Βασικές ταυτότητες

Ταυτότητα ονομάζεται μία ισότητα, η οποία αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχονται σε αυτήν.

Παραδείγματα:

α) $(xy)^4 = x^4 y^4$ β) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ γ) $3\chi+\chi=4\chi$ κλπ.

Μερικές από τις σημαντικότερες ταυτότητες είναι:

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Δεν ισχύει: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$ πχ $(3+4)^2=7^2=49$ ενώ $3^2+4^2=9+16=25$

ΠΡΟΣΟΧΗ: το $-\beta$ δεν είναι απαραίτητα αρνητικός αριθμός, όπως και το β δεν είναι απαραίτητα θετικός αριθμός

Διαφορά τετραγώνων: $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Κύβος αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Κύβος διαφοράς: $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Διαφορά κύβων: $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

Άθροισμα κύβων: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

Εφαρμογές ταυτοτήτων

Παραδείγματα:

$(2\alpha-1)^2=(2\alpha)^2-2\cdot 2\alpha\cdot 1+1^2=4\alpha^2+4\alpha+1$

$(\sqrt{2}+1)^2=\sqrt{2}^2+2\sqrt{2}\cdot 1+1^2=2+2\sqrt{2}+1=3+\sqrt{2}$,

Για να εφαρμόσουμε μία ταυτότητα δεν είναι αναγκαίο να έχουμε συγκεκριμένους αριθμούς, αλλά μπορεί να είναι και ολόκληρες παραστάσεις μεταβλητών ή αριθμών στη θέση των α, β που αντικαθιστούμε. Αυτό που κάνουμε είναι να αναγνωρίσουμε ποια ταυτότητα θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε και στη συνέχεια αφού τη γράψουμε δίπλα να προσπαθήσουμε να αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με τις αντίστοιχες παραστάσεις.

Παραδείγματα:

Παράσταση	Ταυτότητα	Αντικατάσταση μεταβλητών	Εφαρμογή ταυτότητας
$(a+2)^2$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$a=a$ και $b=2$	$a^2+2\cdot a\cdot 2+2^2=a^2+4a+4$
$(4x-2y)^2$	$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$	$\alpha=4x$ και $\beta=2y$	$(4x)^2-2\cdot(4x)\cdot(2y)+(2y)^2$ $=16x^2-16xy+4y^2$
$4-a^2$	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$a^2=4, b^2=a^2$ άρα $a=2$ ή -2 και $b=a$ ή $-a$	$4-a^2=2^2-a^2=$ $=(2-a)(2+a)$
$(\frac{1}{2}+y^2)^3$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a=\frac{1}{2}$ και $b=y^2$	$(\frac{1}{2}+y^2)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^2y^2\cdot$ $+3\left(\frac{1}{2}\right)(y^2)^2+(y^2)^3=$ $=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{2}y^4+y^6$

Στις επόμενες ασκήσεις να κάνετε εφαρμογή των ταυτοτήτων, εφαρμόζοντας τη διαδικασία που υποδεικνύεται στον προηγούμενο πίνακα.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

α) $(x+1)^2$ β) $(x-1)^3$ γ) $(x-1)(x+1)$ δ) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ ε) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$ στ) $(x-y)^2$

2. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

α) $(2x-3y)^2$ β) $\left(\frac{x}{y}+2\sqrt{2}\right)^2$ γ) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ δ) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ ε) $\left(\frac{1}{2}-a^2\right)^3$ στ) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$

3. Χρησιμοποιώντας τις βασικές ταυτότητες να αποδειχθεί ότι: $\left(x+\frac{4}{x}\right)^2-\left(x-\frac{4}{x}\right)^2=\frac{16}{x}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\left(2020+\frac{1}{505}\right)^2-\left(2020-\frac{1}{505}\right)^2$

Ταυτότητες και παραγοντοποίηση

Οι ταυτότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επιτύχουμε παραγοντοποιήσεις.

