ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Γυμνασίου

1. Να υπολογίσετε την παράσταση:

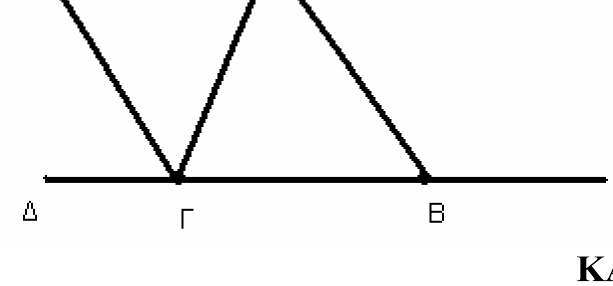
$$A=\left\{111-\left[264-\left(15+\frac{54}{6}\right)\cdot|-5|\right]:12\right\}:11+1$$

2. Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100€ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2€ και των 10€;

3. Το 6% του αριθμού $\alpha\neq 0$ είναι ίσο με το 4% του αριθμού β. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος.

$$\kappa=\frac{9\alpha-3\beta}{6\alpha-\beta}$$

4. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΒΓ και η διχοτόμος Γx της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta$ είναι παράλληλη στην ΑΒ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Γυμνασίου

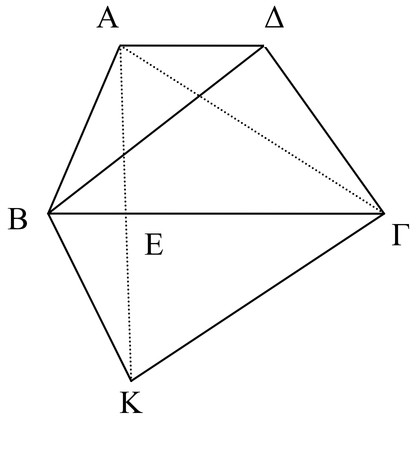
Πρόβλημα 1.
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = \left(200:8+12\cdot 100\right)+\left[200:\left(8+2\right)+762\right]\cdot\left[\left(-1\right)^{13}+\left(-1\right)^{12}+\left(-1\right)^{2007}\right]^{2}.$$

Πρόβλημα 2.
Οι μαθητές ενός Γυμνασίου μπορούν να παραταχθούν σε εξάδες, σε οκτάδες και σε δεκάδες, χωρίς να περισσεύει κανείς. Τα πλήθη των μαθητών των τάξεων Α΄, Β΄ και Γ΄ είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς 5, 4 και 3, αντίστοιχα. Αν το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου είναι αριθμός μεγαλύτερος του 300 και μικρότερος του 400, να βρεθεί το πλήθος των μαθητών κάθε τάξης.

Πρόβλημα 3.
Ένας έμπορος αγόρασε 200 κιλά φράουλες με τιμή αγοράς 3 ευρώ το κιλό. Κατά τη μεταφορά είχε απώλεια 10% στα κιλά που αγόρασε. Πόσο πρέπει να πουλήσει το κιλό τις φράουλες ώστε να έχει κέρδος 20% επί της τιμής της αγοράς;

Πρόβλημα 4.
Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος η μεγάλη βάση ΒΓ είναι διπλάσια της μικρής βάσης ΑΔ. Αν το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $300 cm^2$ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ (δηλαδή η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της ΑΚ), να υπολογίσετε:
(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και
(β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΚΓ.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Μονάδες 5

2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία Αy είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\mathrm{A}}x$. Δίνεται ακόμη ότι:

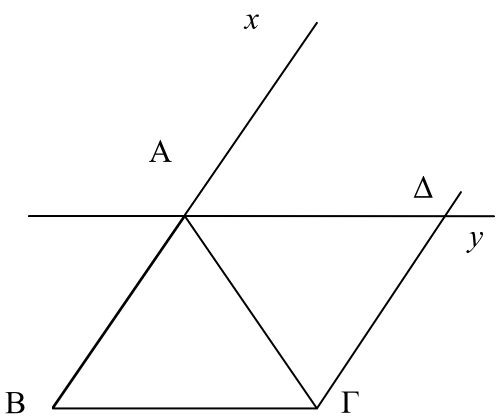
$\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 2

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$.

