1 Εισαγωγή

Ο όρος **Διοφαντική εξίσωση** οφείλεται στο μαθηματικό Διόφαντο, ο οποίος ξεκίνησε τη μελέτη τέτοιων εξισώσεων. Στην πραγματικότητα γνωρίζουμε λίγα για τη ζωή του Διόφαντου. Έζησε περίπου το 350μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια. Το μόνο γνωστό που έχουμε για την ζωή του προέρχεται από ένα επίγραμα - πρόβλημα: *Υπήρξε παιδί για το 1/6 της ζωής του· η γενιάδα του μεγάλωσε μετά από ακόμα 1/12 της ζωής του· μετά από ακόμα ένα 1/7 της ζωής του παντρεύτηκε, ενώ ο γιος του γεννήθηκε 5 χρόνια μετά. Αν ο γιος του έζησε τα μισά χρόνια από τον πατέρα του ο οποίος πέθανε 4 χρόνια μετά από αυτόν, να βρεθεί η ηλικία στην οποία πέθανε ο Διόφαντος.*

Η εργασία στην οποία οφείλεται η φήμη του Διόφαντου είναι τα *Αριθμητικά* του. Από αυτά διασώζονται μόνο 6 από τα 13 βιβλία.

Ο απλούστερος τύπος *Διοφαντικής εξίσωσης* είναι μία εξίσωση με έναν ή περισσότερους αγνώστους, της οποίας ζητούνται ακέραιες λύσεις. Για παράδειγμα η γραμμική Διοφαντική εξίσωση με δύο αγνώστους:

$$ax + bx = c$$

όπου οι $a, b, c \in \mathbb{Z}$ και οι $a, b \neq 0$. Μία λύση αυτής της εξίσωσης είναι ένα ζεύγος ακεραίων x_0, y_0, ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση, δηλαδή: $ax_0 + by_0 = c$.

2 Γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις

Μία γραμμική Διοφαντική εξίσωση μπορεί να έχει πολλές λύσεις όπως για παράδειγμα η $3x + 6y = 18$, όπου λύσεις, μεταξύ άλλων, είναι τα ζεύγη: $(4, 1), (-6, 6), (10, -2)$. Ενώ η εξίσωση $2x + 10y = 17$ δεν έχει καμία λύση, αφού το αριστερό μέλος είναι πάντα άρτιος αριθμός, ενώ το δεξί μέλος περιττός. Η συνθήκη λύσης της Διοφαντικής εξίσωσης καθορίζεται από το:

Θεώρημα 2.1. *Η γραμμική Διοφαντική εξίσωση $ax + by = c$ έχει μία λύση, αν και μόνο αν $d \mid c$, όπου $d = (a, b)$. Αν x_0, y_0 είναι μία συγκεκριμένη λύση αυτής της εξίσωσης, τότε ΟΛΕΣ οι υπόλοιπες λύσεις δίνονται από τους τύπους:*

$$x = x_0 + \frac{b}{d} + t, \qquad y = y_0 - \frac{a}{d}t, \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Η απόδειξη που παραλείπεται ουσιαστικά δίνει και τον τρόπο λύσης της γραμμικής διοφαντικής όπως περιγράφεται στο επόμενο:

Παράδειγμα 2.1. *Να λυθεί η Διοφαντική εξίσωση:* $172x + 20y = 1000$.

Εφαρμόζουμε τον Ευκλείδιο αλγόριθμο για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη $(172, 20)$:

$$\begin{aligned} 172 &= 8 \cdot 20 + 12 \\ 20 &= 1 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4 \\ 8 &= 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Οπότε $(172, 20) = 4$. Τώρα ο αριθμός $4 \mid 1000$, οπότε η εξίσωση έχει λύση. Για να την βρούμε θα γράψουμε τον αριθμό 4 ως γραμμικό συνδυασμό των $172, 20$, το οποίο μπορεί να γίνει ακολουθώντας προς τα πίσω την εύρεση του ΜΚΔ, ως εξής:

$$\begin{aligned} 4 = 12 - 8 &= \\ = 12 - (20 - 12) &= \\ = 2 \cdot 12 - 20 &= \\ = 2(172 - 8 \cdot 20) - 20 &= \\ = 2 \cdot 172 + (-17) \cdot 20 & \end{aligned}$$

Οπότε, πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με 250 παίρνουμε τη λύση της ζητούμενης εξίσωσης:

$$1000 = 250 \cdot 4 = 250 \cdot (2 \cdot 172 + (-17) \cdot 20) =$$

$$= 500 \cdot 172 + (-4250) \cdot 20$$

Συνεπώς, ένα ζεύγος λύσεων είναι: $(x, y) = (500, -4250)$ και όλες οι υπόλοιπες λύσεις γράφονται στη μορφή:

$$x = 500 + \left(\frac{20}{4}\right) t = 500 + 5t$$
$$y = -4250 - \left(\frac{172}{4}\right) t = -4250 - 43t$$
$$t \in \mathbb{Z}.$$

Ας δούμε και ένα πρόβλημα, το οποίο θα λύσουμε με διαφορετικό τρόπο:

Θεμα 2.1. *Να βρεθούν όλοι οι τρόπου με τους οποίους μπορούμε να διαθέσουμε ακριβώς 200€ για την αγορά βιβλίων αξίας 5€ το καθένα και τετραδίων αξίας 3€ το καθένα.*

Λύση. Αν q είναι το πλήθος των βιβλίων και y το πλήθος των τετραδίων που θα αγοραστούν, τότε $5x + 3y = 200$ είναι η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε με $x, y \geq 0$. Μία άλλη μέθοδος είναι αυτή της δοκιμής για να την λύσουμε.

