Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Όμιλος Μαθηματικών Α Λυκείου
Θέματα Άλγεβρας Διαγωνισμού Θαλής.

1 Παραγοντοποιήσεις

1.1 Περίληψη θεωρίας

Θεώρημα 1.1. *Μία άσκηση σίγουρα δε λύνεται χωρίς να δοκιμάσεις να **γράψεις** μια ιδέα· ενδεχομένως πολλές φορές και μετά από πολλά αδιέξοδα.*

Θεώρημα 1.2 (Βασικές Ταυτότητες). *Αποδεικνύονται εύκολα :*

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bd$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \cdots + a^1b^{n-2} + b^{n-1})$

Θεώρημα 1.3 (Ταυτότητα Lagrange).
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$

$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) =$
$(ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (az - cx)^2$

Θεώρημα 1.4 (Ταυτότητα Euler). $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bv) = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2\right]$

Θεώρημα 1.5 (Ταυτότητα Newton).

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

Θεώρημα 1.6 (Υπό συνθήκη).

$$A\nu \ a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$A\nu \ a^3 + b^3 + c^3 = 0 \Rightarrow a + b + c = 0a = b = c$$

1.2 Θέματα παραγοντοποίησης

1.2.1 Ομάδα Α΄

Θέμα 1.1. [2012]
Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$K = \frac{\alpha^3 + b^3 - \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha\beta + \beta^2)(\alpha - 2\beta)}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha - \beta}$$

αν $\alpha + \beta \neq 0$ και $\alpha + \beta \neq 1$.

(Παρατήρηση : Προσέξτε τι μπορείτε να παραγοντοποιήσετε ευκολότερα μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή)

Θέμα 1.2. [2011]
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x) = \frac{1 + x^4 + (1 + x)^3 + x(1 + x)^3}{1 + x^2 + (1 + x)^2} - \frac{2(1 + x^3) + (1 + x)^3}{3(1 + x^2)}.$$

(Παρατήρηση : Αν δεν μπορείτε να παραγοντοποιήσετε άμεσα μπορείτε είτε σε ομάδες, είτε να κάνετε πράξεις.)

Θέμα 1.3. [Θαλής Α λυκείου 2010]
Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

Θέμα 1.4. [Θαλής Α λυκείου 2007]
Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

Θέμα 1.5. [Θαλής Α λυκείου 2007]
Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0.$$

Θέμα 1.6. [Θαλής Α λυκείου 2005]
Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $2003 \cdot 2005^3 - 2004 \cdot 2002^3$ είναι κύβος ακεραίου αριθμού.

Θέμα 1.7. [Θαλής Α λυκείου 2004]
Οι θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$ είναι τέτοιοι ώστε $x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 = 49(x - y)$. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y.

Θέμα 1.8. [Θαλής Α λυκείου 2001]
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι $xyz = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{1}{y + 1 - \frac{y}{x + 1}} + \frac{1}{z + 1 - \frac{z}{y+1}} + \frac{1}{x + 1 - \frac{x}{z+1}}$$

.

Θέμα 1.9.

Αν $a,b,c\in\mathbb{R}$ και $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$ τότε να αποδειχθεί ότι : $(a+b+c)^{2013} = a^{2013}+b^{2013}+c^{2013}$.

Θέμα 1.10.

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός : $a = 2^{2014}+1$ είναι σύνθετος.

(Παρατήρηση : Η παραγοντοποίση σε παραστάσεις που είναι αθροίσματα άρτιων δυνάμεων μπορεί να γίνεται με τη δημιουργία ταυτοτήτων - πχ διαφορά τετραγώνων ή διαφορά κύβων - προσθαφαιρώντας κατάλληλους όρους.)

Θέμα 1.11.
Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A = x^4+25$$
$$B = x^{10}+x^5+1$$
$$C = x^5+x+1$$
$$D = x^4+x^2+1$$
$$E = 4x^4+1$$
$$F = x^5+x^4+1$$
$$G = x^4+x^3+2x^2+x+1$$

Θέμα 1.12. [Ευκλείδης Α λυκείου 2007]
(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K = (x+y)^3-(x-y)^3-6x^2y-y^3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 200004^3-199996^3-24\cdot 200000^2-64$$

είναι κύβος ακεραίου.

