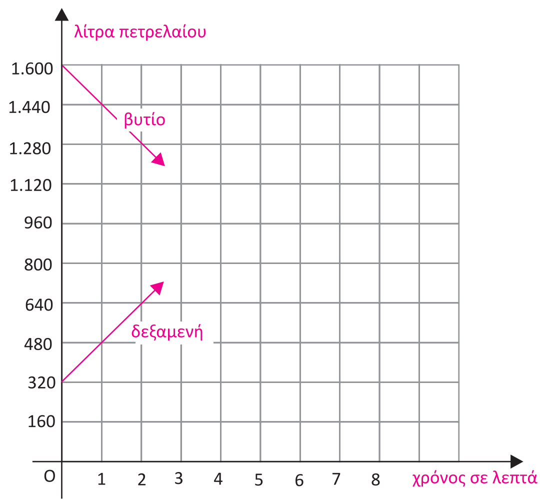


Ερώτηση 5:

Διαβάζοντας τη διαφήμιση, βρείτε πόσα τεύχη του περιοδικού χωράει κάθε θήκη. Υπολογίστε πόσες θήκες χρειάζεστε, αν έχετε 87 τεύχη. Πόσο θα σας κοστίσουν συνολικά;

26. *Δεξαμενή πετρελαίου*

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνονται οι περιεκτικότητες σε λίτρα μιας δεξαμενής και του βυτίου, που την τροφοδοτεί με πετρέλαιο με ρυθμό 160 λίτρα το λεπτό.



Ερώτηση 1:

Πόσο πετρέλαιο είχε η δεξαμενή και πόσο το βυτίο μόλις άρχισε η τροφοδοσία;

Ερώτηση 2:

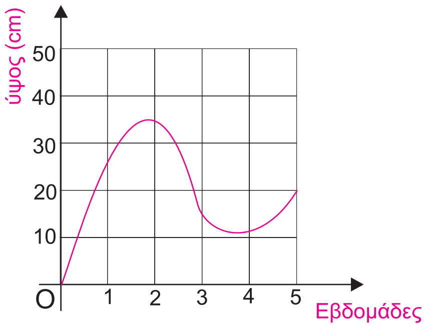
Σε πόση ώρα θα γεμίσει με έναν τόνο πετρέλαιο η δεξαμενή; Πόσο πετρέλαιο θα έχει τότε το βυτίο;

Ερώτηση 3:

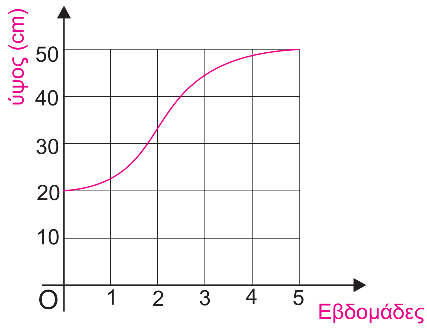
Θα έχουν κάποια στιγμή ίσες ποσότητες δεξαμενή και βυτίο; Αν ναι σε πόσο χρόνο μετά την αρχή της τροφοδοσίας;

27. *Η εξέλιξη του φυτού*

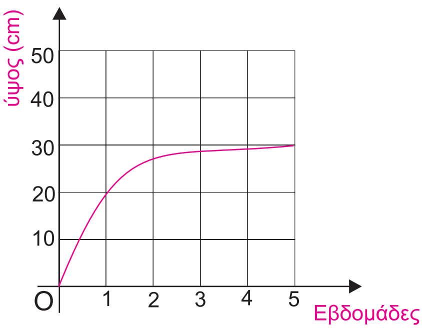
Ποιο από τα παρακάτω γραφήματα μπορεί να παριστάνει την εξέλιξη ενός φυτού τις πρώτες πέντε εβδομάδες της βλάστησης; Δικαιολογήστε την άποψή σας..



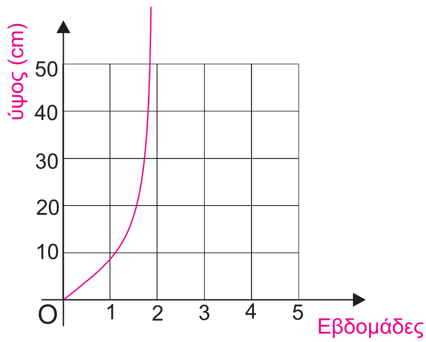
Γράφημα 1



Γράφημα 2



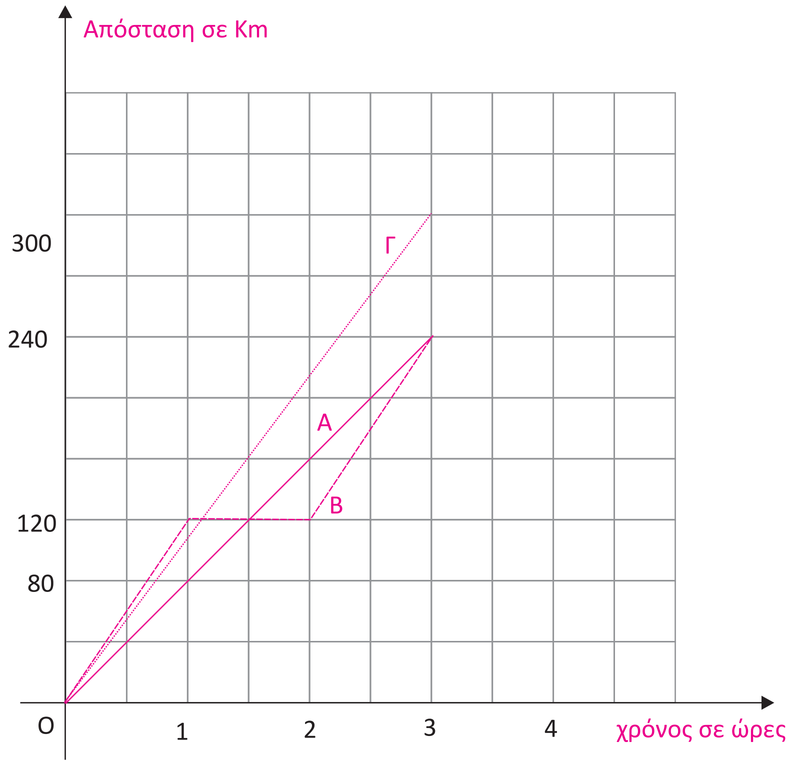
Γράφημα 3



Γράφημα 4

28. *Cars*

Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται οι αποστάσεις που διένυσαν σε τρεις ώρες τρία αυτοκίνητα, τα Α, Β και Γ.



Ερώτηση 1:

Τι μέση ταχύτητα είχε το αυτοκίνητο Α;

Ερώτηση 2:

Ποιο κινήθηκε ταχύτερα την τρίτη ώρα; Με πόση μέση ταχύτητα;

Ερώτηση 3:

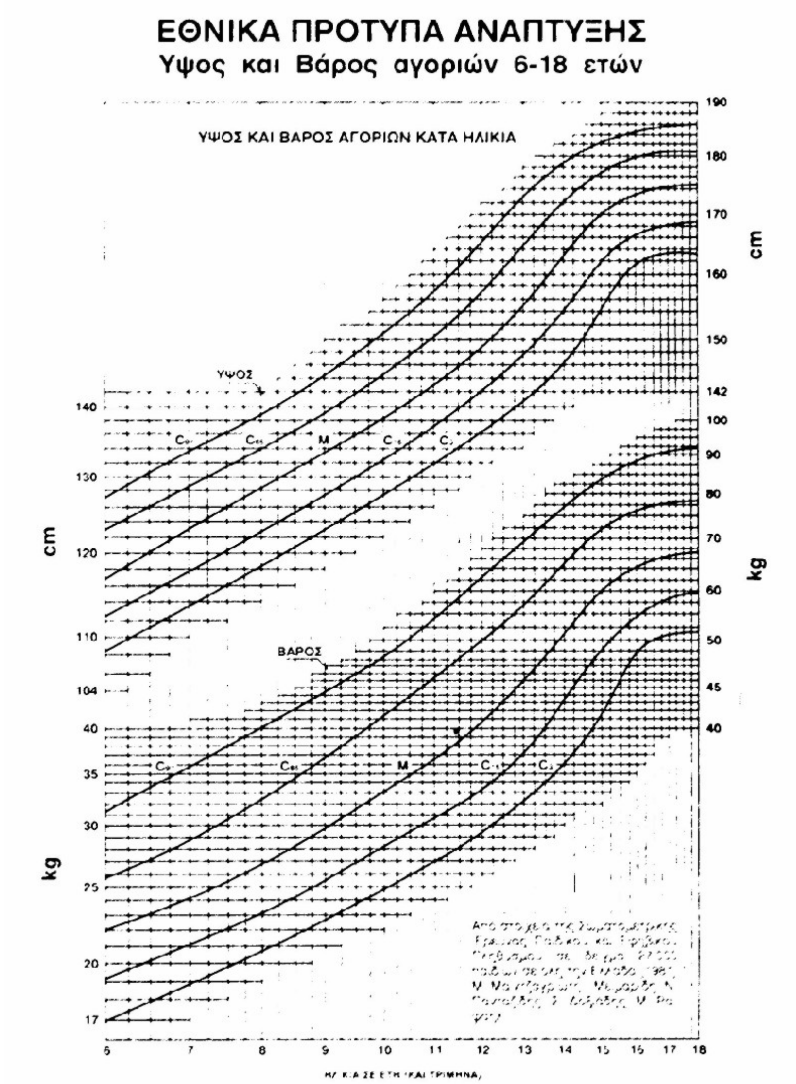
Ποιο διένυσε τη μεγαλύτερη απόσταση την 1η ώρα; Πόσα χιλιόμετρα;

Ερώτηση 4:

Πόση απόσταση διένυσε το αυτοκίνητο Β τη δεύτερη ώρα;

29. *Καμπύλη αύξησης ύψους – βάρους*

Στο διάγραμμα φαίνονται οι καμπύλες αύξησης ύψους - βάρους των αγοριών για τις ηλικίες 6 έως 18 ετών. (Θα το βρείτε στα βιβλιάρια υγείας που έχει κάθε παιδί).



Ερώτηση 1:

Ένα αγόρι 15 ετών με βάρος 45 κιλά το 2005, τι βάρος είναι φυσιολογικό να έχει το 1996;

Ερώτηση 2:

Ένα αγόρι 8 ετών έχει το μέσο ύψος για την ηλικία του, ποιο είναι αυτό και τι ύψος αναμένεται να έχει 18 ετών;

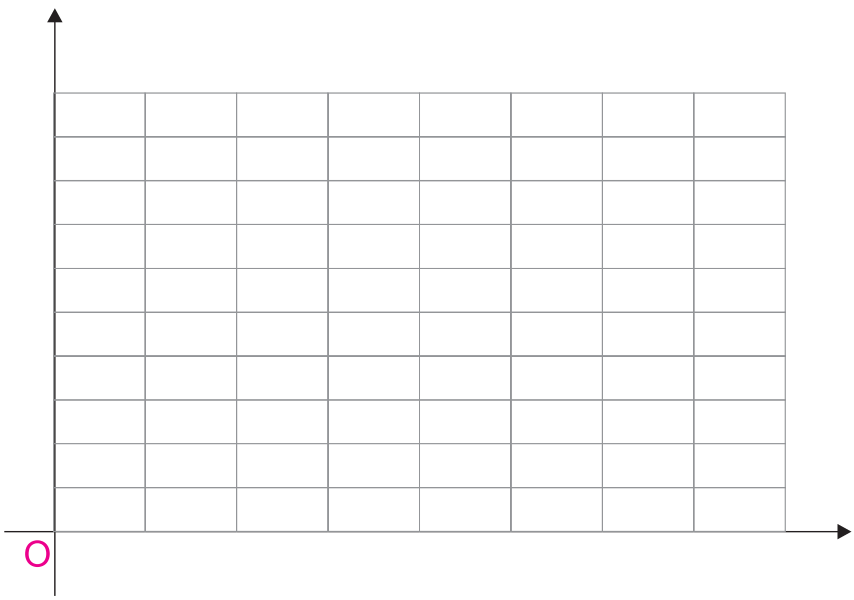
Ερώτηση 3:

Τι παρατηρείτε για τις καμπύλες, όταν πλησιάζουν στην ηλικία των 18 ετών; Πώς το εξηγείτε;

30. *Ψηλώνοντας*

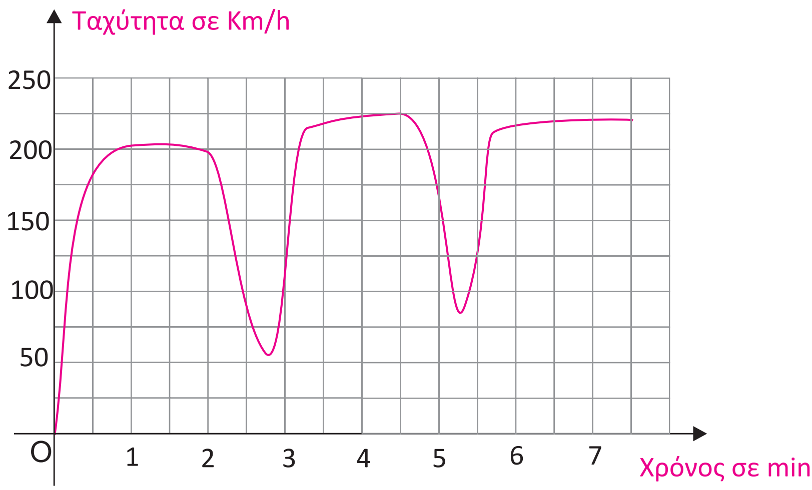
Σχεδιάστε στο παρακάτω γράφημα μία καμπύλη που θα μπορούσε να παριστάνει τη μεταβολή του ύψους ενός ανθρώπου από τη γέννησή του ως την ηλικία των 30 ετών. Βαθμολογήστε κατάλληλα τους άξονες.

Από το διαγωνισμό TIMSS (17 ετών)



31. *Πίστα αγώνων*

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή της ταχύτητας ενός αυτοκινήτου σε έναν πλήρη γύρο σε μία δοκιμαστική πίστα αγώνων.



Βασισμένο σε μια ιδέα του διαγωνισμού PISA 2000

Ερώτηση 1:

Πόσο χρόνο διήρκησε αυτός ο γύρος;

Ερώτηση 2:

Ποια η μέγιστη ταχύτητα που ανέπτυξε το αυτοκίνητο; Πότε σημειώθηκε αυτή;

Ερώτηση 3:

Πόσες κλειστές στροφές είχε η πίστα; Με τι ταχύτητα «παίρνει» κάθε στροφή;

Ερώτηση 4:

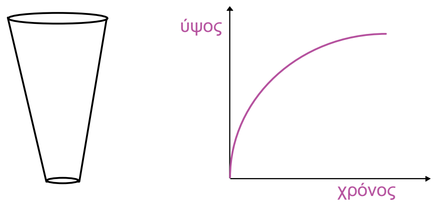
Τι ταχύτητα είχε τη στιγμή του τερματισμού;

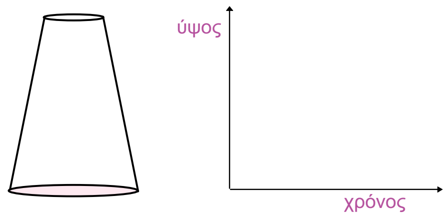
Ερώτηση 5:

Σε πόσα δευτερόλεπτα περίπου «πιάνει» τα 100 Km/h το αυτοκίνητο;

32. *Δοχεία νερού*

Γεμίζουμε με νερό το δοχείο του σχήματος με σταθερό ρυθμό και καταγράφουμε το ύψος του στο δοχείο σε σταθερά μικρά διαστήματα. Σχεδιάζουμε σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων την καμπύλη που δίνει το ύψος του νερού σε σχέση με το χρόνο.

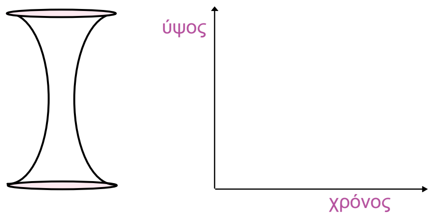




Ερώτηση 1:

Σχεδιάστε την αντίστοιχη καμπύλη για τα παρακάτω δοχεία.

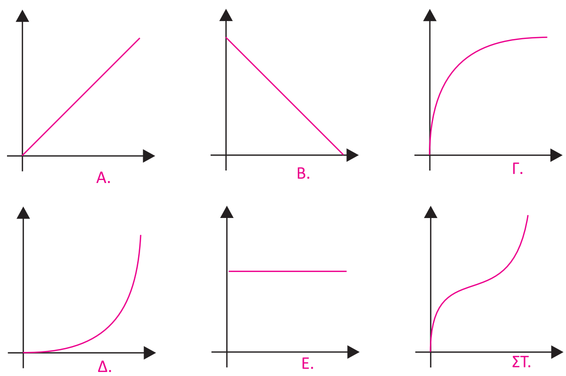
SingaporeMath.com inc

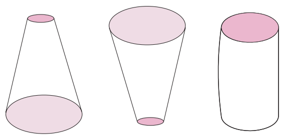


Ερώτηση 2:

Τα γραφήματα δείχνουν το ύψος του νερού στα δοχεία, καθώς τα γεμίζουμε.

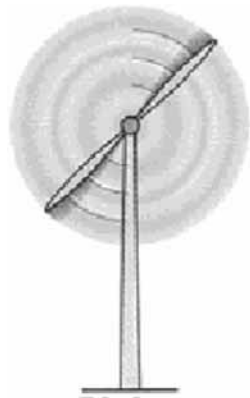
Ποιο ταιριάζει σε κάθε δοχείο;





1ο δοχείο 2ο δοχείο 3ο δοχείο

33. *Φύσα αεράκι...*



Η ισχύς (P) που παράγει μια ανεμογεννήτρια είναι ευθέως ανάλογη με το τετράγωνο του μήκους της διαμέτρου (d).

Επίσης, η ισχύς της είναι ευθέως ανάλογη με τον κύβο της ταχύτητας του ανέμου (V).

Ποιος από τους παρακάτω τύπους συνδέει την ισχύ της ανεμογεννήτριας με την ταχύτητα του ανέμου και τη διάμετρό της; Δώστε μαθηματική ή και φυσική εξήγηση.

Α. $P = c{\cdot}(d^2 + V^3)$ **Β.** $P = c{\cdot}d{\cdot}V$ **Γ.** $P = c{\cdot}(d + V)$

Δ. $P = c{\cdot}d^2{\cdot}V^3$ **Ε.** $P = d^2 + V^3$

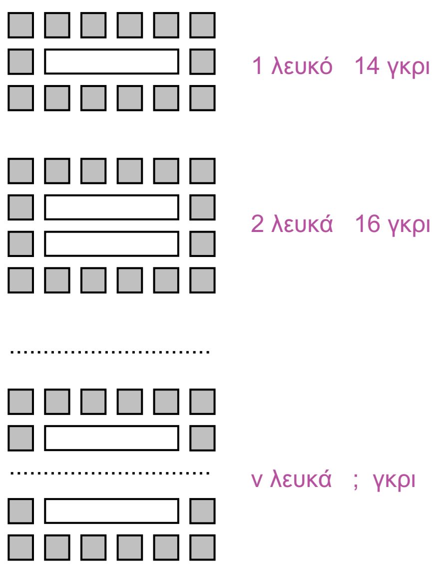
Παραλλαγή από: *Modeling and Algebra: How «pure» sould we be?*
Henk van der Kooij, Freudenthal Institute

---

34. *Ανακαλύπτοντας τους τύπους*

Γράψτε τον τύπο που συνδέει τον αριθμό (y) των γκρι τετραγώνων σε σχέση με τον αριθμό (x) των λευκών ορθογωνίων, στο διπλανό σχήμα.

GAP



35. *Μαθηματικά διαίτης...*

Μια απλή, πρακτική μέθοδος[8] με την οποία ελέγχουμε αν είναι ιδανική η σχέση ύψους – βάρους ενός **ενήλικου** ατόμου, είναι η εξής: Ύψος (σε εκατ.) – 100 = Βάρος (σε κιλά).

Π.χ. για ύψος 1,75 m = 175 cm ιδανικό βάρος είναι:
175 – 100 = 75 Kg.

Βασισμένη σε ένα θέμα από το GAP

Ερώτηση 1:

Κατασκευάστε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που δίνει το ιδανικό βάρος ατόμου σε σχέση με το ύψος του.

Ερώτηση 2:

Μια ακόμα μέθοδος με την οποία ελέγχουμε αν είναι ιδανική η σχέση ύψους – βάρους ενός ενήλικου ατόμου, είναι η εξής:

$$\text{Βάρος} / (\text{ύψος})^2 = \alpha, \quad \text{βάρος σε κιλά, ύψος σε μέτρα}$$

Αν α > 27, το (ενήλικο) άτομο είναι υπέρβαρο.

Ένα άτομο έχει ύψος 75 Kg και ύψος 1,75 m. Είναι υπέρβαρο;

(*Χρησιμοποιήστε υπολογιστή τσέπης*)

Ερώτηση 3:

Εφαρμόστε την παραπάνω μέθοδο για τα παρακάτω δεδομένα:

Ύψος	Βάρος
1,46	68
2,05	105
1,81	92
1,69	70

Ερώτηση 4:

Άν ένα άτομο έχει ύψος 1,78 cm, ποιο το μέγιστο δυνατό βάρος του για να μην χαρακτηριστεί υπέρβαρο;

---

[8] Η σχέση ύψους - βάρους κάθε ατόμου εξαρτώνται από πολύ περισσότερους παράγοντες. Οι παρακάτω «σχέσεις» δίνονται απλά ως ασκήσεις και δεν αντανακλούν πραγματικά δεδομένα. Εξ' άλλου δεν διευκρινίζεται καν αν αφορούν άνδρες ή γυναίκες.

36. *ISBN*

ISBN 978-0-7334-2609

978073342609

Ένα σύστημα ελέγχου κωδικών είναι το εξής: Τα πρώτα 4 ψηφία είναι ο κωδικός. Π.χ. 3-5-2-1. Το 5ο ψηφίο συμπληρώνεται, ώστε ο αριθμός να διαιρείται με πολλαπλάσιο του 10. Π.χ. 3 + 5 + 2 + 1 = 11, οπότε το 5ο ψηφίο είναι το 9.

Αν, λοιπόν, πληκτρολογήσουμε κατά λάθος 36219 (αντί 35219), θα εμφανιστεί η ένδειξη λάθους, εφόσον το άθροισμα των ψηφίων είναι 21 που δεν είναι πολλαπλάσιο του 10.

Ερώτηση 1η

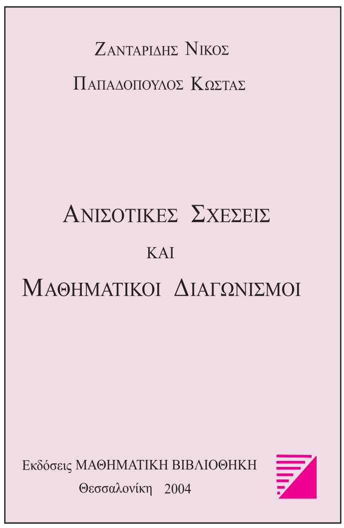
Συμπληρώστε το 5ο ψηφίο στον κωδικό 3708........

Ερώτηση 2η

Αν γίνει λάθος σε δύο ψηφία, υπάρχει περίπτωση το ψηφίο ελέγχου να μην εντοπίσει το σφάλμα; Η μέθοδος αυτή ελέγχει σφάλμα εναλλαγής ψηφίων;

Ερώτηση 3η

Μία εξελιγμένη παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου χρησιμοποιούταν για τους κωδικούς ISBN των βιβλίων. Ο κωδικός ήταν δεκαψήφιος. Τα τρία πρώτα ψηφία δήλωναν τη χώρα (Ελλάδα 960). Τα επόμενα 4 τον κωδικό του εκδοτικού οίκου (π.χ. 3541). Τα άλλα δύο τον κωδικό του βιβλίου (π.χ. 25). Το τελευταίο ήταν το ψηφίο ελέγχου. Για να το υπολογίσουμε, πολλαπλασιάζουμε κάθε ψηφίο διαδοχικά με 10, 9, 8, 7, ..., 2, κατόπιν προσθέτουμε και συμπληρώνουμε το τελευταίο ψηφίο, ώστε ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 11. Ποιο το τελευταίο ψηφίο του ISBN: 960–3541–25– ... ;



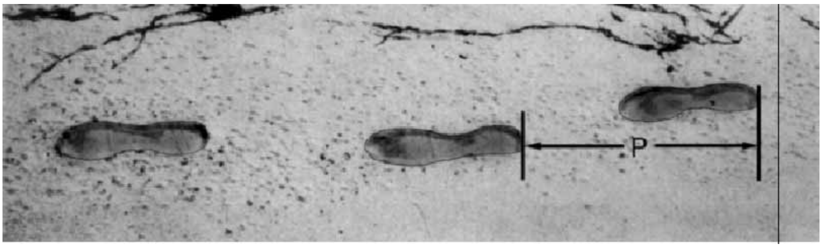
Ερώτηση 4η

Το διπλανό βιβλίο εκδόθηκε το 2004 από τις εκδόσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ του **Χάρη Βαφειάδη**, που έχουν κωδικό 7991, στο σύστημα ISBN Ελλάδος. Ο κωδικός του βιβλίου ήταν 04. Ποιο ήταν το ψηφίο ελέγχου του ISBN;

Ερώτηση 5η

Ένα βιβλίο έχει ISBN: 960 – 2345 – 2... – 5. Ποιο είναι το ψηφίο που λείπει;

37. *Βηματισμός*



Στην παραπάνω φωτογραφία βλέπετε τις πατημασιές κάποιου άνδρα. Η απόσταση από τη φτέρνα της μιας πατημασιάς μέχρι τη φτέρνα της άλλης αποτελεί το μήκος ενός βήματος, το οποίο ονομάζουμε P. Ο βηματισμός των ανδρών εκφράζεται από τον τύπο $\frac{\nu}{P}=140$. Ο τύπος δείχνει κατά προσέγγιση την σχέση ανάμεσα στο ν και στο P, όπου ν το πλήθος των βημάτων που κάνει ένας άνδρας ανά λεπτό και P το μήκος σε μέτρα (m) του βήματος του άνδρα.

Ερώτηση 1η

Ο Γιάννης κάνει 70 βήματα ανά λεπτό. Ποιο είναι το μήκος του βήματός του; Υπολογίστε το χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο.