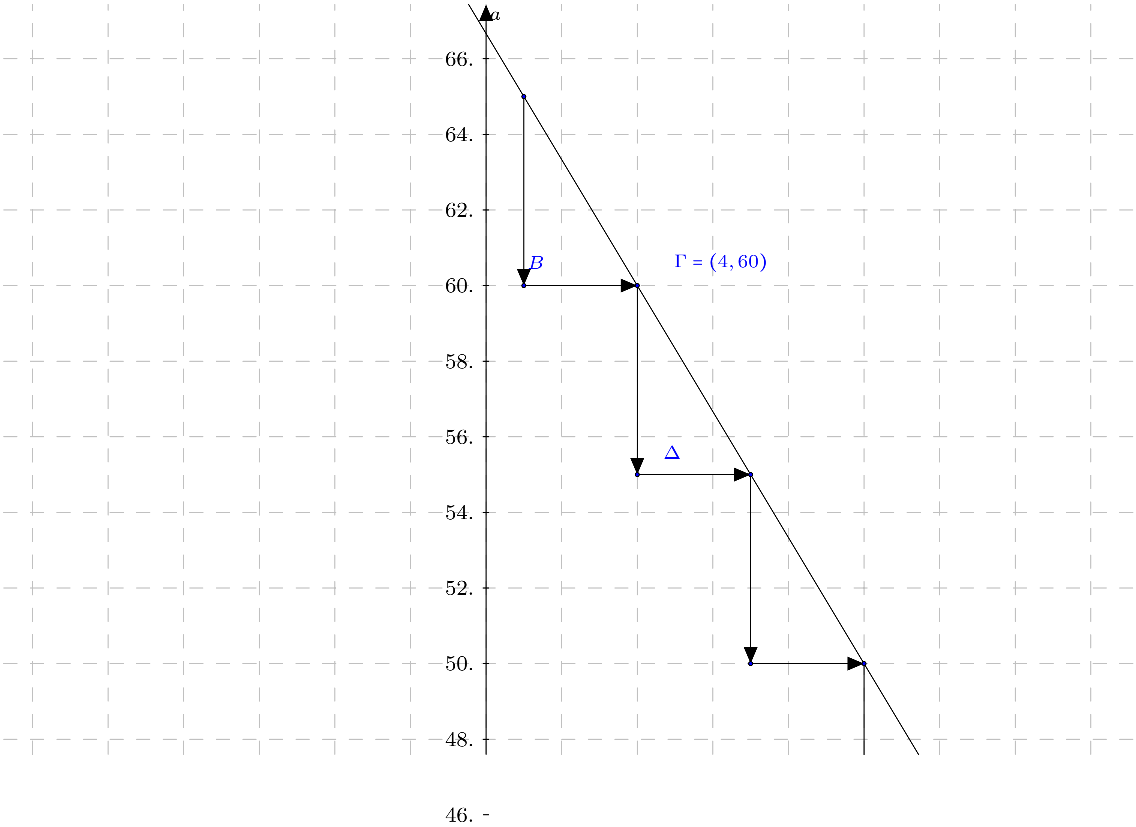
Συγκεκριμένα, για $x = 1$ παρατηρούμε ότι ο αριθμός $200 - 1cdot5 = 195$ διαιρείται από τον αριθμό 3 και μάλιστα ισχύει: $195 = 3 \cdot 65$. Οπότε το ζεύγος $x = 1, y = 65$ αποτελεί μία λύση της εξίσωσης αφού: $5 \cdot 1 + 3 \cdot 65 = 200$.

Όμως, 3 βιβλία κοστίζουν όσο 5 τετράδια, οπότε αν αντικαταστήσουμε 3 βιβλία με 5 τετράδια ή 5 τετράδια με 3 βιβλία θα έχουμε μία ακόμα λύση της εξίσωσης την: $x = 4,\ y = 60$, όπου πράγματι: $5 \cdot 4 + 3 \cdot 60 = 200$. Γενικότερα, αν κάνουμε t τέτοιες αντικαταστάσεις θα έχουμε διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης της μορφής: $x = 1 + 3t,\ y = 65 - 5t$.

Το παραπάνω ζεύγος για $t \geq 0, x \geq 0$ και συγκεκριμένα για $t = 0, 1, 2, \ldots, 13,$ και $y \geq 0$ παίρνουμε τις 14 λύσεις της εξίσωσης. □

Ας θεωρήσουμε τώρα το προηγούμενο πρόβλημα γεωμετρικά.