1.2.2 Ομάδα Β′

Θέμα 1.13. [Θαλής Α′λυκείου 2008]
Αν οι πραγματικοί αριθμοί x,y,z ικανοποιούν τις ισότητες $x^2-y=z^2$, $y^2-z=x^2$, $z^2-x=y^2$, να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους x,y,z ισούται με 0.

Θέμα 1.14. [Θαλής Α′λυκείου 2005]
Να αναλυθεί το πολυώνυμο

$$x^6-2x^5+x^2-x-2$$

σε γινόμενο τριών πολυωνύμων θετικού βαθμού.

(Παρατήρηση : Ορισμένες φορές όταν θέλουμε να αναλύσουμε ένα πολυώνυμο σε γινόμενο πολυωνύμων μικρότερου βαθμού μπορούμε να υποθέσουμε μία βολική διάσπαση για αυτήν την ανάλυση. Για παράδειγμα το x^5+x+1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι γράφεται στη μορφή $x^5+x+1 = (x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e)$ από όπου με πράξεις στο δεύτερο μέλος και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές στη συνέχεια μπορούμε να καταλήξουμε, λύνοντας το σύστημα που προκύπτει σε μία διάσπαση, όταν αυτή υπάρχει.)

Θέμα 1.15. [Θαλής Α λυκείου 2003]
Να βρεθούν οι ακέραιοι α,β για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

$$\alpha\beta^2+2\alpha\beta+\alpha = 2\beta^2+4\beta+3.$$

Θέμα 1.16. [Ευκλείδης Α λυκείου 2007]
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2-2\alpha = 2\beta+\alpha\beta-4$, να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $(2x-\alpha)^3-(x-\beta)^3-x^3=0$.

Θέμα 1.17. [ΠΜΔ Α λυκείου 1989]
Αν α,β,γ με $\alpha+\beta+\gamma=0$ να δείξετε ότι ο αριθμός $2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου αριθμού.

Θέμα 1.18. [ΠΜΔ Α λυκείου 1987]
Τα μέτρα των πλευρών α,β,γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ικανοποιούν την σχέση :

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}+\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}=0.$$

Να βρεθεί το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, δηλ. είναι το τρίγωνο ορθογώνιο, ισόπλευρο κ.λ.π.·

Θέμα 1.19. [Ευκλείδης Α λυκείου 1998]
Έστω $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Q}_+^*$ με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\alpha\beta\gamma$. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $A=(\alpha^2\beta^2+1)(\beta^2\gamma^2+1)(\gamma^2\alpha^2+1)$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Θέμα 1.20. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]
α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση x^4+4y^4 .
β) Αν οι αριθμοί x,y είναι θετικοί ακέραιοι με $y\geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός x^4+4y^4 είναι σύνθετος.

Θέμα 1.21. [Ευκλείδης Α λυκείου 2001]

Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:

$$A=(1+\alpha-\alpha^2+\alpha^3)^2+\alpha^3.$$

Θέμα 1.22. [Ευκλείδης Α λυκείου 2008]

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση:

$$A=\frac{\left(x^2-\dfrac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0, xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

2 Ανισότητες

2.1 Περίληψη Θεωρίας

Γενικά, όταν έχουμε κάποια ανισότητα, για να την αποδείξουμε, είτε προσπαθούμε να την μετατρέψουμε σε κάποια ήδη γνωστή, είτε σε τέλειο τετράγωνο, ώστε να καταλήξουμε για παράδειγμα στη βασική ιδιότητα της διάταξης των πραγματικών αριθμών:

$$x^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Τις ανισότητες που ακολουθούν σε αυτήν την παράγραφο καλό είναι να τις θυμόμαστε ως βασικές και αφού τις αποδείξουμε να προσπαθούμε να ανάγουμε τα ζητούμενα σε αυτές.