Ερώτηση 2η

Το μήκος βήματος του Ανδρέα είναι 0,80 μέτρα. Να υπολογίσετε την ταχύτητα βαδίσματος του Ανδρέα, σε μέτρα ανά λεπτό και σε χιλιόμετρα ανά ώρα, χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο.

Αυθεντικό θέμα του PISA 2003

Ερώτηση 3η

Ο διασκελισμός (μήκος βήματος) ενός άνδρα αλληλοεξαρτάται με την ταχύτητα βαδίσματος (αριθμό βημάτων ανά λεπτό); Γράψτε τη γνώμη σας; [9]

---

[9] Η 3η ερώτηση τίθεται ως προβληματισμός. Δεν μπορεί να αποτελέσει θέμα διαγωνισμού. Μία άποψη θα βρείτε στις υποδείξεις των θεμάτων.

2η ενότητα

Γεωμετρία

Χώρος και Σχήμα

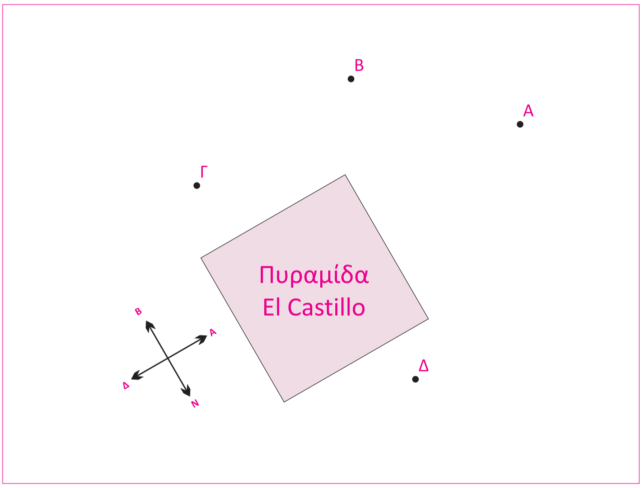
Τα **σχήματα** τα συναντάμε παντού: στον προφορικό λόγο, στη μουσική, στην κυκλοφορία στο δρόμο, στις οικοδομικές κατασκευές και στην τέχνη κλπ. Οι γέφυρες, ο αστερίας, οι νιφάδες του χιονιού είναι σχήματα. Τα **γεωμετρικά σχήματα** αποτελούν τα απλά μοντέλα τα οποία μας βοηθούν να απεικονίσουμε τα αντικείμενα που μας περιβάλλουν.

Η μελέτη των σχημάτων απαιτεί να κατανοήσουμε τις **ιδιότητες** των αντικειμένων και τις σχέσεις μεταξύ τους. Πρέπει να μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε στο **χώρο** τα σχήματα που απεικονίζουν αντικείμενα. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αντιληφθούμε τη σχέση ανάμεσα στο πραγματικό σχήμα και στην οπτική του απεικόνιση, όπως ακριβώς συμβαίνει με μια πόλη και τη φωτογραφία ή το χάρτη της πόλης. Θα πρέπει επίσης να μπορούμε να αντιληφθούμε τον τρόπο με τον οποίο τρισδιάστατα αντικείμενα απεικονίζονται ως δισδιάστατα, πώς σχηματίζονται οι σκιές και πώς ερμηνεύονται, τι είναι η προοπτική και τι απεικονίζει.

Έκδοση Κ.Ε.Ε. για τον PISA

38. *Πυραμίδα των Μάγιας*

Στην κάτοψη που φαίνεται παρακάτω φαίνεται η πυραμίδα της προκολομβιανής Αμερικής El Castillo στη Chichen Itza. Μερικοί τουρίστες τη φωτογραφίζουν από τα σημεία που φαίνονται στο σχήμα.



http://en.wikipedia.org/wiki/El_Castillo,_Chichen_Itza

Ερώτηση 1:

Πόσες όψεις της Πυραμίδας θα φαίνονται στη φωτογραφία που βγάζει ο Α;

Ερώτηση 2:

Ποιος βλέπει τις περισσότερες όψεις;

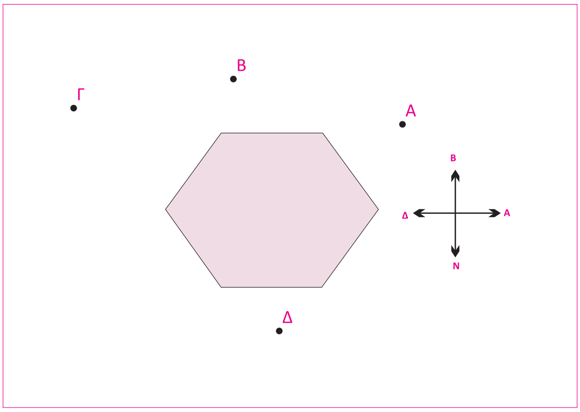
Ερώτηση 3:

Σχεδιάστε το χώρο στον οποίο πρέπει να κινηθεί ο Γ για να φωτογραφήσει ταυτόχρονα τη βόρεια και τη δυτική όψη της Πυραμίδας.

Βόρεια όψη της Πυραμίδας

Ερώτηση 4:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κάτοψη ενός κτιρίου. Ποιος βλέπει τις περισσότερες όψεις και ποιος τις λιγότερες;

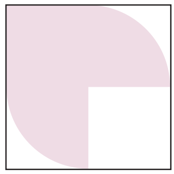


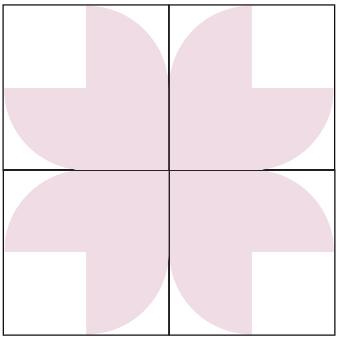
Ερώτηση 5:

Σχεδιάστε το χώρο στον οποίο πρέπει να κινηθεί ο Δ για να φωτογραφήσει ταυτόχρονα τη νότια, τη νοτιοδυτική και τη νοτιοανατολική όψη του κτιρίου.

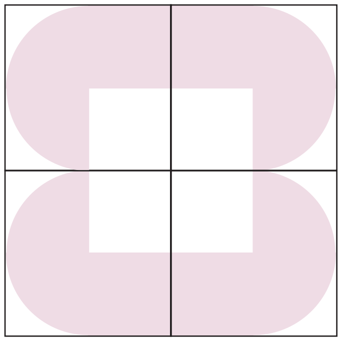
39. *Πλακάκια*

Το σχήμα δείχνει ένα κεραμικό πλακάκι. Ποιες συνθέσεις από τις παρακάτω δεν θα μπορούσε να γίνει με τέσσερα τέτοια πλακάκια;

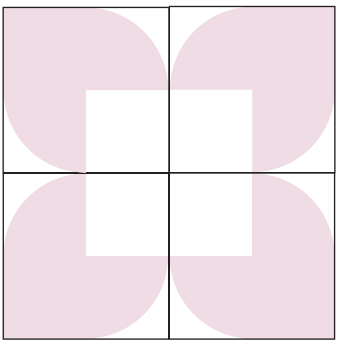




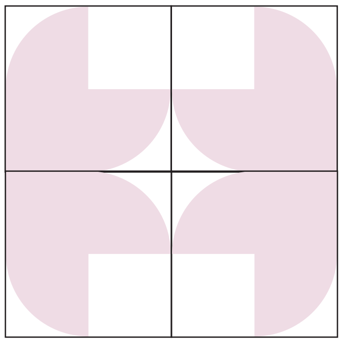
Α.



Β.



Γ.



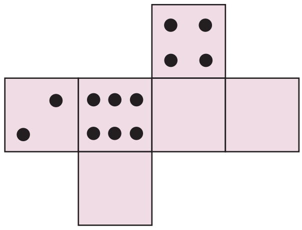
Δ.

40. *Ζάρια*

Σε κάθε ζάρι το άθροισμα των απέναντι εδρών είναι 7.

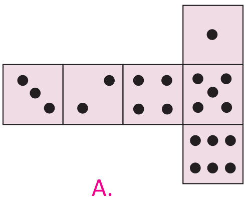
Ερώτηση 1:

Συμπληρώστε το διπλανό σχήμα.

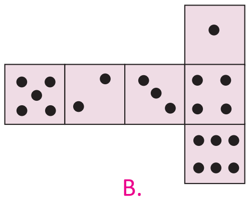


Ερώτηση 2:

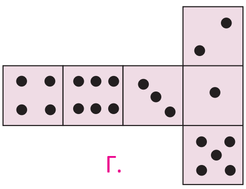
Κάποιο από τα παρακάτω ζάρια είναι πλαστό! Ποιο είναι; Πώς το βρήκες;



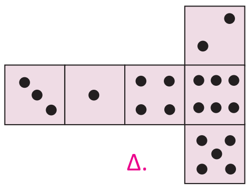
Α.



Β.



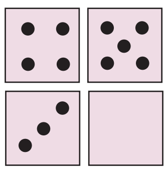
Γ.



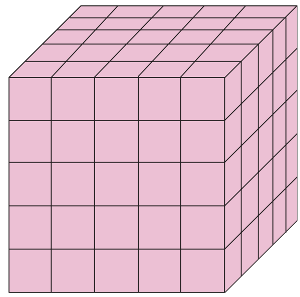
Δ.

Ερώτηση 3:

Στο σχήμα φαίνονται οι πάνω όψεις τριών ζαριών. Συμπληρώστε το τέταρτο, ώστε τα αθροίσματα των άνω όψεων να είναι ίσα με τα αθροίσματα των κάτω όψεων.



41. *Κύβοι*



Ένας κύβος αποτελείται από 125 μικρούς λευκούς κύβους ακμής 1 κολλημένους μεταξύ τους. Βουτάμε τον κύβο σε χρώμα και κατόπιν τους ξεκολλάμε (αφού ... στεγνώσει το χρώμα).

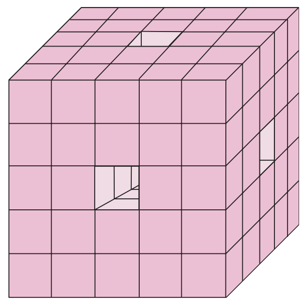
Ερώτηση 1:

Πόσοι έχουν μόνο μία έδρα βαμμένη;

Ερώτηση 2:

Πόσοι έχουν δύο έδρες βαμμένες; Πόσοι τρεις; Πόσοι παραπάνω; Πόσοι καμία;

Ερώτηση 3:



Ένας κύβος αποτελείται από μικρούς λευκούς κύβους ακμής 1 κολλημένους μεταξύ τους. Στο εσωτερικό του υπάρχουν τρεις κενές διαμπερείς* σήραγγες μεγέθους ενός κύβου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Βουτάμε τον κύβο σε χρώμα και κατόπιν τους ξεκολλάμε (αφού ... στεγνώσει το χρώμα).

Πόσοι έχουν μόνο μία έδρα βαμμένη;

(**διαμπερείς: ανοιχτές από έδρα σε έδρα*).

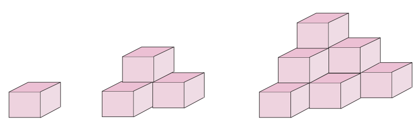
Μαθητικός διαγωνισμός **Kangaroo 2002**

Ερώτηση 4:

Από πόσους μικρούς κύβους αποτελείται το σχήμα;

Ερώτηση 5:

Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε σπιτάκια από μικρούς κύβους. Από πόσους κύβους αποτελείται το τελευταίο σπιτάκι ;



Α. 6 **Β.** 10 **Γ.**8 **Δ.** 9 **Ε.** Τίποτα από τα παραπάνω

Μπάμπης Στεργίου, Διαγωνισμός στα Μαθηματικά Δημοτικού (τάξη Ε΄)

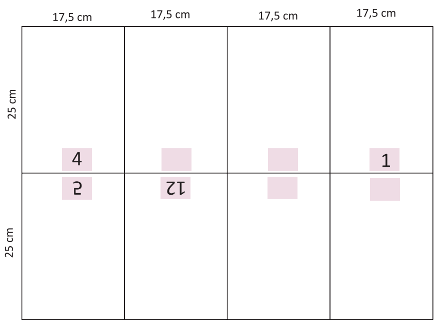
42. *Ο μονταδόρος*

Στα τυπογραφεία τα βιβλία τυπώνονται με τη μέθοδο offset συνήθως σε χαρτιά μεγέθους 70×100 cm ή 50×70 cm.

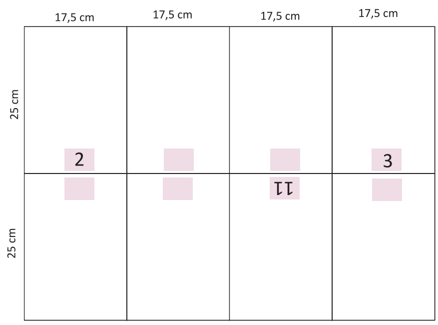
Κάθε σελίδα απλού βιβλίου, όπως αυτό που κρατάτε στο χέρι σας, έχει διαστάσεις 17,5×25 cm πριν ξακριστεί (κοπεί με το τυπογραφικό μαχαίρι).

Ένας μονταδόρος τοποθετεί κατάλληλα τις σελίδες του βιβλίου που θα τυπωθεί σε χαρτί 50×70 cm, ώστε όταν διπλωθεί τέσσερις φορές να είναι σωστά τοποθετημένες οι σελίδες.

Στο σχήμα φαίνονται οι δύο όψεις ενός δεκαεξασέλιδου. Τοποθετήστε τους αριθμούς των σελίδων που λείπουν.



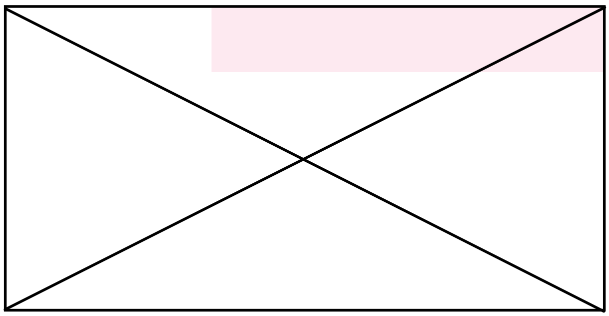
1η όψη



2η όψη

43. *Να γκρεμίσουμε τη ντουλάπα;*

Σε δωμάτιο με σχήμα ορθογώνιο βρίσκουμε πρακτικά το κέντρο του, όπου πρέπει να τοποθετηθεί στο ταβάνι το φωτιστικό, τοποθετώντας δύο νήματα ως διαγώνιες και σημειώνοντας το σημείο τομής τους. Στη μία γωνία όμως υπάρχει μια ορθογώνια εντοιχισμένη ντουλάπα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

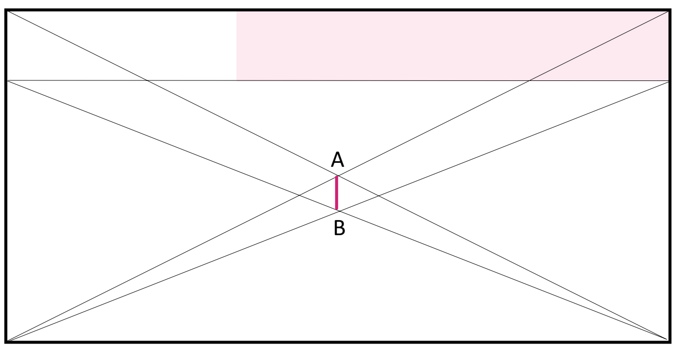


Ερώτηση 1:

Πώς μπορούμε να σημειώσουμε το κέντρο;

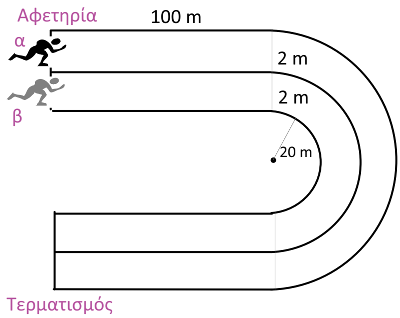
Ερώτηση 2:

Το δωμάτιο έχει διαστάσεις 6,4 × 4,2 m. Η ντουλάπα έχει διαστάσεις 3,8 × 1,6 m. Υπολογίστε τη απόσταση των σημείων Α, Β στο σχήμα.



44. *Κάποιος «κλέβει» ...*

Στο στίβο του διπλανού σχήματος οι δρομείς α και β ξεκινούν από την αφετηρία και σταματούν στο σημείο τερματισμού. Η στροφή είναι ημικύκλιο.



Ερώτηση 1:

Υπολογίστε τη διαφορά της διαδρομής που διανύουν οι δύο αθλητές. Πόσο μπροστά έπρεπε να βρίσκεται το σημείο εκκίνησης του ενός, για να είναι δίκαιος ο αγώνας; Ποιος είναι αυτός;

Ερώτηση 2:

Για τη διαδρομή των τετρακοσίων μέτρων πρέπει να σχεδιάσουμε ένα στίβο, που αποτελείται στον εσωτερικό διάδρομο από δύο ευθείες μήκους 120 μέτρων και δύο ημικύκλια.

α) Ποια η ακτίνα των ημικυκλίων;

β) Οι διάδρομοι έχουν πλάτος 12 μέτρων. Ποια η περίμετρος του εξωτερικού διαδρόμου;

γ) Βρείτε το εμβαδόν του στίβου.

Παραλλαγή από πρόβλημα Freudenthal Institute, Utrecht University

45. *Προσοχή, ο σκύλος δαγκώνει!*

Από δύο σημεία Α και Β, που απέχουν 30 m δένουμε δύο άγριους σκύλους. Το πρώτο με σκοινί 15 m και το δεύτερο με σκοινί 20 m.

Ερώτηση 1:

Κάντε ένα σχήμα και σημειώστε τις «επικίνδυνες» περιοχές για κάθε σκύλο. Γραμμοσκιάστε την περιοχή που κινδυνεύουμε και από τους δύο.

Ερώτηση 2:

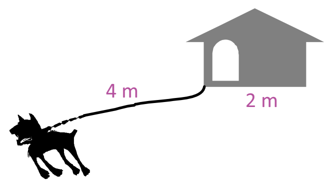
Διατυπώστε ως απλή μαθηματική άσκηση το παραπάνω πρόβλημα.

Ερώτηση 3:

Τα σημεία που απέχουν 10 cm από ένα σημείο Κ, βρίσκονται ή όχι πάνω σε κύκλο κέντρου Κ και ακτίνας 10 cm;

Ερώτηση 4:

Το σκοινί που κρατάει δεμένο το αγριόσκυλο στην άκρη του σκυλόσπιτου έχει μήκος 4 m. Το σκυλόσπιτο είναι τετράγωνο με πλευρά 2 m. Σχεδιάστε την περιοχή που καλύτερα θα ήταν να αποφεύγαμε...



46. *Απόσταση*

Ο Γιάννης μένει σε απόσταση ενός χιλιομέτρου από το σχολείο, ενώ η Ελένη σε απόσταση δυόμιση χιλιομέτρων.

Ερώτηση 1:

Μπορείτε να βρείτε πόσο απέχουν τα σπίτια τους;
Κάντε πρόχειρο σχήμα, για να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Freudentathal Institute, Utrecht University

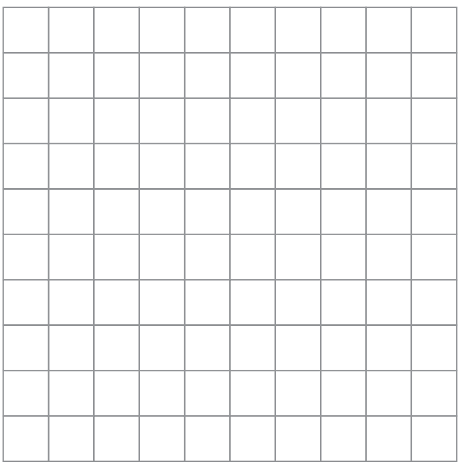
Ερώτηση 2:

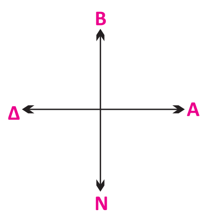
Ο Γιάννης μένει σε απόσταση ενός χιλιομέτρου από το σχολείο του, ενώ η Ελένη σε απόσταση δυόμιση χιλιομέτρων από το σχολείο της. Μπορείτε να βρείτε πόσο απέχουν τα σπίτια τους;

---

47. *Αποστάσεις σε κάτοψη*

Για να πάμε από το σχολείο στο σπίτι του Γιάννη βαδίζουμε 400 μέτρα ανατολικά και 300 μέτρα νότια. Για να πάμε στο σπίτι του Νίκου βαδίζουμε 200 μέτρα δυτικά και 500 μέτρα βόρεια. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το τετραγωνισμένο χαρτί, υπολογίστε την απόσταση των σπιτιών του Γιάννη και του Νίκου.





48. *Ο Ναυαγός*

Στην ταινία «Ο ναυαγός» ο Tom Hanks, μόνος επιζήσας από ένα αεροπορικό δυστύχημα, συλλογίζεται: «*Πετούσαμε μέσα στην καταιγίδα, δίχως προσανατολισμό για μία ώρα. Η ταχύτητά μας ήταν 400 μίλια την ώρα. 400 στο τετράγωνο είναι 160.000, επί 3,14 είναι 504.000 τετραγωνικά μίλια. Αλίμονο! Μπορεί να μη με βρουν ποτέ!*»

(Ένα μίλι είναι περίπου ίσο με 1.609 μέτρα· το ναυτικό μίλι είναι ίσο με 1.852 m).

Ερώτηση 1:

Γιατί ο Tom Hanks έκανε αυτές τις πράξεις και αυτό το συλλογισμό;

Αν δυσκολεύεστε σ' αυτό το ερώτημα, απαντήστε πρώτα στο επόμενο ερώτημα:

Ερώτηση 2:

Τι παριστάνει το εμβαδόν του υπολόγισε;

---

49. *Οικογενειακή πίτσα*

Ατομική πίτσα

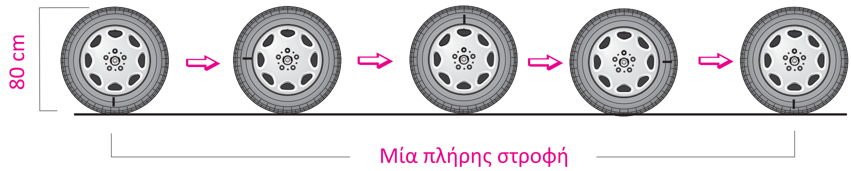
Οικογενειακή πίτσα 4 ατόμων

Ποια από τις παρακάτω είναι η διάμετρος της οικογενειακής πίτσας, αν ξέρουμε ότι έχει ίδιες θερμίδες με 4 ατομικές πίτσες.

Α. 32 cm Β. 48 cm Γ. 96 cm Δ. 192 cm

50. *Στροφόμετρο*

Μετράμε χιλιομετρικές αποστάσεις με τη βοήθεια ενός μετρητή, που τοποθετείται σε ένα τροχό (αυτοκινήτου, ποδηλάτου κ.λπ.) και καταγράφει τον αριθμό των στροφών του τροχού.



Ερώτηση 1:

Μπορείτε να περιγράψετε πώς μετράμε την απόσταση που έχει διανύσει ο παραπάνω τροχός μετά από 4 πλήρεις στροφές; Πόση απόσταση έχει διανύσει; (Δώστε προσέγγιση δεκάτων).

Ερώτηση 2:

Πόσες περίπου στροφές χρειάζονται για να κινηθεί ο τροχός για ένα χιλιόμετρο;

Ερώτηση 2:

Αν μετρήσουμε ένα χιλιόμετρο με τροχό μικρότερης ακτίνας, ο τροχός θα κάνει περισσότερες, τις ίδιες ή λιγότερες στροφές; Γιατί;

51. *Παπάκι ή scooter;*

Στην εικόνα βλέπουμε τρία μηχανάκια.

Βέσπα, τροχοί 12 ιντσών

Scooter, τροχοί 16 ιντσών

Παπάκι, τροχοί 21 ιντσών

(*Μία ίντσα ισούται με 2,54 εκατοστά*)

Ερώτηση 1:

Κάθε πλήρης στροφή του τροχού της βέσπας τη μετακινεί κατά .... cm.

Ερώτηση 2:

Πόσο πιο μακριά πάει ένα παπί από ένα scooter, σε 20 πλήρεις στροφές των τροχών τους;

---

52. *Ποδήλατο*

Ένα ποδήλατο έχει πεντάλ τριών ταχυτήτων με λόγους απόδοσης:

1η: 3 : 1 2η: 6 : 5 3η: 1 : 2

Η ακτίνα του τροχού του είναι 25 cm.

(*Λόγος απόδοσης π.χ. 6 : 5 σημαίνει ότι 6 στροφές του πεντάλ αποδίδουν 5 στροφές του τροχού.*)

Ερώτηση 1:

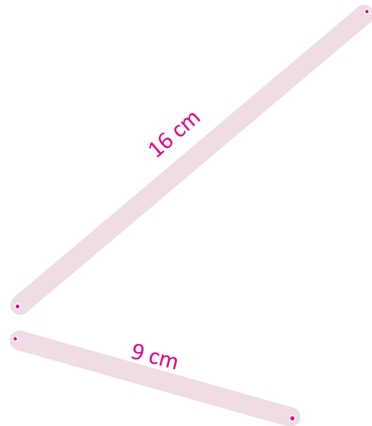
Ποια ταχύτητα είναι πιο βολική σε ανηφόρα; Γιατί;

Ποια δίνει μεγαλύτερη ταχύτητα σε ευθεία; Γιατί;

Ερώτηση 2:

Πόσες στροφές του πεντάλ θα μετακινήσουν το ποδήλατο κατά 31,4 m με τη δεύτερη ταχύτητα;

53. *Ξύλινα τρίγωνα*



Έχουμε δύο ξυλάκια με μήκη 16 και 9 εκατοστά. Χρειαζόμαστε ένα τρίτο για να φτιάξουμε ένα τρίγωνο.