Μονάδες 3



3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4},$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Μονάδες 5

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις. Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^o

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^o

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.
(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α ;
(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός, μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται ένα τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, του οποίου οι γωνίες $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.
(α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.
(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του $\mathrm{B\Gamma}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^o

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:
(α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;
(β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Γυμνασίου

1. Έστω $x = 3^2 - 4 \cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4 \cdot 5^2 - 4^3 + 7 \cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο ακέραιο Α του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{I}\hat{\Delta}\Gamma = 70^0$ και $\mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Delta$ και $\mathrm{E}\hat{\mathrm{I}}\Gamma$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$72^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right).$$

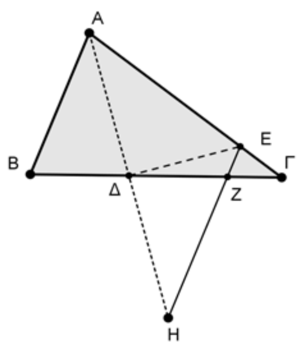
Πρόβλημα 2
Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Πρόβλημα 3
Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^{\circ}$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}=20^{0}$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$$

Πρόβλημα 3
Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.
(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.
(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$ και $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{AB}$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

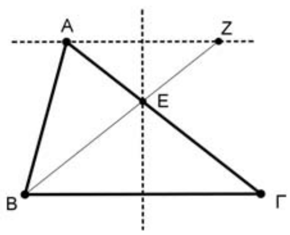
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12 : 4 + 53 + 3 \cdot 4 + \frac{16}{9} : \frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσό χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνιά $\hat{B}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



(α) $AZ = AB$, **(β)** $A\hat{E}B = \hat{B}$.

Πρόβλημα 4
Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{13}{9} - \frac{74}{9} \cdot \frac{3}{37} + \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} : 8$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Πρόλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση των διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

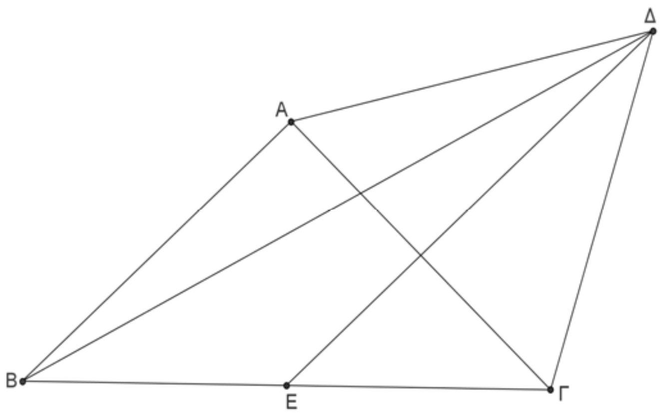
$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = 24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad \mathrm{B} = \left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Πρόβλημα 2
Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha = 6$ μέτρα και πλάτος $\beta = 4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:
(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

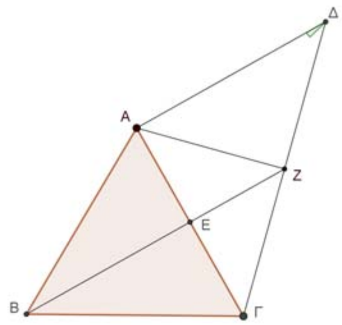
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.



Πρόβλημα 3
Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις. Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α.

Πρόβλημα 4
Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού Α είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του Α, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

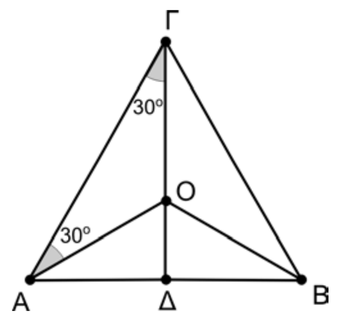
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:
$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ.
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Πρόβλημα 3
Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Πρόβλημα 4
Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