Θεώρημα 2.1. *Βασικές ιδιότητες διάταξης*
Μεταβατική ιδιότητα: $x > y, \ y > z \Rightarrow x > z$
Πρόσθεσης κ.μ.: $x > y, \ z > w \ \Rightarrow x + y > z + w$
Πρόσθεσης-Διαγραφής: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
Πολλαπλασιασμού : $x > y > 0, \ w > z > 0 \Rightarrow xw > yz$
Πολλαπλασιαμού με θετικό: $x < y, z > 0 \Rightarrow xz > yz$
Πολλ. με αρνητικό: $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$
Αντιστρόφων: $x > y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$
Δυνάμεων: $x > y > 0 \Rightarrow x^n > y^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
Δυνάμεων άρτιων: $x^{2n} < y^{2n} \Leftrightarrow |x| < |y|$
Δυνάμεων περιττών: $x^{2n+1} < y^{2n+1} \Leftrightarrow x < y$

Πρόταση 2.1. *Να αποδειχθεί ότι:* (a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$.
(b) $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$
(c) $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

Η επόμενη ανισότητα είναι ιδιαίτερα βασική και βρίσκει εφαρμογή σε πολλές περιπτώσεις. Θυμηθείτε από την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο τις έννοιες του αριθμητικού και του γεωμετρικού μέσου. Η επόμενη πρόταση λέει ότι ο αριθμητικός μέσος δύο αριθμών είναι πάντα μεγαλύτερος από τον Γεωμετρικό μέσο.

Πρόταση 2.2 (Ανισότητα ΑΜ-ΓΜ).

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}, \ \forall x, y \geq 0$$

Πόρισμα 2.2.1. *Αν* $x, y \geq 0$
(a) $\sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$
(b) $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

Η ανισότητα της πρότασης 2.2 μπορεί να γενικευτεί και για περισσότερους αριθμούς, σύμφωνα με την επόμενη:

Πρόταση 2.3 (Γενικευμένη Ανισότητα ΑΜ-ΓΜ).
(a) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$
(b) $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
(c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$
για κάθε $x, y, z, x_i \geq 0$.

Αποδείξτε το (a) της παραπάνω πρότασης χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler (1.4). Αποδείξτε το (b) της παραπάνω πρότασης χρησιμοποιώντας το (a).

Σημαντικές ανισότητες προκύπτουν εύκολα για το άθροισμα αντίστροφων θετικών ή αρνητικών αριθμών:

Πρόταση 2.4. (a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, *αν* x, y *ομόσημοι.*
(b) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \leq -2$, *αν* x, y *ετερόσημοι.*

Με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης να αποδειχθεί το επόμενο:

Πόρισμα 2.4.1 (Άθροισμα αντιστρόφων). *Ισχύουν:*
(a) $x + \frac{1}{x} \geq 2, \ \forall x > 0$
(b) $x + \frac{1}{x} \leq 2, \ \forall x < 0$

2.1.1 Ανισότητες υπό συνθήκη

Σε κάποιες ασκήσεις (συχνές στον Ευκλείδη Α΄ λυκείου) δίνεται κάποια συνθήκη για τους αριθμούς και ζητείται να αποδειχθεί κάποια ανισότητα για αυτούς.

Παράδειγμα 2.1. *Αν ισχύει ότι:* $x + y + z = 2$, *να αποδειχθεί ότι:* $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx - 1)$