Η εξίσωση $5x + 3y = 200$ παριστάνει μία ευθεία γραμμή στο επίπεδο. Κάθε λύση της εξίσωσης είναι ένα σημείο με ακέραιες συντεταγμένες που βρίσκεται πάνω σε αυτήν την ευθεία. Από την πρώτη λύση που βρήκαμε την $(1, 65)$ μπορούμε να υπολογίσουμε και τις υπόλοιπες γεωμετρικά χρησιμοποιώντας την κλίση της ευθείας: $-\frac{5}{3}$, μετακινώντας το αρχικό σημείο λύση 3 μονάδες δεξιά και 5 μονάδες κάτω για t φορές.



Απ'όπου επίσης προκύπτει ότι η γενική λύση της $5x + 3y = 200$ είναι η $x = 1 + 3t, y = 65 - 5t, t \geq 0$

ΘΕΜΑ 2.2. *Δίνεται ένα δοχείο 11 λίτρων και ένα 8 λίτρων τα οποία δεν έχουν διαβαθμίσεις. Να βρεθεί ένας τρόπος ώστε σε ένα τρίτο δοχείο να τοποθετηθεί 1 λίτρο νερού, χρησιμοποιώντας τα δύο αρχικά δοχεία και όσο το δυνατόν λιγότερο νερό.*

Λύση. Έστω q, y ο αριθμός των φορών που θα γεμίσουμε τα δοχεία των 11 και των 8 λίτρων αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση θα γεμίσουμε το μεγάλο δοχείο με νερό και στη συνέχεια θα το αδειάσουμε στο τρίτο δοχείο, απ' όπου θα πάρουμε περιεχόμενο χρησιμοποιώντας το μικρό δοχείο, ώστε τελικά να απομείνει στο τρίτο δοχείο 1 λίτρο. Έτσι, ο όγκος του νερού που θα έχει απομείνει στο τρίτο δοχείο θα περιγράφεται από την εξίσωση: $11x - 8y = 1$.

Σε αυτήν την περίπτωση αναζητούμε πολλαπλάσια του 11, των οποίων η διαφορά από πολλαπλάσια του 8 αφήνουν υπόλοιπο 1. Εφόσον, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το λιγότερο δυνατό όγκο νερού ψάχνουμε πρώτα για όσο το δυνατόν μικρότερο πολλαπλάσιο του 11 με την προηγούμενη ιδιότητα.

Για $11 \cdot 1$ έχουμε $11 \cdot 1 - 8 \cdot 1 \neq 1$, $11 \cdot 1 - 8 \cdot 2 < 0$

Για $11 \cdot 2$ έχουμε $11 \cdot 2 - 8 \cdot 1 \neq 1$, $11 \cdot 2 - 8 \cdot 2 \neq 1, 11 \cdot 2 - 8 \cdot 3 < 0$

Για $11 \cdot 3 - 8 \cdot 4 = 1$ είναι η μικρότερη ζητούμενη λύση. □

ΘΕΜΑ 2.3. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:* $4x - 6y = 101$ *δεν έχει ακέραιες λύσεις.*

Λύση. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του 4 και του 6 είναι το 2, συνεπώς το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι πάντα πολλαπλάσιο του 2, οπότε δεν μπορεί να είναι ίσο με το δεξί μέλος της εξίσωσης το 101, το οποίο δεν είναι πολλαπλάσιο του 2. □

Κλείνουμε με ένα ελαφρώς δυσκολότερο πρόβλημα:

ΘΕΜΑ 2.4. *Θεωρούμε την εξίσωση:* $5x + 8y = c$. *Να βρεθεί η μεγαλύτερη τιμή του* c, *ώστε να υπάρχουν μη αρνητικές ακέραιες λύσεις για τα* x, y.

Υπόδειξη. Για $c = 13$ για παράδειγμα υπάρχουν λύσεις μη αρνητικές. Αναζητούμε 5-άδες διαδοχικών ακεραίων c για τους οποίους έχουμε μη αρνητικές ακέραιες λύσεις. Τέτοια παραδείγματα είναι οι 5-άδες:

$$\{50, 51, 52, 53, 54\} \text{ και } \{100, 101, 102, 103, 104\}$$

Στη συνέχεια προσθέτοντας κάθε φορά 5 σε καθέναν από τους αριθμούς προκύπτουν νέες πεντάδες με όλο και μεγαλύτερα c που δίνουν μη αρνητικές ακέραιες λύσεις. Όμως πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το c;

Δείτε το πρόβλημα γεωμετρικά σε ένα σύστημα συντεταγμένων. □

ΘΕΜΑ 2.5. *Να βρεθούν οι τρεις μικρότεροι διαδοχικοί φυσικοί, για τους οποίους ο* 3^2 *διαιρεί τον πρώτο, ο* 4^2 *διαιρεί τον δεύτερο και ο* 5^2 *διαιρεί τον τρίτο.*

