

1^{ος} ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ, 4 ΜΑΪΟΥ 2022

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80} + \sqrt{79}}$$
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{81} + \sqrt{80}}$$

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 8$.
- ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha > 4 > \beta$.
2. Μία δεξαμενή τροφοδοτείται από τρεις παροχές νερού Α, Β και Γ. Εάν ανοίξουμε τις Α και Β, η δεξαμενή γεμίζει σε 3 ώρες. Εάν ανοίξουμε τις Α και Γ, γεμίζει σε 4 ώρες. Γνωρίζουμε ότι η Β τροφοδοτεί με 3πλασια ποσότητα νερού την δεξαμενή από ότι η Γ στον ίδιο χρόνο. Εάν ανοίξουμε μόνο την Γ σε πόσες ώρες γεμίζει η δεξαμενή; Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή εάν ανοίξουμε και τις τρεις παροχές ταυτόχρονα;
3. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ ∥ ΓΔ ας είναι Ο το σημείο τομής των διαγωνίων. Αν γωνία ΑΟΔ = 120° και Μ, Ν, Ρ είναι τα μέσα των τμημάτων ΟΑ, ΟΔ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΝΡ είναι ισόπλευρο.
4. Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί x, y, z είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, με
- $$\frac{x^2 - 1}{yz} = \frac{y^2 - 1}{zx} = \frac{z^2 - 1}{xy}$$
- να αποδείξετε ότι $x + y + z = 0$.
5. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha\beta = -1$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
- $$K = \alpha^7 + \beta^7.$$
6. Από τους 19 μαθητές μίας σχολικής τάξης, οι 14 παίζουν μπάσκετ, οι 15 παίζουν βόλεϊ, οι 17 παίζουν ποδόσφαιρο και οι 13 τένις. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο μαθητές που παίζουν και τα τέσσερα αθλήματα.

Να δικαιολογήτε την απάντησή σας στα προβλήματα που θα λύσετε. Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα (5 μονάδες κάθε θέμα). Η τελική βαθμολογία σας είναι το άθροισμα των ορθών λύσεων. Για τον λόγο αυτό, λύστε όσα πιο πολλά προβλήματα μπορείτε.

Διάρκεια διαγωνισμού: 2 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!