Ερώτηση 1:

Τι μήκος μπορεί να έχει;

Ερώτηση 2:

Αν θέλουμε η μεγαλύτερη πλευρά να είναι 16 cm, τι μήκος μπορεί να έχει το ξυλάκι;

Ερώτηση 3:

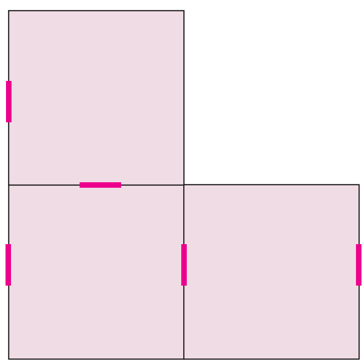
Αν θέλουμε να είναι ισοσκελές, τι μήκος μπορεί να έχει το ξυλάκι;

Ερώτηση 4:

Αν θέλουμε να είναι ορθογώνιο, θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερο των 19 cm ή μικρότερο των 13 cm; Γιατί;

---

54. *Λαχανόκηποι*



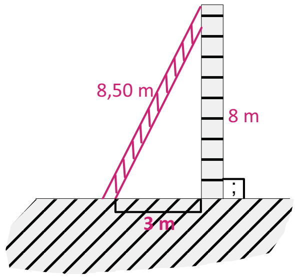
Ο κυρ Αντώνης έχει κουνέλια ελεύθερα στο κτήμα του. Για να μην ρημάξουν το λαχανόκηπό του, χρησιμοποίησε 55 m σύρμα περίφραξης, για να φτιάξει την περίφραξη που φαίνεται στο σχήμα. Οι λαχανόκηποι είναι τετράγωνοι και έχουν ξύλινες πόρτες 1 m. Ποιο το εμβαδό κάθε λαχανόκηπου;

55. *Έχει κανείς ένα αλφάδι;*

Μία σκάλα με μήκος 8,5 m ακουμπά στην κορυφή ενός τοίχου με ύψος 8 m.

Η βάση της σκάλας απέχει από τον τοίχο 3 m. Ο τοίχος είναι κάθετος στο έδαφος;

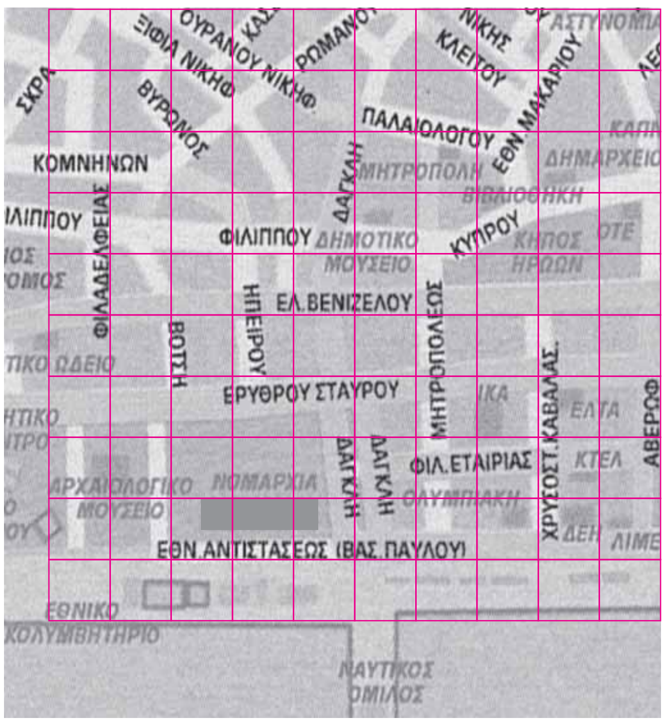
Παραλλαγή από ένα θέμα από το «Great Assessment Problems book», (GAP), Freudental Institute.



---

56. *Χάρτης πόλης*

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα τμήμα από έναν χάρτη της πόλης της Καβάλας, το οποίο το χωρίσαμε σε τετράγωνα εμβαδού 10 στρεμμάτων.



Ποιο το μήκος και ποιο το πλάτος την Νομαρχίας, που φαίνεται στο κάτω μέρος του χάρτη (οδός Εθν. Αντιστάσεως).

(Τα δεδομένα είναι υποθετικά)

57. *Ανταρκτική*

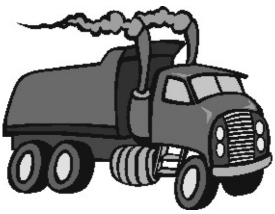
Προσεγγίστε το εμβαδόν της Ανταρκτικής με τη βοήθεια του χάρτη που δίνεται.

Αυτός είναι ένας χάρτης της Ανταρκτικής.

Διαγωνισμός PISA 2000

58. *Ο πονηρός βενζινοπώλης*

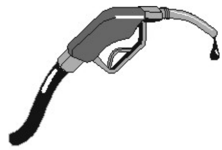
Ένας βενζινοπώλης διανέμει πετρέλαιο σε ντεπόζιτα καυστήρων κεντρικής θέρμανσης με ένα βυτίο. Χρησιμοποιεί ένα τεράστιο κυλινδρικό σωλήνα μήκους 40 μέτρων που έχει διάμετρο



8 cm. Ο μετρητής είναι τοποθετημένος στο σημείο όπου συνδέεται ο σωλήνας με το βυτίο.

Φροντίζει να δίνει ανηφορική κλίση στο σωλήνα από το βυτίο προς το ντεπόζιτο και όταν ο μετρητής δείξει τη συμφωνημένη ποσότητα, αποσυνδέει το σωλήνα από το ντεπόζιτο και «τραβάει» πίσω στο βυτίο το πετρέλαιο που έμεινε μέσα στο σωλήνα!

Πολλές φορές οι πελάτες το καταλαβαίνουν, αλλά απαξιούν «να κάνουν καυγά για μια τόσο ασήμαντη ποσότητα πετρελαίου»!



Ερώτηση 1:

Ερευνήστε αν όντως είναι ασήμαντη η ποσότητα πετρελαίου που χρεώνονται, δίχως να παραλαμβάνουν.

Ερώτηση 2:

Προτείνετε έναν τρόπο να αντιμετωπίζουν οι πελάτες την απώλεια του πετρελαίου.

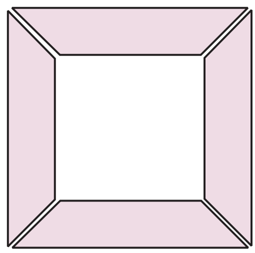
59. *Συμμετρία*

Ο Γιάννης λέει:

> «Ξέρω έναν κανόνα με τον οποίον μπορώ να πω πότε ένα τετράπλευρο έχει μία ευθεία ως άξονα συμμετρίας (ευθεία συμμετρικού διπλώματος). Αν τα τρίγωνα σε κάθε μεριά της ευθείας έχουν το ίδιο μέγεθος και σχήμα, τότε έχει την ευθεία ως άξονα συμμετρίας».

Εξηγήστε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με τον Γιάννη.

60. *Κορνίζες*



Θέλουμε να φτιάξουμε μια τετράγωνη κορνίζα, όπως στο σχήμα, με πλάτος 5 cm και μήκος πλευράς 20 cm.

Οι τεχνίτες (ξυλουργοί, κορνιζοποιοί κ.α.) έχουν ειδικά εργαλεία και σχεδιάζουν ακριβώς τις ευθείες κοπής. Εμείς δεν έχουμε.

Ερώτηση 1:

Πώς θα σημαδέψουμε το ξύλο, ώστε οι πλευρές της κορνίζας να ταιριάζουν μεταξύ τους;

Ερώτηση 2:

Έχουμε κορνιζόξυλο μήκους 3,55 m και πλάτους 5 cm. Πόσες τέτοιες κορνίζες μπορούμε να φτιάξουμε;

3η ενότητα

Στατιστική Πιθανότητες Συνδυασμοί

Αρχή της Αβεβαιότητας

Η σύγχρονη κοινωνία της πληροφορίας προσφέρει πληθώρα πληροφοριών που συχνά παρουσιάζονται με υψηλό βαθμό βεβαιότητας ως ακριβείς ή επιστημονικές. Ωστόσο, στην καθημερινότητα αντιμετωπίζουμε αμφισβητούμενα αποτελέσματα δημοσκοπήσεων, αναξιόπιστα μετεωρολογικά δελτία, καταστροφικούς σεισμούς και πολλές άλλες εκδηλώσεις της αβεβαιότητας του κόσμου μας.

Η δεσπόζουσα έννοια της **Αρχής της Αβεβαιότητας** μάς εισάγει σε δύο διαφορετικά πεδία: τα **δεδομένα** και την **τύχη**. Αυτά αποτελούν αντίστοιχα το κέντρο της μαθηματικής μελέτης στη **στατιστική** και στις **πιθανότητες**.

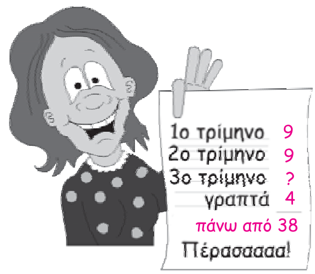
Οι Μαθηματικές εργασίες που έχουν ενδιαφέρον σε αυτόν τον τομέα, είναι η συλλογή δεδομένων, η ανάλυση των δεδομένων, η απεικόνισή τους, η πιθανότητα εμφάνισης ενός γεγονότος και η καταγραφή των συμπερασμάτων που προκύπτουν.

Έκδοση Κ.Ε.Ε. για τον PISA

61. *Η αγωνία του Ιούνη...*

Στα δύο τρίμηνα η Μαρία, μαθήτρια Γ΄ Γυμνασίου έχει άθροισμα βαθμών στα μαθηματικά μόλις 18. Στις γραπτές εξετάσεις του Ιουνίου έγραψε 4/20, κι όμως πέρασε! Πόσο το λιγότερο είχε στο (κρυφό) 3ο τρίμηνο;

(*Ο γενικός* ***μέσος όρος*** *9,5 στρογγυλοποιείται στο 10*).



62. *Ύψος μαθητών*

Μια μέρα κατά τη διάρκεια του μαθήματος των μαθηματικών, υπολογίστηκε το ύψος όλων των μαθητών. Το μέσο ύψος των αγοριών ήταν 160 cm και το μέσο ύψος των κοριτσιών ήταν 150 cm. Η Ελένη ήταν η ψηλότερη. Το ύψος της ήταν 180 cm. Ο Κώστας ήταν ο πιο κοντός. Το ύψος του ήταν 130 cm.

Δύο παιδιά απουσίαζαν την ημέρα εκείνη από την τάξη και ήρθαν την επομένη. Μετρήθηκε το ύψος τους και υπολογίστηκαν εκ νέου οι μέσοι όροι. Προς έκπληξη όλων, το μέσο ύψος των κοριτσιών και το μέσο ύψος των αγοριών δεν άλλαξαν. Ποιο από τα παρακάτω συμπεράσματα μπορούμε να εξάγουμε από αυτές τις πληροφορίες;

Ερώτηση 1:

Να κυκλώσεις το «Ναι» ή το «Όχι» για κάθε συμπέρασμα.

Συμπέρασμα	**Μπορούμε να εξάγουμε αυτό το συμπέρασμα;**
Και τα δύο παιδιά είναι κορίτσια.	Ναι / Όχι
Το ένα παιδί είναι αγόρι και το άλλο κορίτσι.	Ναι / Όχι
Και τα δύο παιδιά έχουν το ίδιο ύψος.	Ναι / Όχι
Το μέσο ύψος του συνόλου των μαθητών δεν άλλαξε.	Ναι / Όχι
Ο Κώστας παραμένει ο πιο κοντός.	Ναι / Όχι

(αυθεντικό θέμα του PISA)

Ερώτηση 2:

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(Δεν είχε ζητηθεί στο διαγωνισμό PISA).

63. *Ενόργανη γυμναστική*

Ένας αθλητής της ενόργανης γυμναστικής σε ένα άλμα με συντελεστή δυσκολίας 3,2 πήρε τις εξής βαθμολογίες: 7,9 6,4 8,1 8,5 8,6 8,0 8,5

Για να βγεί η βαθμολογία του, αφαιρούνται οι δύο ακραίοι βαθμοί (μέγιστος και ελάχιστος), βγαίνει ο **μέσος όρος** των υπολοίπων και τον πολλαπλασιάζουμε με το συντελεστή δυσκολίας του άλματος.

Ερώτηση 1:

Τι βαθμό πήρε ο αθλητής;

Ερώτηση 2:

Η μέγιστη βαθμολογία κάθε κριτή είναι 10. Τι ποσοστό της μέγιστης βαθμολογίας πήρε ο αθλητής, στο συγκεκριμένο άλμα;

Ερώτηση 3:

Αν δεν αφαιρούνταν οι ακραίες βαθμολογίες, το ποσοστό της βαθμολογίας του αθλητή ως προς τη μέγιστη, θα άλλαζε ή όχι και γιατί;

64. *Ζυγίζοντας τους μαθητές*

Το μέσο βάρος 24 μαθητών ενός τμήματος είναι 65 κιλά.

Ερώτηση 1:

Αν ανέβουν όλοι μαζί σε μια τεράστια ζυγαριά (π.χ. πλάστιγγα οχημάτων), ποια θα είναι η ένδειξη της ζυγαριάς;

Ερώτηση 2:

Χαρακτηρίστε ΣΩΣΤΕΣ ή ΛΑΘΟΣ τις παρακάτω προτάσεις:

Α.	Σίγουρα ένας από τους μαθητές ζυγίζει 65 κιλά.	ΣΩΣΤΟ ■ ΛΑΘΟΣ ■
Β.	Κάθε ένας από τους μαθητές ζυγίζει 65 κιλά.	ΣΩΣΤΟ ■ ΛΑΘΟΣ ■
Γ.	Οι μισοί από τους μαθητές είναι πάνω από 65 κιλά και οι άλλοι μισοί κάτω από 65 κιλά.	ΣΩΣΤΟ ■ ΛΑΘΟΣ ■
Δ.	Αν φύγουν από το τμήμα δύο μαθητές, ο ένας 69 κιλά και ο άλλος 61 κιλά, δεν θα αλλάξει ο μέσος όρος του βάρους των μαθητών του τμήματος.	ΣΩΣΤΟ ■ ΛΑΘΟΣ ■

65. *Καμένες λάμπες*

Σε ένα εργοστάσιο παραγωγής λαμπτήρων επιλέγονται από τη γραμμή παραγωγής κάθε μέρα 200 λαμπτήρες κι ελέγχονται για σφάλμα παραγωγής.

Ο αριθμός των ελαττωματικών λαμπτήρων που βρέθηκαν τις τελευταίες 10 ημέρες ήταν:

4 6 2 5 1 7 3 5 2 5

Ερώτηση 1:

Αν την τελευταία εβδομάδα η παραγωγή ήταν 5.000 λαμπτήρες, πόσες **αναμένεται** να είναι ελαττωματικές;

Ερώτηση 2:

Η εταιρεία ελέγχει έναν-έναν όλους τους λαμπτήρες της τελευταίας εβδομάδας. Βρίσκει 124 ελαττωματικούς. Τι σχολιάζετε, σε σχέση με την απάντησή σας στο ερώτημα (1);

Ερώτηση 3:

Το μέγιστο επιτρεπτό όριο ελλατωματικών λαμπτήρων καθορίστηκε σε ένα εργοστάσιο στο 3%. Από μία γραμμή παραγωγής ελέγχονται 1.845 λαμπτήρες. Πόσοι το λιγότερο και πόσοι το περισσότερο ελλατωματικοί αν βρεθούν, θα είναι συμβατό το δείγμα με τις προδιαγραφές;

66. *Διαγωνισμός σκοποβολής*

Τρεις φίλοι έγραψαν τα αποτελέσματά τους σε ένα διαγωνισμό σκοποβολής με αεροβόλο πιστόλι. Έριξαν 10 βολές με μέγιστη βαθμολογία το 20.

Παύλος:	8	8	10	10	10	11	12	17	18	19
Λεωνίδας:	5	5	8	9	10	13	16	18	19	19
Νίκος:	10	10	10	11	11	12	12	13	13	15

Ερώτηση 1:

Ποιος είχε τον καλύτερο μέσο όρο;

Ερώτηση 2:

Ποιος είχε πιο σταθερά αποτελέσματα;

Ερώτηση 3:

Επιτυχή λέμε τη βολή με βαθμολογία πάνω από 17. Ποιος είχε τις περισσότερες επιτυχείς βολές;

Ερώτηση 4:

Αν ήσασταν ο κριτής του διαγωνισμού, και φτιάχνατε τους κανόνες, (εννοείται ... πριν αρχίσει ο διαγωνισμός), ποιοι θα μπορούσαν να είναι, αν νικητής ήταν ο Λεωνίδας;

Ερώτηση 5:

Θα ήταν λογικό με κάποιον κανόνα να βγει νικητής ο Νίκος;

67. *Προεκλογική δημοσκόπηση*

Τέσσερις εφημερίδες δημοσιεύουν δημοσκοπήσεις, προβλέποντας ποιο κόμμα θα νικήσει στις εκλογές που πρόκειται να γίνουν στις 10 Μαΐου.

Κάποια από τα στοιχεία της δημοσκόπησης είναι τα παρακάτω:

Πανελλαδική δημοσκόπηση σε τυχαίο δείγμα 1.200 ατόμων την 10η Μαρτίου	Πανελλαδική δημοσκόπηση σε τυχαίο δείγμα 1.050 ατόμων την 25η Απριλίου	Τηλεφωνική δημοσκόπηση σε τυχαίο δείγμα 1.000 αναγνωστών την 5η Μαΐου	Ελεύθερη δημοσκόπηση μέσω της ιστο-σελίδας της από 10 Απριλίου ως 5 Μαΐου
1η εφημερίδα	***2η εφημερίδα***	***3η εφημερίδα***	***4η εφημερίδα***

Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες, ποια εφημερίδα πιστεύετε ότι κάνει την πιο **αντικειμενική** έρευνα; Δικαιολογήστε την άποψή σας.

68. *Μηνιαία έξοδα*

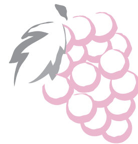
Τα έξοδα του περασμένου μήνα μιας επιχείρησης σε ευρώ ήταν:

Μισθοί	15.400
Ενοίκια	4.300
Προμήθειες	42.000
Μεταφορικά	105
Ταχυδρομικά	85
Έξοδα κίνησης - Διάφορα	1.205
ΔΕΗ	430
ΟΤΕ	510
Κινητά τηλέφωνα	320
ΣΥΝΟΛΟ:	**64.355**

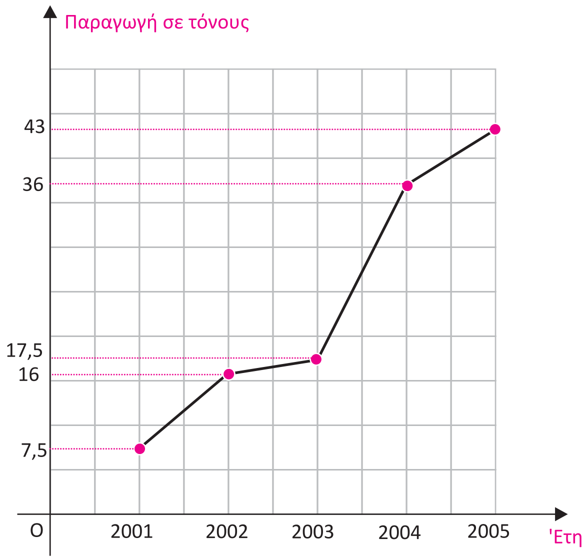
Ο διευθυντής ζητά από το λογιστή να τα παρουσιάσει με ραβδόγραμμα σε ένα φύλλο Α4. Ο λογιστής του λέει ότι δεν είναι και τόσο καλή ιδέα.

Γράψτε ένα λόγο που νομίζετε ότι αιτιολογεί την άποψη του λογιστή;

69. *Ο σταφυλοπαραγωγός*



Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η εξέλιξη της παραγωγής (σε τόνους) ενός σταφυλοπαραγωγού. Μία χρονιά αγόρασε νέα κτήματα και είχε τη μεγαλύτερη αύξηση στην παραγωγή του.



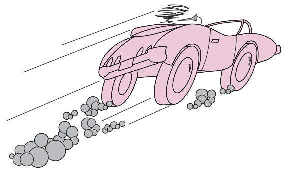
Ερώτηση 1:

Ποια χρονιά συνέβη αυτό;

Ερώτηση 2:

Πόσο το ποσοστό αύξησης της παραγωγής από το 2002 μέχρι το 2003 και πόσο από το 2002 ως το 2004;

70. *Midtown madness*



Μία στατιστική μελέτη για τα ποσοστά ατυχημάτων με οχήματα σε σχέση με την ταχύτητά τους μέσα στα όρια μιας πόλης δίνει τα εξής αποτελέσματα:[10]

Ταχύτητα	Ποσοστό
Κάτω από 35 Km/h	4%
35-45 Km/h	28%
45-55 Km/h	34%
55-65 Km/h	18%
65-75 Km/h	13%
Πάνω από 75 Km/h	3%
Σύνολο:	100%

Φαίνεται λοιπόν ότι ασφαλέστερο είναι να έχουμε ταχύτητα πάνω από 75 Km/h στο κέντρο της πόλης, εφόσον το ποσοστό ατυχημάτων είναι μικρότερο!

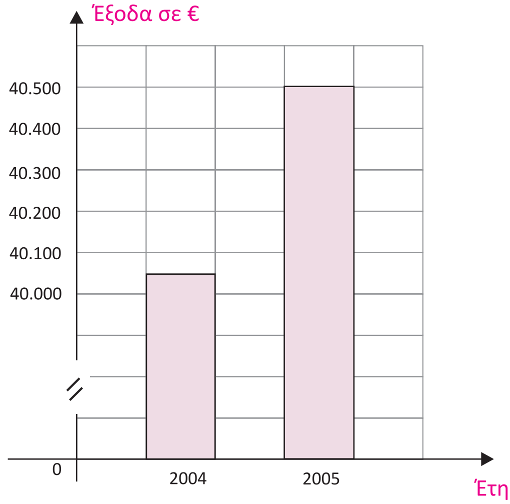
Τι έχετε να σχολιάσετε;

Κατασκευασμένο παράδειγμα,
Βασισμένο σε μια ιδέα από το: ***www.mathmistakes.com***

[10] Από το άρθρο: "*Η Αριθμοφοβία και οι ευθύνες των Μαθηματικών*", Ρίζος Γ., ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, τ. 3, Βέροια, Απρ. 2004.

71. *Απατηλό ραβδόγραμμα*

Έξαλλος, ο διευθυντής μιας μικρής επιχείρησης, μόλις βλέπει το γράφημα των ετησίων εξόδων, αρχίζει να φωνάζει ότι παρατηρεί τεράστια αύξηση των λειτουργικών εξόδων, αφού το ραβδόγραμμα από το 2004 στο 2005 σχεδόν διπλασιάζεται!

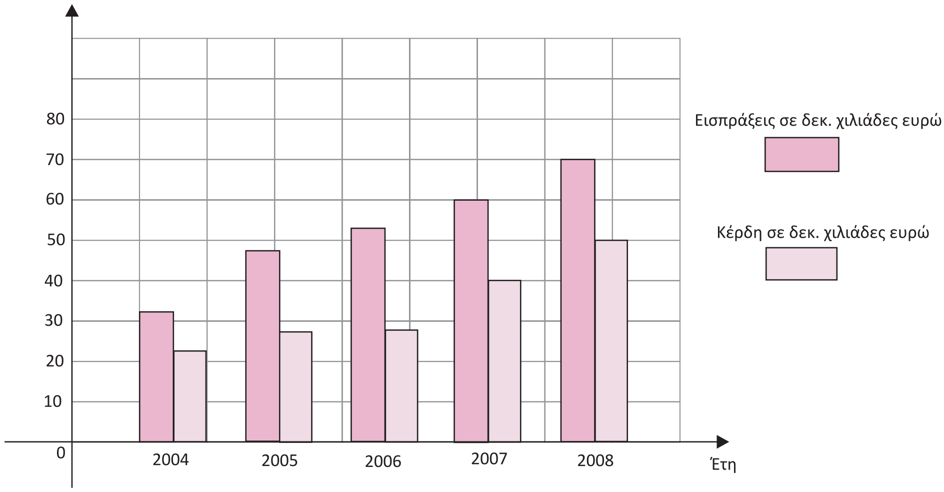


Ο λογιστής προσπαθεί να τον καθησυχάσει και στο τέλος τον πείθει. Πώς άραγε;

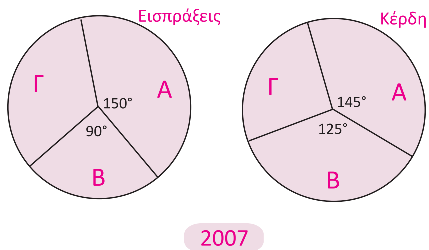
Με βάση μια ιδέα από το βιβλίο: ***Paulos John Allen,***
«A Mathematician Reads the Newspaper», Basic Books, N.Y., 1995

72. *Διαβάζοντας τα διαγράμματα*

Οι ετήσιες εισπράξεις και τα κέρδη σε ευρώ μιας εμπορικής επιχείρησης φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα.



Τα διπλανά κυκλικά διαγράμματα δείχνουν την κατανομή εισπράξεων και κερδών στα καταστήματα Α, Β και Γ της επιχείρησης για το 2007.



Ερώτηση 1:

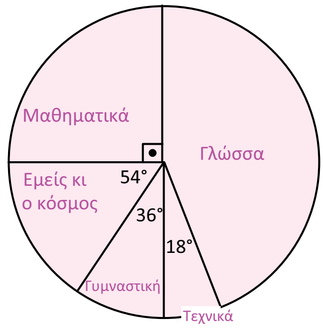
Ποιες οι εισπράξεις και ποια τα κέρδη της επιχείρησης από το κατάστημα Γ για το έτος 2007;

Ερώτηση 2:

Ποια χρονιά είχε τη μεγαλύτερη είσπραξη; Πόσα ήταν τα εξοδά της εκείνη τη χρονιά;

73. *Ωρολόγιο πρόγραμμα*

Στο κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η κατανομή των μαθημάτων κατά εβδομάδα της Α΄ Δημοτικού.