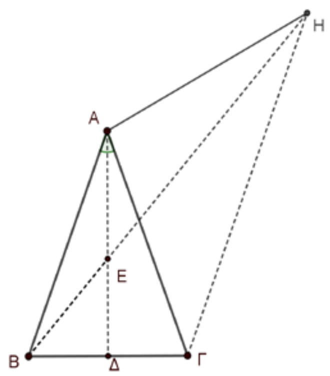
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
10 Νοεμβρίου 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right).$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ), με $\widehat{\mathrm{A}}=40°$, και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{B}=20°$,
(β) $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{H}=40^\circ$,
(γ) η ΗΒ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\Gamma$.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Πρόβλημα 3
Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Πρόβλημα 4
Τρεις θετικοί ακέραιοι α,β και γ, με $\alpha<\beta<\gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β,γ, να βρείτε τις δυνατές τιμές των α,β,γ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

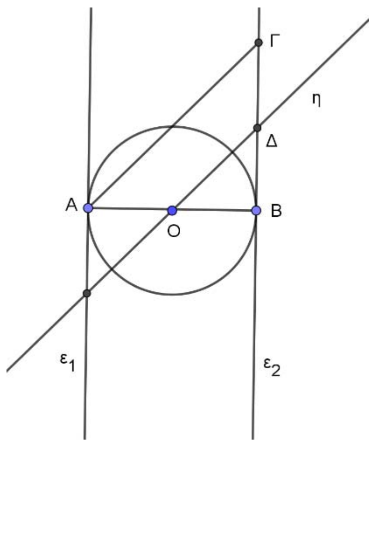
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Πρόβλημα 2
Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Πρόβλημα 3
Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB, κέντρο O και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Gamma}$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Δ.



(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{OB\Delta}$.
(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$.
(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $\mathrm{AO\Delta\Gamma}$.

Πρόβλημα 4
Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

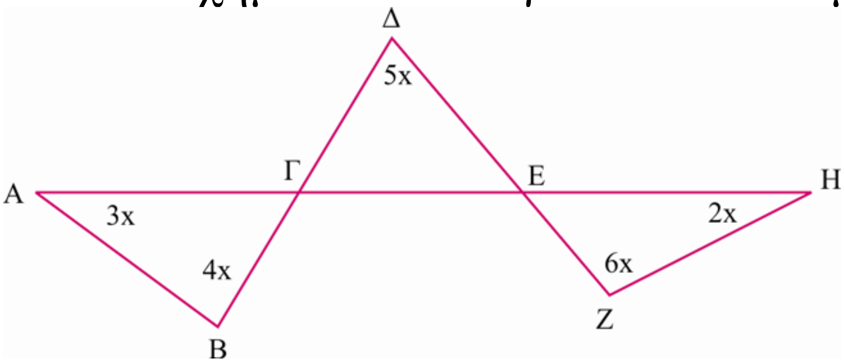
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

1. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



2. Αν $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma}{2} = 0$ και αβγ=10, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^2 (\alpha + \frac{\gamma}{2})^2 \cdot (\alpha + 2\beta)^2$$

3. Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός 27p + 1 είναι σύνθετος.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2} a\beta^{-1} + \frac{10}{3} a^{-1}\beta = 3.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

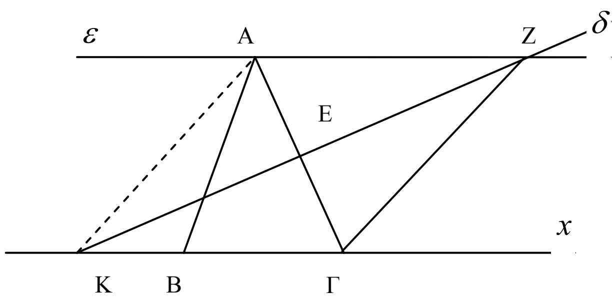
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A} = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4, \quad \mathrm{B} = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right].$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $\mathrm{A} > \mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.



(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x$,

(β) Να αποδείξετε ότι ΚΑ = ΑΖ.