Παραδείγματα

- Μπορούν να εφαρμόζονται απευθείας:

$x^2-2x+1=x^2-2x+1^2$ το οποίο μου θυμίζει το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ <u>αν θέσω στη θέση των</u> a, b <u>τους</u> $a=x, b=1$.

Θυμηθείτε ότι στη θέση των μεταβλητών σε μία ταυτότητα μπορούμε να θέσουμε οποιαδήποτε παράσταση, η οποία παίρνει τις ίδιες τιμές με τις μεταβλητές.

Το να βρω πώς προκύπτει μία γνωστή ταυτότητα από κάποια τέτοια κατάλληλη αντικατάσταση είναι συνήθως το δύσκολο και απαιτεί κάποια εξάσκηση και παρατηρητικότητα.

Έτσι τελικά έχουμε για το πρώτο παράδειγμα: $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

- Μπορούν να εφαρμόζονται έπειτα από κατάλληλη εύκολη διαμόρφωση:

$-y^2+4y-4=-y^2+2\cdot 2y-2^2$ Εδώ παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο τετράγωνα και το διπλάσιο γινόμενό τους, αλλά τα τετράγωνα έχουν αρνητικό πρόσημο, κάτι που δεν ταιριάζει σε κάποια γνωστή ταυτότητα. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και εξάγουμε κοινό παράγοντα το -1 , ώστε να επιτύχουμε τα πρόσημα που θέλουμε:

$-y^2+4y-4=-y^2+2\cdot 2y-2^2=-1\cdot(y^2-2\cdot 2y+2^2)=-(y-2)^2$ όπου τώρα έγινε εμφανές ότι αποτελεί ανάπτυγμα της γνωστής ταυτότητας $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

- Οι ταυτότητες δεν υπάρχουν ή είναι ελλιπείς και απαιτούν κατάλληλες προσθαφαιρέσεις ή διασπάσεις για να «εμφανιστούν».

Σε κάποιες περιπτώσεις η ταυτότητα που θα χρησιμοποιηθεί δε φαίνεται ολόκληρη, αλλά μόνο κάποιοι όροι της και κάποιοι μπορεί να λείπουν. Οπότε τους προσθαφαιρούμε ώστε να μην αλλάξει η παράσταση και εφαρμόζουμε την ταυτότητα που θα εξυπηρετήσει: x^3+x^2-2 εδώ δε φαίνεται εφικτή κάποια από τις «εύκολες» παραγοντοποιήσεις. Όμως, παρατηρούμε ότι μπορούμε να «σπάσουμε» το -2 σε -1 και -1, το οποίο είναι εξυπηρετικό, διότι θα δημιουργήσουμε μία διαφορά τετραγώνων x^2-1 οπότε έχουμε:

$$x^3+x^2-2=x^3+x^2-1-1=x^3-1+x^2-1=$$

$$=(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)=(x-1)(x^2+x+1+x+1)=(x-1)(x^2+2\mathrm{x}+2).$$

Σε όλες τις περιπτώσεις που γίνεται ομαδοποίηση είτε με ταυτότητες, είτε με εξαγωγές κοινών παραγόντων απαιτείται προσοχή, ώστε οι προσθεταίοι που απομένουν να έχουν κοινό παράγοντα μεταξύ τους, διότι διαφορετικά δε θα επιτύχει η παραγοντοποίηση.