Ερώτηση 1:

Αν τα Μαθηματικά διδάσκονται μία ώρα κάθε μέρα, συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Μάθημα	**Ώρες**
Γλώσσα	
Μαθηματικά	
Εμείς κι ο κόσμος	
Τεχνικά	
Γυμναστική	
Σύνολο:	

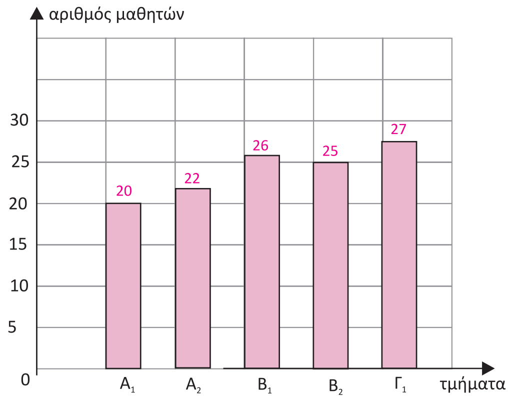
Ερώτηση 2:

Φτιάξτε ένα εβδομαδιαίο πρόγραμμα μαθημάτων για την Α΄ Γυμνασίου. Τι πρέπει να προσέξουμε στην κατανομή των ωρών;

ΩΡΕΣ	**ΔΕΥΤΕΡΑ**	**ΤΡΙΤΗ**	**ΤΕΤΑΡΤΗ**	**ΠΕΜΠΤΗ**	**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ**
1η					
2η					
3η					
4η					

74. *Επαρχιακό Γυμνάσιο*

Σε ένα επαρχιακό Γυμνάσιο ο αριθμός των μαθητών φαίνεται στο ραβδόγραμμα:



Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

Ερώτηση 1:

Ποια η πιθανότητα να είναι από το τμήμα B_1;

Ερώτηση 2:

Από ποιο τμήμα θα ήταν πιθανότερο να είναι;

Ερώτηση 3:

Από ποια τάξη θα ήταν πιθανότερο να είναι;

Ερώτηση 4:

Αν τα κορίτσια του B_2 είναι 13, ποια η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι από το B_2;

75. *Δελτίο καιρού*

Το δελτίο καιρού για αγρότες αναφέρει: «*Αύριο στην περιοχή του κάμπου της Μεσαράς θα βρέξει με πιθανότητα 70% από τις 12 μ. ως τις 8 μ.μ.*».

Με βάση την παραπάνω πρόγνωση, είναι **σωστές** ή **λάθος** οι προτάσεις:

Α. Στο 70% του χρόνου από τις 12 μ. ως τις 8 μ.μ. θα βρέχει στον κάμπο της Μεσαράς. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

Β. Στο 70% της έκτασης του κάμπου της Μεσαράς θα βρέχει αύριο από τις 12 μ. ως τις 8 μ.μ. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

Γ. Το 70% της φετινής βροχής στον κάμπο της Μεσαράς θα πέσει αύριο από τις 12 μ. ως τις 8 μ.μ. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

Δ. Είναι πιο πιθανό το ενδεχόμενο να βρέξει αύριο από τις 12 μ. ως τις 8 μ.μ. στον κάμπο της Μεσαράς από το ενδεχόμενο να μη βρέξει. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

---

76. *Ο τυχερός παίχτης*

Έχουμε ρίξει ένα ζάρι τρεις φορές. Και τις τρεις φέραμε εξάρι. Σκοπεύουμε να το ξαναρίξουμε μία ακόμα φορά. Χαρακτηρίστε ως **σωστές** ή **λάθος** τις προτάσεις:

Α. Είναι αδύνατο να φέρουμε έξι ξανά. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

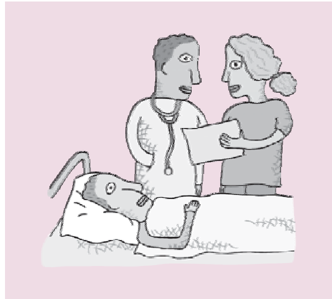
Β. Με την τύχη που έχουμε, σίγουρα θα φέρουμε έξι. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

Γ. Αφού ρίχνουμε τέσσερις φορές, είναι $\frac{1}{4}$. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

Δ. Είναι $\frac{1}{6}$, όπως σε κάθε ρίψη. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

Ε. Είναι 50% να φέρουμε έξι και 50% να μη φέρουμε έξι. ΣΩΣΤΗ ■ ΛΑΘΟΣ ■

77. *Η επιδημία*



Ένας επιστήμονας προβλέπει την εξάπλωση μιας επιδημίας σε μια περιοχή για τα επόμενα 5 χρόνια με πιθανότητα 60%.

Τι πιστεύετε ότι εννοούσε:

Α. Αφού η πιθανότητα να εξαπλωθεί (60%) είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μην εξαπλωθεί (40%), θα έχουμε σίγουρα επιδημία στην περιοχή.

Β. Επειδή 60% = $\frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, τα τρία από τα επόμενα πέντε χρόνια θα έχουμε επιδημία στην περιοχή.

Γ. Στο 60% της περιοχής τα επόμενα πέντε χρόνια θα έχουμε επιδημία.

Δ. Η πιθανότητα να εξαπλωθεί η επιδημία στην περιοχή τα επόμενα πέντε χρόνια είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να μην εξαπλωθεί.

Ε. Το 60% των κατοίκων της περιοχής θα ασθενήσουν από την επιδημία μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια.

78. *Τα νούμερα του Τζόκερ*

Στο Τζόκερ, πέντε μπάλες κληρώνονται τυχαία ανάμεσα σε σαράντα πέντε πανομοιότυπες μπάλες που έχουν αριθμηθεί από το 1 έως το 45. Μία ακόμα (τζόκερ) κληρώνεται ξεχωριστά από 20 αριθμημένες από το 1 ως το 20. Πρώτοι νικητές του παιχνιδιού είναι αυτοί που επιλέγουν σωστά τα πέντε συν ένα νούμερα που έχουν κληρωθεί.

Ένα περιοδικό προβλέψεων δημοσιεύει τους αριθμούς που κέρδισαν τις προηγούμενες κληρώσεις, καθώς κι έναν κατάλογο των αριθμών που έχουν πολύ καιρό να κληρωθούν.

Χαρακτήρισε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις «Σωστή» ή «Λάθος».

Α.	Πιο πολλές πιθανότητες να κερδίσουν έχουν οι αριθμοί που κληρώθηκαν τον προηγούμενο διαγωνισμό, επειδή είναι τυχεροί αριθμοί.	ΣΩΣΤΗ ▫ ΛΑΘΟΣ ▫
Β.	Οι αριθμοί που κληρώθηκαν τον προηγούμενο διαγωνισμό έχουν λιγότερες πιθανότητες να κερδίσουν, αφού δύσκολα ένας αριθμός κληρωνεται δύο συνεχόμενες φορές.	ΣΩΣΤΗ ▫ ΛΑΘΟΣ ▫
Γ.	Οι πληροφορίες της εφημερίδας είναι άχρηστες για την πρόβλεψη των αριθμών της επόμενης εβδομάδας, επειδή είναι ίσες οι πιθανότητες να κληρωθεί οποιοσδήποτε συνδυασμός αριθμών.	ΣΩΣΤΗ ▫ ΛΑΘΟΣ ▫
Δ.	Περισσότερες πιθανότητες να κληρωθούν έχουν οι αριθμοί που δεν έχουν κληρωθεί εδώ και καιρό.	ΣΩΣΤΗ ▫ ΛΑΘΟΣ ▫

79. *Χίλια ευρώ*

Σε ένα κουτί έχουμε χίλια νομίσματα του 1 ευρώ. Τα αδειάζουμε σε ένα τραπέζι, απομακρύνουμε όσα έχουν προς τα πάνω την όψη με την κουκουβάγια, μετράμε τα υπόλοιπα και τα ξαναβάζουμε στο κουτί.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και καταγράφουμε τα αποτελέσματα στον πίνακα:

Ρίψεις	0	1	2	3	4	5
Αριθμός νομισμάτων που παραμένουν στο τραπέζι	1.000	545	278	131	64	29

Ερώτηση 1:

Είναι λογικά τα αποτελέσματα που καταγράψαμε; Γράψτε την άποψή σας.

Ερώτηση 2:

Αν είχαμε αρχικά 20 νομίσματα, θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε **με την ίδια** ακρίβεια το παραπάνω πείραμα;

80. *Τυπικά προσόντα*

Για να προσληφθεί κάποιος σε μια εταιρεία πρέπει να έχει πτυχίο πιστοποίησης ξένης γλώσσας ή πτυχίο πιστοποίησης γνώσης υπολογιστών ή ... και τα δύο. Το 78% των προσληφθέντων έχει πτυχίο υπολογιστών και το 84% ξένης γλώσσας.

Ερώτηση 1:

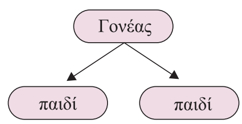
Τι ποσοστό των προσληφθέντων έχει και τα δύο;

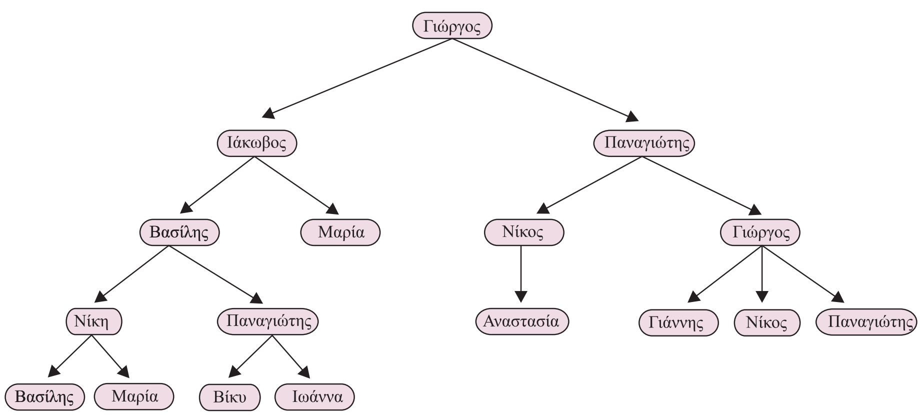
Ερώτηση 2:

Αν 31 έχουν και τα δύο πτυχία, πόσοι προσελήφθησαν τελικά;

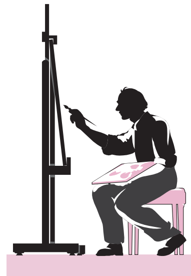
81. *Οικογενειακό δεντρόγραμμα*

Στο διπλανό **δεντρόγραμμα** συνδέονται γονείς με τα παιδιά τους. Ποιος είναι ο εγγονός του γιου του αδελφού του παππού του Γιάννη;





82. *Σετ ζωγραφικής*



Σε ένα κατάστημα με είδη ζωγραφικής βρίσκουμε τις παρακάτω προσφορές:

Τρίποδο	18 €
Παλέτα	4 ή 6 ή 8 €
Σετ πινέλα	8 ή 12 €
κασετίνα με μπογιές	12 ή 18 €
μουσαμάδες	5 ή 7 €

Για να φτιάξουμε ένα σετ ζωγραφικής χρειαζόμαστε ένα από κάθε είδος από τα παραπάνω.

Ερώτηση 1:

Ποια η πιο φτηνή και ποια η πιο ακριβή σύνθεση;

Ερώτηση 2:

Πόσες διαφορετικές συνθέσεις μπορούμε να φτιάξουμε;

Ερώτηση 3:

Με 53 € ποιες διαφορετικές συνθέσεις μπορούμε να αγοράσουμε;

---

83. *Πιτσαρία*

Έχουμε 4 είδη (μπέικον, μανιτάρια, ζαμπόν, πιπεριές) για να προσθέσουμε σε μία πίτσα, εκτός από τα βασικά που περιλαμβάνονται υποχρεωτικά. Κάθε πίτσα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο απ' αυτά τα είδη. Γράψτε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς που μπορείτε να φτιάξετε.

84. *Τιμοκατάλογος*

Σε ένα τιμοκατάλογο ενός ταχυφαγείου διαβάζουμε:

Τιμοκατάλογος

Τυριά:		Αλλαντικά:		Σαλάτες - σως:	
Γραβιέρα	0,60 €	Σαλάμι	1,00 €	Ντομάτα	0,50 €
Γκούντα	0,60 €	Ζαμπόν	1,00 €	Μαρούλι	0,50 €
Κασέρι	0,70 €	Καπνιστό	1,20 €	Σως του σεφ	0,90 €
				Κηπουρού	0,90 €
ψωμάκι του τοστ:	0,50 €			Ρωσική	0,90 €

Επιλέγουμε ένα είδος από κάθε κατηγορία.

Ερώτηση 1:

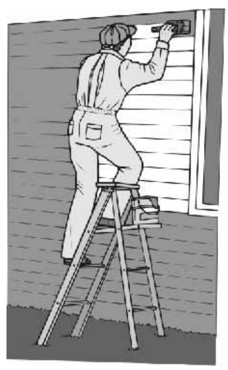
Πόσοι οι δυνατοί διαφορετικοί συνδυασμοί;

Ερώτηση 2:

Ποιο το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο κόστος ενός τοστ, επιλέγοντας ένα είδος από κάθε κατηγορία;

Ερώτηση 3:

Πόσα διαφορετικά τοστ κόστους 3 € μπορούμε να παραγγείλουμε;



85. *Το πρόβλημα του μπογιατζή...*

Θέλουμε να βάψουμε μια παλιά αποθήκη. Έχουμε πέντε κουτιά χρώμα, άσπρο, μπεζ, γαλάζιο, ζαχαρί και λαδοπράσινο. Αποφασίζουμε να ανακατέψουμε δύο απ' αυτά. Πόσους συνδυασμούς μπορούμε να κάνουμε; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

GAP

Απαντήσεις - Προεκτάσεις

Ενότητα 1η *ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ*

1. *Αγώνες δρόμου*

1.1 **(Γ) Εξήγηση:**

Οι χρόνοι των γυναικών είναι στα υπόλοιπα αγωνίσματα μεγαλύτεροι των ανδρών, οπότε **είναι λογικό** αυτό να συμβαίνει και στα 400 m. Απορρίπτεται η (Α).

Επίσης η διαφορά των χρόνων ανδρών-γυναικών αυξάνει όσο αυξάνει η απόσταση, άρα είναι λογικό να επιλέξουμε τη (Γ).

1.2 1 min 54,87 s = 60 s + 54,87 s = 114,87 s.

1.3 Θα μπορούσαν να αναφερθούν δύο από τις παρακάτω εξηγήσεις:

- Οι ανθρωποι έχουν καλύτερη υγεία και καλύτερες συνθήκες ζωής και διατροφής, σε σχέση με τις προηγούμενες δεκαετίες.
- Οι μέθοδοι προπόνησης είναι βελτιωμένοι και επιστημονικά σχεδιασμένοι.
- Τα ρούχα και τα παπούτσια των αθλητών βελτιώνουν τις επιδόσεις τους.
- Οι αθλητικοί στίβοι είναι βελτιωμένοι.
- Συχνά αποδεικνύεται ότι κάποιες από τις επιδόσεις ήταν αποτέλεσμα χρήσης παράνομων ουσιών (αναβολικών) που δεν ανιχνεύοταν στη διάρκεια των αγώνων.

1.4 Στα δύο πρώτα ερωτήματα η απάντηση είναι **όχι**. Στο (Α) με την αιτιολογία ότι δεν μπορούν να προβλεφθούν αστάθμητοι παράγοντες: συνθήκες αγωνιστικού χώρου, τυχόν ατυχήματα, κατάσταση των αθλητών τη στιγμή των αγώνων κ.α.

Προσοχή: Στο (Β) δεν μας ρωτούν τη γνώμη μας για το αν θα γίνει παγκόσμιο ρεκόρ. Η ερώτηση αφορά το αν μπορεί αυτό να προβλεφθεί επιστημονικά. Η απάντηση είναι ότι η επιστημονική έρευνα δεν μπορεί να προβλέψει ένα γεγονός που εξαρτάται από πλήθος αστάθμητων παραγόντων.

Στο (Γ) απαντάμε ότι η επιστημονική έρευνα μπορεί να συγκρίνει τις επιδόσεις των ίδιων αθλητών όταν τρέχουν σε ευθεία ή σε κυκλική πορεία.

2. *Αθήνα 2004*

2.1 Διαφορά 1ης – 2ης: 5,71 m 3ης – 4ης: 0,06 m 1ης – 6ης: 8,76 m

2.2 9 εκατοστά του δευτερολέπτου. Όχι, γιατί οι διαφορές των χρόνων είναι πολύ μικρές για να γίνουν αντιληπτές με απλή παρατήρηση. Χρησιμοποιείται η τεχνική της φωτογράφησης ακριβείας τη στιγμή του τερματισμού (photo finish).

3. *Σκάλα αλουμινίου*

3.1 Σχηματίζονται 16 διαστήματα από τη βάση κάθε σκαλοπατιού ως την επόμενη. 352 : 16 = 22 cm.

Για να βρούμε το κενό διάστημα μεταξύ δύο σκαλοπατιών αφαιρούμε το πάχος τους, οπότε είναι: 22 – 2 = 20 cm.

4. *Απλή αλλά παχυντική...*

4.1 Πλησιέστερα στο 600 είναι χάμπουργκερ και παγωτό (607 θερμ.)

5. *Καρτέλες μαθητών*

5.1 120·3 = 360 αριθμοί.

5.2 Μία μέθοδος είναι η ξεχωριστή καταμέτρηση των ψηφίων μονάδων, δεκάδων κι εκατοντάδων.

Όλοι οι αριθμοί (0 ως 9) χρησιμοποιήθηκαν ως ψηφία μονάδων ίσες φορές: 12 ο καθένας.

Ως ψηφία δεκάδων, οι αριθμοί από το 3 κι άνω χρησιμοποιήθηκαν 10 φορές, το 2 χρησιμοποιήθηκε 11 φορές, το 1 χρησιμοποιήθηκε 20 φορές και το 0 χρησιμοποιήθηκε 19.

Ως ψηφία εκατοντάδων, το 1 χρησιμοποιήθηκε 21 φορές και το 0 99 φορές. Οπότε, το 0, το 1 και το 2 χρησιμοποιήθηκαν περισσότερο.

ΣΧΟΛΙΟ:

Σε συνθήκες διαγωνισμού δύσκολα θα ζητηθεί αναλυτική εξήγηση ή καταμέτρηση των αριθμών. Αρκεί η παρατήρηση και η σωστή εκτίμηση.

6. *Ρέστα από το περίπτερο*

6.1 Όχι, διότι μαζί κόστιζαν 26 ευρώ, ενώ έχουμε 24 ευρώ.

6.2 Με μαθηματικά δεν μπορούμε να απαντήσουμε, γιατί αν ονομάσουμε x και y αντίστοιχα το κόστος παγωτού και κάρτας, είναι: $x + y = 26$, με $0 \leq x, y \leq 26$. Δηλαδή, θα μπορούσε το παγωτό να κοστίζει π.χ. 25 ευρώ και η κάρτα ... 1 ευρώ ή αντίστροφα.

Στο «πραγματικό κόσμο» κάτι τέτοιο θα ήταν παράλογο. Ούτε η κάρτα, ούτε το οικογενειακό παγωτό είναι λογικό να κοστίζει λιγότερο από 2 ευρώ, οπότε το άλλο να κοστίζει πάνω από 24 ευρώ.

Σε ένα διαγωνισμό σαν τον PISA η **αναμενόμενη** απάντηση είναι **ΝΑΙ**.

6.3 Για τον ίδιο λόγο, η αναμενόμενη απάντηση είναι ΝΑΙ.

7. *Shopping therapy*

7.1 Τα ψώνια μας κόστισαν 94,76 €. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ψωνίσαμε:
Μπουφάν: 29,58€, ανδρικά παπούτσια: 39,40€ και ηλεκτρικό τρυπάνι: 25,78€.

8. *Γονείς μαθηματικοί...*

8.1 999 – 100 = 899 €

8.2 Όχι! Χρησιμοποιεί κάθε ψηφίο μία φορά, άρα η διαφορά γίνεται: 987 – 102 = 885 €

8.3. **Το πρόβλημα της μητέρας:** Αφαιρέστε από τον μεγαλύτερο τριψήφιο το μικρότερο τριψήφιο αριθμό.

Το πρόβλημα του πατέρα: Αφαιρέστε από τον μεγαλύτερο τριψήφιο το μικρότερο τριψήφιο αριθμό χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθένα ψηφίο των αριθμών.

ΠΑΡΑΛΛΑΓΕΣ:

1) Βρείτε το μεγαλύτερο άθροισμα δύο τριψήφιων, αν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τα ψηφία 7, 8 και 9, τουλάχιστον μια φορά το καθένα.

Απ. 998 + 997 = 1.995

2) Τι υπόλοιπο θα μείνει, αν από το μικρότερο πενταψήφιο, με διαφορετικά ψηφία αφαιρέσουμε το μεγαλύτερο τετραψήφιο με διαφορετικά ψηφία;

Απ. 10.234 – 9.876 = 358

9. *Τουρνουά ποδοσφαίρου*

9.1 Φτιάχνουμε τον πίνακα.

Ομάδα	Βαθμοί	Νίκες	Ισοπαλίες	Ήττες	Τέρματα
Ένωση Χαλκηδόνας	12	4	0	0	9 – 3
Κεραυνός Δροσιάς	5	1	2	1	8 – 8
Μαραθώνας	4	1	1	2	7 – 8
Νίκη Σπάτων	4	1	1	2	6 – 9
Δόξα Κερατέας	3	1	0	3	10 – 12

Ελέγχουμε: Αγώνες 10, σύνολο βαθμών 28: 8 νίκες × 3 βαθμοί και 2 ισοπαλίες × 2 βαθμοί. Τέρματα Υπέρ = Κατά =40.

10. *Τιμοκατάλογοι τηλεφωνικών κλήσεων*

10.1 Digi phone: $0 + 0{,}08 \cdot 100 + 0{,}12 \cdot 20 + 0{,}20 \cdot 10 + 0{,}16 \cdot 40 = 8 + 2{,}4 + 2 + 6{,}4 = 18{,}8$ €

Data phone: $10 + 0{,}04 \cdot 100 + 0{,}06 \cdot 20 + 0{,}10 \cdot 10 + 0{,}08 \cdot 40 =$

$= 10 + 4 + 1{,}2 + 1 + 3{,}2 = 19{,}4$ €

Είναι φθηνότερο το τιμολόγιο της Digi phone

10.2 Όλες οι χρεώσεις της Data phone είναι οι **μισές** της Digi phone, αλλά επιβαρύνεται με 10 € μηνιαίο πάγιο. Οπότε, για συνδρομητές που χρησιμοποιούν λίγο το τηλέφωνο συμφέρει η Digi phone, ενώ για συνδρομητές που κάνουν πολλές κλήσεις συμφέρει η Data phone.

10.3 Αν το κόστος των κλήσεων με το τιμολόγιο της Digi phone είναι 20 €, το αντίστοιχο της Data phone είναι 10 €, οπότε μαζί με το πάγιο είναι ίδιο.

10.4 Πρέπει να ξεπερνά τα 20 € το τιμολόγιο της Digi phone. Π.χ. 140 μονάδες αστικών κλήσεων, 20 υπεραστικών, 10 διεθνών και 40 σε κινητό.

Digi phone: $0 + 0{,}08 \cdot 140 + 0{,}12 \cdot 20 + 0{,}20 \cdot 10 + 0{,}16 \cdot 40 = 11{,}2 + 2{,}4 + 2 + 6{,}4 = 22$ €

Data phone: $10 + 0{,}04 \cdot 140 + 0{,}06 \cdot 20 + 0{,}10 \cdot 10 + 0{,}08 \cdot 40 = 10 + 5{,}6 + 1{,}2 + 1 + 3{,}2 = 21$€

Είναι φθηνότερο το τιμολόγιο της Data phone

11. *Συντελεστές βαρύτητας*

11.1 **Βαθμοί για 1η ομάδα:**

	Α (1,2)	Β (0,9)	Γ (1,1)	Δ (0,8)	Σύνολο
Νίκος	19,2	10,8	14,3	7,2	51,5
Γιάννης	16,8	13,5	12,1	8,0	50,4
Ελένη	12,0	15,3	11,0	10,4	48,7

Ο Νίκος παίρνει την υψηλότερη βαθμολογία.

Βαθμοί για 2η ομάδα:

	Α (1,0)	Β (1,3)	Γ (0,7)	Δ (1,0)	Σύνολο
Νίκος	16,0	15,6	9,1	09,0	49,7
Γιάννης	14,0	19,5	7,7	10,0	51,2
Ελένη	10,0	22,1	7,0	13,0	52,1

Η Ελένη παίρνει την υψηλότερη βαθμολογία.

ΣΧΟΛΙΟ:

Σε συνθήκες διαγωνισμού, αν δε ζητείται δικαιολόγηση, συνήθως αρκεί η παρατήρηση και η σωστή εκτίμηση του αποτελέσματος, δίχως τις χρονοβόρες πράξεις.

Εδώ, παρατηρούμε ποιος μαθητής έχει υψηλότερη βαθμολογία στο μάθημα με υψηλό συντελεστή. Πάντως μια τέτοια απάντηση δεν είναι τεκμηριωμένη και είναι επικίνδυνη.

11.2 Στη 2η ομάδα.

11.3. Και οι τρεις έχουν ίδιο άθροισμα: 50 μονάδες.

11.4. Στην 1η ομάδα θα ωφελούταν η Ελένη και θα έχαναν οι άλλοι δύο.
Στη 2η ομάδα θα ωφελούταν ο Νίκος και θα έχαναν οι άλλοι δύο.

12. *Μηχανήματα αυτόματης ανάληψης χρημάτων*

12.1 Τα 30 € (Α)

12.2. Τα 10 και τα 30 €, γιατί δεν προκύπτουν από κανένα συνδυασμό των 20 και 50.
Τα υπόλοιπα ποσά σχηματίζονται ως εξής:

Προφανώς, τα πολλαπλάσια του 20 και του 50.

Ακόμη: $70 = 20 + 50$,

$90 = 2{\cdot}20 + 50$

$110 = 3{\cdot}20 + 50$

$130 = 4{\cdot}20 + 50$

Τα υπόλοιπα ως 100 + 70, 100 + 90 κ.ο.κ.

12.3. Το λιγότερο με 8 χαρτονομίσματα των 50 € και 3 των 20 €.
Το περισσότερο με 23 χαρτονομίσματα των 20 €.

13. *Συνάλλαγμα*

13.1 Επιλύουμε την αναλογία: $\dfrac{1\text{ €}}{1{,}42\ \$} = \dfrac{3.000\text{ €}}{x\ \$}$. Πήρε: $3.000{\cdot}1{,}42 = 4.260$ $.

13.2 756 : 540 = 1,4 οπότε 1 € αντιστοιχεί σε 1,4 \$.

13.3 Με την παλιά ισοτιμία, θα είχαμε: $\frac{1\,€}{1,42\,\$} = \frac{x\,€}{756\,\$}$

άρα θα έπαιρνε: 756 : 1,42 $\cong$ 532,39 €. Κέρδισε 7,61 €.

14. *Διεθνή τηλεφωνήματα*

14.1 Στο Λονδίνο δύο ώρες λιγότερο, δηλαδή 5 π.μ.
Στη Βοστώνη επτά ώρες λιγότερο δηλαδή μεσάνυχτα.

14.2 12 μ. με 2 μ.μ.