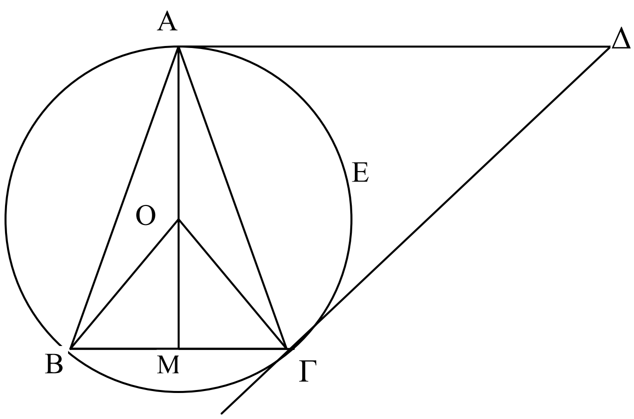
Πρόβλημα 3

(α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\mathrm{A} = aaabb$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 30^\circ$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α .

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\dfrac{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2009}\right]^0}$, $\quad B=\dfrac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\dfrac{x}{2}$.

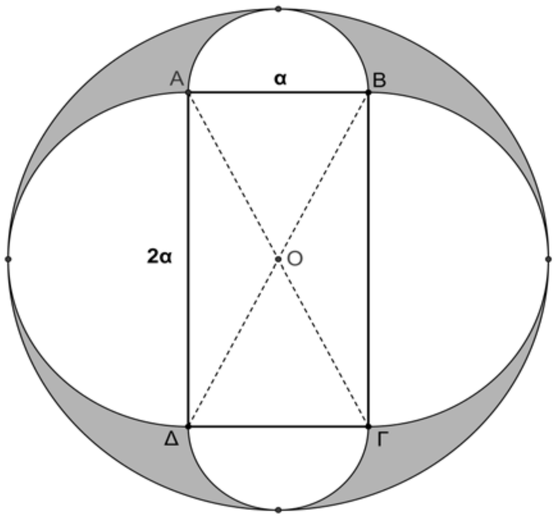
Αν είναι $A=B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x. ***Μονάδες 5***

2. Το σημείο $A(-\lambda+2, 4\lambda-1)$), όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ,
(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ και
(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AB=\alpha$, $A\Delta=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. ***Μονάδες 5***



4. Αν ισχύει $\dfrac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$ ***Μονάδες 5***

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν ν είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν , να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 4\cdot(-1)^{\nu} + 2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5} - 7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy , Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2 , και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}(\Delta_1)}{\mathrm{E}(\Delta_2)}$, όπου $\mathrm{E}(\Delta_1)$ και $\mathrm{E}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Γυμνασίου

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=7x+10y-3w-87\,.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:
(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

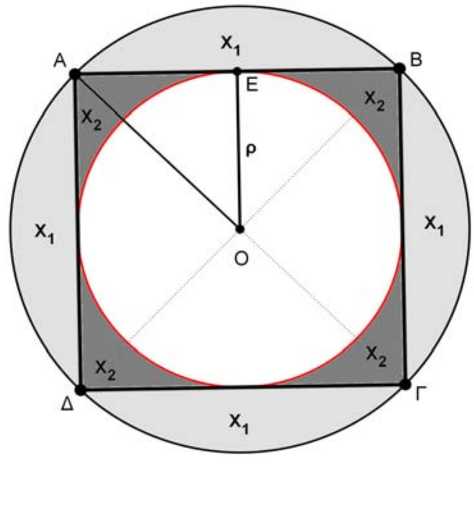
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες $\mathrm{A}x$ και $\mathrm{A}y$ κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=120^0$, $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ .Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(\mathrm{O},\rho)$ και $C(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα, έχουν λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)}{\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(\mathrm{O},x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \leq 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2}-3}{4} - \frac{2x-9}{8} \leq x.$$

Πρόβλημα 3

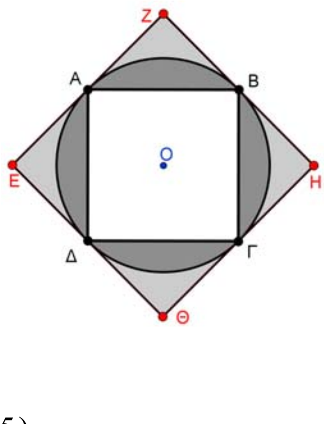
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $\mathrm{M}(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(\mathrm{O},\rho)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi = 3,1415$).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

