Πρότυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Μη Γραμμικες Διοφαντικες Εξισωσεις .

1 Εισαγωγή

Στο παρόν θα εξετάσουμε την επίλυση εξισώσεων με ακέραιες λύσεις. Ο χειρισμός τέτοιων εξισώσεων διαφέρει σημαντικά ως προς το χειρισμό σε σχέση με τις γενικές εξισώσεις, διότι, αν και δεν υπάρχει γενικός αλγόριθμος λύσης τους, μπορούμε σε κάποιες περιπτώσεις να δράσουμε αποτελεσματικά, μέσω γνωστών εργαλείων και έξυπνων σκέψεων.

Στη συνέχεια θα πρέπει να προσπαθείτε να λύνετε μόνοι σας τις ασκήσεις που ακολουθούν τα παραδείγματα, πριν προχωρήσετε στις υποδείξεις και τις λύσεις που δίνονται.

2 Ομαδοποίηση, παραγοντοποίηση, λύση

Ορισμός 1. *Μία εξίσωση λέγεται* ***Διοφαντική εξίσωση*** *αν έχει συντελεστές ακεραίους και λύσεις ακεραίους (ή ρητούς).*

Γενικά, σύμφωνα με θεώρημα του Matjiasevich, το πρόβλημα του καθορισμού της ύπαρξης λύσης είναι μη αποφασίσιμο, δηλαδή δεν μπορεί να κατασκευαστεί αλγόριθμος, ο οποίος σε κάθε περίπτωση να αποφαίνεται σωστά αν η Διοφαντική εξίσωση έχει λύση ή όχι. Αυτό βέβαια αφορά στο σύνολο των Διοφαντικών εξισώσεων. Υπάρχουν όμως συγκεκριμένες μορφές εξισώσεις που έχουμε πλήρη αλγόριθμο για το αν έχουν λύσεις ή όχι και άλλες για τις οποίες έχουμε και αλγόριθμο για να βρούμε τέτοιες λύσεις.

Στα επόμενα θα εργαστούμε με μη γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις [1].

Παράδειγμα 1. *Να βρεθούν ακέραιοι x, y, οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$xy - 3 = y$$

Απόδειξη. Μία βασική τεχνική σε τέτοιου είδους εξισώσεις είναι να προσπαθήσουμε να παραγοντοποίησουμε την παράσταση στο ένα μέλος, έχοντας στο άλλο είτε μηδέν, είτε κάποιον άλλο - συνήθως μικρό - ακέραιο. Στη συνέχεια διακρίνουμε περιπτώσεις.

Η συγκεκριμένη γράφεται:

$$\begin{aligned} xy - 3 = y &\Leftrightarrow \\ xy - y = 3 &\Leftrightarrow \\ y(x-1) = 3 &\Leftrightarrow \\ (y, x-1) = (1,3) \text{ ή } (-1,-3) \text{ ή } (3,1) \text{ ή } (-3,-1) &\Leftrightarrow \\ (y,x) = (1,4) \text{ ή } (-1,-2) \text{ ή } (3,2) \text{ ή } (-3,0). & \end{aligned}$$

ώστε το γινόμενό τους να είναι 3.

□

Παράδειγμα 2. *Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$3x - 2y + xy - 9 = 0 \tag{1}$$

[1] Για τις γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις αναφερόμαστε σε άλλο κείμενο.

Απόδειξη. Προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε την 1 · απαιτείται ομαδοποίηση:

$$3x + xy - 2y - 9 = 0 \Leftrightarrow x(3+y) - 2y - 9 = 0$$

Ο προσθεταίος $-2y - 9$ θέλουμε να «περιέχει» $3 + y$, δηλαδή να διαιρείται από το $3+y$ που δε γίνεται αφού το -3 όχι ρίζα του $-2y-9$. Οπότε, μπορούμε να κάνουμε τη διάσπαση:

$$-2y - 9 = -2y - 6 - 3 = -2(y+3) - 3$$

Τότε η εξίσωση θα γίνει:

$$x(3+y) - 2(y+3) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)(3+y) = 3 \text{ με } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Στη συνέχεια θα εργαστούμε με περιπτώσεις όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Το 3 ως γινόμενο ακεραίων προκύπτει από: $1 \cdot 3, (-1) \cdot (-3), 3 \cdot 1, (-3) \cdot (-1)$.

Οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$(y+3, x-2) = (1,3) \text{ ή } (3,1) \text{ ή } (-1,-3) \text{ ή } (-3,-1)$$
$$(y, x) = (-2,5) \text{ ή } (0,3) \text{ ή } (-4,-1) \text{ ή } (-6,1)$$

□

Στη συνέχεια ακολουθούν 3 θέματα Θαλή Α΄ Λυκείου με υποδείξεις και λύσεις. Βασική υπενθύμιση: προσπάθησε να το λύσεις πρώτα μόνος σου! ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ = ΓΡΑΨΙΜΟ ιδεών σε χαρτί. Επιστροφή για εύρεση εναλλακτικών δρόμων όταν κολλήσουμε κάπου.

Θεμα 1 (Θαλής 2012 - Α 1). *Να βρεθούν ακέραιοι x, ρίζες της εξίσωσης:*

$$x(x-2) = 24 \tag{2}$$

με $x^2 \leq 25$.

Θεμα 2 (Θαλής 2007 - Α 4). *Να βρεθούν θετικοί ακέραιοι x, y, ώστε:*

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$

Υπόδειξη 1 Υπόδειξη 2 Λύση

Θεμα 3 (Θαλής 2008 - Α2). *Να βρεθούν οι $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ώστε $0 \leq x \leq y \leq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44 \tag{3}$$

Υπόδειξη 1 Υπόδειξη 2 Λύση

Θεμα 4 (Θαλής 2013 - Α3). *Να βρεθούν οι $x \in \mathbb{Z}$ για τους οποίους οι αριθμοί: $A = 8x + 1$, $B = 2x - 3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.*

Υπόδειξη 1η Υπόδειξη 2η Λύση

Σε κάποιες περιπτώσεις θεμάτων μπορεί να χρειαστεί να εφαρμόσουμε πρώτα για μερικές ειδικές περιπτώσεις, μήπως και αντιληφθούμε τι συμβαίνει:

Θεμα 5 (Θαλής 2015 - Α3). *Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y οι οποίοι είναι λύσεις της εξίσωσης:*

$$x + y + x^2 + y^2 = p, \text{ όπου } p \text{ πρώτος}, p > 0. \tag{4}$$

Υπόδειξη 1η Υπόδειξη 2η Λύση

Σε μερικές περιπτώσεις η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνεται αρκετά δύσκολη στην εύρεση της κατάλληλης ομαδοποίησης. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση μέσω τριωνύμου με μεταβλητούς συντελεστές.

Παράδειγμα 3 (Παραγοντοποιώντας μέσω τριωνύμου)**.** *Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:*

$$3x^2 - xy - 4y^2 = 6 \tag{5}$$

Λύση 1. *Θεωρούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης ως τριώνυμο του x, οπότε έχουμε: $a = 3,\ b = -y,\ c = -4y^2$.*

Τότε: $\Delta = b^2 - 4ac = (-y)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4y^2) = 49y^2$.

Και οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{y \pm 7y}{6} = \frac{4y}{3} \text{ ή } -y$$

Οπότε το τριώνυμο παραγοντοποιείται:

$$3x^2 - xy - 4y^2 = 3(x - \frac{4y}{3})(x + y) = (3x - 4y)(x + y)$$

Συνεπώς έχουμε: $(3x - 4y)(x + y) = 6 = 1 \cdot 6 = (-1)(-6) = 2 \cdot 3 = (-2)(-3) = \ldots$

Απ΄ όπου τελικά θα προκύψουν οι λύσεις: $(x, y) = (3, 2), (-3, -2)$.

Άσκηση 1. *Να βρεθούν ακέραιοι x, y, ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση:*

$$x^2 + x + 29 = y^2 \tag{6}$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν ακέραιοι x, y οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$-2x^3 + 5x^2y + 4xy^2 - 3y^3 - 3 = 0 \tag{7}$$

3 Υποδείξεις

Υπόδειξη 1. *Πάλι προσπαθούμε να παραγοντοποιήσουμε με ομαδοποίηση.* Επιστροφή

Υπόδειξη 2. *Δοκίμασε ομαδοποιήσεις που να έχουν κοινό παράγοντα.* Επιστροφή

Υπόδειξη 3. *Εφόσον στο πρώτο μέλος έχουμε 7 προσθεταίους και εμφανίζεται και το xyz υποπτευόμαστε μήπως είναι γινόμενο παραγόντων τριών παρενθέσεων με δύο όρους η καθεμία, οπότε ίσως χρειαστεί να προσθαφαιρέσουμε και κάποιον αριθμό στο αριστερό μέλος.* Επιστροφή