Απόδειξη. Εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη δοσμένη συνθήκη, ώστε να μετατραπεί η ζητούμενη σε κάποια γνωστή ανισότητα με ισοδυναμίες, είτε να ξεκινήσουμε από το ένα μέλος της ανισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε και να καταλήξουμε στο άλλο μέλος, χρησιμοποιώντας τη δοσμένση σχέση: Καταρχήν, παρατηρούμε ότι η δοσμένη για να είναι χρήσιμη πρέπει να τη μετατρέψουμε σε μορφή που να έχει τετράγωνα, διότι έτσι εμφανίζονται οι μεταβλητές στη ζητούμενη. Οπότε έχουμε:

$$x + y + z = 2 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 4$$

Η αποδεικτέα γράφεται:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 \geq 4xy + 4yz + 4xz - 4 &\Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 4xy + 4yz + 4xz - (x + y + z)^2 &\Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz - x^2 - y^2 - z^2 &\Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 - 2xy + x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + z^2 - 2yz \geq 0 &\Leftrightarrow \\ (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Η τελευταία ισχύει αφού πρόκειται για άθροισμα τετραγώνων πραγματικών αριθμών. □

2.1.2 Εισαγωγικές Ασκήσεις

Άσκηση 2.1. *Να αποδειχθούν:*
$(a)(x + y)^2 \geq 4xy \qquad (b)(x - y)^2 \geq -4xy$

Άσκηση 2.2. *Να αποδειχθούν:*
(a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$
(b) $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$
(c) $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$

Άσκηση 2.3. *Αν* $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ *και* $x + y + z \geq xyz$, *τότε:*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$$

Άσκηση 2.4. *Αν* $x, y \in \mathbb{R}$ *τότε:*

$$x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$$

Άσκηση 2.5. *Αν $x, y > 0$,τότε:*
(a) $\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ (b) $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Άσκηση 2.6. *Αν $x, y > 0$, τότε:*
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$
Πότε ισχύει η ισότητα;

Άσκηση 2.7. *Αν $x, y > 0$, τότε:*
(a) $\frac{x^2+y^2}{x+y} \geq \frac{x+y}{2}$
(b) $\frac{x+y}{4} \geq \frac{xy}{x+y}$
Πότε ισχύουν οι ισότητες;

Άσκηση 2.8 (*Ανισότητα Nesbitt). $x, y, z > 0$

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Μερικές ανισότητες όπως η προηγούμενη, η συμμετρία και η αρμονία που περιέχουν είναι αρκετές για να ασχολείται κάποιος με τα μαθηματικά.

Άσκηση 2.9. *Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$,τότε:*

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)$$

Άσκηση 2.10. *Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x, y, z > 1$,τότε:*

$$xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > x + y + z + \frac{1}{xyz}$$

Σε ανισότητες υπό συνθήκη, αν η συνθήκη είναι ισότητα μπορεί να οδηγήσει και σε χρήσιμη ανισότητα:

Άσκηση 2.11. *Αν $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ και $x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 16$, τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$x^5 + y^5 + z^5 + w^5 \leq 32$$

Άσκηση 2.12. *Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$$

Άσκηση 2.13. *Αν $a > 0$, $a^5 - a^3 + a = 3$ τότε: $a^6 \geq 5$.*

Άσκηση 2.14. *Αν $x, y, z \geq 0$, τότε:*

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{x + y + z + 1} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άσκηση 2.15. *Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ και $x + y + z \geq xyz$,τότε:*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$$

2.1.3 Ευρύτερες Ανισότητες

Ήδη έχουν εμφανιστεί στα προηγούμενα ανισότητες, οι οποίες έχουν προκύψει από «αντίστοιχες» ταυτότητες. Στο επόμενο συγκεντρώνονται μερικές από αυτές.

Θεώρημα 2.2 (Ανισότητες από ταυτότητες).
(a) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz, \ \forall x, y, z \geq 0$
(b) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2, \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$

Η επόμενη φέρει το όνομα Cauchy-Buniakowsky-Schwarz και μπορεί να αποδειχθεί και αυτή με τη βοήθεια της ταυτότητας Lagrange

Θεώρημα 2.3 (Ανισότητα C.B.S.).

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq$$
$$\geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

Ακολουθεί η γενικευμένη μορφής της ανισότητας Τετραγωνικού, Αριθμητικού, Γεωμετρικού, Αρμονικού μέσου.