ΘΕΜΑ 2.6. *Να βρεθούν όλοι οι πενταψήφιοι αριθμοί, ώστε αν τους σβήσουμε το πρώτο και το τελευταίο ψηφίο, ο αριθμός που προκύπτει είναι* $\frac{2}{215}$ *του αρχικού αριθμού.*

3 Μη γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις

Κάθε Διοφαντική εξίσωση, η οποία δεν παριστάνεται από εξίσωση ευθείας καλείται μη γραμμική. Μερικά παραδείγματα μη Διοφαντικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} xy - 2y + x + 1 &= 0 \\ 2x^2 - 3x + y + 1 &= 0 \\ y^2 + x^3 + k &= 0, k \in \mathbb{R} \\ x^2 - y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Σε αυτές τις εξισώσεις απαιτούνται διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυσή τους. Συνδυασμός παραγοντοποιήσεων, βασικών ιδιοτήτων των ακεραίων και έμπνευσης είναι τα κύρια εργαλεία.

Θεμα 3.1. *α. Να παραγοντοποιηθεί η έκφραση:* $xy - 2x + 3y - 6$.
β. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις (x, y) *της εξίσωσης:* $xy - 3x + 3y - 11 = 0$.

Λύση. Η πρώτη παραγοντοποιείται με κλασική ομαδοποίηση:

$$\begin{aligned} xy - 2x + 3y - 6 &= \\ x(y-2) + 3(y-2) &= \\ (y-2)(x+3). \end{aligned}$$

Πώς όμως συνδέεται αυτή η παραγοντοποίηση με τη δεύτερη εξίσωση;

Παρατηρούμε ότι $xy - 3x + 3y - 11 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(x+3) - 5 = 0$.

Συνεπώς, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $(y-2)(x+3) = 5$. Δηλαδή, αναζητούμε γινόμενα ακεραίων $y - 2, x + 3$ που είναι ίσα με 5. Όμως τα μόνα ζεύγη ακεραίων που έχουν γινόμενο 5 είναι τα εξής: $(1,5),(-1,-5),(5,1),(-5,-1)$ από τα οποία προκύπτουν: $(x+3, y-2) = (1,5),(-1,-5),(5,1),(-5,-1) \Leftrightarrow (x,y) = (2,3),(-2,7),(-8,1),(-4,-3)$. □

Θεμα 3.2 (Αρχιμήδης 2011 - Μεγάλοι)**.** *Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση*

$$x^3y^2(2y - x) = x^2y^4 - 36.$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} 2x^3y^3 + 36 &= x^2y^2(x^2 + y^2) \\ 36 &= x^2y^2(x-y)^2 \\ (xy(x-y))^2 &= 36 \\ xy(x-y) &= 6 \text{ ή } xy(x-y) = -6, x, y \in \mathbb{Z} \\ xy(x-y) &= 6 \text{ ή } xy(y-x) = -6, x, y \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Αν έχουμε μία λύση (x_0, y_0) της πρώτης εξίσωσης τότε η (y_0, x_0) θα είναι λύση της δεύτερης εξίσωσης και αντίστροφα. Οπότε, όλες οι λύσεις μπορούν να προκύψουν από την επίλυση της μίας από τις δύο εξισώσεις.

Η εξίσωση αυτή γίνεται:

$\{xy = 6, x - y = 1\}\{xy = -6, x - y = -1\}$ $\{xy = 3, x - y = 2\}\{xy = -3, x - y = -2\}$ $\{xy = 2, x - y = 6\}\{xy = -1, x - y =$
$\{xy = 2, x - y = 3\}$ ή τέλος $\{xy = -2, x - y = -3\}$

Οπότε προκύπτουν οι ακέραιες λύσεις: $(x, y) = (3,2),(-2,-3),(3,1),(-3,-1),(1,-2),(2,-1)$.

□

Θεμα 3.3. *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:* $3x^2 - xy - 4y^2 = 6$ *έχει μόνο δύο λύσεις στους ακεραίους.*

Λύση. Καταρχάς γίνεται παραγοντοποίηση όπως προηγουμένως: $3x^2 - xy - 4y^2 = (x+y)(3x-4y) = 6$. Αν θέσουμε $x + y = a, 3x - 4y = b$ έχουμε ότι: $ab = 6 \Leftrightarrow (a,b) = (6,1),(-6,-1),(1,6),(-1,-6),(3,2),(-3,-2),(2,3),(-2,-3)$. Από αυτές τις λύσεις ελέγχουμε ποιες δίνουν ακέραιες λύσεις:

$$x = \frac{4a+b}{7}, y = \frac{3a-b}{7}$$

Δεκτές τελικά είναι: $(x, y) = (2,1),(-2,-1)$. □

Θεμα 3.4. *Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος ο οποίος αφήνει το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθεί με καθέναν από τους* $889,\ 961, 1009, 1189$.