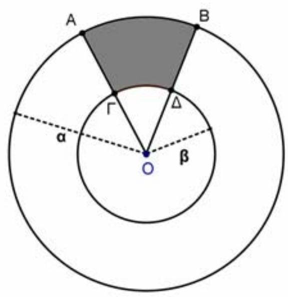
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{K}=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}},\ \text{αν είναι } x=2^{-10}, y=4^{-8}, z=8^{-6},$$
και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 2
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης
$$4x-5\alpha+2<\alpha\left(x-3\right)+2\left(\alpha-1\right).$$

Πρόβλημα 3
Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους $\left(\mathrm{O},\alpha\right)$ και $\left(\mathrm{O},\beta\right)$, $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A\hat{O}B}$ και την τιμή της παράστασης:
$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$



Πρόβλημα 4
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ cm και $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Delta}$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $\mathrm{E\Gamma}=2\cdot\mathrm{AE}$, να βρείτε:

(i) το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(ii) Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Πρόβλημα 2
Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta} \quad .$$

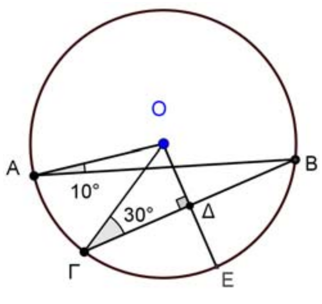
Πρόβλημα 3
Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς χΟψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).

(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Πρόβλημα 4
Σε κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 10^\circ$ και $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στο σημείο Ε.



(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A}\Gamma}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\dfrac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\dfrac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\right)$ και $\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}\right)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}\right)}$.

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta\left(\Delta_1\right)$ και $\beta\left(\Delta_2\right)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\dfrac{\beta\left(\Delta_1\right)}{\beta\left(\Delta_2\right)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.
Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”

14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=\dfrac{a-1}{\alpha-3}+\dfrac{1}{33}+a^{-1}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{27}$, αν $a=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\dfrac{28}{\nu}$ και $\gamma=\dfrac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}=36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega=36^\circ$,
(β) ΑΜ = ΓΖ,
(γ) ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x,y,z,w,m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=(x+y)\cdot z^m-w$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

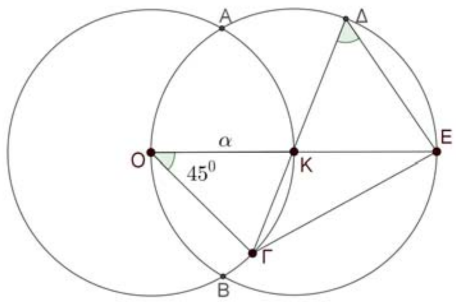
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Αν $\alpha = \frac{12^{\nu}}{3^{\nu}} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\mathrm{A} = \frac{\left(\alpha^3 - \beta\right)^3 + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$.

Πρόβλημα 2.
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ , οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 45^\circ$, να βρείτε :



(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$, και
(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Πρόβλημα 3
Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Πρόβλημα 4
Δίνονται οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = \overline{3a5b} = 3\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d \,.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\frac{\mathrm{A}}{36} < \frac{\mathrm{B}}{45}$.

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{\mathrm{A}}{36}, \frac{\mathrm{B}}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

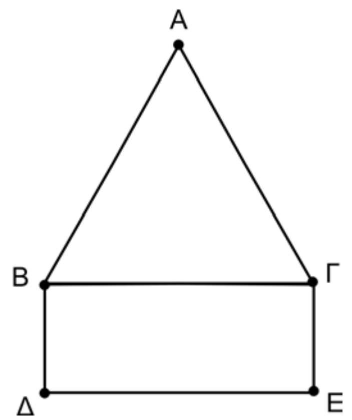
$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Πρόβλημα 2
Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80 τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά $\mathrm{B\Delta}=\frac{\alpha}{2}$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$.
(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

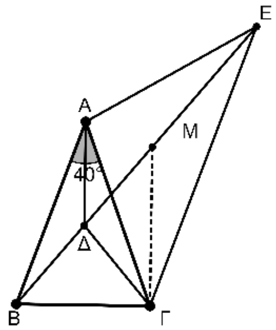
Πρόβλημα 2
Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α , για τις οποίες η εξίσωση $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-\alpha}{x-6}$

έχει ακέραιες λύσεις.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=40^\circ$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ. Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:
(α) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$.
(β) $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=100^\circ$.
(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right).$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

