ΜΗΔΕΝ: ΤΙΠΟΤΑ Η ΤΑ ΠΑΝΤΑ;

2η Θεματική ενότητα

Κυριαζής Χρήστος
M.Sc. Μαθηματικός
E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός
E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Ο αριθμός μηδέν είναι θεμέλιος λίθος των μαθηματικών και βασικό στοιχείο πολλών άλλων επιστημών. Υπήρξε σημείο αναφοράς πολλών φιλοσοφικών και επιστημονικών αναζητήσεων των ανθρώπων. Η ιστορία του ξεκινά από πολύ παλιά, οι μορφές που άλλαξε πολλές, θα λέγαμε πως είναι το τίποτα που σήμαινε πάρα πολλά για τη μαθηματική επιστήμη με εξέχοντα ρόλο στην εξέλιξή της.

Abstract

Zero is a basic component in mathematics and in several sciences. There was in the center of many philosophical and scientific researches. Its history started a long time ago and their forms have changed many times. Someone could say that is the nothing that meant a lot for the science of mathematics with important role in their evolution.

Εισαγωγή

Το σύμβολο μηδέν (0) χρησιμοποιείται είτε ως αριθμός, είτε ως ψηφίο (αλλιώς, σύμβολο κράτησης θέσης) στα διάφορα θεσιακά συστήματα [1, 2, 3]. Οι άνθρωποι επινόησαν σύμβολα και εκφράσεις για τους αριθμούς ώστε να χρησιμοποιούνται στις συναλλαγές τους, αλλά και στις επιστήμες. Γρήγορα εξέφρασαν με σύμβολα τους μη μηδενικούς φυσικούς και τα κλάσματα, όμως δεν έκαναν το ίδιο και με το μηδέν ως αριθμό. Επινόησαν τρόπους έκφρασης του μηδενός ως σύμβολο κράτησης θέσης (π.χ. για να εκφράσουν τους αριθμούς 60, 100, 130 κ.τ.λ.), αλλά, το να εκφράσουν το μηδέν ως αριθμό, υπήρξε αδιανόητο.

Το μηδέν, ως έννοια, έφερε φιλοσοφικές διαμάχες, διότι συνδέεται με το τίποτα, αλλά, δεν ταυτίζεται με αυτό. Αυτό συμβαίνει γιατί ως αριθμός, εκφράζει κάτι, σε αντίθεση με το τίποτα, που δεν εκφράζει κάτι. Ο Αριστοτέλης [4] πίστευε ότι το τίποτα δεν μπορεί να υπάρχει. Η ύπαρξη της ανυπαρξίας ήταν μια τεράστια λογική αντίφαση, άρα η προσπάθεια απεικόνισής του ήταν περιττή [5]. Πέρασαν αρκετά χρόνια μέχρι να επινοηθεί το μηδέν με την εύχρηστη και βολική μορφή που είναι σήμερα.

Για τα Μαθηματικά, το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός, αλλά, είναι ο αριθμός που χωρίζει τους θετικούς από τους αρνητικούς. Αυτό σημαίνει ότι το μηδέν είναι ο μοναδικός μη θετικός φυσικός αριθμός. Επίσης, είναι άρτιος αριθμός, αλλά δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος [6].

Στη θεωρία συνόλων, το μηδέν είναι ο πληθάριθμος του κενού συνόλου, ενώ στην ανάλυση είναι ο αντίστροφος του απείρου. Στις πιθανότητες, μηδενική πιθανότητα ενός ενδεχομένου σημαίνει αδυναμία πραγματοποίησης του ενδεχομένου. Στην λογική, το μηδέν χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι μια τιμή αλήθειας είναι ψευδής, ενώ στη θεωρία αριθμών υπόλοιπο μηδέν δηλώνει τέλεια διαίρεση, ανάμεσα σε δύο ακεραίους αριθμούς. Στη Γεωμετρία εκφράζει μηδενικές γωνίες (οι πλευρές της γωνίας ταυτίζονται, χωρίς να έχουν μετακινηθεί), μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα (τα άκρα ταυτίζονται), όταν στην Αναλυτική Γεωμετρία το ζεύγος των μηδενικών εκφράζει την αρχή του συστήματος των συντεταγμένων.