14.3 Από τις 2 μ.μ. ως τις 4 μ.μ.

15. *Ο θείος Σκρουτζ*

15.1 Με ένα δολλάριο θα μπορούσαν να αγοράσουν έξι ελέφαντες, άρα ένα δολλάριο έχει ίση αξία με 30 ρουπίες, οπότε οι πέντε ρουπίες μας κάνουν το ένα έκτο του δολλαρίου.

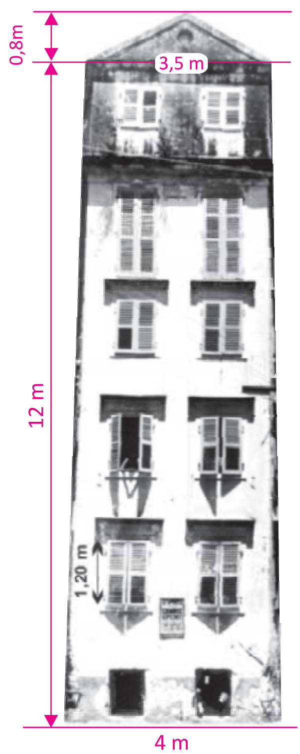
16. *Στα καντούνια της Κέρκυρας*

16.1 Μετράμε με το χάρακά μας το ύψος του παντζουριού στη φωτογραφία. Είναι 1,2 cm.
Οπότε η κλίμακα της φωτογραφίας είναι:

$$\frac{1,2\,\text{cm}}{1,2\,\text{m}} = \frac{1,2}{120} = \frac{1}{100}$$

Κάθε εκατοστό στο σχήμα αντιστοιχεί σε 100 cm, δηλαδή 1 m στην πραγματικότητα.

Μετράμε το **ύψος** του κτιρίου, που είναι συνολικά **12,8 m**.



ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ (*Για εργασία στην τάξη ή σε ομάδες μαθητών*):

Βρείτε το εμβαδόν της πρόσοψης.

Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι στο έδαφος το πλάτος είναι 4 m, ενώ στον 5ο όροφο είναι 3,5 m.

Η πρόσοψη αποτελείται από ένα **τραπέζιο** κι ένα **τρίγωνο**.

Το συνολικό εμβαδόν είναι:

$$\text{ΕΜΒΑΔΟ} = \frac{(4+3,5)\cdot 12}{2} + \frac{3,5\cdot 0,8}{2} = \frac{7,5\cdot 12}{2} + \frac{2,8}{2} = 45 + 1,4 = 46,4\ \text{m}^2$$

ΣΧΟΛΙΟ:

Το θέμα αυτό (μαζί με την προέκταση) δόθηκε ως ομαδική εργασία σε μαθητές Β΄ Γυμνασίου το 2007, στο Αθλητικό Γυμνάσιο της Κέρκυρας και παρουσιάστηκε, μαζί με άλλες εργασίες σε εκδήλωση του Σχολείου.

17. *Cheesecake*

17.1 Τα ποσά είναι ανάλογα. (Μπορούμε να κάνουμε και αναγωγή στη μονάδα).

Υλικά	4 άτομα	6 άτομα	8 άτομα	12 άτομα
Μπισκότα κανέλας θρυμματισμένα	300 gr	450 gr	600 gr	900 gr
Βούτυρο	100 gr	150 gr	200 gr	300 gr
Μαύρη ζάχαρη	20 gr	30 gr	40 gr	60 gr
Ζάχαρη άχνη	200 gr	300 gr	400 gr	600 gr
Κρόκοι αυγού	4 τεμ.	6 τεμ.	8 τεμ.	12 τεμ.
Τυρί κρέμα ή mascarpone	400 gr	600 gr	800 gr	1.200 gr
Γιαούρτι	200 gr	300 gr	400 gr	600 gr
Κρέμα γάλακτος	400 gr	600 gr	800 gr	1.200 gr
Φύλλα ζελατίνης	2 τεμ.	3 τεμ.	4 τεμ.	6 τεμ.
Φράουλες	320 gr	480 gr	640 gr	960 gr

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Αν θυμάμαι καλά, αλλοίωσα τα δεδομένα της συνταγής, για να είναι πιο «βολικοί» οι υπολογισμοί. Αν έχετε σκοπό να εκτελέσετε τη συνταγή, συμβουλευτείτε ένα βιβλίο συνταγών... (Τηλ. Κέντρου Δηλητηριάσεων: 210 7793777)

18. *Γλυκά μαθηματικά*

18.1 Γλυκύτερη σημαίνει ότι η αναλογία ζάχαρης είναι μεγαλύτερη:

Ποσοστό ζάχαρης Α: 300:400 = 75% και Β: 700:1.000 = 70%.

Γλυκύτερη είναι η Α.

19. *Πατατάκια*

19.1

Ένα gr έχει 22,5 kcal. Πολλαπλασιάζουμε με 50, 75, 125 κ.ο.κ. και συμπληρώνουμε τον πίνακα:

gr	50	75	100	125	150	200
kcal	1.125	1.687,5	2.250	2.812.5	3.375	4.500

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ:

Σχηματίζουμε αναλογίες: $\frac{50}{x} = \frac{100}{2.250}$ άρα $x = \frac{2.250 \cdot 50}{100} = 1.125\,\text{kcal}$ κ.ο.κ.

ΣΧΟΛΙΟ:

Προεκτείνοντας την εκφώνηση, μπορούμε να ρωτήσουμε τους μαθητές αν γνωρίζουν πόσες θερμίδες (kcal) είναι φυσιολογικό να έχουν οι τροφές που καταναλώνουν κάθε ημέρα, σε σχέση με την ηλικία τους, το βάρος τους κ.λπ.

20. *Κόστος κλήσης*

20.1 Είναι:

$\frac{12,5}{100} = 0,125$ $\quad \frac{19,4}{200} = 0,097$ $\quad \frac{27,6}{300} = 0,092$

$\frac{34}{400} = 0,085$ $\quad \frac{40}{500} = 0,080$ $\quad \frac{45}{600} = 0,75$

Δεν είναι ανάλογα. Είναι πολιτική των εταιρειών, όσο περισσότερα λεπτά χρησιμοποιείται το κινητό, τόσο να μειώνεται η τιμή της μονάδας.

21. *Το άδειο ντεπόζιτο*

21.1 Η ασαφής εκφώνηση έρχεται σε αντίθεση με το συνηθισμένο τρόπο διατύπωσης των μαθηματικών ασκήσεων, όπου κυρίαρχο ρόλο παίζουν η ακρίβεια και η σαφήνεια των δεδομένων, τα οποία επεξεργαζόμενα με σωστό τρόπο οδηγούν στη λύση, στην απόδειξη ή στο συμπέρασμα.

Πιστεύω ότι οι συγγραφείς επίτηδες παραλείπουν δεδομένα, επιδιώκοντας να αμφισβητήσουν αυτήν την αυστηρότητα και την αποτελεσματικότητά της, μέσω των προβλημάτων, όπως τα παραπάνω.

Ουσιαστικά ζητείται η άτυπη αποδοχή από τους μαθητές κάποιων δεδομένων που θα συμπληρώνουν την εκφώνηση. Εδώ λοιπόν εννοείται ότι:

1) Πλήρης διαδρομή αντιστοιχεί σε πλήρως γεμάτο ντεπόζιτο.

2) Ο ρυθμός κατανάλωσης παραμένει σταθερός σ' όλη τη διάρκεια της διαδρομής. Αυτό, συνήθως το αποδεχόμαστε σιωπηρά σε τέτοια προβλήματα.

3) Λέγοντας: «*Θα έχω πρόβλημα;*» εννοεί, με πιο μελοδραματικό ύφος: «*Θα σου φτάσει η βενζίνη που είναι μέσα στο ντεπόζιτο;*»

Αποδεχόμενοι τα παραπάνω, μπορούμε να λύσουμε την άσκηση:

Για τα $\frac{2}{3}$ της διαδρομής καταναλώσαμε τα $\frac{3}{4}$ της βενζίνης μας, άρα αναλογικά, για το $\frac{1}{3}$ χρειαζόμαστε τα $\frac{3}{8}$ της βενζίνης, δηλαδή περισσότερο από το $\frac{1}{4}$ που έχουμε. Ναι! έχουμε πρόβλημα....

21.2 Όχι, εξαρτάται από τις συνθήκες οδήγησης (στροφές κινητήρα, αν σταματάμε σε φανάρια, βάρος οχήματος, κλίση και κατάσταση οδοστρώματος κ.α.).

22. *Άνω – Κάτω Περιστέρι*

22.1 Η Σάρα διανύει 0,8 Km/min, οπότε για τα 6 Km θέλει 7,5 λεπτά.

22.2 Ο Βίκτωρ για τα 6 Km θέλει 10 λεπτά, άρα θέλει 2,5 λεπτά επιπλέον.

22.3 Ο Βίκτωρ διανύει 0,6 Km/min, οπότε σε 25 λεπτά διανύει 15 Km, άρα η απόσταση μεταξύ Άνω και Κάτω Περιστερίου είναι 9 Km.

22.4 Η Σάρα διανύει 0,8 Km/min, άρα για τα 15 Km θέλει: 18 min 45 sec.

22.5 Σάρα 48 Km/h, Βίκτωρ 36 Km/h

Λογική απάντηση: κατάσταση οδικού δικτύου (σήμα κατολισθήσεων). Τα αμάξια είναι το μεν ένα φορτωμένο οικογενειακό και το άλλο είναι φορτηγό, άρα πρέπει να οδηγούν προσεκτικά.

Δεν θα ήταν λογικό να επικαλούμασταν υποκειμενικές αιτίες (κακή συντήρηση αυτοκινήτων, άπειροι οδηγοί, γιατί δεν δίνονται τέτοια στοιχεία).

23. *Δοσολογία φαρμάκου*

23.1 Χορηγούμε: 1mg/kg δηλαδή 12 mg, οπότε 6 ml διαλύματος.

23.2 Η μέγιστη δόση είναι 2,5mg/kg δηλαδή 30 mg, άρα 15 ml διαλύματος.

23.3 Τα 5 ml διαλύματος περιέχουν 10 mg δραστικής ουσίας, άρα τα 150 ml περιέχουν: 300 mg.

23.4 Έχει βάρος 11 Kg. Μπορεί να πάρει από 1 mg/Kg έως 2,5 mg/Kg, δηλαδή από 11 ως 27,5 mg, οπότε από 5,5 ml ως 13,75 ml. (Γ)

24. *Απογραφή*

24.1 Είναι:

1981: $\frac{2.850}{18.800} \cong 0{,}152$ (λέμε: 152 αυτοκίνητα για 1.000 κατοίκους)

1991: $\frac{4.280}{24.300} \cong 0{,}176$ (λέμε: 176 αυτοκίνητα για 1.000 κατοίκους)

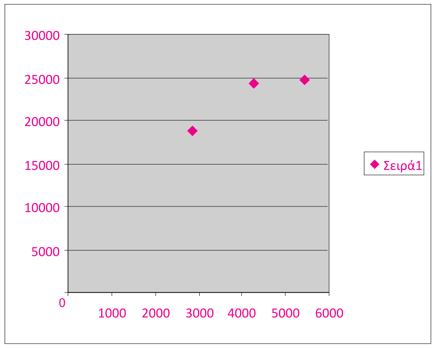
2001: $\frac{5.430}{24.650} \cong 0{,}220$ (λέμε: 220 αυτοκίνητα για 1.000 κατοίκους)

Δεν είναι ανάλογα ποσά. Ο αριθμός αυτοκινήτων αυξάνεται με μεγαλύτερο **ρυθμό** από το ρυθμό αύξησης των κατοίκων.

Δεν είναι σε ευθεία.

24.2 Ενώνουμε τα σημεία με μία **ομαλή** καμπύλη. Παίρνουμε τιμές περίπου στο μέσο της καμπύλης από 1981 ως 1991 και αντίστοιχα από το 1991 ως 2001.

Είναι περίπου το 1985 3.200 αυτοκίνητα προς 22.000 κατοίκους και το 1995 περίπου 5.000 προς 24.500 κατοίκους.



ΣΧΟΛΙΟ:

Διαισθητικά, δεχόμαστε ότι η καμπύλη πρέπει να είναι ομαλή. Μία παράξενη συμπεριφορά της καμπύλης θα συνδεόταν με κάποιο σημαντικό γεγονός, π.χ. ραγδαία οικονομική ύφεση, πόλεμο, καταστροφή από σεισμό ή κάτι άλλο ...

24.3 Όχι, γιατί τα δεδομένα που έχουμε δεν καλύπτουν αυτές τις χρονιές, δηλαδή δεν έχουμε στοιχεία για την καμπύλη που συνδέει τα ποσά αυτά.

25. *Φυλάξτε τους θησαυρούς σας!*

25.1 15,6 €, 21,3 €, 22,8 €, ν·5,7 € αντίστοιχα, συν 4 € για έξοδα αποστολή σε κάθε παραγγελία.

25.2 Ναι. Αν αγοράζαμε 4 θήκες ξεχωριστά, θα πληρώναμε: 4·8,2 = 32,8 €, δηλαδή 10 € παραπάνω.

25.3 Αν παραγγείλει κάθε ένας ξεχωριστά, θα πληρώσουν συνολικά: 4·(15,6 + 4) = 78,4 € Μαζί θα πληρώσουν: 8·5,7 + 4 = 49,6 €. Κερδίζουν: 28,8 €.

25.4 Τοποθετούμε τα σημεία: (3, 21,3), (4, 22,8), (5, 28,5), (6, 34,2), (7, 39,9), (8, 45,6)

Παρατηρούμε ότι τα σημεία 1 έως 5 συνδέονται με καμπύλη. Κατόπιν με ευθεία., εφόσον αυξάνονται αναλογικά.

25.5 16 τεύχη. Λέει ότι δίνονται 16 συνδετήρες με κάθε θήκη. Τα 87 τεύχη χρειάζονται 6 θήκες, (5 γεμάτες και μία με 7 τεύχη). Κόστος: 34,2 + 4 = 38,2 €.

26. *Δεξαμενή πετρελαίου*

26.1 Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, είναι: 320 και 1.600 λίτρα αντίστοιχα.

26.2 Σε ένα λεπτό (60 sec) η δεξαμενή τροφοδοτείται με 160 λίτρα. Άρα τα 680 λίτρα που λείπουν, για να γεμίσει με ένα τόνο, θέλουν: $\frac{680}{160} = 4{,}25\,\text{min} = 4\,\text{min}\,15\,\text{sec}$

Στο βυτίο τότε μένουν 920 λίτρα.

26.3 Θα έχουν από 960 λίτρα. Χρειάζονται: $\frac{640}{160} = 4\,\text{min}$

ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ (*για μαθητές που έχουν διδαχτεί την εξίσωση ευθείας*):

Γράψτε τις εξισώσεις που δίνουν την ποσότητα πετρελαίου σε δεξαμενή και βυτίο, σε σχέση με το χρόνο τροφοδοσίας. Τι σχέση έχουν οι συντελεστές διεύθυνσής τους, Γιατί;

Απάντηση:

$y = 160x + 320$, $y = -160x + 1.600$. Αντίθετοι συντ. διεύθ. Αυξάνονται, μειώνονται με ίδιο ρυθμό

27. *Η εξέλιξη του φυτού*

27.1 Το γράφημα 1 έχει αυξομοιώσεις, πράγμα που δεν είναι λογικό να συμβαίνει.
Το γράφημα 2 ξεκινά από 20 cm, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει
Δεκτό είναι το γράφημα 3 που δίνει μια ομαλή εξέλιψη, με ρυθμό που μειώνεται προς το τέλος του χρονικού διαστήματος
Το γράφημα 4 δείχνει μια αύξηση που τείνει στο άπειρο. Δεν είναι λογικό.

28. *Cars*

28.1 Σε τρεις ώρες διάνυσε 240 Km, άρα ήταν 80 km/h .

28.2 Το Β: 120 km/h.

28.3 Όπως φαίνεται από το γράφημα, το Γ, 120 Km.

28.4 Ήταν σταματημένο. Η μεταβολή της απόστασης τη δεύτερη ώρα είναι 0 Km.

29. *Καμπύλη αύξησης ύψους – βάρους*

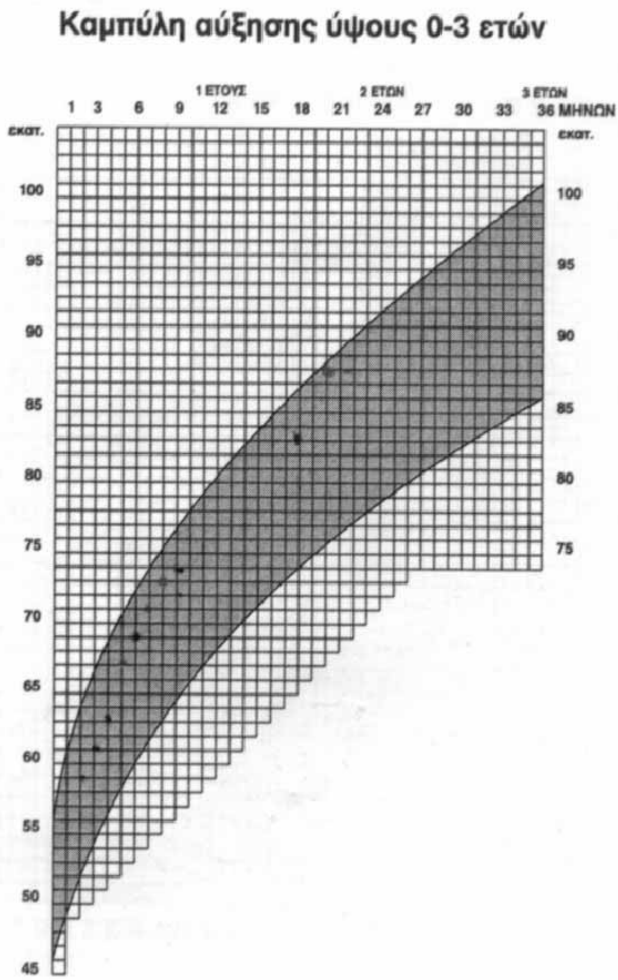
29.1 Πριν 9 χρόνια, παρατηρώντας την καμπύλη βάρους πρέπει να είχε βάρος 17 Kg.

29.2 Είναι 1,28 m. Αναμένεται να είναι 1,75 m.

29.3 Μειώνεται η κλίση και γίνονται σχεδόν οριζόντιες. Η αύξηση ύψους – βάρους των ανθρώπων σταματά περίπου σ' αυτές τις ηλικίες (ενηλικίωση).

ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ:

Μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να μελετήσουν τα γραφήματα που περιέχονται στο ΒΙΒΛΙΑΡΙΟ ΥΓΕΙΑΣ ΠΑΙΔΙΟΥ, που έχουν, (βλέπε σχήμα). Π.χ. για τα ακρότατα, την καμπύλη ύψους, πώς εξηγούνται οι διαφορές στο **ρυθμό μεταβολής** , ποια η αναγκαιότητα ιατρικής παρακολούθησης των καμπυλών κ.α.



30. *Ψηλώνοντας*

30.1 Αναμένεται ο κατακόρυφος άξονας να παίρνει τιμές από περίπου 50 cm μέχρι (≥) 200 cm και η καμπύλη να γίνεται ευθεία στα 18 περίπου χρόνια.

ΣΧΟΛΙΟ:

Χαρακτηριστικό παράδειγμα ανοιχτού προβλήματος. Ζητείται προφανώς η «κοινή λογική». Όχι δηλαδή ακραίες περιπτώσεις, αλλά μια μέση περίπτωση.

Δεν νομίζουμε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως θέμα βαθμολόγησης μαθητών, λόγω του τεράστιου εύρους δυνατών γραφημάτων, όπου δεν αποκλείονται και αποκλίσεις. Έχει όμως, αξία ως θέμα για συζήτηση στην τάξη.

31. *Πίστα αγώνων*

31.1 Όπως φαίνεται στον οριζόντιο άξονα διήρκησε 7 min 30 sec.

31.2 225 Km/h στα 4 min 30 sec.

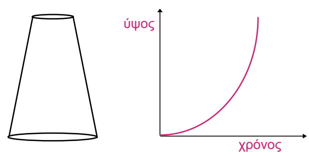
31.3 Δεχόμαστε ότι μειώνει την ταχύτητα στις κλειστές στροφές, οπότε έχει δύο. Στην πρώτη στρίβει με 55 Km/h και στην άλλη με 80 Km/h.

31.4 Περίπου 220 Km/h.

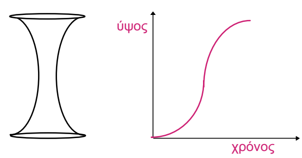
31.5 Από 0 σε 100 Km/h χρειάζεται 8 sec περίπου, όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

32. *Δοχεία νερού*

32.1 Η καμπύλη μεταβάλλεται σε σχέση με το πλάτος του δοχείου. Όσο πιο πλατύ είναι, τόσο περισσότερο χρόνο θέλει για να ανέβει η στάθμη.



32.2 1ο δοχείο: Δ
2ο δοχείο: Γ
3ο δοχείο: Α



33. *Φύσα αεράκι...*

33.1 Χαρακτηριστικό παράδειγμα θέματος, που απαιτεί κρίση και εύρος γνώσεων από το μαθητή.

Με φυσική:

Απορρίπτουμε αυτές που έχουν (+), δηλαδή (Α), (Γ) και (Ε), γιατί, αν π.χ. είχαμε ταχύτητα ανέμου V = 0 ή διάμετρο d = 0, θα προέκυπτε το παράδοξο, να παράγεται ρεύμα!

Επίσης, στο (Α) και στο (Ε), δεν μπορούμε **σε μαθηματικό τύπο** να προσθέτουμε δυνάμεις με διαφορετικό εκθέτη. Τι μονάδες θα έχουμε;

Στο (Β) δεν έχουμε δυνάμεις, άρα είναι η (Δ).

Με μαθηματικά:

Στα (Α), (Β), (Γ), (Ε) διπλασιάζοντας τη διάμετρο δεν τετραπλασιάζεται η ισχύς, άρα δεν μπορεί να είναι οι κατάλληλοι τύποι.

Το (Δ) ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες, που αφορούν διάμετρο και ταχύτητα ανέμου.

34. *Ανακαλύπτοντας τους τύπους*

34.1 Είναι: y = 2x + 12

Παρατηρούμε ότι:

1 λευκό = 1·2 γκρι + 12

2 λευκά = 2·2 γκρι + 12

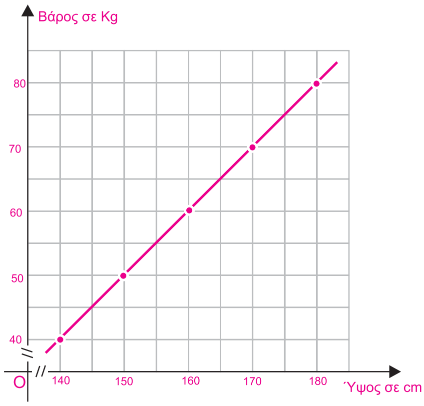
3 λευκά = 3·2 γκρι + 12

....

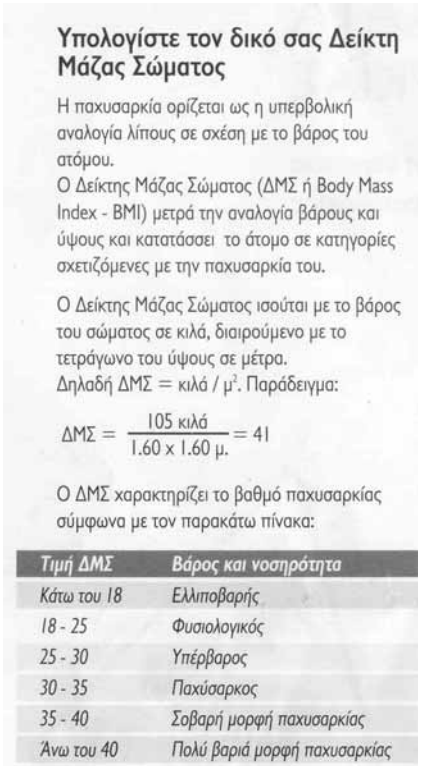
ν λευκά = ν·2 γκρι + 12

35. *Μαθηματικά διαίτης...*

35.1



Το 2ο ερώτημα βασίζεται στη δημοσίευση:



Υπολογίστε τον δικό σας Δείκτη Μάζας Σώματος

Η παχυσαρκία ορίζεται ως η υπερβολική αναλογία λίπους σε σχέση με το βάρος του ατόμου.
Ο Δείκτης Μάζας Σώματος (ΔΜΣ ή Body Mass Index - BMI) μετρά την αναλογία βάρους και ύψους και κατατάσσει το άτομο σε κατηγορίες σχετιζόμενες με την παχυσαρκία του.

Ο Δείκτης Μάζας Σώματος ισούται με το βάρος του σώματος σε κιλά, διαιρούμενο με το τετράγωνο του ύψους σε μέτρα.
Δηλαδή ΔΜΣ = κιλά / μ². Παράδειγμα:

$$\Delta M\Sigma = \frac{105 \text{ κιλά}}{1.60 \times 1.60 \text{ μ.}} = 41$$

Ο ΔΜΣ χαρακτηρίζει το βαθμό παχυσαρκίας σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Τιμή ΔΜΣ	*Βάρος και νοσηρότητα*
Κάτω του 18	*Ελλιποβαρής*
18 - 25	*Φυσιολογικός*
25 - 30	*Υπέρβαρος*
30 - 35	*Παχύσαρκος*
35 - 40	*Σοβαρή μορφή παχυσαρκίας*
Άνω του 40	*Πολύ βαριά μορφή παχυσαρκίας*

Ιατρικός οδηγός, www.ekstratia.gr

35.2 Για βάρος 75 Kg και ύψος 1,75 m, έχουμε: $\alpha = 75:(1{,}75)^2 \cong 24{,}5 < 27$, άρα το άτομο δεν είναι υπέρβαρο.

35.3 $68 : 1{,}46^2 = 31{,}90 > 27$
$105 : 2{,}05^2 = 24{,}99 < 27$
$92 : 1{,}81^2 = 28{,}08 > 27$
$70 : 1{,}69^2 = 24{,}51 < 27$

35.4 Πρέπει $x : 1{,}78^2 < 27$
δηλαδή $x < 27 \cdot 1{,}78^2$ άρα $x < 85{,}55$ Kg.

36. *ISBN*

36.1 3 + 7 + 0 + 8 = 18, οπότε το 5ο ψηφίο είναι 2.