Υπόδειξη 4. *Για να παραγοντοποιήσεις τους ομαδοποιημένους προσθεταίους μπορείς να χρησιμοποιήσεις και ταυτότητα.* Επιστροφή

Υπόδειξη 5. *Εφόσον είναι τέλεια τετράγωνα ακεραίων πώς θα γράφονται;* Επιστροφή

Υπόδειξη 6. *Αν $A = k^2$ και $B = l^2$ τότε προκύπτει $k^2 - 4l^2 = 13$ η οποία είναι μία Διοφαντική εξίσωση ως προς k, l.* Επιστροφή

Υπόδειξη 7. *Εδώ δε φαίνεται εύκολο να γίνει παραγοντοποίηση, καθώς λείπουν και όροι. Μπορούμε να δοκιμάσουμε για $p = 2, 3$ και διάφορες μικρές τιμές των x, y μήπως έρθει κάποια ιδέα για το τι περίπου συμβαίνει.* Επιστροφή

Υπόδειξη 8. *Παρατήρησε ότι $x^2 + x, y^2 + y$ είναι άρτιοι.* Επιστροφή

4 Λύσεις

Λύση 2. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Παραγοντοποιούμε ως εξής την 1:*

$$(x^3+y^2)^2+3(x^3+y^2)=40$$
$$(x^3+y^2)(x^3+y^2+3)=40=1\cdot 40=2\cdot 20=4\cdot 10=8\cdot 5$$

Ισχύει $x^3+y^2<x^3+y^2+3, x,y\in\mathbb{Z}$. *Προκύπτει λύση μοναδική* $(x,y)=(1,2)$.

Άλλη λύση μπορεί να προκύψει,θέτοντας $x^3+y^2=w$ *και παραγοντοποιώντας με χρήση τριωνύμου. Επιστροφή*

Λύση 3. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Παραγοντοποιούμε ώς εξής την 3:*

$$xyz+xy+yz+y+zx+x+z=44\Leftrightarrow$$
$$xy(z+1)+y(z+1)+x(z+1)+z=44\Leftrightarrow$$
$$(z+1)(x+1)(y+1)=45=1\cdot 1\cdot 45=1\cdot 3\cdot 15=1\cdot 5\cdot 9=3\cdot 3\cdot 5$$

και ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία με τις προηγούμενες ασκήσεις, οπότε καταλήγουμε σε λύσεις:

$$(x,y,z)=(2,2,4),(0,4,8),(0,2,14),(0,0,44)$$

Επιστροφή

Λύση 4. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Έχουμε:*

$$A=k^2,\ B=l^2,\qquad k,l\in\mathbb{Z}$$
$$8x+1=k^2,\ 2x-3=l^2$$
$$k^2-4l^2=13$$
$$(k-2l)(k+2l)=13=1\cdot 13=13\cdot 1=(-1)\cdot(-13)=(-13)\cdot(-1)$$

απ΄ όπου καταλήγουμε:

$$(k,l)=(7,3)\ \text{ή}\ (-7,-3)\ \text{ή}\ (7,-3)\ \text{ή}\ (-7,3)\Rightarrow(k^2,l^2)=(49,9)\Rightarrow x=6$$

Επιστροφή

Λύση 5. *Σχεδιάγραμμα λύσης: Οι αριθμοί* $x^2+x=x(x+1), y^2+y=y(y+1)$ *είναι άρτιοι, διότι είναι γινόμενο διαδοχικών ακεραίων. Συνεπώς και το άθροισμά τους είναι άρτιος, οπότε και ο* p *είναι άρτιος, πρώτος, θετικός, δηλαδή 2. Ερευνώντας περιπτώσεις καταλήγουμε:*

$$x(x+1)=0\ \text{και}\ y(y+1)=2\ \text{η}\ x(x+1)=2\ \text{και}\ y(y+1)=0$$

Τελικά, με όλες τις προϋποθέσεις έχουμε λύσεις:

$$(x,y)=(0,1),(0,-2),(-1,1),(-1,-2)$$

Επιστροφή