Λύση. Έστω n ο ζητούμενος αριθμός. Τότε θα ισχύουν:

$$\begin{aligned} 889 &= n\cdot k + r\\ 961 &= n\cdot l + r\\ 1009 &= n\cdot m + r\\ 1189 &= n\cdot o + r \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη οποιεσδήποτε δύο από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε ότι: $961 - 889 = n(l-k) \Leftrightarrow 72 = n(l-k)$ και παρομοίως στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Δηλαδή, η διαφορά οποιωνδήποτε δύο από αυτούς τους αριθμούς θα πρέπει να διαιρείται από τον n. Συνεπώς, ο μεγαλύτερος δυνατόν n θα είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των διαφορών των αριθμών αυτών: $961 - 889 = 72, 1009 - 889 = 120, 1189 - 889 = 300$. Οπότε βρίσκουμε τον ΜΚΔ των $72, 300, 120$, απ΄ όπου προκύπτει $n = 12$. □

Θεμα 3.5. *Ο Μαρίνος παρατήρησε ότι το γινόμενο των ηλικιών των συμμαθητών που συμμετέχουν από το Γυμνάσιο και το Λύκειο της Ευαγγελικής σχολής στην επόμενη φάση του διαγωνισμού της Ε.Μ.Ε. είναι* 611520. *Μπορεί να υπολογιστεί ο αριθμός των μαθητών που θα συμμετέχουν σε αυτόν το διαγωνισμό; Λύση*

Θεμα 3.6. *Αν* a, b *δύο θετικοί ακέραιοι με* $a \geq b$, *να βρεθούν όλα τα ζεύγη* a, b, *ώστε το άθροισμά τους, η θετική διαφορά τους, το γινόμενό τους και το πηλίκο τους να έχουν άθροισμα* 36. *Λύση*

Θεμα 3.7 (Αρχιμήδης 2007 - Μεγάλοι). *Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση* $x^8 + 2^{2^x} + 2 = p$, *όπου* p *είναι πρώτος αριθμός.*

Απόδειξη. Για $x \geqslant 2$ θέτουμε $a = x^2, b = 2^{2^{x-2}}$ που δίνει $p = a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$. Αυτό είναι αδύνατο αφού και οι δύο παράγοντες είναι μεγαλύτεροι του 1 και άρα το γινόμενο τους δεν μπορεί να είναι πρώτος.

Για τον δεύτερο παράγοντα έχουμε $a^2 + 2b^2 - 2ab \geqslant (2\sqrt{2} - 2)ab > 1$ αφού είναι επίσης $a = x^2 \geqslant 4$.

Μένει να ελεγχθεί η περίπτωση $x = 1$ που δίνει $x^8 + 2^{2^x+2} = 17$ ο οποίος είναι πρώτος. Άρα η $x = 1, p = 17$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος. □

Θεμα 3.8 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Πολωνίας). *Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση:*

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$$

Λύση. Θέτοντας $x = a + 1, y = b + 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$(a+1)^2 b + (b+1)^2 a = 1$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} ab(a+b) + 4ab + (a+b) = 1 &\Leftrightarrow\\ ab(a+b+4) + (a+b+4) = 5 &\Leftrightarrow\\ (a+b+4)(ab+1) &= 5 \end{aligned}$$

Απ΄ όπου προκύπτει ένας παράγοντας θα είναι ± 5 και ο άλλος παράγοντας ± 1. Και η συνέχεια της λύσης παρόμοια με προηγούμενα. □

4 Άλλες μέθοδοι επίλυσης Διοφαντικών εξισώσεων

4.1 Ανισότητες και Διοφαντικές εξισώσεις

Χρησιμοποιώντας γνωστές ανισότητες μπορούμε να περιορίσουμε το εύρος των λύσεων μία διοφαντικής εξισώσεις σε πεπερασμένο πλήθος περιπτώσεων.

ΘΕΜΑ 4.1 (Ανδρεεσςυ). *Να λυθεί η εξίσωση:* $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Λύση. Καταρχάς, όλοι οι ακέραιοι της μορφής $(k, -k)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης, η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 = (x+y)^2 &\Leftrightarrow \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2 &\overset{x+y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \\ x^2 - xy + y^2 = x + y &\Leftrightarrow \\ (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 & \end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι: $(x-1)^2 \le 1$ και $(y-1)^2 \le 1$, δηλαδή: $x, y \in [0, 2]$ Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $(0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2)$. □

ΘΕΜΑ 4.2 (Ολυμπιάδα Μ.Βρετανίας). *Να βρεθούν οι τριάδες θετικών ακεραίων (x, y, z) οι οποίες είναι λύσεις της εξίσωσης:*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) = 2$$

Λύση. Οι ζητούμενες τριάδες λύσεις της εξίσωσεις μπορούν να διαταχθούν χωρίς βλάβη της γενικότητας: $z \le y \le x \Leftrightarrow \frac{1}{z} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{z} \ge 1 + \frac{1}{y} \ge 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{z}\right)^3 \ge 2 \Rightarrow z \le 3$ Αν $z = 1$ τότε: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1$, το οποίο είναι αδύνατο.