36.2 Ναι, αν π.χ. αντί για 3708_2, γράφαμε 2808_2, το 5ο ψηφίο είναι πάλι το 2.
Όχι. Αν αντί για 2345_6 γράφαμε 3245_6, δεν θα εύρισκε το σφάλμα.

36.3

$9 \cdot 10 = 90$	$3 \cdot 7 = 21$	$2 \cdot 3 = 6$
$6 \cdot 9 = 54$	$5 \cdot 6 = 30$	$5 \cdot 2 = 10$
$0 \cdot 8 = 0$	$4 \cdot 5 = 20$	
	$1 \cdot 4 = 4$	Άθροισμα: 235

Προσθέτουμε το ψηφίο 7, ώστε να προκύψει ο αριθμός: 242 =22·11.

ΣΧΟΛΙΟ:

Τον κανονισμό τον βρήκαμε στην ιστοσελίδα της ΕΘΝΙΚΗΣ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ της ΕΛΛΑΔΑΣ: http://www.nlg.gr/kanisbn.htm.

Παραλλαγή του θέματος με επιπλέον ερωτήσεις μπορείτε να βρείτε και στο: Λάμπρου Μ., Σπανουδάκης Ν., *Καγκουρό: Μαθηματικά για όλους*, τ. 1, σελ. 52

36.4 Κωδικός Ελλάδας 960, κωδικός εκδότη 7991, κωδικός βιβλίου 04.

Όσοι γνώρισαν τον Χάρη, δε θα τον ξεχάσουν ποτέ.

Οπότε, έχουμε:

9·10 = 90	7 · 7 = 49	0 · 3 = 0
6 · 9 = 54	9 · 6 = 54	4 · 2 = 8
0 · 8 = 0	9 · 5 = 45	
	1 · 4 = 4	Άθροισμα: 304

Οπότε προσθέτουμε το ψηφίο 4, ώστε να προκύψει ο αριθμός: 308 =28·11.

36.5 Είναι:

9·10 = 90	2 · 7 = 21	2 · 3 = 6
6 · 9 = 54	3 · 6 = 30	**x · 2 = 2x**
0 · 8 = 0	4 · 5 = 20	5 · 1 = 5
	5 · 4 = 4	

Σύνολο: 230 +2x.

Το επόμενο πολλαπλάσιο του 11 είναι το 231, που δεν ταιριάζει, αφού το x θα ήταν 0,5. Το μεθεπόμενο είναι: 242, οπότε 2x = 12, δηλαδή **x = 6**.

37. *Βηματισμός*

Δίνουμε αρχικά τις *απαντήσεις του PISA* στα ερωτήματα 1 και 2:

37.1 Σωστή απάντηση:
- ♦ 0,5 m ή 50 cm, 21 (δεν απαιτούνται οι μονάδες)
- ♦ 70/p = 140   70 = 140p   p = 0,5
- ♦ 70/140

37.2 Σωστές απαντήσεις (δεν απαιτούνται οι μονάδες)

♦ για m/min και για km/h: v = 140·0,80 = 112

♦ Σε ένα λεπτό περπατάει 112·0,80 μέτρα = 89,6 μέτρα. Η ταχύτητά του είναι 89,6 μέτρα ανά λεπτό. Άρα η ταχύτητά του είναι 5,38 km/h ή 5,4 km/h.

37.3 Κάποια σχόλια για το περιεχόμενο του θέματος:

Η εκφώνηση δέχεται ότι ο Heiko και ο Bernard περπατούν με σταθερή ταχύτητα και με σταθερό διασκελισμό με ακρίβεια εκατοστού! Προφανώς, όμως, ο διασκελισμός εξαρτάται από το ύψος του ανθρώπου, άρα ο τύπος δεν ταιριάζει σε κάθε άνδρα.

Ας παραβλέψουμε αυτήν τη λεπτομέρεια. Αλλού νομίζω ότι είναι το πρόβλημα... Με βάση τον τύπο, ο αριθμός των βημάτων ανά λεπτό φαίνεται να είναι ευθέως ανάλογος του διασκελισμού: $v = 140 \cdot P$.

Δεν κατανοώ πώς γίνεται ο αριθμός των βημάτων να εξαρτάται μόνο από το διασκελισμό κι όχι από το ρυθμό κίνησης του ανθρώπου. Δηλαδή ένας άνδρας με περίπου σταθερό διασκελισμό, κινεί τα πόδια του με σταθερό πάντα ρυθμό; Ασφαλώς όχι! Μήπως όποιος έχει μεγαλύτερο διασκελισμό κάνει και περισσότερα βήματα ανά λεπτό;

Με βάση τον ίδιο «τύπο», η **ταχύτητα βαδίσματος**, είναι η απόσταση που διανύουμε ανά λεπτό, άρα: $υ = v \cdot P = 140 \cdot P^2$ σε m/min, άρα ... η ταχύτητα εξαρτάται και μάλιστα τετραγωνικά από το διασκελισμό.

Νομίζω ότι είναι πιο σύνθετα τα πράγματα˙ πολλοί περισσότεροι παράγοντες εμπλέκονται: το είδος του εδάφους και η κλίση του, η φυσική του κατάσταση, η διάθεση του ανθρώπου κ.ά. Όλα αυτά επηρεάζουν το ρυθμό με τον οποίον ο άνθρωπος κινείται. Δεν γίνεται βεβαίως να διατηρείται σταθερός ο διασκελισμός και η ταχύτητα περπατήματος! Όλα αυτά καθιστούν αδύνατη την κατασκευή τύπου.

Τα παραπάνω σχόλια που έχουν καταγραφεί από το 2005,[11] τα επαναλαμβάνω εδώ, γιατί το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται ως «αυθεντικό πρόβλημα της καθημερινής ζωής».

Στο ενημερωτικό φυλλάδιο του PISA αναφέρεται:

> Τα θέματα (του PISA) δίνουν μια πειστική απάντηση προς σε εκείνους τους μαθητές οι οποίοι συχνά μας θέτουν το ερώτημα: **σε τι θα μας χρησιμεύσουν τα μαθηματικά στη ζωή μας;**

---

[11] Περιέχονται στο βιβλίο: Ρίζος Γ., *Οι Περιπέτειες του Προβλήματος στα Σχολικά Μαθηματικά.* Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 2005.

Δε νομίζω ότι αυτό, όπως και πολλά άλλα θέματα του PISA, είναι τόσο ελκυστικά για τους μαθητές, ώστε **να κάνουν τη διαφορά** σε σχέση με τα παραδοσιακά μαθηματικά. Δεν σχετίζονται με τα ενδιαφέροντά τους και δεν εμπεριέχουν κίνητρο για να ασχοληθεί κανείς μαζί τους.

Ας αποδεχτούμε ότι δεν έχουν (και δε θα μπορούσαν να έχουν) όλοι οι νέοι τα ίδια ενδιαφέροντα, τις ίδιες προτιμήσεις, τις ίδιες δυνατότητες. Είναι αδύνατο να φτιάξουμε προγράμματα σπουδών που να καλύπτουν όλες τις ιδιαιτερότητες, όλες τις ανάγκες και όλα τα γούστα!

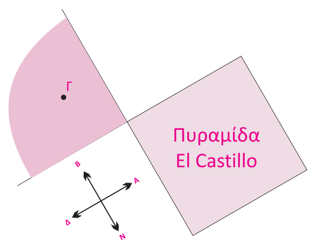
Ενότητα 2η *ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ*

38. *Πυραμίδα των Μάγιας*

38.1 Μόνο μία. Η ανατολική.

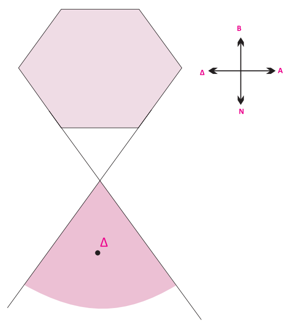
38.2 Ο Β, τη βόρεια και την ανατολική.

38.3 Στη γωνία που φαίνεται στο σχήμα.



38.4 Ο Γ βλέπει τρεις όψεις. Οι Α, Β από δύο και ο Δ μία.

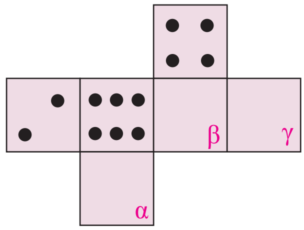
38.5 Στη γωνία που φαίνεται στο σχήμα.



39. *Πλακάκια*

39.1 Η (Β). Έχει άλλη διάταξη στο μοτίβο.

40. *Ζάρια*

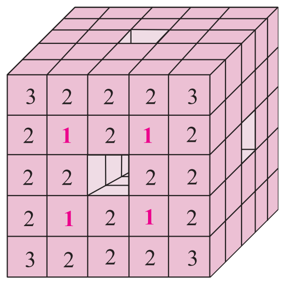


40.1 Διπλώνοντας το ανάπτυγμα του κύβου παρατηρούμε ότι η έδρα γ είναι η απέναντι του 6, οπότε γ = 1. Η β είναι απέναντι του 2, οπότε β = 5. Τέλος η έδρα είναι απέναντι του 4, οπότε α = 3.

40.2 Το (Β). Πρέπει το άθροισμα των απέναντι εδρών να είναι 7.

40.3 Το άθροισμα των τριών άνω όψεων είναι 4 + 5 + 3 = 12, και των κάτω 3 + 2 + 4 = 9. Οπότε ο αριθμός της άνω όψης του τέταρτου ζαριού πρέπει να είναι κατά 3 μικρότερος του αντίστοιχου της κάτω όψης. Πάνω πρέπει να είναι ο αριθμός 2 και κάτω ο 5.

41. *Κύβοι*



41.1 Μία έχουν οι 9 κύβοι στο κέντρο κάθε έδρας, σύνολο 9·6 = **54**.

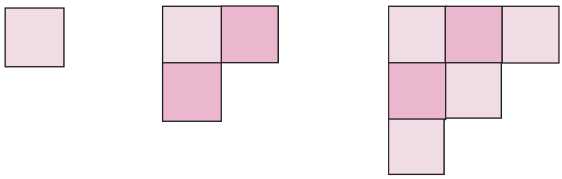
41.2 Δύο έχουν οι 9 έδρες στο εσωτερικό των ακμών, κοινές στις διαδοχικές έδρες, άρα το σύνολό τους είναι: 9·4 = **36** .
Τρεις έχουν οι κύβοι στις κορυφές του μεγάλου κύβου. Είναι: **8**. Παραπάνω δεν έχει κανένας κύβος. Καμία οι υπόλοιποι **27**, που είναι στο εσωτερικό του μεγάλου κύβου.

41.3 Μία έχουν οι 4 κύβοι στο κέντρο κάθε έδρας, σύνολο 4·6 = **24**.

41.4 Αν δεν ήταν διαμπερές, θα αποτελούταν από 5^3 = 125 κύβους. Λείπουν 5 κύβοι σε τρεις σειρές, αλλά ο κεντρικός μετρήθηκε τρεις φορές, οπότε λείπουν συνολικά 13 κύβοι. Το σχήμα αποτελείται από 112 κύβους.

41.5 (Β) Στο 1ο σχήμα έχουμε ένα όροφο με 1 κύβο.
Στο 2ο σχήμα έχουμε δύο ορόφους με 1 + 3 = 4 κύβους.
Στο 3ο σχήμα έχουμε τρεις ορόφους με 1 + 3 + 6 = 10 κύβους.

Στο σχήμα βλέπουμε την κάτοψη κάθε ορόφου και τους κύβους που προσθέτουμε σε κάθε επιπλέον βήμα.



1ο βήμα 2ο βήμα 3ο βήμα

42. *Ο μονταδόρος*

42.1 Ένα απλό κι έξυπνο τέχνασμα είναι να διπλώσουμε ένα χαρτί Α4 τέσσερις φορές, να γράψουμε τους αριθμούς των σελίδων και να το ξεδιπλώσουμε. Κι όμως, όσο απλοϊκό κι αν φαίνεται, έχω δει έμπειρους τυπογράφους να διπλώνουν και να αριθμούν χαρτάκια για να είναι σίγουροι!

1η όψη:

4	13	16	1
5	12	9	8

2η όψη:

2	15	14	3
7	10	11	6

43. *Να γκρεμίσουμε τη ντουλάπα;*

43.1 **1η λύση**

Μετράμε τις διαστάσεις, κατασκευάζουμε την κάτοψη του δωματίου τηρώντας τις αναλογίες. Υπολογίζουμε το κέντρο στο σχέδιο και το μεταφέρουμε στις κανονικές διαστάσεις.

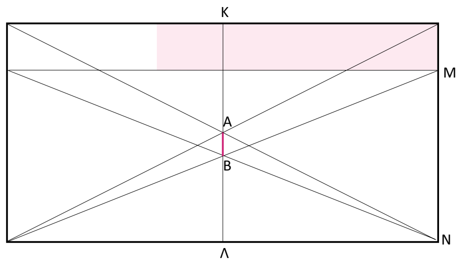
2η λύση

Το κέντρο είναι επίσης το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών. Οπότε εύκολα το βρίσκουμε.

43.2 Το Α είναι το κέντρο βάρους του δωματίου. Οπότε: ΚΑ = 2,1 m.

Το Λ είναι μέσο του μήκους του δωματίου, οπότε το ΛΒ είναι το μισό του ΜΝ.

(*Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι ίσο και παράλληλο με το μισό της τρίτης*). Οπότε ΛΒ = $\frac{4,2-1,6}{2}=\frac{2,6}{2}=1,3\,\text{m}$.



Άρα ΑΒ = 4,2 – (2,1 + 1,3) = 0,8 m

44. *Κάποιος «κλέβει» ...*

44.1 Η διαφορά τους είναι ίση με τη διαφορά του μήκους των δύο ημικυκλικών διαδρομών: $S_1 - S_2 = π·R_1 - π·R_2 \cong 3,14·(R_1 - R_2) = 3,14·2 = 6,28$ m.

Άρα ο δρομέας (α) έπρεπε να ξεκινήσει 6,28 m μπροστά από το δρομέα (β).

ΣΧΟΛΙΟ:

Μπορεί να δωθεί ως εργασία στο μήκος τόξου: Η διαδρομή που θα διανύσουν εξαρτάται από τη θέση τους στο διάδρομο που κινούνται. Δεχόμενοι ότι όλοι οι αθλητές τρέχουν παίρνοντας κλειστά τις στροφές, για να ελαχιστοποιήσουν το μήκος της διαδρομής τους, **αποδεχόμαστε** ότι η διαφορά των διαδρομών τους εξαρτάται μόνο από τη διαφορά των ακτίνων των ημικυκλίων.

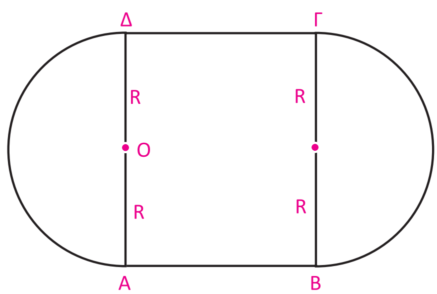
44.2

α) Είναι ΑΒ = ΓΔ = 120 και έστω R η ακτίνα του κύκλου.

Περίμετρος στίβου = 2πR + 2·120

άρα πR + 120 = 200 ⇔ πR = 80

⇔ R ≅ 25,5 m.

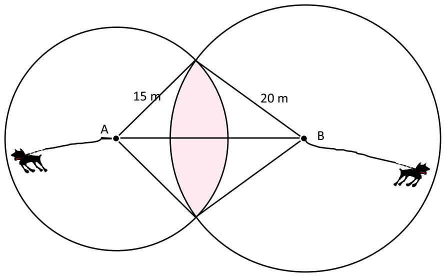


β) Η ακτίνα της εξωτερικής περιμέτρου του στίβου είναι R + 12 m, οπότε η περίμετρος είναι: 2·120 + 2π(R + 12) ≅ 240 + 6,28·37,5 = 475,5 m.

γ) Εμβ. στίβου = $πR^2 + 120·2R \cong 3,14·25,5^2 + 240·25,5 = 8.161,8\ m^2$.

45. *Προσοχή, ο σκύλος δαγκώνει!*

45.1



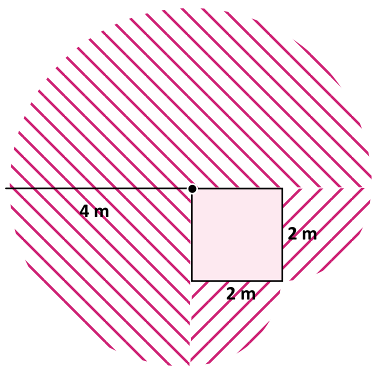
45.2 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 30 m. Βρείτε τα σημεία του **επιπέδου** που απέχουν από το Α **το πολύ** 15 m και από το Β **το πολύ** 20 m.

ΣΧΟΛΙΟ:

Η παραπάνω άσκηση δυσκολεύει αρκετούς μαθητές του Γυμνασίου. Συνηθισμένο λάθος είναι ότι κινούνται μόνο πάνω στην ευθεία ΑΒ, αγνοώντας τα υπόλοιπα σημεία του επιπέδου. Είναι επίσης, μια καλή ευκαιρία να διευκρινίσουμε στους μαθητές τη διαφορά των γεωμετρικών τόπων που αναφέρονται σε επίπεδο και αυτών που αναφέρονται στον τρισδιάστατο χώρο.

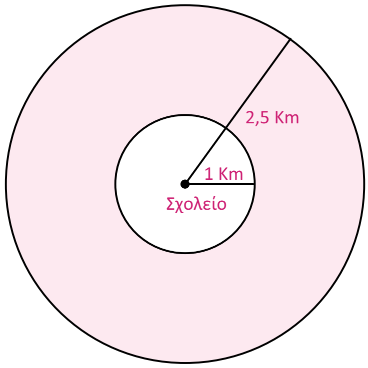
45.3 Όχι, βρίσκονται σε **σφαίρα** κέντρου Κ και ακτίνας 10 cm

45.4 Για ακριβές σχήμα σχεδιάζουμε σε milimetre με αναλογία π.χ. 1 cm : 1 m τους κυκλικούς τομείς. Σε συνθήκες διαγωνισμού δεν απαιτείται τέτοια ακρίβεια. Απλά πρέπει να αποδεικνύεται ότι έχουμε κατανοήσει τις έννοιες.



46. *Απόσταση*

46.1 Στον μέσα κύκλο είναι το σπίτι του Γιάννη, στον έξω κύκλο της Ελένης. Απέχουν από 1,5 Km έως 3,5 Km.



ΣΧΟΛΙΟ:

Το θέμα αυτό περιέχεται στο φυλλάδιο «*The PISA 2003 Framework assessment*», με την εξής εκφώνηση:

Mathematics Example 10: DISTANCE

Mary lives two kilometres from school, Martin five.

How far do Mary and Martin live from each other?

Η Μαρία μένει σε απόσταση 2 Km από το Σχολείο. Ο Μάρτιν 5 Km.
Πόσο μακριά μένει η Μαρία από τον Μάρτιν;

Εκεί αναφέρεται:

When this problem was originally presented to teachers, many of them rejected it on the ground that it was too easy – one could easily see that the answer is 3. Another group of teachers argued that this was not a good item because there was no answer – meaning there is not one single numerical answer. A third reaction was that it was not a good item because there were many possible answers, since without further information the most that can be concluded is that they live somewhere between 3 and 7 kilometres apart, and that is not desirable for an item. A small group thought it was an excellent item, because you have to understand the question, it is real problem solving because there is no strategy known to the student, and it is beautiful mathematics, although you have no clue how students will solve the problem. It is this last interpretation that associates the problem with the *connections* cluster of competencies.

Όταν το πρόβλημα πρωτοπαρουσιάστηκε σε καθηγητές μαθηματικών, πολλοί το απέρριψαν με τη δικαιολογία ότι ήταν πολύ εύκολο και η απάντησή του ήταν προφανής, 3 χιλιόμετρα. Μια άλλη ομάδα καθηγητών θεώρησε ότι δεν υπάρχει μόνο μια απάντηση, και έτσι το απέρριψαν και

αυτοί. Μια τρίτη αντίδραση ήταν ότι επιδέχεται πάνω από μια λύσεις και οι πιθανές απαντήσεις είναι από 3 έως 7 χιλιόμετρα και φυσικά ήταν αποδεκτό ως θέμα του PISA.
Υπήρξε και μια μικρή ομάδα που θεώρησε ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι άριστο ως θέμα, διότι: αναδεικνύει την ανάγκη να καταλάβει κάποιος καταρχάς την ερώτηση· δεν αντιμετωπίζεται με κάποια στρατηγική που να είναι γνωστή στο μαθητή και αποτελεί πραγματικά θέμα επίλυσης προβλήματος.

Προσθήκες:

Αν θέλουμε να βοηθήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν το πρόβλημα, δίνουμε την εκφώνηση χρησιμοποιώντας «σκαλοπάτια»:

♦ Σχεδιάστε σε τετραγωνισμένο χαρτί ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και στο κέντρο του τοποθετήστε το σχολείο.

♦ Τι σχήμα σχηματίζουν τα σημεία, στα οποία μπορεί να είναι το σπίτι του Γιάννη; Σχεδιάστε το. Επαναλάβατε για το σπίτι της Ελένης.

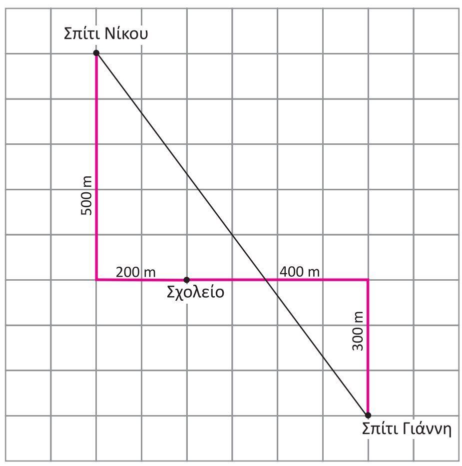
♦ Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ των σπιτιών του Γιάννη και της Ελένης.

46.2 Όχι. Δεν διευκρινίζεται αν είναι ίδιο το σχολείο των δύο μαθητών!

47. *Αποστάσεις σε κάτοψη*

47.1 Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε ότι η απόσταση είναι:

$$\sqrt{800^2+600^2} = 1000\,\text{m}$$



48. *Ο Ναυαγός*

48.1-2 Αφού έχασαν τον προσανατολισμό τους, μπορεί να πετούσαν επί μία ώρα προς οποιανδήποτε κατεύθυνση, άρα βρίσκονται σε **κύκλο** με κέντρο το σημείο, όπου έδωσαν σήμα κινδύνου και ακτίνα 400 μίλια. Τα σωστικά συνεργεία θα έχουν να ψάξουν σε περιοχή με εμβαδόν 504.000 τετραγωνικά μίλια, αφού δε γνωρίζουν αν η πορεία τους μεταβαλλόταν στη διάρκεια της μιας ώρας της «τυφλής» πτήσης. Δεν λαμβάνουμε υπόψη την καμπυλότητα της γης, μπορούμε όμως να σημειώσουμε την επιφάνεια και σε υδρόγειο σφαίρα.

Προέκταση (για εργασία στην τάξη ή σε ομάδες):

Σε ένα παγκόσμιο χάρτη επιλέξτε ένα τυχαίο σημείο κάπου στον Ειρηνικό Ωκεανό και, λαμβάνοντας υπόψη τη κλίμακα του χάρτη, σημειώστε την επιφάνεια που καλύπτει η περιοχή αυτή. Μετατρέψτε τα μίλια σε χιλιόμετρα και βρείτε μία περιοχή με ίδιο εμβαδόν στο χάρτη π.χ. της Ευρώπης.

49. *Οικογενειακή πίτσα*

49.1 Το εμβαδόν της θα είναι τετραπλάσιο της ατομικής, οπότε:
$E_{\text{οικογ.}} = 4\cdot 12^2\pi = 4\cdot 144\pi = 24^2\pi$, οπότε η ακτίνα είναι 24 cm, άρα η διάμετρός της είναι 48 cm. (Γ)

50. *Στροφόμετρο*

50.1 Η ακτίνα είναι 40 cm. Το διάστημα είναι: $S = 4\cdot 2\cdot \pi\cdot 40 = 1.004{,}8$ cm $\cong$ 10 m.

50.2 Με 4 στροφές διανύουμε 10 m, οπότε για 1.000 m απαιτούνται 400 στροφές.

50.3 Περισσότερες, αφού η περίμετρος και η ακτίνα είναι ανάλογα ποσά, όταν μικραίνει η ακτίνα, μικραίνει και η περίμετρος, άρα για να διανύσουμε ίδια απόσταση μεγαλώνει ο αριθμός των στροφών.

51. *Παπάκι ή scooter;*

51.1 Η ακτίνα της βέσπας είναι $12\cdot 2{,}54 = 30{,}48$ cm.
Κάθε περιστροφή μετακινεί τη βέσπα κατά μήκος ίσο με την περίμετρό του τροχού της, δηλαδή κατά: $S = 2\cdot \pi\cdot 30{,}48 \cong 191{,}4$ cm.

51.2 Η διαφορά είναι 20 φορές η διαφορά των περιμέτρων των τροχών τους:

$S = 20 \cdot 2\pi(21 - 16) \cdot 2{,}54 \cong 1595{,}1$ cm = 15,95 m

52. *Ποδήλατο*

52.1 Η 1η, γιατί οι στροφές του τροχού, λόγω της ανηφόρας θέλουν μεγαλύτερη δύναμη, οπότε η αναλογία 3 στροφές του πεντάλ προς μία στροφή του τροχού διευκολύνει τον αναβάτη.

Αντίθετα, σε ευθεία, ο λόγος 1 στροφή του πεντάλ προς δύο στροφές του τροχού, της 3ης ταχύτητας δίνει μεγαλύτερη ταχύτητα.

52.2 Ο τροχός έχει ακτίνα 25 cm, άρα μια πλήρης στροφή μετακινεί το ποδήλατο κατά

$S = 2\pi \cdot 25 = 50 \cdot 3{,}14 = 157$ cm.

Τα 31,4 m ισούνται με 157·20 cm, άρα αντιστοιχούν σε 20 στροφές.

Στη 2η ταχύτητα ο λόγος είναι: 6 : 5, δηλαδή οι 5 στροφές του τροχού απαιτούν 6 στροφές του πεντάλ, οπότε οι 20 στροφές του τροχού απαιτούν 24 στροφές του πεντάλ.