Άλλα παραδείγματα

1. $(x+1)^2-2(x+1)+1=(x+1)^2-2\cdot1\cdot(x+1)+1^2=((x+1)-1)^2=x^2$.
2. $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2+2\mathrm{x}^2y^2-2\mathrm{x}^2y^2=(x^2+y^2)^2-(\sqrt{2}x\,y)^2=(x^2+y^2+\sqrt{2}xy)(x^2+y^2-\sqrt{2}xy)$.
3. $x^2-2\mathrm{xy}+y^2-w^2=(x-y)^2-w^2=(x-y+w)(x-y-w)$.
4. $(x^2+9)^2-36\mathrm{x}^2=(x^2+9)^2-(6\mathrm{x})^2=(x^2+9+6\mathrm{x})(x^2+9-6\mathrm{x})$.
5. $(y^2-4)^2-(y+2)^2=((y-2)(y+2))^2-(y+2)^2=(y-2)^2(y+2)^2-(y+2)^2=(y+2)^2[(y-2)^2-1]=$
   $=(y+2)^2(y-2+1)(y-2-1)=(y+2)^2(y-1)(y-3)$.
6. $y^2-x^2-10\mathrm{y}+25=(y-x)(y+x)-5(2\mathrm{y}-5)$ όμως με αυτήν την ομαδοποίηση δεν επιτυγχάνεται οι δύο προσθεταίοι που απομένουν να έχουν κοινό παράγοντα οπότε πρέπει να δοκιμάσουμε κάτι άλλο.
   $y^2-x^2-10\mathrm{y}+25=y^2-10\mathrm{y}+25-x^2=y^2-2\cdot5\,y+5^2-x^2=(y-5)^2-x^2=(y-5+x)(y-5-x)$.
7. $x^2-7\mathrm{x}+12=x^2-3\mathrm{x}-4\mathrm{x}+3\cdot4=x(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x-4)$.
8. $25\mathrm{x}^2+20\,x+4=(5\mathrm{x})^2+20\,x+2^2=(5\mathrm{x})^2+2\cdot2\cdot5\mathrm{x}+2^2=(5\mathrm{x}+2)^2$.
9. $4\mathrm{x}^2-28\mathrm{xy}+49\mathrm{y}^2=(2\mathrm{x})^2-2\cdot2\mathrm{x}\cdot7\mathrm{y}+(7\mathrm{y})^2=(2\mathrm{x}-7\mathrm{y})^2$.
10. $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=x^2+2\cdot\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$.
11. $x^3+6\mathrm{x}^2y+12\,xy^2+8\mathrm{y}^3=x^3+3\cdot2\,x^2\,y+3\cdot4\,xy^2+(2\mathrm{y})^3=x^3+3\cdot x^2(2\mathrm{y})+3\cdot x\cdot(2\mathrm{y})^2+(2\mathrm{y})^3=(x+2\mathrm{y})^3$.
    ¿
12. $(x^2-y^2)^2+x^2-y^2+\frac{1}{4}=(x^2-y^2)^2+x^2-y^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=(x^2-y^2)^2+2\cdot\frac{1}{2}(x^2-y^2)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x^2-y^2+\frac{1}{2}\right)^2$.
13. $x^{10}+x^5+1=x^{10}+x^9-x^9+x^8-x^8+x^7-x^7+x^6-x^6+x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x+1=$
    $=x^{10}+x^9+x^8-(x^9+x^8+x^7)+x^7+x^6+x^5-(x^6+x^5+x^4)+(x^5+x^4+x^3)-(x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)=$
    $=x^8(x^2+x+1)-x^7(x^2+x+1)+x^5(x^2+x+1)-x^4(x^2+x+1)+x^3(x^2+x+1)-x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=$
    $=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.
14. $x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$.

Άσκηση: Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $2\mathrm{x}^2-8$ b) $(x^2+3\mathrm{x}+5)^2-6\mathrm{x}^2(x^2+3\mathrm{x}+5)+9\mathrm{x}^4$ c) $(xy+zw)^2+(xw-yz)^2$ d) $x^{16}-1$ e) $x^4-4\mathrm{x}^4$
f) $x^4+4\,y^4$ g) $(2\mathrm{x}+3\mathrm{y}-1)^2+4\mathrm{x}+6\mathrm{y}-1$ h) $x^3+x^2+xy+y^2-y^3$ i) $x^3-2\mathrm{x}-2$ j) x^4+x^2+1.

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι αριθμός $11^{10}-1$ διαιρείται με το 10 και έπειτα με το 100.