Αν $z = 2$, τότε: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 \ge \frac{4}{3} \Rightarrow y < 7$. Ακόμα έχουμε: $1 + \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow y > 3$. Συνδυάζοντας, τα προηγούμενα έχουμε τις λύσεις: $(7,6,2), (9,5,2), (15,4,2)$.

Αν $z = 3$, τότε: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow y < 5$ και $y \ge z = 3$ απ΄ όπου προκύπτουν λύσεις: $(8,3,3), (5,4,3)$. Συνεπώς, όλες οι λύσεις είναι οι μεταθέσεις των τριάδων: $(7,6,2), (9,5,2), (15,4,2), (8,3,3), (5,4,3)$. □

ΘΕΜΑ 4.3 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Ρουμανίας). *Να βρεθούν οι θετικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

Απόδειξη. Δουλεύοντας όπως προηγουμένως, μπορούμε να θεωρήσουμε μία διάταξη: $2 \le x \le y \le z \Rightarrow$ από την οποία προκύπτει $\frac{3}{x} \ge \frac{3}{5} \Rightarrow x \in \{2, 3, 4, 5\}$. Στη συνέχεια δουλεύουμε με περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές του x όπως προηγουμένως. □

4.1.1 Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 4.1. *Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2. *Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$xy + yz + zx - xyz = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.3 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Ρουμανίας). *Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$(x + y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$$

4.2 Επίλυση μέσω παραμετρικής αντικατάστασης

Παραμετρική αντικατάσταση είναι μία διαδικασία κατά την οποία εκφράζονται οι άγνωστοι της Διοφαντικής εξίσωσης μέσω παραμέτρων, οι οποίες ορίζονται σε κάποιο διάστημα, οπότε καθίσταται ευκολότερη η διάκριση περιπτώσεων ή η απόδειξη ύπαρξης άπειρων λύσεων συγκεκριμένης μορφής.

ΘΕΜΑ 4.4 (Πρωτάθλημα των Πόλεων - Tournament of Towns)**.** *Να αποδειχθεί ότι υπάρχει άπειρο πλήθος τριάδων (x, y, z) ακεραίων, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$$

Υπόδειξη. Θέτοντας: $z = -y$ η εξίσωση γίνεται: $x^3 = x^2+2y^2$ και λαμβάνοντας $y = mx, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε $x = 1+2m^2$. Οπότε προκύπτουν οι άπειρες λύσεις:

$$x = 2m^2 + 1, y = m(2m^2 + 1), z = -m(2m^2 + 1),\ \ m \in \mathbb{Z}$$

□

ΘΕΜΑ 4.5. *Να βρεθούν όλες οι τριάδες (x, y, z) θετικών ακεραίων τέτοιων, ώστε:*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

Υπόδειξη. Η εξίσωση γράφεται: $z = \frac{xy}{x+y}$. Αν θεωρήσουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των x, y έχουμε: $d = (x, y) \Rightarrow x = dm,\ y = dn, m, n \in \mathbb{Z}$ πρώτοι μεταξύ τους. Τότε οι αριθμοί $mn, m + n$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε: $z = \frac{dmn}{m+n}$, απ' όπου προκύπτει $m + n \div d$. Συνεπώς, οι λύσεις δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = km(m + n), y = kn(m + n), z = kmn,\ \ k, m, n \in \mathbb{Z}_+$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 4.4 (Μαθηματική Ολυμπιάδα Ην.Βασιλείου)**.** *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 = z^5 + z$ έχει άπειρες λύσεις ακεραίους σχετικά πρώτους μεταξύ τους.*

4.3 Αριθμητική ισοτιμιών

Μία άλλη διαδικασία που μπορεί να βοηθήσει στην επίλυση Διοφαντικών εξισώσεων προκύπτει μέσω των ισοϋπόλοιπων αριθμών (Αριθμητική $(modn)$). Ακολουθούν βασικές υπενθυμίσεις.

- Για κάθε δύο ακέραιους αριθμούς a, b υπάρχουν ακέραιοι q, r, ώστε να ισχύει:
$$a = b \cdot q + r, \quad 0 \le r < q, \; q, r \in \mathbb{Z}$$
- Δύο αριθμοί a, c που αφήνουν στην Ευκλείδια διαίρεση με τον $b \in \mathbb{N}$ το ίδιο υπόλοιπο r λέγονται ισοϋπόλοιποι $(modb)$.
- $a \cong b(modn) \Leftrightarrow n \div (a - b)$
- $a \cong b(modn) \Leftrightarrow b \cong a(modn)$
- $a \cong b(modn)$ και $b \cong c(modn) \Rightarrow a \cong c(modn)$
- Πράξεις ισοτιμιών $a \cong b(modn), c \cong d(modn)$
$a + c \cong (b + d)(modn)$
$a - c \cong (b - d)(modn)$
$ac \cong bd(modn)$
- $a \cong b(modn) \Rightarrow a + c \cong b + c(modn)$
$a \cong b(modn) \Rightarrow ac \cong bc(modn)$
- $a_1 \cong b_1(modn), \ldots, a_k \cong b_k(modn) \Rightarrow$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_k(modn) \cong b_1 + b_2 + \cdots b_k(modn)$
$a_1 \cdot a_2 \cdots a_k(modn) \cong b_1 \cdot b_2 \cdots b_k(modn)$
$a^m \cong b^m(modn)$