53. *Ξύλινα τρίγωνα*

53.1 Από τριγωνική ανισότητα, αν x το μήκος του, πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

$$\begin{cases} 9 + 16 > x \\ 16 + x > 9 \\ 9 + x > 16 \end{cases} \quad \text{οπότε } 7 \text{ cm} < x < 25 \text{ cm}$$

53.2 Πρέπει $7 \text{ cm} < x < 16 \text{ cm}$

53.3 9 cm ή 16 cm

53.4 Αν υποτείνουσα είναι η πλευρά 16 cm, τότε: $x^2 = 16^2 - 9^2 = 256 - 81 = 175$.

Αν η πλευρά x ήταν μικρότερη των 13 cm, τότε $x^2 < 13^2 = 169$, που δεν ισχύει.

Αν υποτείνουσα είναι η πλευρά x, τότε: $x^2 = 16^2 + 9^2 = 256 + 81 = 337$.

Αν η πλευρά x ήταν μεγαλύτερη των 19 cm, τότε $x^2 > 19^2 = 361$, που δεν ισχύει.

54. *Λαχανόκηποι*

54.1 Χρησιμοποιεί 55 m σύρμα και 5 m πόρτες, συνολικά 60 m. Οι 10 ίσες πλευρές έχουν μήκος 6 m, οπότε το εμβαδόν κάθε λαχανόκηπου είναι $6^2 = 36$ m^2.

55. *Έχει κανείς ένα αλφάδι;*

55.1 **ΑΠΑΝΤΗΣΗ (στο GAP):**

$8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73$. Είναι $\sqrt{73} = 8{,}544 \neq 8{,}5$ m.

Ή επίσης, $8{,}5^2 = 72{,}25 \neq 73 = 8^2 + 3^2$.

Στον **«κόσμο των μαθηματικών»** θα λέγαμε ότι δεν είναι, γιατί δεν ισχύει το Πυθ. Θεώρημα στο τρίγωνο που ορίζει η σκάλα με τον τοίχο και το έδαφος.

Στον **«πραγματικό κόσμο»** όμως είναι!

Γιατί: $8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73$ και: $\sqrt{73} = 8{,}544 \cong 8{,}5$ m.

Τα αρχικά δεδομένα αφορούν δεκαδικούς αριθμούς με ένα μόνο δεκαδικό ψηφίο. Αν θέλαμε μεγαλύτερη ακρίβεια, θα τη δίναμε με περισσότερα δεκαδικά ψηφία. Στρογγυλοποιούμε λοιπόν στο ψηφίο των δεκάτων.

Έτσι λοιπόν καταλήγουν:

… (οι μαθητές) πρέπει να είναι προσεκτικοί γιατί σε μία ρεαλιστική κατάσταση, τα μήκη δίνονται υπό προσέγγιση, οπότε **σωστή απάντηση είναι ότι ο τοίχος είναι κάθετος**.

ΣΧΟΛΙΟ:

Το παράδειγμα δίνεται στο GAP, με σκοπό να κατανοήσουν οι μαθητές τις διαφορές του «**πραγματικού κόσμου**» και του «**κόσμου των μαθηματικών**».
Στον «**κόσμο των μαθηματικών**» τα ευθύγραμμμα τμήματα αντιστοιχούν ακριβώς στους αριθμούς που παριστάνουν τα μήκη τους. Αντίθετα, στον «**πραγματικό κόσμο**» δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάνουμε ακριβείς μετρήσεις. Το μέγεθος της ακρίβειας εξαρτάται από το ζητούμενο αποτέλεσμα. Άλλες π.χ. οι μετρήσεις των Πολιτικών Μηχανικών κι άλλες των ερευνητών Βιολόγων.

Τα προβλήματα που συνηθίζουμε να ονομάζουμε προβλήματα «πραγματικού κόσμου», δεν παύουν να είναι κι αυτά γεμάτα προσεγγίσεις, συμβάσεις, παραδοχές.

Βέβαια κανείς δεν χρησιμοποιεί τέτοιες μεθόδους για να δει αν ο τοίχος είναι κάθετος. Υπάρχουν ευτυχώς τα ειδικά νήματα και τα αλφάδια που κάνουν τη δουλειά μας περίφημα... Άρα το όλο θέμα δεν είναι βγαλμένο από τον «**πραγματικό κόσμο**», με την έννοια ότι δεν έχει πρακτική εφαρμογή.

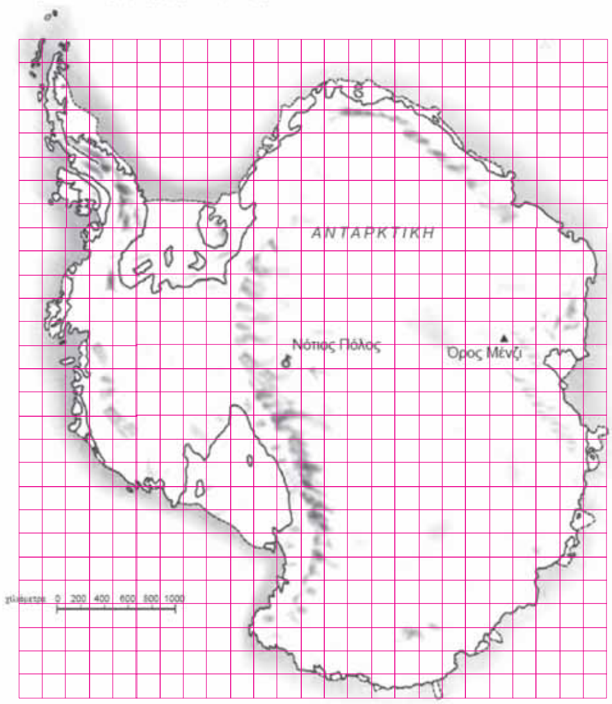
56. *Χάρτης πόλης*

56.1 Κάθε τετράγωνο έχει πλευρά 100 m. Οπότε η Νομαρχία έχει διαστάσεις περίπου 200×50 m.

57. *Ανταρκτική*

57.1 Χωρίζουμε την επιφάνεια σε τετράγωνα με πλευρά 200Km, (που είναι η κλίμακα που δίνεται στο σχέδιο). Με τη βοήθεια αυτών μετράμε, με προσέγγιση, την καλυπτόμενη επιφάνεια.

Αυτός είναι ένας χάρτης της Ανταρκτικής.



Υπολογίζουμε: 359 τετράγωνα, οπότε το εμβαδόν είναι: $359 \cdot 200^2 = 14.360.000$ Km^2.

Οι παγετώνες είναι 45 τετράγωνα, άρα $45 \cdot 200^2 = 1.800.000$ τετρ. χλμ.
Στην εγκυκλοπαίδεια Wikipedia βρίσκουμε ότι το εμβαδόν είναι περίπου 14,4 εκατ. τετρ. χλμ.

ΣΧΟΛΙΑ:

Η διαδικασία του τετραγωνισμού είναι μια απ' ευθείας εφαρμογή του ορισμού του εμβαδού επίπεδων επιφανειών: Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ο αριθμός που προκύπτει από τη σύγκρισή της με τη μονάδα μέτρησης.
Εδώ, μονάδα μέτρησης είναι το εμβαδό του ενός τετραγωνικού χιλιομέτρου κάθε τετραγώνου που αντιστοιχεί σε πραγματικό μήκος 1 Km.

Η απόκλιση από το πραγματικό εμβαδόν είναι πολύ μικρή. Το θέμα αυτό είχε ζητηθεί στο διεθνή διαγωνισμό PISA το 2000, για μαθητές 15 ετών, από όλον τον κόσμο.
Οι δεκτές απαντήσεις ήταν από 12 εκ. τετρ. χιλιόμετρα έως 18 εκ. τετρ. χιλιόμετρα. Βέβαια, εκεί ο χρόνος και οι τεχνικές δυνατότητες των μαθητών ήταν περιορισμένες.

Δίνουμε παρακάτω τις πλήρεις οδηγίες βαθμολόγησης, όπως περιέχονται στις επίσημες εκδόσεις του PISA. Ελληνική μετάφραση από to Κ.Ε.Ε.

ΑΝΤΑΡΚΤΙΚΗ: ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 1

Σωστό

Οι παρακάτω κωδικοί υποδηλώνουν σωστές απαντήσεις ΚΑΙ σωστές μεθόδους επίλυσης. Το δεύτερο ψηφίο κάθε κωδικού δείχνει τις διαφορετικές μεθόδους επίλυσης.

Κωδικός 21: Εκτιμήθηκε σχεδιάζοντας ένα τετράγωνο ή ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού μεταξύ 12.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων και 18.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων (οι μονάδες δεν απαιτούνται).

Κωδικός 22: Εκτιμήθηκε σχεδιάζοντας ένα κύκλο εμβαδού μεταξύ 12.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων και 18.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων.

Κωδικός 23: Εκτιμήθηκε προσθέτοντας εμβαδά κανονικών γεωμετρικών σχημάτων μεταξύ 12.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων και 18.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων.

Κωδικός 24: Εκτιμήθηκε με κάποια σωστή μέθοδο μεταξύ 12.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων και 18.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων.

Κωδικός 25: Σωστή απάντηση: μεταξύ 12.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων και 18.000.000 τετραγωνικών χιλιομέτρων, αλλά δεν φαίνεται ο τρόπος επίλυσης.

Μερικώς σωστό

Οι παρακάτω κωδικοί υποδηλώνουν σωστή μέθοδο επίλυσης ΑΛΛΑ λανθασμένη ή ελλιπή απάντηση. Το δεύτερο ψηφίο κάθε κωδικού δείχνει τις διαφορετικές μεθόδους επίλυσης, σε αντιστοιχία με το δεύτερο ψηφίο των κωδικών του ΑΡΙΣΤΑ.

Κωδικός 11: Εκτιμήθηκε σχεδιάζοντας ένα τετράγωνο ή ένα παραλληλόγραμμο – σωστή μέθοδος αλλά λανθασμένη ή ελλιπής απάντηση. Π.χ.

- Σχεδιάζει ένα τετράγωνο και πολλαπλασιάζει το πλάτος επί το μήκος, αλλά το αποτέλεσμα είναι υπερεκτίμηση ή υποεκτίμηση του ορθού (π.χ. 18.200.000)
- Σχεδιάζει ένα τετράγωνο και πολλαπλασιάζει το πλάτος επί το μήκος, αλλά το πλήθος των μηδενικών είναι λανθασμένο (π.χ. 4000 · 3500 = 140.000)
- Σχεδιάζει ένα τετράγωνο και πολλαπλασιάζει το πλάτος επί το μήκος, αλλά ξεχνά να χρησιμοποιήσει την κλίμακα, για να μετατρέψει τον αριθμό σε τετραγωνικά χιλιόμετρα (π.χ. 12 cm · 15 cm = 180)
- Σχεδιάζει ένα παραλληλόγραμμο και γράφει ότι το εμβαδόν είναι:
4.000 km · 3.500 km. Δεν φαίνεται το υπόλοιπο της εργασίας.

Κωδικός 12: Εκτιμήθηκε σχεδιάζοντας ένα κύκλο· σωστή μέθοδος αλλά λανθασμένη ή ελλιπής απάντηση.

Κωδικός 13: Εκτιμήθηκε προσθέτοντας εμβαδά διαφόρων κανονικών γεωμετρικών σχημάτων· σωστή μέθοδος, αλλά λανθασμένη ή ελλιπής απάντηση.

Κωδικός 14: Εκτιμήθηκε με κάποια άλλη σωστή μέθοδο, αλλά με λανθασμένη ή ελλιπή απάντηση.

Λάθος

Κωδικός 01: Υπολογίστηκε η περίμετρος αντί του εμβαδού.

- Π.χ., 16.000 km καθώς με την κλίμακα των 1.000 km θα περιγράφαμε το χάρτη 16 φορές.

Κωδικός 02: Οποιαδήποτε άλλη λανθασμένη απάντηση.

• Π.χ., 16.000 km (δεν φαίνεται ο τρόπος επίλυσης και η απάντηση είναι λανθασμένη).

Κωδικός 09: Λείπει η απάντηση.

58. *Ο πονηρός βενζινοπώλης*

58.1 Υπολογίζουμε τον όγκο του κυλίνδρου. $V = \pi\cdot 0{,}4^2\cdot 400\ dm^3 = 200{,}96\ dm^3$ (λίτρα).
Υπολογίζουμε την αξία του χαμένου πετρελαίου με τιμή 0,58 € / λίτρο.[12]
Είναι 116,56 € (!).

58.2 Η απάντηση είναι «ανοικτή». Πιθανές απαντήσεις:

• Βάζουν μετρητή ακριβείας στη δεξαμενή. Μετρούν μαζί με τον βενζινοπώλη και πληρώνουν για την ποσότητα που θα μπει στη δεξαμενή.

• Υποχρεώνουν τον βενζινοπώλη να αδειάσει σε ένα βαρέλι το περιεχόμενο του σωλήνα.

• Υπολογίζουν το όγκο του σωλήνα και αφαιρούν την αξία του από το ποσό που πληρώνουν, κάνοντας συμφωνία πριν την παράδοση (...δύσκολα εφαρμόσιμο).

ΣΧΟΛΙΑ:

Αν παρουσιαστεί στην τάξη ως εισαγωγή στον υπολογισμό όγκου κυλίνδρου:

• δεχόμαστε ότι δεν έχει σημασία που ο σωλήνας έχει ελαστικότητα. Μετράμε το ύψος του σαν να είναι ευθύγραμμος.

• παρουσιάζουμε το γενικό τύπο για τον όγκο ορθών πρισμάτων (Εμβ. βάσης $\times$ ύψος) και προσπαθούμε να εκμαιεύσουμε τον τύπο για τον κύλινδρο.

• αφήνουμε να γίνει (ίσως) το σφάλμα: $R = 4$, $\upsilon = 40$, οπότε: $V = \pi\cdot 4^2\cdot 40$ ... και μετά παρεμβαίνουμε για να διορθώσουμε στις ίδιες μονάδες.

---

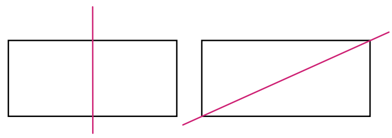
[12] Η άσκηση γράφτηκε τον Νοέμβριο του 2004. Έκτοτε άλλαξα τουλάχιστον πολλές φορές την τιμή του πετρελαίου θέρμανσης (προς τα πάνω ως το καλοκαίρι του 2008 και προς τα κάτω κατόπιν). Δεν χρειάζεται να είσαι μαθηματικός για να πειστείς για την άξια της χρήσης των μεταβλητών. Γράφουμε: κόστος: $K(x) = 200{,}96\cdot x$ (όπου x η τρέχουσα τιμή του λίτρου). Τώρα ... ας ανεβοκατεβαίνει όσο θέλει η τιμή του πετρελαίου!

Προέκταση (άσκηση για την τάξη):

Μοιράζουμε πλαστικά καλαμάκια αναψυκτικού και ζητάμε από τους μαθητές μόνοι τους ή ανά δύο να υπολογίσουν τον όγκο του υγρού που χωράει.

Π.χ. για $\delta = 0{,}5$ cm και $\upsilon = 24$ cm, θα έχουμε: $V = 4{,}71\ cm^3$.

59. *Συμμετρία*



59.1 **Λάθος**, μπορεί να έχει άξονα συμμετρίας ευθεία που δεν σχηματίζει τρίγωνα.

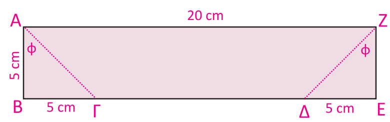
Όπως, π.χ. μεσοκάθετος απέναντι πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου· ή π.χ. η διαγώνιος ορθογωνίου ορίζει δύο ίσα τρίγωνα, δίχως να είναι άξονας συμμετρίας.

ΣΧΟΛΙΟ:

Αρκεί να βρούμε ένα, τουλάχιστον, **αντιπαράδειγμα** (για το οποίο δεν ισχύει η διατυπωμένη πρόταση), για να δηλώσουμε ότι είναι **ψευδής**.

60. *Κορνίζες*

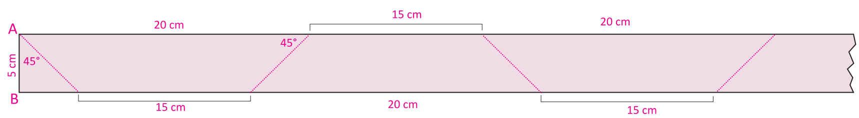
60.1 Κόβουμε τμήματα 20 cm. Πρέπει η γωνία φ να είναι ακριβώς 45°, ώστε τα κομμάτια να ταιριάζουν ακριβώς. Πρέπει να κατασκευάσουμε γωνίες 45°.



Για να σημαδέψουμε τις διακεκομένες γραμμές ΑΓ και ΖΔ, μετράμε τμήματα ΒΓ, ΔΕ 5 cm. Τότε οι εφαπτόμενες των γωνιών φ είναι $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{B\Gamma}{AB} = \frac{5}{5} = 1$, άρα οι γωνίες είναι 45°.

60.2 **Φαινομενικά** χρειαζόμαστε 4×20 cm = 80 cm για κάθε κορνίζα. Οπότε τα 3,55 m είναι 355 cm = 4·80 + 35 cm, άρα μπορούμε να φτιάξουμε 4 τέτοιες κορνίζες.

Μπορούμε όμως, να κόψουμε διαδοχικά τμήματα, όπως στο σχήμα:



Κόβουμε αρχικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 5 cm και κατόπιν χρειαζόμαστε 70 cm για κάθε κορνίζα, συνολικά: 5 + 5·70 = 355 cm. Φτιάχνουμε 5 κορνίζες.

ΣΧΟΛΙΟ:

Στα θέματα του PISA δεν είδα, ούτε για δείγμα, πρόβλημα που να περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς. Η απουσία αυτή μου θύμησε την άποψη που είχε διατυπώσει ο Dieudonné:

> «οι τριγωνομετρικοί τύποι είναι εκ των ων ουκ άνευ για όσους εξασκούν τρία απολύτως αξιοσέβαστα επαγγέλματα: α) για τους αστρονόμους· β) για τους τοπογράφους γ) για τους συγγραφείς εγχειριδίων τριγωνομετρίας, και για κανέναν άλλο. Γιατί να ταλανίζουμε λοιπόν τον δύσμοιρο το μαθητή;»[13].

Κι όμως, τα εργαλεία που μας δίνει η τριγωνομετρία σε υπολογιστικές ασκήσεις, που μπορεί να έχουν τη ρίζα τους στην καθημερινή ζωή, είναι ισχυρότατα. Ο εξοστρακισμός της από τα αναλυτικά προγράμματα θα στερήσουν στους μαθητές τα εργαλεία αυτά.

Αλήθεια, τα τελευταία χρόνια έχετε δει θέματα στις Γενικές Εξετάσεις που να περιέχουν ίχνη τριγωνομετρίας;

Ενότητα 3η *ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ*

61. *Η αγωνία του Ιούνη...*

61.1 Ο βαθμός που προκύπτει από το πηλίκο:

$\frac{\text{1ο τριμ.} + \text{2ο τριμ.} + \text{3ο τριμ.} + \text{Βαθμός γραπτών εξετ.}}{4}$ λέγεται **Μέσος όρος ή μέση τιμή** των βαθμών του μαθητή. Για να περάσει κανείς ένα μάθημα (στο Γυμνάσιο), πρέπει να έχει άθροισμα τουλάχιστον 38, ώστε ο μέσος όρος να είναι $\frac{38}{4} = 9{,}5$, που στρογγυλοποιείται στο 10. Οπότε η Μαρία χρειάζεται: 38 – (14 + 4) = 16 και άνω στο 3ο τρίμηνο.

[13] Από την εισαγωγή στο βιβλίο του: *Linear algebra and elementary geometry*. Βλέπε: V.M. Tikhomirov, *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*, Κάτοπτρο, Αθήνα, 1999.

62. *Ύψος μαθητών*

62.1 *Απαντήσεις επιτροπής PISA*

ΥΨΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ: ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 1

ΣΤΟΧΟΣ ΤΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ: Αξιολόγηση ικανότητας στοχασμού

ΔΕΣΠΟΖΟΥΣΑ ΕΝΝΟΙΑ: Αρχή της αβεβαιότητας

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Εκπαιδευτική

Σωστό Κωδικός 1: «Όχι» για όλα τα συμπεράσματα.

Λάθος Κωδικός 0: Άλλες απαντήσεις.

Κωδικός 9: Λείπει η απάντηση.

62.2 ***Δίνουμε κάποιες εξηγήσεις της απάντησης:***

- Στην ***πρώτη ερώτηση*** η απάντηση είναι **όχι** γιατί θα μπορούσαν π.χ. να προστεθούν ένα αγόρι κι ένα κορίτσι με ύψη 160 και 150 cm αντίστοιχα – ή δύο αγόρια με μέσο ύψος 160 cm.
- Στη ***δεύτερη ερώτηση*** η απάντηση είναι **όχι** γιατί θα μπορούσαν να προστεθούν π.χ. δύο αγόρια με μέσο ύψος 160 cm ή δύο κορίτσια με μέσο ύψος 150 cm.
- Για τους παραπάνω λόγους και στην ***τρίτη ερώτηση*** η απάντηση είναι **όχι**.
- Στη ***τέταρτη ερώτηση*** η απάντηση είναι **όχι** γιατί αν ήταν δύο αγόρια, το μέσο ύψος όλων θα αυξανόταν, ενώ αν ήταν δύο κορίτσια θα μειωνόταν.
- Στη ***πέμπτη ερώτηση*** η απάντηση είναι **όχι** γιατί θα μπορούσε π.χ. να προστεθεί ένα κορίτσι 140 cm και ένα άλλο 160 cm.

ΣΧΟΛΙΟ:

Αρκεί (όπως και στο θέμα 59) να βρούμε ένα, τουλάχιστον, **αντιπαράδειγμα** (για το οποίο δεν ισχύει η διατυπωμένη πρόταση), για να δηλώσουμε ότι είναι **ψευδής**.

ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ:

Προσθέτουμε τα παρακάτω ερωτήματα στην άσκηση:

1. Θα μπορούσε να προστεθούν:

Α. Ένα αγόρι ύψους 160 cm και ένα κορίτσι ύψους 150 cm; ΝΑΙ ■ ΟΧΙ ■

Β. Ένα αγόρι κι ένα κορίτσι με ίδιο ύψος; ΝΑΙ ■ ΟΧΙ ■

Γ. Δύο αγόρια με άθροισμα ύψους 320 cm; ΝΑΙ ■ ΟΧΙ ■

Δ. Δύο κορίτσια με ύψος 160 cm; ΝΑΙ ■ ΟΧΙ ■

Ε. Ένα αγόρι κι ένα κορίτσι, ώστε το αγόρι να είναι πιο κοντό από το κορίτσι; ΝΑΙ ■ ΟΧΙ ■

2. Αν προστεθούν δύο κορίτσια και ο νέος μέσος όρος των κοριτσιών γίνει 160 cm, τότε:

Α. Είναι και οι δύο πιο κοντές από 150 cm.

Β. Είναι και οι δύο πιο ψηλές από 160 cm.

Γ. Τουλάχιστον η μία είναι πιο ψηλή από 160 cm.

Δ. Είναι και οι δύο 165 cm.

Ε. Το άθροισμα του ύψους και των δύο είναι 320 cm.

3. Αν στην τάξη ήταν 10 αγόρια και 8 κορίτσια, το ένα παιδί που προστίθεται την επομένη είναι αγόρι με ύψος 171 cm και το μέσο ύψος των κοριτσιών γίνεται 152 cm, τι συμπεραίνετε για το φύλο και το ύψος των δύο παιδιών που προστέθηκαν;
Ποιο το νέο μέσο ύψος των μαθητών;

Απαντήσεις

1. Α. ΝΑΙ Β. ΟΧΙ Γ. ΝΑΙ Δ. ΟΧΙ Ε. ΟΧΙ

2. (Γ)

3. Τα αγόρια έχουν συνολικό ύψος 10·160 + 171 = 1.771 cm, οπότε το μέσο ύψος γίνεται: $\overline{x}_{\text{αγορ.}} = \dfrac{\text{Συνολικό ύψος}}{\text{αριθμός αγοριών}} = \dfrac{1.771}{11} = 161\,\text{cm}$.

Αφού αλλάζει το ύψος των κοριτσιών, **το άλλο παιδί είναι κορίτσι**, με ύψος x_9.

Τα κορίτσια είχαν συνολικό ύψος 8·150 = 1.200 cm.

Ο νέος μέσος όρος είναι: $\overline{x}_{\text{κορ.}} = \dfrac{\text{Συνολικό ύψος}}{\text{αριθμός κοριτσιών}}$ άρα $\dfrac{1.200 + x_9}{9} = 152\,\text{cm}$

οπότε: $1.200 + x_9 = 152 \cdot 9$ ή $x_9 = 1.368 - 1.200 =$ **168 cm**.

63. *Ενόργανη γυμναστική*

63.1 Μ.Ο. = $\frac{7,9+8,1+8,5+8,0+8,5}{5}=\frac{41}{5}=8,2$, Βαθμός: 26,24

63.2 Πήρε 41 βαθμούς στους 50, άρα ποσοστό $\frac{41}{50}=82\%$.

63.3 Θα είχε 56 βαθμούς με μέγιστο 70, άρα ποσοστό: 80%

64. *Ζυγίζοντας τους μαθητές*

64.1 24·65 = 1.560 κιλά

64.2 Α. ΛΑΘΟΣ Β. ΛΑΘΟΣ Γ. ΛΑΘΟΣ Δ. ΣΩΣΤΟ

65. *Καμένες λάμπες*

65.1 Ο μέσος όρος είναι 4, οπότε το ποσοστό των ελαττωματικών λαμπτήρων είναι $\frac{4}{200}=2\%$, άρα στους 5.000 λαμπτήρες **αναμένεται** να είναι: $\frac{2}{100}\cdot 5.000=100$ ελαττωματικοί.

Άλλη λύση:

Στους 2.000 ελέγχους, βρέθηκαν 40 ελαττωματικοί λαμπτήρες.

Τα ποσά ελαττωματικοί λαμπτήρες και σύνολο ελέγχων **δεχόμαστε** ότι είναι ανάλογα, οπότε, αν x οι αναμενόμενοι ελαττωματικοί σε σύνολο 5.000, θα είναι: $\frac{40}{2.000}=\frac{x}{5.000}$. Άρα στους 5.000 αναμένεται να είναι: $5.000\cdot\frac{40}{2.000}=100$ ελάττωματικοί.