Σε κάθε σύστημα αρίθμησης το μηδέν έχει πρωτεύοντα ρόλο και ειδικότερα στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Στη Φυσική [7], το μηδέν μπορεί να δείχνει την αρχή μέτρησης του χρόνου. Μπορεί επίσης να δείχνει ότι ένα σώμα ισορροπεί (αν αναφέρεται σε πρόβλημα όπου η συνισταμένη δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι μηδέν). Επίσης, μπορεί να δείχνει ότι ένα σώμα είναι ακίνητο (αν η ταχύτητα είναι μηδέν), ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα (αν η επιτάχυνση είναι μηδέν) ή ότι βρίσκεται στην αρχή του συστήματος αναφοράς (αν η θέση του είναι μηδέν). Επιπλέον το φορτίο ενός ατόμου είναι μηδέν, επειδή το πλήθος των πρωτονίων και των ηλεκτρονίων είναι το ίδιο. Το απόλυτο μηδέν $\left(0\ ^{\circ}\mathrm{K} = -273\ ^{\circ}\mathrm{C}\right)$ είναι η χαμηλότερη δυνατή θερμοκρασία, ενώ η θερμοκρασία $0\ ^{\circ}\mathrm{C}$ δείχνει τη θερμοκρασία πήξης του νερού.

Στη Χημεία [8] δεν υπάρχει στοιχείο με ατομικό αριθμό μηδέν. Μηδενική ομάδα ονομάζεται η 18η ομάδα του περιοδικού πίνακα, η οποία περιέχει τα ευγενή αέρια, στα οποία η εξωτερική στοιβάδα είναι συμπληρωμένη, οπότε τα στοιχεία δεν μπορούν να κάνουν χημικές ενώσεις. Επίσης, διάλυμα με PH = 0 σημαίνει ότι είναι πολύ όξινο.
Στη Φιλοσοφία, πολλοί φιλόσοφοι ταυτίζουν το «μηδέν» με το «είναι». Πρωτοστάτης σε αυτή την άποψη υπήρξε ο γάλλος συγγραφέας και φιλόσοφος Jean-Paul Sartre [9], ο οποίος υποστήριξε ότι: «το μηδέν είναι η τέλεια ακαθοριστία μέσα στην οποία ο άνθρωπος, ως φορέας του μηδενός, οφείλει να καθορίσει ελεύθερα τον εαυτό του και τις επιδιώξεις του».
Το μηδέν είναι σημείο αναφοράς και στην καθημερινότητά μας. Θυμηθείτε τις εκφράσεις «σημείο μηδέν», «ώρα μηδέν», «ξεκίνησε από το μηδέν» κ.ά.
Το μηδέν έχει γίνει και αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε λογοτεχνικά έργα. Εμφανίζεται σε τίτλους βιβλίων, όπως στα μυθιστορήματα «Μηδέν» του Ντένι Γκέτζ και «Η Αρχαιολογία του μηδενός» του Αλαίν Ναντώ ή στο «Το μηδέν και το άπειρο» του Άρθρουρ Κέστλερ. Το μηδέν, είναι μαθηματικό αντικείμενο διαπραγμάτευσης στα «Μηδέν, η βιογραφία μιας επικίνδυνης ιδέας» του Charles Seife, αλλά και στο «Το υπαρκτό τίποτα: Μια ιστορία του μηδενός» του Robert Kaplan. Αξίζει να αναφέρουμε και το «Άξιον Εστί» του Οδυσσέα Ελύτη, όπου στους τελευταίους στίχους γράφει:

Νυν η ταπείνωση των Θεών
Νυν η σποδός του Ανθρώπου
Νυν Νυν το μηδέν
και Αιέν ο κόσμος ο μικρός, ο Μέγας!