Παράδειγμα 4.1 (Παραδείγματα στις παραπάνω υπενθυμίσεις). *1. Θεωρούμε $a = 80, b = 12$ τότε η Ευκλείδια διαίρεση δίνει: $80 = 12 \cdot 6 + 8, \; a = 80, b = 12, q = 6, 0 \le r = 8 < 12$*

2. *Θεωρούμε $a = 80, b = -12$ τότε η Ευκλείδια διαίρεση δίνει: $80 = -12 \cdot (-6) + 8, \; a = 80, b = -12, q = -6, 0 \le r = 8 < 12$, όπου προσέχουμε πάντα το υπόλοιπο να είναι μη αρνητικό.*
3. *$a = -80, b = 12$ τότε η Ευκλείδια διαίρεση γίνεται: $-80 = 12 \cdot (-7) + 4$*
4. *Οι αριθμοί $7 = 3 \cdot 2 + 1$ και $61 = 3 \cdot 20 + 1$ είναι ισοϋπόλοιποι $(mod3)$. Μάλιστα ισχύουν: $7 \cong 1(mod3), \; 61 \cong 1(mod3)$.*
5. *Κάθε άρτιος $a \cong 0(mod2)$ και κάθε περιττός $b \cong 1(mod2)$*
6. *Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $a = 111^{333} + 333^{444}$ διαιρείται με το 7.*
Ισχύουν: $111 = 7 \cdot 15 + 6 \Rightarrow 111 \cong 6(mod7) \cong (-1)(mod7) \Rightarrow 111^{333} \cong (-1)^{333}(mod7) \cong -1(mod7)$.
Όμοιως: $333 = 7 \cdot 47 + 4 \Rightarrow 333 \cong 4(mod7) \cong (-3)mod7$
$333^2 \cong (-3)^2(mod7) \Leftrightarrow 333^2 \cong 2(mod7), \; 333^3 \cong -6(mod7) \cong 1(mod7)$
$111^{333} \cong (-1)^333(mod7) \cong -1(mod7)$
$333^{444} \cong 333^{3 \cot 148}(mod7) \cong (-1)^{148}(mod7) \cong 1(mod7)$ *Συνεπώς: $111^{333} + 333^{444} \cong 1(mod7) + (-1)(mod7) \cong 0(mod7)$ που είναι το ζητούμενο.*
7. ***Εφαρμογή: Εύρεση τελευταίου ψηφίου** Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $a = 2 \cdot 3^{2015} + 5 \cdot 11^{2015}$.*
Έχουμε: $3^2 = (-1)(mod10) \Rightarrow 3^{2012} \cong (-1)^{1006}(mod10) \cong 1(mod10)$. Οπότε: $3^{2012} \cong 1(mod10) \Rightarrow 3^{2015} \cong 3^3(mod10) \cong 7(mod10)$.
Ακόμα: $11 \cong 1(mod10) \Rightarrow 11^{2015} \cong 1(mod10)$
Άρα έχουμε: $a \cong (2 \cdot 7 + 5 \cdot 1)(mod10) \cong 19(mod10) \cong 9(mod10)$. Συνεπώς, το τελευταίο ψηφίο του a είναι το 9.

Θεμα 4.6 (Αρχιμήδης 2009 - Μεγάλοι). *Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y$.*

Υπόδειξη. Η εξίσωση γράφεται $(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 7 \cdot 2^y$. Αρχικά, αν $y < 0$ τότε το δεξί μέλος δεν είναι ακέραιο ενώ το αριστερό είναι.Άρα $y \ge 0$.

Επίσης, έστω $x > 0$ αφού αν (x, y) είναι λύση,τότε και η $(-x, y)$ είναι λύση. Αν $y = 0$ τότε πρέπει $x^2 - 2x - 1 = 1$ και $x^2 + 2x - 1 = 7$ και προσθέτοντας κατα μέλη παίρνουμε $2x^2 = 10$ άτοπο.

Αν τώρα $x \equiv 0 \mod 2$ τότε $(x^2-2x-1)(x^2+2x-1) \equiv (-1)(-1) \mod 2 = 1 \mod 2$ ενώ $7\cdot 2^y \equiv 0 \mod 2$ άτοπο. Άρα x περιττός.

Για $y \geq 3$ είναι $7\cdot 2^y \equiv 0 \mod 8$ ενώ $x^2 \equiv 1 \mod 8 \Rightarrow x^2-2x-1 \equiv -2k \mod 8$ όπου $k = x \mod 8$.

Ομοίως $x^2+2x-1 \equiv 2k \mod 8$.Άρα $(x^2-2x-1)(x^2+2x-1) \equiv 4k^2 \mod 8$.Όμως $k \equiv 1 \mod 2$ και συνεπώς $(x^2-2x-1)(x^2+2x-1) \equiv 4 \mod 8$.