65.2 Ο Μ.Ο. των ελαττωματικών είναι 2,48. Αφού ελέγξαμε όλους τους λαμπτήρες, κάναμε **απογραφή**. Στο ερώτημα (1) είχαμε βρει 2. Τέτοια μικρή διαφορά είναι αναμενόμενη και **αποδεκτή.** Οφείλεται στο μικρό αριθμό ελέγχων που κάναμε. Ο δειγματολειπτικός έλεγχος δίνει **περίπου** την πραγματική εικόνα και εφαρμόζεται όταν δεν είναι δυνατό ή δεν συμφέρει οικονομικά να κάνουμε απογραφή.

65.3 Το λιγότερο ... μηδέν λαμπτήρες, το περισσότερο 55 λαμπτήρες.

66. *Διαγωνισμός σκοποβολής*

66.1 Ο **Παύλος** που είχε 12,3. Ο Λεωνίδας είχε 12,2 και ο Νίκος 11,8

66.2 Μεγαλύτερη συσπείρωση (δηλαδή μικρότερη **διασπορά**) στις βολές είχε προφανώς ο Νίκος.

ΣΧΟΛΙΟ:

Δεν χρειάζεται, εδώ, να υπολογίσουμε διακύμανση ή ακόμα και το εύρος. Αρκεί η απλή παρατήρηση των βαθμολογιών.

66.3 Ο Λεωνίδας (3/10).

66.4 Θα μπορούσαν να λένε ότι μετρούν μόνο οι βαθμοί των επιτυχών βολών ή ακόμα ο αριθμός των επιτυχών βολών.

66.5 Όχι, γιατί ούτε καλό Μ.Ο. είχε, ούτε μία επιτυχή βολή (στο κέντρο), απλά ήταν ... σταθερά άστοχος!

67. *Προεκλογική δημοσκόπηση*

67.1 Η 3η απορρίπτεται, γιατί το δείγμα δεν είναι αντικειμενικό, εφόσον αφορά **μόνο** τους αναγνώστες της εφημερίδας.

Επίσης, η 4η απορρίπτεται, γιατί δεν επιλέγεται τυχαία και αντιπροσωπευτικά το δείγμα, αφού συμμετέχουν όσοι θέλουν και μάλιστα όσοι έχουν πρόσβαση στο internet και είναι αναγνώστες της συγκεκριμένης εφημερίδας.

Η 1η έχει τυχαίο δείγμα, αλλά η απέχει δύο μήνες από τις εκλογές. Επιλέγουμε τη 2η, επειδή η δημοασκόπηση έγινε λίγες μέρες πριν τις εκλογές. Το ότι έχει λίγο μικρότερο δείγμα δεν επηρεάζει την αντικειμενικότητα της δημοσκόπησης, εφόσον πληροί τα κριτήρια αναλογικότητας ως προς το εκλογικό σώμα.

68. *Μηνιαία έξοδα*

68.1 Τα δεδομένα έχουν μεγάλη διαφορά μεταξύ τους. Αν π.χ. παραστήσουμε τα έξοδα προμηθειών (42.000 €) με ράβδο ύψους 21 cm, τότε κάθε εκατοστό του ραβδογράμματος αντιστοιχεί σε 2.000 €, οπότε τα 85 € αντιστοιχούν σε ύψος μικρότερο του μισού χιλιοστού!

69. *Ο σταφυλοπαραγωγός*

69.1 Το 2003-2004, φαίνεται από την κλίση της πολυγωνικής γραμμής.

69.2 Από το 2002 στο 2003 είχε αύξηση 1,5 τ. με αρχική παραγωγή 16 τ., άρα το ποσοστό είναι: 9,375%

Από το 2002 στο 2004 είχε αύξηση 20 τ. με αρχική παραγωγή 16 τ., άρα το ποσοστό είναι: 125%

70. *Midtown madness*

Δανειστήκαμε τον τίτλο του θέματος από το γνωστό ηλεκτρονικό παιχνίδι με αγώνες αυτοκινήτων μέσα σε πόλεις της Microsoft® .

70.1 Το ποσοστό των αυτοκινήτων που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες στην πόλη είναι ελάχιστο, γι' αυτό και τα ατυχήματα με αυτές τις ταχύτητες φαίνεται να είναι λίγα στο σύνολο.

ΣΧΟΛΙΟ (*Για μαθητές Γ΄ Λυκείου*) : Το σφάλμα της έρευνας είναι ότι δε δίνει την **κατανομή των ταχυτήτων** των αυτοκινήτων στην πόλη, οπότε, από την καμπύλη συχνοτήτων, θα επιβεβαιώναμε μαθηματικά την προφανή εκτίμηση για το μικρό ποσοστό αυτοκινήτων που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες στην πόλη.

71. *Απατηλό ραβδόγραμμα*

71.1 Το διακεκομμένο ραβδόγραμμα παραπλανά πολλές φορές επίτηδες.

Η μεταβολή είναι μόλις: $\frac{450}{40.000} = 1{,}125\%$.

72. *Διαβάζοντας τα διαγράμματα*

72.1 Το κατάστημα Γ έχει μερίδιο ανάλογο με τη γωνία που αντιστοιχεί στο κυκλικό διάγραμμα. Η γωνία του Γ είναι 360° – (150° + 90°) = 120°. Οπότε οι εισπράξεις του είναι το $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ των συνολικών εισπράξεων για το έτος 2007, δηλαδή είναι: $\frac{1}{3} \cdot 600.000 = 200.000$ € .

Στο κυκλικό διάγραμμα που δείχνει τα κέρδη των καταστημάτων, η γωνία του Γ είναι 360° – (145° + 125°) = 90°. Οπότε οι εισπράξεις του είναι το $\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$ των συνολικών εισπράξεων για το έτος 2004, δηλαδή είναι: $\frac{1}{4}\cdot 400.000 = 100.000$ € .

72.2 Η εταιρεία είχε μεγαλύτερη είσπραξη το 2008. Τα έξοδά της είναι η διαφορά: Είσπραξη – κέρδος = 700.000 – 500.000 = 200.000 €.

73. *Ωρολόγιο πρόγραμμα*

73.1 Οι 90° της γωνίας των Μαθηματικών αντιστοιχούν σε 5 ώρες, άρα η μία ώρα αντιστοιχεί σε 18°. Οπότε οι 360° (όλη η γωνία) αντιστοιχούν σε 20 διδακτικές ώρες την εβδομάδα. Η γλώσσα: 180° – 18° = 162° αντιστοιχεί σε 9 ώρες κ.ο.κ.
Συμπληρώνουμε τον πίνακα:

Μάθημα	Ώρες
Γλώσσα	9
Μαθηματικά	5
Εμείς κι ο κόσμος	3
Τεχνικά	1
Γυμναστική	2
Σύνολο:	**20**

73.2 Ομοιόμορφη κατανομή των μαθημάτων κάθε μέρα. Π.χ.

ΩΡΕΣ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ
1η	Γλώσσα	Γλώσσα	Γλώσσα	Γλώσσα	Γλώσσα
2η	Γλώσσα	Γλώσσα	Μαθημ.	Γλώσσα	Γλώσσα
3η	Μαθημ.	Μαθημ.	Τεχνικά	Μαθημ.	Μαθημ.
4η	.. κόσμος	Γυμναστ.	.. κόσμος	Γυμναστ.	.. κόσμος

74. *Επαρχιακό Γυμνάσιο*

74.1 Το σύνολο είναι 120 μαθητές, άρα η πιθανότητα είναι $\frac{26}{120}$.

74.2 Από το $Γ_1$ που έχει τους περισσότερους μαθητές.

74.3 Από τη Β΄ τάξη που έχει τους περισσότερους μαθητές (51).

74.4 Τα αγόρια του $Β_2$ είναι 12, οπότε η πιθανότητα είναι: $\frac{12}{120} = 0{,}1 = 10\%$.

75. *Δελτίο καιρού*

75.1 Α: ΛΑΘΟΣ, Β: ΛΑΘΟΣ, Γ: ΛΑΘΟΣ, Δ: ΣΩΣΤΗ

ΣΧΟΛΙΟ:

Η εκφώνηση ζητά **ερμηνεία** της πρόγνωσης. Δε ζητά τη γνώμη μας για το αν νομίζουμε ότι είναι σωστή ή λάθος η πρόγνωση.

76. *Ο τυχερός παίχτης*

76.1 Α: ΛΑΘΟΣ, Β: ΛΑΘΟΣ, Γ: ΛΑΘΟΣ, Δ: ΣΩΣΤΗ, Ε: ΛΑΘΟΣ

ΣΧΟΛΙΟ:

Στην εκφώνηση, η έκφραση «ένα ζάρι» υπονοεί: «τίμιο ζάρι», δηλαδή κάθε όψη έχει ίδια πιθανότητα εμφάνισης. Σε κάθε επανάληψη του πειράματος η πιθανότητα εμφάνισης κάθε όψης είναι ίδια (δηλαδή $\frac{1}{6}$).

77. *Η επιδημία*

77.1 Προφανώς ... (Δ). Οποιαδήποτε άλλη απάντηση θα οφείλεται είτε σε τυχαία επιλογή απάντησης είτε σε άγνοια των εννοιών.

78. *Τα νούμερα του Τζόκερ*

78.1 Α. ΛΑΘΟΣ Β. ΛΑΘΟΣ Γ. ΣΩΣΤΟ Δ. ΛΑΘΟΣ

79. *Χίλια ευρώ*

79.1 Επειδή τα νομίσματα είναι **πολλά**, προφανώς**,** αναμένεται να παραμένουν περίπου τα μισά μετά την κάθε ρίψη. Αναμένεται, δηλαδή, να μένουν:

1η ρίψη: περίπου 500
2η ρίψη: περίπου 250
3η ρίψη: περίπου 125
4η ρίψη: περίπου 62
5η ρίψη: περίπου 30 κ.ο.κ.

ΣΧΟΛΙΟ:

Το «προφανώς» αναφέρεται στο **Νόμο των Μεγάλων αριθμών (Kolmogorov)**, που λέει ότι η συχνότητα επανάληψης κάθε ενδεχομένου ενός πειράματος μετά από «μεγάλο» αριθμό επαναλήψεων σταθεροποιείται σε ένα αριθμό, τον οποίο ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου. Εδώ δεχόμαστε ότι η πιθανότητα εμφάνισης κάθε όψης νομίσματος είναι 0,5.

79.2 Όχι, γιατί τα νομίσματα είναι λίγα, οπότε το αποτέλεσμα δεν μπορεί να προβλεφθεί.

ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ (*Για μαθητές Γ΄ Λυκείου*):

- Ποια η πιθανότητα για κάθε νόμισμα να «παραμείνει» μετά από ν ρίψεις στο τραπέζι;
- Ποια συνάρτηση προσεγγίζει τον αριθμό των νομισμάτων που παραμένουν μετά από ν ρίψεις στο τραπέζι;
- Με βάση τα παραπάνω, πότε αναμένεται να τελειώσει η διαδικασία;

Απάντηση:

Η πιθανότητα για κάθε νόμισμα να παραμείνει είναι $\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}$, άρα η συνάρτηση είναι: $\alpha_\nu = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \cdot 1.000$.

Οπότε, σχηματίζεται γεωμ. πρόοδος με $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\alpha_1 = 500$

$\alpha_1 = 500$

$\alpha_2 = 250$

$\alpha_3 = 125$

$\alpha_4 = \frac{125}{2}$ (αυτή είναι η πιθανότητα, δεν αντιστοιχεί σε πραγματικό ενδεχόμενο)

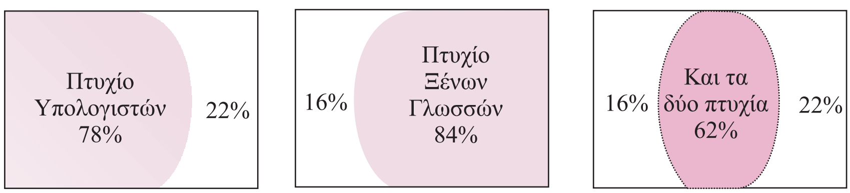
κ.ο.κ.

Αναμένεται να τελειώσει, όταν $\alpha_\nu < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \cdot 1.000 < 1 \Leftrightarrow 2^\nu > 1.000$

άρα για ν = 10.

80. *Τυπικά προσόντα*

80.1 Αφού το 78% των προσληφθέντων έχει πτυχίο Υπολογιστών, το υπόλοιπο 22% έχει πτυχίο **μόνο** Ξένης Γλώσσας.
Αφού το 84% των προσληφθέντων έχει πτυχίο Ξένης Γλώσσας, το υπόλοιπο 16% έχει πτυχίο **μόνο** Υπολογιστών.
Το υπόλοιπο 100 – 22 – 16 = 62% έχει και τα δύο πτυχία.
Παριστάνουμε με σχήματα (διαγράμματα Venn) τους παραπάνω υπολογισμούς.
Λέμε ότι το **σύνολο** των προσληφθέντων που έχουν και τα δύο πτυχία είναι η **τομή των δύο συνόλων**.



80.2 Το 62% των προσληφθέντων είναι 31 άτομα.
Αν x οι προσληφθέντες, τότε: $\frac{62}{100} \cdot x = 31$ άρα x = 50.

Άλλη λύση: (*Με απλή μέθοδο των τριών*)

$$\begin{array}{lll} 62 & \text{στους} & 100 \\ 31 & \text{στους} & x \\ \hline \end{array}$$

$$\text{οπότε, } x = \frac{100 \cdot 31}{62} = 50$$

81. *Οικογενειακό δεντρόγραμμα*

81.1 Παππούς του Γιάννη είναι ο Παναγιώτης. Αδελφός του είναι ο Ιάκωβος. Γιος του Ιάκωβου είναι ο Βασίλης. Μοναδικός εγγονός (αγόρι) είναι ο **Βασίλης**.

82. *Σετ ζωγραφικής*

82.1 Η πιο φτηνή κοστίζει: 18 + 4 + 8 + 12 + 5 = 47 €

Η πιο ακριβή κοστίζει: 18 + 8 + 12 + 18 + 7 = 63 €

82.2 Συνδυάζοντας κάθε ένα από τα είδη διαφορετικής αξίας των πέντε αντικειμένων, έχουμε το γινόμενο: 1 × 3 × 2 × 2 × 2 = 24

Τρίποδο		Παλέτα		Σετ πινέλα		κασετίνα με μπογιές		μουσαμάδες		
1	x	3	x	2	x	2	x	2	=	24

Μπορούμε να φτιάξουμε 24 διαφορετικές συνθέσεις.

82.3 Καταγράφουμε τους δυνατούς συνδυασμούς και βρίσκουμε τις εξής συνθέσεις:

18 + 8 + 8 + 12 + 7 = 53 €   18 + 4 + 8 + 18 + 5 = 53 €

18 + 6 + 12 + 12 + 5 = 53 €

Είναι: 1 × 2 × 2 × 3 = 12 διαφορετικοί συνδυασμοί.

83. *Πιτσαρία*

83.1 Συμβολίζουμε: Μπέικον: **Α,** Μανιτάρια: **Β,** Ζαμπόν: **Γ,** Πιπεριές: **Δ**.

Οι συνδυασμοί είναι:

ΑΒ	ΑΓ	ΑΔ	ΑΒΓ	ΑΒΔ	ΑΓΔ	ΑΒΓΔ
	ΒΓ	ΒΔ			ΒΓΔ	
		ΓΔ				

84. *Τιμοκατάλογος*

84.1 Είναι το γινόμενο: $3 \times 3 \times 5 = 45$.

84.2 Ελάχιστο: 0,50 + 0,60 + 1,00 + 0,50 = 2,60 €

Μέγιστο: 0,50 + 0,70 + 1,20 + 0,90 = 3,30 €

84.3 Το κόστος των 3 € προκύπτει από το συνδυασμό:

0,50 + 0,60 + 1,00 + 0,90 = 3,00 €

85. *Το πρόβλημα του μπογιατζή...*

85.1 Πιθανές (***φαινομενικά σωστές***) απαντήσεις:

1η Κάθε ένα από τα πέντε συνδυάζεται με καθένα από τα υπόλοιπα 4. Έχουμε, λοιπόν 20 συνδυασμούς.

$$\underline{\lfloor 5 \rfloor} \cdot \underline{\lfloor 4 \rfloor} = 20$$

και επειδή μετριούνται δύο φορές (πχ. ζαχαρί με γαλάζιο και γαλάζιο με ζαχαρί), είναι $\frac{20}{2} = 10$.

2η Συνδυασμοί:

Α–Μ	Α–Γ	Α–Ζ	Α–Λ	
	Μ–Γ	Μ–Ζ	Μ–Λ	
		Γ–Ζ	Γ–Λ	
			Ζ–Λ	Σύνολο: 10

ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έχει αμέτρητους, γιατί το χρώμα που θα προκύψει εξαρτάται από την αναλογία των χρωμάτων που θα αναμείξουμε!

ΣΧΟΛΙΟ:

Πρόκειται για ένα πρόβλημα «**πραγματικού κόσμου**», όπου τα μαθηματικά δεν μπορούν (και δεν χρειάζεται) να δώσουν απάντηση. Παραπλανά η εκφώνηση, γιατί θυμίζει συνδυασμούς των πέντε αντικειμένων ανά δύο.

Βιβλιογραφία

Βιβλία-περιοδικά

[1] Allen, Paulos John, *A Mathematician Reads the Newspaper,* Basic Books, N.Y., 1995.

[2] Goffree, F. & Dolk, M.L.A.M., *Standards for Mathematics Education*, Utrecht: Freudenthal Instituut, 1995.

[3] Lange, J. de, *Framework for classroom assessment in mathematics*, Madison: WCER, 1999.

[4] Θέματα διαγωνισμού *American Mathematic Contest* (AMC), 2002.

[5] Θέματα διαγωνισμού *NAEP* (διαφόρων ετών).

[6] Θέματα διαγωνισμού *TIMMS*, 1999.

[7] Κέντρο Εκπαιδευτικής Έρευνας, *Θέματα αλφαβητισμού προγράμματος PISA*, Αθήνα 2005.

[8] Λάμπρου Μ., Σπαουδάκης Ν. (2007-8), *Καγκουρό: Μαθηματικά για όλους,* Καγκουρό Ελλάς, τόμοι 1, 2. Περισσότερα στις ιστοσελίδες: www. Kangaroo.gr kagouro.gr

[9] OECD, (1999), *Measuring Student Knowledge and Skills – A New Framework for Assesment,* http://www.pisa.oecd.org

[10] OECD, (2000), *Measuring Student Knowledge and Skills*, The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy.

[11] OECD, (2001), *Knowledge and Skills for Life, First Results From the OECD Programme for International Student Assessment*, (PISA) 2000.

[12] OECD, (2001), *Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment*, READING, MATHEMATICAL AND SCIENTIFIC LITERACY.

[13] OECD, (2004). *Problem Solving for Tomorrow's World*, *First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003*.

[14] OECD,(2004), *The Pisa 2003 Assessment Framework*.

[15] OECD, (2004), *Learning for Tomorrow's World. First Results from PISA 2003,* [15] OECD, (2006), *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006.*

Στη διεύθυνση: http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/14/10/38709418.pdf
μπορείτε να βρείτε 50 αυθεντικά θέματα μαθηματικών του PISA

[16] ΟΕΔΒ, (2001), *Έκφραση-Έκθεση Γ΄ Λυκείου*.

[17] NCTM, (2000), *Principles and Standards*.

[18] Περιοδικό «Το φ», Β. Βισκαδουράκης, τ. 5, Αθήνα, 2008, σελ. 315-316.

[19] Περιοδικό «Απολλώνιος», παρ. Ημαθίας της Ε.Μ.Ε., τ. 3, Βέροια, 2004.

[20] Placement tests for Elememtary Mathematics, Singapore Math Inc., 2003.

[21] Ρίζος Γ., *Οι Περιπέτειες του Προβλήματος στα Σχολικά Μαθηματικά,* Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 2005.

[22] Στεργίου Μπ., *Διαγωνισμός στα Μαθηματικά (τάξη Ε΄),*εκδόσεις Σαββάλα. Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 2005.

[23] *The Great Assessment Problems book*, (*GAP*), Freudental Institute.

[24] V.M. Tikhomirov, *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*, Κάτοπτρο, Αθήνα, 1999.

[25] Van der Walle J.A., *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο, μια εξελικτική διαδικασία*, Εκδ. Τυπωθήτω - ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ, Αθήνα, 2005.

Άρθρα - Δημοσιεύσεις

[1] Antoine Bodin, *What does PISA really assess? What it doesn't? A French view*, IREM de Franche-Comté, Paris, 2005.

[2] Bastiaan J. Braams, *Mathematics in the OECD PISA Assessment*, New York University, Δεκ. 2001.

[3] Bastiaan J. Braams, *Programme for International Student Assessment*, New York University, Ιαν. 2002.

[4] Dekker, T. & Querelle, N. (2002). Great assessment problems. Utrecht: Freudenthal Instituut.

[5] Demonty, Isabelle - Fagnant, Annick - Baye, Ariane - Matoul, Anne - Monseur, Christian, *PISA 2003*, «*Présentation de la culture Mathématique*», Coordination: Dominique Lafontaine, Service de Pédagogie expérimentale, Université de Liège.

[6] Heuvel-Panhuizen, M. van den (2002). *Realistic Mathematics Education as Work in Progress.* In: Fou-Lai Lin (Eds.), Common sense in Mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan, 19 - 23 November 2001, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

[7] Θωμαΐδης, Ι. *Τι δείχνουν οι διεθνείς αξιολογήσεις TIMSS και PISA,* εισήγηση στην 3η ημερίδα "Μαθηματικά και Εκπαίδευση", Νοεμ. 2008, Δ/νση Δ/βαθμιας Εκ/σης Δυτ. Θεσσαλονίκης, Ε.Μ.Ε., Εκπαιδευτήρια Φρυγανιώτη.

[8] Graham A. Jones, (2006)*What do studies like PISA mean to the mathematics education community?* Griffith University, Gold Coast, Australia.

[9] Kooij, H. van der (1999). *Modeling and algebra: how 'pure' shall we be?* Paper presented at the 9th International Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications, Lisbon, Portugal.

[10] Kooij, H. van der (2002). *Algebra: A Tool for Solving Problems?* Paper presented at 'The Netherlands and Taiwan conference on common sense in mathematics education', Taipei, Taiwan.

[11] Lafontaine, D. - Demonty, I. - Fagnant, A. - Baye, A. - Matoul, A. - Monseur, Ch. *PISA 2003: Quelques questions de mathématiques*, Service de Pédagogie expérimentale . ULg.

[12] Lange, J. de (1995). *Assessment: No change without problems.* In: T.A. Romberg (Eds.), Reform in school mathematics, Albany: Suny Press.

[13] Μαρίνης Στέλιος, *Το νέο δόγμα του ΟΟΣΑ για τη μαθηματική εκπαίδευση στο σχολείο, το πρόβλημα για το πρόβλημα,* Αντιτετράδια της Εκπαίδευσης, τεύχος 82 – Καλοκαίρι 2007.

[14] Näätänen Marjatta , (2006), *PISA–survey, Finnish schools, teacher training and math. education,* Department of Mathematics and Statistics, University of Helsinki, Finland.

[15] National Center for Education Statistics, *A comparition of the NAEP, TIMMS-R and PISA,* working paper No. 2001-07, U.S. Department Education, June 2001.

[16] Ρίζος Γ., *Η Αριθμοφοβία και οι ευθύνες των Μαθηματικών*, ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, τ. 3, Βέροια Απρ. 2004.

[17] Ρίζος Γ., *Ο Διαγωνισμός PISA του ΟΟΣΑ, Δούρειος Ίππος της εκπαίδευσής μας,* Ομιλία σε εκδήλωση ΕΛΜΕ Κέρκυρας, Μάρτιος, 2007.

Δείτε το κείμενο της ομιλίας στη διεύθυνση:
http://www.elmeker.gr/1/index.files/Page4479.htm,
και περίληψή του: http://www.mathfoni.gr/pisa/pisa.htm

[18] Taylor, Fred, *OECD: The Trojan Horse Within, short history of the OECD and PISA activities*, Current Concerns, Ιαν. 2004.

[19] Van den Heuvel-Panhuizen, Marja, *Realistic Mathematics Education as Work in Progress*, Freudenthal Institute, 2002.

[20] Verhage, H.B. & Lange, J. de (1997). *Mathematics Education and Assessment.*

Του ιδίου:

Ρίζος Γ., *Προβλήματα Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου*,
Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 1996.

Ρίζος Γ., *Προβλήματα Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου*,
Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 1997.

Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*,
Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 1998.

Γκατζούλης Κ., Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, 2 τόμοι,
Εκδ. Γκατζούλη, Θεσσαλονίκη, 2000,

Γκατζούλης Κ., Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*,
Εκδ. Γκατζούλη, Θεσσαλονίκη, 2000,

Ρίζος Γ., *Οι Περιπέτειες του Προβλήματος στα Σχολικά Μαθηματικά*,
Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 2005.

Με τη νέα ύλη των μαθηματικών Γυμνασίου:

Γκατζούλης Κ., Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*,
Εκδ. Γκατζούλη (ΔΙΑΚΙΝΗΣΗ **Βιβλιο*ροή***), Θεσσαλονίκη, 2004

Γκατζούλης Κ., Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*,
Εκδ. ΜΑΥΡΙΔΗ, Θεσσαλονίκη, 2009

Γκατζούλης Κ., Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*,
Εκδ. ΜΑΥΡΙΔΗ, Θεσσαλονίκη, 2009

(...) Ο PISA διεξάγει κάθε τρία χρόνια έναν διεθνή μαθηματικό διαγωνισμό για να αξιολογήσει, μεταξύ άλλων, το επίπεδο γνώσεων των μαθητών. Τα θέματα σε αυτό το διαγωνισμό, αν και απλά, είναι κάπως διαφορετικά από τα πιο θεωρητικού χαρακτήρα θέματα που συνήθως διδάσκουμε στα σχολεία της χώρας μας (...).

Το ανά χείρας βιβλίο συμπληρώνει το κενό της ελληνικής βιβλιογραφίας σε μαθηματικά θέματα από την οπτική των εφαρμογών και της καθημερινότητας. Μέχρι τώρα η ελληνική βιβλιογραφία, δυστυχώς, δεν είχε ούτε ένα βιβλίο το οποίο να υιοθετούσε αυτή την υγιή πρακτική. Ευτυχώς τώρα προστίθεται ένα καλογραμμένο, χρήσιμο και διδακτικό εγχειρίδιο, το οποίο διαβάζεται ευχάριστα. Είμαι βέβαιος ότι θα αποτελέσει σταθμό για την βελτίωση της αναιμικής μαθηματικής παιδείας στη χώρα μας.

Μιχαήλ Λάμπρου
Καθηγητής
Τμήματος Μαθηματικών
Πανεπιστημίου Κρήτης

9 789608 990159

ISBN 978-960-89901-5-9