Ιστορική αναδρομή

Οι Βαβυλώνιοι, την τρίτη χιλιετία π.Χ., δεν χρησιμοποιούσαν ειδικό σύμβολο για το μηδέν ως αριθμό, αλλά, ένα κενό διάστημα για κάθε ψηφίο μηδέν που αντικαθιστούσαν. Αργότερα, ένα συγκεκριμένο σύμβολο (2 λοξές σφήνες) επινοήθηκε από τους Βαβυλωνίους για να δείξει τη θέση του μηδενός στους αριθμούς. Οι Σουμέριοι αντικατέστησαν τις λοξές σφήνες με τρία άγκιστρα, δεδομένου ότι σε μια πινακίδα του Bêl-bân-aplu, που βρέθηκε στο Kish και χρονολογείται περί το 700 π.Χ., υπάρχει η χρήση των συμβόλων αυτών [1, 2, 3].
Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι τα βαβυλωνιακά σύμβολα κράτησης θέσης δεν ήταν πραγματικά μηδέν, αφού ποτέ δεν χρησιμοποιήθηκαν μόνα τους. Επίσης, από τα στοιχεία που διαθέτουμε αυτά τα σύμβολα δεν γράφονταν ποτέ στο τέλος ενός αριθμού. Έτσι κάποιοι αριθμοί είχαν τον

ίδιο τρόπο γραφής, οπότε μόνο από τα συμφραζόμενα μπορούσαν να καταλάβουν το σωστό αριθμό.
Οι Μάγια (300 π.Χ. έως 900 μ.Χ.) είχαν πολλά σύμβολα για το μηδέν, με πιο χαρακτηριστικό έναν άνδρα, με τατουάζ στο σώμα του, που γέρνει το κεφάλι του προς τα πίσω [3].
Στην Ελλάδα και μέχρι την εποχή του Μεγάλου Αλεξάνδρου δεν υπάρχουν ίχνη ή ενδείξεις της χρήσης του μηδενός ή κάποιου συμβόλου του. Στα χρόνια του Μεγάλου Αλεξάνδρου οι Έλληνες διέκριναν το ρόλο που είχε το μηδέν στους υπολογισμούς, όταν εισέβαλαν στη Βαβυλωνιακή αυτοκρατορία το 331 π.Χ.
Το μηδέν, ως αριθμός, αποδίδεται στην Ινδία. Μέχρι τον 9ο αιώνα μ.Χ., οι πρακτικοί υπολογισμοί πραγματοποιούνταν με τη χρήση του μηδενός. Ο Pingala [10] χρησιμοποιούσε κάτι αντίστοιχο με τον κώδικα μορς για τον συμβολισμό των αριθμών, άρα και του μηδενός. Για το μηδέν χρησιμοποιούσε τη λέξη «σούνυα», που στα ινδικά σημαίνει τίποτε ή άδειο. Η λέξη «σούνυα» βρέθηκε και στο κείμενο με τίτλο Λοκαβιμπάγκα που χρονολογείται περί το 458 μ.Χ. Το 498 μ.Χ., ο Ινδός μαθηματικός Aryabhata [11] παρουσίασε το έργο του «θέση προς θέση στο δεκαπλάσιο της αξίας», το οποίο είναι η προέλευση του συμβολισμού του σύγχρονου δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
Ο Ινδός μαθηματικός Brahmagupta ήταν αυτός που εισήγαγε τον αριθμό μηδέν όπως τον χρησιμοποιούμε σήμερα, όταν το 628 μ.Χ. στο έργο του «Βράχμα σπούτα σιντχάντα», θέτει μια σειρά κανόνων, που ισχύουν μέχρι και σήμερα, για τη χρήση του μηδενός και των αρνητικών αριθμών.
Το μηδέν για πρώτη τεκμηριωμένη και αδιαμφισβήτητη φορά εμφανίζεται με τη μορφή ενός κύκλου σε μια λίθινη επιγραφή που βρέθηκε στον ναό Τσατάρμπχ στο Γκάλια της Ινδίας, η οποία χρονολογείται στο 876 μ.Χ. Ο συγκεκριμένος συμβολισμός υπάρχει και σε άλλα κείμενα, αλλά, δεν έχει πιστοποιηθεί η αυθεντικότητά τους [1].
Ο συμβολισμός αυτός από την Ινδία πέρασε στην Καμπότζη, στο τέλος του 7ου αιώνα μ.Χ. και αργότερα στην Κίνα. Στις ισλαμικές χώρες πέρασε τον 8ο αιώνα μ.Χ., κυρίως χάρη στη μετάφραση του έργου «Σιντχάντα» του Brahmagupta. Το έργο «Το βιβλίο του Άβακα» του Fibonacci υπήρξε μια από τις βασικές αιτίες που ο σημερινός συμβολισμός του μηδενός έφτασε στην Ευρώπη στο τέλος του 12ου αιώνα μ.Χ.