Θεώρημα 2.4 (Γενικευμένη ανισότητα Τ-Α-Γ-Α μέσου). *Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq$$
$$\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_n} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Θεώρημα 2.5 (Ανισότητα Αναδιάταξης). *Ας είναι: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, $y_1 \leq y_2 \leq \ldots y_n$ και $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ μία αναδιάταξη των x_i, τότε:*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq$$
$$\geq z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n \geq$$
$$\geq x_ny_1 + x_{n-1}y_2 + \cdots + x_1y_n$$

2.1.4 Εφαρμογές σε ασκήσεις

Άσκηση 2.16. *Αν $x, y, z > 0$ τότε:*

$$(x_+y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 9xyz$$

Άσκηση 2.17. *Αν $x, y, z > 0$ τότε :*

$$(a) \ (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$$

$$(b) \ (x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$$

Άσκηση 2.18. *Αν $x, y, z > 0$ τότε:*

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

Άσκηση 2.19. *Να αποδειχθεί ότι:*

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots \frac{1}{x_n^2}\right) \geq n^2$$

Άσκηση 2.20. *Αν $x, y, z, w \in \mathbb{R}_+$, $xyzw = 1$ τότε ισχύει:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + xy + xz + xw + yz + yw + zw \geq 10$$

Άσκηση 2.21. *Αν $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ και $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ μία αναδιάταξή τους, τότε:*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_1y_2 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

2.2 Θέματα ανισοτήτων

2.2.1 Ομάδα Α΄

Θέμα 2.1. [Θαλής Α λυκείου 2006]
Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Θέμα 2.2. [Ευκλείδης Α λυκείου 2011]
Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3} \leq \frac{|x|+x^2}{4}$ και $\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4} > \frac{(x+2)^2}{4}$

Θέμα 2.3. [Ευκλείδης Α λυκείου 2007]
Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι $\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3$. Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

Θέμα 2.4. [Ευκλείδης Α λυκείου 2006]
Αν είναι $x, y > 0$ και $x^3+y^2 \leq 64$, να αποδείξετε ότι: $x^4+y^3 < 512$

Θέμα 2.5. [Ευκλείδης Α λυκείου 2005]
Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha+\beta=\lambda$. Να δειχτεί ότι $\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda}+\frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}$.

Θέμα 2.6. [Ευκλείδης Α λυκείου 2004]
Έστω β και γ είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα α. Να δειχτεί ότι $\beta^4+\beta^2\gamma^2+\gamma^4 \geq \frac{3}{4}\alpha^4$.

Θέμα 2.7. [Ευκλείδης Α λυκείου 2003]
Οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι με $\mu \leq 6008$. Να προσδιορίσετε τη μικρότερη δυνατή θετική τιμή του αριθμού $A = 3-\frac{\mu}{\nu}$.

Θέμα 2.8. [Ευκλείδης Α λυκείου 2002]
Αν $x, y, z > 0$ να δειχτεί ότι

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

Θέμα 2.9. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]
Αν α και x πραγματικοί με $\alpha \geq 1$, να δειχτεί ότι

$$\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha-1}} \geq 2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Θέμα 2.10. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

Θέμα 2.11. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

Θέμα 2.12. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

Θέμα 2.13. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

Θέμα 2.14. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

2.2.2 Ομάδα Β΄

Θέμα 2.15. [Θαλής Α λυκείου 2001]
Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο πραγματικό αριθμό M, ο οποίος έχει την ιδιότητα: για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς : α, β με $\alpha+\beta=1$ ισχύει ότι: $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \geq M$.