Άρα $y \leq 2$. Ελέγχοντας τις προηγούμενες περιπτώσεις βλέπουμε ότι μοναδικές αποδεκτές λύσεις είναι οι: $(x,y) = (\pm 3, 2)$. Αναλυτικές λύσεις. □

Θεμα 4.7. *Να βρεθούν ακέραιοι αριθμοί n για τους οποίους ισχύει: $n^2+n+7 =$ πολ13 .*

Υπόδειξη. Αρκεί: $n^2+n+7 \cong 0(mod 13) \Leftrightarrow n^2+n \cong -7(mod 13) \Leftrightarrow n^2+n-6 \cong -13(mod 13) \Leftrightarrow (n-2)(n+3) \cong 0(mod 13) \Leftrightarrow 13 \div (n-2)$ ή $13 \div (n+3) \Leftrightarrow n \cong 2(mod 13)$ ή $n \cong -3(mod 13)$. □

Θεμα 4.8 (Andreescu). *Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση:*

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \cdots + (x+2001)^2 = y^2$$

δεν έχει ακέραιες λύσεις.

Υπόδειξη. Θέτοντας $x = z - 1001$ η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}(z-1000)^2 + \cdots + (z-1)^2 + z^2 + (z+1)^2 + \cdots + (z+1000)^2 = y^2 &\Leftrightarrow\\ 2001z^2 + 2(1^2+2^2+\cdots+1000^2) = y^2 &\Leftrightarrow\\ 2001z^2 + 2\frac{1000\cdot 1001\cdot 2001}{6} = y^2 &\Leftrightarrow\\ 2001z^2 + 1000\cdot 1001\cdot 667 = y^2 &\end{aligned}$$

Σε αυτήν την ισοδύναμη εξίσωση το αριστερό μέλος είναι ισότιμο $2(mod 3)$, ενώ το δεξί μέλος είναι τέλειο τετράγωνο, τα οποία δεν μπορούν να είναι ίσα. □

Ασκηση 4.5. *Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y), ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$3^x - 2^y = 7$$

Ασκηση 4.6. *Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (x,y), ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$x^3 - 4xy + y^3 = -1$$

4.4 Εξίσωση Pell

Ορισμός 4.1. *Μία εξίσωση της μορφής:*

$$x^2 - Dy^2 = 1, \ x, y \in \mathbb{Z}$$

όπου ο φυσικός αριθμός $D \in \mathbb{N}$ ***δεν*** *είναι τέλειο τετράγωνο, λέγεται εξίσωση τύπου Pell.*

Αν x_0, y_0 η ελάχιστη μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης Pell, δηλαδή $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ τότε οι άπειρες λύσεις της ικανοποιούν τις αναδρομικές σχέσεις:

$$x_{n+1} = x_1 x_n + D y_1 y_n, \qquad y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n, n \geq 0 \tag{1}$$

και τελικά δίνονται από τη σχέση:

$$x + y\sqrt{D} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{D})^n$$

Θεμα 4.9 (Στεργίου). *Να βρεθούν όλα τα τρίγωνα με μήκη πλευρών διαδοχικούς ακέραιους και εμβαδόν ακέραιο.*

Υπόδειξη. Έστω ότι οι πλευρές έχουν μήκη: $a-1, a, a+1$, τότε από τον τύπο του Ήρωνα[1] το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι $E = \frac{a\sqrt{3(a^2-4)}}{4}$. Για να είναι ακέραιος το E πρέπει ο a να είναι άρτιος, δηλαδή $a = 2k \Rightarrow a^2-4 = u^2$. Οπότε έχουμε ότι: $4k^2-4 = 3u^2$, οπότε u άρτιος απ' όπου έχουμε: $x^2 - 3y^2 = 1$ η οποία είναι εξίσωση τύπου Pell με λύση $(2,1)$ και τις υπόλοιπες θετικές ακέραιες λύσεις να δίνονται από τους τύπους 1. □

[1]Κάθε τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και ημιπερίμετρο s έχει εμβαδόν ίσο με $E = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ βιβλίο γεωμετρίας σελ.218.

Απάντηση 3.5. Παρατηρείστε ότι οι μαθητές έχουν ηλικίες από 13 έως 18 ετών και αναλύστε τον αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Τότε εύκολα θα βρείτε ότι οι μαθητές ήταν 5. Επιστροφή □

Απάντηση 3.6. Προκύπτει η διοφαντική εξίσωση: $\frac{a}{b}(b+1)^2 = 36 \Leftrightarrow a(b+1)^2 = 36b$. Όμως οι αριθμοί $b, b+1$ είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους, άρα ο $(b+1)^2$ θα είναι παράγοντας του 36, δηλαδή $(b+1)^2 = 1, 4, 9, 36$. Οπότε, προκύπτουν $b = 0, 1, 2, 5$. Από τους οποίους δεκτές τιμές είναι οι $b = 1, 2, 5 \Rightarrow a = 9, 8, 5$. Επιστροφή □