Ιδιότητες του μηδενός

Στα Μαθηματικά το μηδέν έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες:

- Είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

- Είναι το «ουδέτερο στοιχείο» της αφαίρεσης, όταν έχει το ρόλο του αφαιρετέου.
- Είναι το απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
  Η ιδιότητα $\alpha \cdot 0 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ στην ουσία «συρρικνώνει» τον άξονα των πραγματικών σε ένα σημείο, αφού αντιστοιχεί κάθε πραγματικό αριθμό α σε ένα σημείο, σε εκείνο που συμβολίζουμε με το γράμμα Ο και αποτελεί την αρχή του άξονα, δηλαδή το μηδέν! Ο πολλαπλασιασμός με το μηδέν «μαζεύει» τον άξονα των πραγματικών σε ένα σημείο, αλλά η διαίρεση με το μηδέν «βάζει φωτιά» στα θεμέλια των μαθηματικών.
- Δημιουργεί σοβαρά προβλήματα στην διαίρεση, αφού διαίρεση με το 0 δεν νοείται. Γνωρίζουμε από την ανάλυση ότι ο παρονομαστής μπορεί να είναι 0, μόνο όταν αναφερόμαστε σε οριακές διαδικασίες.
- Όταν είναι εκθέτης σε μη μηδενική βάση δίνει αποτέλεσμα 1, ενώ αν βάση και εκθέτης είναι 0, έχουμε απροσδιόριστη μορφή.
- Όταν είναι βάση με θετικό εκθέτη δίνει αποτέλεσμα 0, ενώ αν βάση και εκθέτης είναι 0, έχουμε και πάλι απροσδιόριστη μορφή.

Με το μηδέν ασχολήθηκε και ο Giuseppe Peano όταν διατύπωσε τα αξιώματα σύμφωνα με τα οποία μπορούν να προκύψουν όλες οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών [2, 12]. Συγκεκριμένα, στο πρώτο αξίωμά του αναφέρει: «Το μηδέν είναι φυσικός αριθμός».

Σχέση του μηδενός με το άπειρο

Ο Γάλλος φυσικός Jacques-Alexander Charles [13, 14], ανακάλυψε το 1787 το νόμο που περιγράφει τη σχέση ανάμεσα στον όγκο του αερίου και στη θερμοκρασία του

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \tag{1}$$

όπου V_1 είναι ο όγκος του αερίου σε θερμοκρασία T_1, ενώ V_2 είναι ο όγκος του ίδιου αερίου σε θερμοκρασία T_2.