Θέμα 2.16. [Ευκλείδης Β λυκείου 2010]
Αν οι α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι $1 \leq \frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2$.
Πότε ισχύει η ισότητα ;

Θέμα 2.17. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

Θέμα 2.18. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

Θέμα 2.19. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

3 Διαιρετότητα - Αριθμοί

3.1 Περίληψη Θεωρίας

3.2 Θέματα Διαιρετότητας - Αριθμών

3.2.1 Ομάδα Α′

Θεμα 3.1. [**Θαλής Α λυκείου 2009**]
Αν οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι $4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1}$, να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $A = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

3.2.2 Ομάδα Β′

Θεμα 3.2. [**Θαλής Α λυκείου 2001**]
Μπορούμε να παραστήσουμε τον αριθμό 2002 ως άθροισμα ενός τριψήφιου αριθμού και του κύβου του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού αυτού;

4 Προβλήματα - Λεκτικά διατυπωμένες ασκήσεις

Θεμα 4.1. [Θαλής Α λυκείου 2009]
Μία βρύση A γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση B γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή , όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Θεμα 4.2. [Θαλής Α λυκείου 2008]
Αν στο $\dfrac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\dfrac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x . Να βρεθεί ο αριθμός x .

Θεμα 4.3. [Θαλής Α λυκείου 2007]
Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα. Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται. Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται; Ο Γιάννης απαντάει: Πράγματι, αυτό ισχύει. Η Μαρία καταλήγει: Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες. Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Θεμα 4.4. [Θαλής Α λυκείου 2006]
Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090 €. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

Θεμα 4.5. [Θαλής Α λυκείου 2004]
Το τετράγωνο ενός αριθμού x ισούται με το διπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 8. Επιπλέον το διπλάσιο του αριθμού είναι μεγαλύτερο του -2. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Θεμα 4.6. [Θαλής Α λυκείου 2004]
Αν το τετράγωνο του αθροίσματος των πραγματικών αριθμών x, y και z ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων τους και επιπλέον ισχύει $x + 2y + 3z = 60$, να βρείτε τους αριθμούς x, y και z.

Θεμα 4.7. [Θαλής Α λυκείου 2003]
Το τετράγωνο ενός αριθμού ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά 72. Επιπλέον, αν από το 60 αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού, λαμβάνουμε αριθμό μικρότερο του 52. Να βρεθεί ο αριθμός.

Θεμα 4.8. [Θαλής Α λυκείου 2002]

Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς α, με $\alpha > 1$. Το τετράγωνο που έχει πλευρά κατά 1 μικρότερη του α, έχει περίμετρο ίση αριθμητικά προς το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου. Να βρεθεί η πλευρά α.

Θεμα 4.9. [Θαλής Α λυκείου 2002]

Οι αριθμοί x, y, z, w έχουν την ιδιότητα: Αν προσθέσουμε τρεις οποιουσδήποτε από αυτούς και από το άθροισμα που θα προκύψει αφαιρέσουμε τον αριθμό 5, προκύπτει πάντοτε ο αριθμός 2002. Να υπολογίσετε το άθροισμα $x + y + z + w$.

Θεμα 4.10. [Θαλής Α λυκείου 2000]
Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρεθεί ο αριθμός.

5 Συστήματα

Θεμα 5.1. [Θαλής Α λυκείου 2008]
Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \leq x \leq y \leq z$ και $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44$.

Θεμα 5.2. [Θαλής Α λυκείου 2007]
Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα. Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται. Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται; Ο Γιάννης απαντάει: Πράγματι, αυτό ισχύει. Η Μαρία καταλήγει: Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες. Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Θεμα 5.3. [Ευκλείδης Α λυκείου 2000]

6 Εξισώσεις

ΘΕΜΑ 6.1. [Θαλής Α λυκείου 2008]
Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x . Να βρεθεί ο αριθμός x .

ΘΕΜΑ 6.2. [Θαλής Α λυκείου 2006]

Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2$ για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

ΘΕΜΑ 6.3. [Θαλής Α λυκείου 2006]

Να λυθεί η εξίσωση $3(1 + \alpha^2 + \alpha^4)x = (1 + \alpha + \alpha^2)^2 x + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$ ως προς x, θεωρώντας το α ως παράμετρο.

7 Ρίζες

Θema 7.1. [Θαλής Α λυκείου 2005]
Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}.$$

Θema 7.2. [Θαλής Α λυκείου 2006]

Θema 7.3. [Θαλής Α λυκείου 2006]