



Τμήμα: ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΠΡΟΣΟΧΗ: Για το διαγώνισμα β' τετραμήνου επιλέγετε 2 από τα 3 θέματα.

ΘΕΜΑ Β'. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, με $x \in (-1, 1)$.

- B'1. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτηση g .
- B'2. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά της.
- B'3. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της.
- B'4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g .
- B'5. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5X5=25

ΘΕΜΑ Γ'. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2}{8} + 1$ με $x > 0$ και $g(x) = \ln x$ με $x > 0$.

- Γ'1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\zeta: y = x - 1$ είναι κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων.
- Γ'2. Να αποδείξετε ότι $g(x) \leq x - 1 \leq f(x)$ για κάθε $x > 0$.
- Γ'3. Θεωρούμε ότι οι άξονες είναι βαθμολογημένοι σε μέτρα και μία κατακόρυφη ευθεία (ε), η οποία αρχικά όταν $t = 0 \text{ sec}$ ταυτίζεται με τον άξονα $y'y$, αρχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = \frac{1}{2} \text{ m/s}$, παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ προς την κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα Ox . Την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$ (σε sec) η ε τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των f και g στα σημεία K και Λ αντίστοιχα.

- (α') Να εκφράσετε την απόσταση ($K\Lambda$) ως συνάρτηση του χρόνου t .
- (β') Να βρείτε την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η απόσταση γίνεται ελάχιστη.
- (γ') Να δείξετε ότι την χρονική στιγμή t_0 οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων στα σημεία K και Λ είναι παράλληλες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8+8+3+3+3

ΘΕΜΑ Δ'. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$.

- Δ'1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.
- Δ'2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) + f(1+e-x) \geq 2f\left(\frac{1+e}{2}\right), \forall x \in [1, e]$$

Δ'3. Να αποδείξετε ότι:

$$f\left(\frac{1+e}{2}\right) \leq \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{e^x}{x} dx < e^{e-1}$$

Δ'4. α) Να αποδείξετε ότι έχει πραγματική ρίζα η εξίσωση:

$$\left(\int_1^e \frac{e^t}{t} dt\right) \cdot x = e^x$$

β) Να αποδείξετε ότι είναι αδύνατη για $x > 0$ η εξίσωση:

$$2f(2x) = f(x) + f(3x), \quad x > 0$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8+4+5+4+4

Καλή επιτυχία.