Το 1850 ο William Thomson (λόρδος Kelvin) μελέτησε το νόμο του Charles σε θερμοκρασίες κοντά στο μηδέν. Μειώνοντας τη θερμοκρασία το αέριο μειώνει και το χώρο που καταλαμβάνει. Αυτό σημαίνει ότι αν η θερμοκρασία γίνει ίση με μηδέν, τότε και ο αντίστοιχος όγκος του αερίου θα πρέπει να είναι κι αυτός μηδέν. Αυτό βέβαια δεν είναι εφικτό στη φύση, όμως σίγουρα υπάρχει μία ελάχιστη θερμοκρασία όπου το αέριο καταλαμβάνει τον ελάχιστο όγκο. Σε αυτή τη θερμοκρασία τα μόρια σταματούν να κινούνται, οπότε καταλαμβάνουν συγκεκριμένες θέσεις και το αέριο έχει έτσι το μικρότερο δυνατό όγκο. Η θερμοκρασία αυτή ονομάστηκε απόλυτο μηδέν και υπολογίστηκε στους $-273\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι το γινόμενο $0\cdot(\pm\infty)$ είναι απροσδιόριστη μορφή, ισοδύναμη με τις $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$, δηλαδή, το γινόμενο άπειρων μηδενικών δεν δίνει γνωστό αποτέλεσμα.

Τι συμβαίνει όμως αν έχουμε να προσθέσουμε άπειρα μηδενικά, όπως για παράδειγμα στο άθροισμα

$$A = 1-1+1-1+1-1+\dots \qquad (2)$$

Αν ομαδοποιήσουμε ως εξής:

$$A = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \qquad (3)$$

το άθροισμα είναι «ίσο» με 0, ενώ αν

$$A = 1+(-1+1)+(-1+1)+\dots \qquad (4)$$

τότε το άθροισμα θα «ισούται» με 1! Όμως:

$$A = 1-(1-1+1-1+\dots) = 1-A \qquad (5)$$

οπότε το άθροισμα θα «ισούται» με $\frac{1}{2}$!

Το ίδιο άπειρο άθροισμα «μπορεί να ισούται» με 0, με ένα $\frac{1}{2}$, αλλά και με 1, ταυτόχρονα!!! Το παράδοξο έγκειται στο γεγονός ότι η σειρά

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \qquad (6)$$

που εκφράζει το άθροισμα A δεν συγκλίνει.

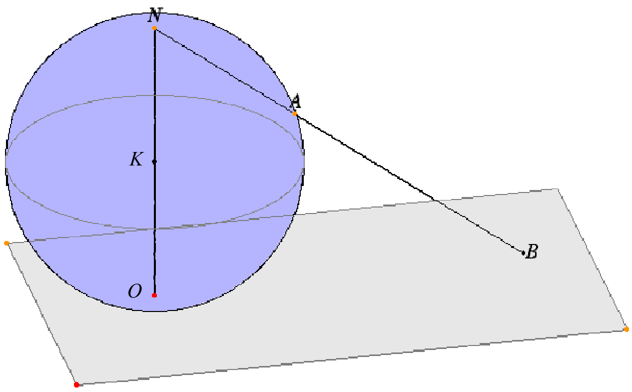
Το μηδέν και το άπειρο μπορούν να συνδεθούν μέσω απεικονίσεων. Η πιο γνωστή απεικόνιση είναι η

$$x \to y,\ \text{με}\ xy = a,\ a \neq 0 \qquad (7)$$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της σχέσης του απείρου με το μηδέν, είναι η απεικόνιση που ονομάζεται στερεογραφική προβολή [15]. Ο Riemann χρησιμοποίησε το σύνολο S με

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\} \qquad (8)$$

το οποίο περιλαμβάνει όλα τα σημεία της σφαίρας με κέντρο το $K\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R=\frac{1}{2}$. Ο Βόρειος πόλος της σφαίρας, δηλαδή το σημείο $N(0,0,1)$, ονομάζεται επ' άπειρον ή κατ' εκδοχήν σημείο, ενώ η αρχή των αξόνων, $O(0,0,0)$, είναι ο Νότιος πόλος της σφαίρας αυτής. Επίσης, το επίπεδο με εξίσωση $z=0$ ορίζεται ως το μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 1: Στερεογραφική προβολή

Θεωρούμε την ευθεία που ορίζεται από το N και από τυχαίο σημείο της σφαίρας A, η οποία τέμνει το μιγαδικό επίπεδο σε ένα σημείο B.
Ο Riemann όρισε την $1-1$ αντιστοιχία, που ονομάζεται στερεογραφική προβολή, ως εξής:

- αντιστοίχισε κάθε σημείο A του συνόλου S σε ένα σημείο B του μιγαδικού επιπέδου,
- αντιστοίχισε το σημείο N (επ' άπειρο σημείο) του συνόλου S στο σημείο O.

Αποδεικνύεται με κατάλληλους μετασχηματισμούς ότι τα σημεία N και O μπορούν εύκολα να αλλάξουν αμοιβαία θέσεις.

Παράδοξα και διδακτικές προσεγγίσεις

Η ιδιαιτερότητα του μηδενός, επιβάλλει τη χρήση διαφόρων τρόπων για να αναδειχθεί η διαφορετικότητά του.
Στην Α΄ Γυμνασίου οι μαθητές γνωρίζουν την προτεραιότητα των πράξεων, οπότε παραστάσεις όπως οι $(2\cdot 3):3, (4\cdot 7):7$ κ.τ.λ. είναι απλές, αλλά, δεν γνωρίζουν (ή δεν κατανοούν πλήρως) το πόσο σημαντικό είναι να μην διαιρούμε με το μηδέν. Αφού γίνουν οι πράξεις, γράφουμε

$$(2\cdot 3):3=2 \tag{9}$$

$$(4\cdot 7):7=4 \tag{10}$$

και ζητούμε από τους μαθητές να βρουν τα αποτελέσματα των παραστάσεων

$$\left(2\cdot 0\right):0 \tag{11}$$

και

$$\left(3\cdot 0\right):0 \tag{12}$$

Το πιθανότερο είναι ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών θα απαντήσει ότι τα αποτελέσματα είναι 2 και 3, αντίστοιχα, δηλαδή, ότι η διαίρεση 0:0 μας κάνει 2 ή 3 ή οποιονδήποτε αριθμό θελήσουμε! Το βέβαιο είναι ότι εδώ θα προκύψει ενδιαφέρουσα συζήτηση με τους μαθητές, με απώτερο σκοπό τη σωστή διατύπωση της

$$\left(\lambda\cdot\alpha\right):\lambda=\frac{\lambda\cdot\alpha}{\lambda}=\alpha,\ \text{όπου}\ \lambda\neq 0 \tag{13}$$

Αντίστοιχη συζήτηση μπορεί να προκύψει σε μεγαλύτερες τάξεις χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την εξίσωση $x(3x-1)=x(5+x)$. Γράφουμε:

$$x(3x-1)=x(5+x)\Leftrightarrow 3x-1=5+x\Leftrightarrow 2x=6\Leftrightarrow x=3.$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και το 0 είναι λύση της εξίσωσης, αφού αντικαθιστώντας στην εξίσωση βρίσκουμε

$$0\cdot(3\cdot 0-1)=0\cdot(5+0)\Leftrightarrow 0=0.$$

Στην περίπτωση αυτή εφαρμόσθηκε η «ισοδυναμία»

$$xy=xz\Leftrightarrow y=z,\ \text{για κάθε}\ x,y,z\in\mathbb{R} \tag{14}$$

η οποία είναι μια λανθασμένη εφαρμογή του κανόνα της διαγραφής, σύμφωνα με τον οποίο ισχύει

$$xy=xz\Leftrightarrow y=z,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}^*,\ y,z\in\mathbb{R} \tag{15}$$

Για το ίδιο θέμα και σε επίπεδο Γ΄ Λυκείου μπορούμε να αναφερθούμε σε όρια, όπως τα

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^2}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^2}{x^2},\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3+\lambda x^2}{x^2}\ \text{ όπου } \lambda\in\mathbb{R}, \tag{16}$$

αλλά και τα

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+4x^2}{x^3},\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+4x^2}{x^3},\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3+\lambda x^2}{x^3}\ \text{ όπου } \lambda\in\mathbb{R}. \tag{17}$$

Στο ίδια λογική έχουν διατυπωθεί στο παρελθόν τα παράδοξα του Bolzano και του De Morgan.

Παράδοξο του Bolzano	**Παράδοξο του De Morgan**
Για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$, ισχύουν οι: $x-y=x-y$, $y-x=y-x$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $x-x=y-y$ $x(1-1)=y(1-1)$ $x=y$, δηλαδή όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους!!!	Έχουμε ότι: $x=1$ $x\cdot x=1\cdot x$ $x^2=x$ $x^2-1=x-1$ $(x-1)(x+1)=x-1$ $x+1=1$ $x=0$, δηλαδή το 1 είναι ίσο με το 0!!!

Το μηδέν μπορεί να βοηθήσει στην παραγοντοποίηση παραστάσεων, όταν αντιμετωπιστεί ως το ουδέτερο στοιχείο της πράξης της πρόσθεσης. Για την παραγοντοποίηση της παράστασης x^2+4, θεωρούμε ότι $0=4x^2-4x^2$, οπότε έχουμε

$$x^4+4=x^4+4+4x^2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-\left(2x\right)^2$$

άρα

$$x^4+4=\left(x^2+2-2x\right)\left(x^2+2+2x\right) \tag{18}$$

Συμπεράσματα

Στα μαθηματικά μηδέν είναι η οντότητα η οποία, παρόλο που δεν έχει αριθμητική αξία, αποτελεί την σπονδυλική στήλη της αριθμογραφίας θέσης. Στις μέρες μας, φαντάζει αδιανόητο ότι γενιές και γενιές πορεύτηκαν χωρίς το μηδέν. Η ύπαρξη του μηδενός ήταν για αιώνες παράλογη, αλλά, στις μέρες μας είναι συνηθισμένη και επιβεβλημένη. Η ιδιαιτερότητα του μηδενός μας δίνει ενδιαφέρουσες ιδιότητες και παράδοξα, τα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εντός και εκτός τάξης.

Βιβλιογραφία

1. Kaplan Robert, Το υπαρκτό τίποτα: Μια ιστορία του μηδενός, *Εκδόσεις Αλεξάνδρεια*, 2012.
2. Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jomes, Jack D. Bedient, Οι Ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών, *Γ. Α. Πνευματικός*, 1981.
3. Raymond L. Wilder, Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών, *Εκδόσεις Κουτσούμπος*, 2004.
4. Αριστοτέλης, Μετά τα Φυσικά, μετάφραση φιλολογική ομάδα Κάκτου, *Εκδόσεις Κάκτος*, 1997.
5. Νεγρεπόντης, Στ. Σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος «Πλάτων και Μαθηματικά». Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, 2003.
6. Μαζαράκος, Κ. Π., Μαζαράκος, Θ. Π., «Πυθαγόρας- Τετρακτύς και η δύναμη των αριθμών», Πρακτικά 28^{ου} Πανελλήνιου Συνέδριου Μαθηματικής Παιδείας, Αθήνα, 2011.
7. Feynman R., Leighton R., Sands M., The Feynman Lectures on Physics, *Pearson, Addison, Wesley*, 2006.
8. Μανουσάκης Ε. Γεώργιος, Ανόργανη Χημεία, Χημικά στοιχεία και ενώσεις, *Αφοί Κυριακίδη,* 2011.
9. Jean-Paul Sartre, Το είναι και το μηδέν, μετάφραση Κωστής Παπαγιώργης, *Εκδόσεις Παπαζήση*, 2007.
10. Anglin W. S. and Lambek J., The Heritage of Thales, *Springer*, 1995.
11. Aryabhata, The Aryabhatiya of Aryabhata: An Ancient Indian Work on Mathematics and Astronomy, translated by Walter Eugene Clark, *Kessinger Publishing*, 2006.
12. Howard Eves, Foundations and Fundamental concepts in mathematics, *Dover*, 1997.
13. Fullick Patrick, Physics, *Heinemann*, 1994.
14. Charles Seife, Μηδέν η βιογραφία μιας επικίνδυνης ιδέας, *Εκδόσεις Λιβάνη*, 2000.
15. Joseph Bak, Donald Newman, Μιγαδική ανάλυση, *Leader Books*, 2004.