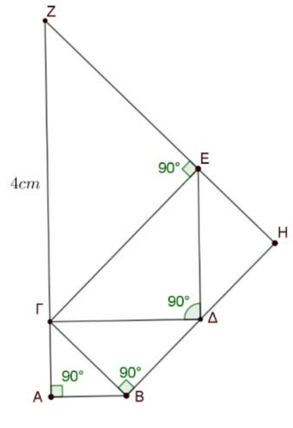
(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Πρόβλημα 4



Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}, \mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}, \mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\mathrm{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$, $\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Delta}$, $\mathrm{\Delta\Gamma}=\mathrm{\Delta E}$, $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{\Gamma Z}=4\ cm$.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες *Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Α΄ τάξη Λυκείου

1. Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\lambda\left(\lambda x+3\right)=\lambda^3+2\lambda x-2$

για τις διαφορές πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ.

3. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}>\hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ τέμνονται στο Ι. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΔ = ΒΓ−ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : ΙΔ = ΙΑ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.
Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*
Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*
Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*
Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*
Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

Πρόβλημα 2

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\beta-1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την ΑΓ στο Α η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓ με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}=\beta$:

(α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,
(β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6+2x^3y^2+3x^3+y^4+3y^2-40=0$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε $0 \le x \le y \le z$ και

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44.$$

Μονάδες 5

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν τη παρακάτω ιδιότητα: "*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).

Μονάδες 5

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ός} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Αν οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \leq 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^{ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^{ο} .

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή , όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Α΄ Λυκείου

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x(x-1)}{4}.$$

2. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{A} = \alpha^4 + 2\alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta^3\gamma^2 - \beta^4\gamma^2 - \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^4.$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{y} \quad , \quad \frac{x-1}{2} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{3} + \frac{x}{3}.$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους ΑΔ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Μ, Ν έτσι ώστε ΕΜ = ΕΝ και ΜΒ < ΜΓ. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ και ΝΒ τέμνονται πάνω στο ύψος ΑΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$72^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0\\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)}$$

Πρόβλημα 3
(α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa(x+2)-\frac{3(\kappa x-1)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x\left(x-2\right)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Πρόβλημα 2
Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha-2\beta\right)}{\left(\alpha+\beta\right)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται η εξίσωση

$$x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}=2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2)\ \left\{\begin{array}{l}\alpha x+\beta y\ \ =4\\ 2\alpha x+3\beta y=-8\end{array}\right\}$$

έχουν την ίδια λύση (x,y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z ισχύει ότι:

$$z=2(x+y) \qquad \text{και} \qquad z=3(x-y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x,y,z) για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}.$$

Πρόβλημα 2
Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Πρόβλημα 3
Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός, για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε τετράπλευρο *ABCD* με τη γωνία $\hat{A}=100^o$ και $\hat{D}=40^o$. Αν *DB* είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την ανίσωση: $2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.
Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{c} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{4}{y+2}=11 \end{array}\right\}$

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x+y+x^2+y^2=p,$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^o$. Έστω Δ, Z τα μέσα των AB και $\mathrm{A\Gamma}$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{B\Delta E}$ και τετράγωνο $\mathrm{AZH\Theta}$. Η μεσοκάθετη του $\mathrm{B\Delta}$, τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι:
(α) το τρίγωνο AET είναι ισόπλευρο.
(β) τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta\mathrm{T}$ είναι ίσα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x \leq x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Πρόβλημα 2
Να βρεθεί θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1}\cdots\alpha_1\alpha_0}=\alpha_\nu\cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$, $\nu\geq 2,$ ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$\mathrm{A}=2017\cdot 2016\cdot 2015\cdot 2013\cdot 2012\cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν όλες οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε:

$$x^2+4y^2+9z^2-4x-4y+12z+6=0$$

Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Πρόβλημα 4
Στη πλευρά ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε σημείο Μ (διαφορετικό από το μέσο της ΒΓ) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο Κ του ΜΒ και ακτίνα ΚΒ) τέμνει την ΑΒ στο Δ. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο Λ του ΜΓ και ακτίνα ΛΓ) τέμνει την ΑΓ στο Ε. Οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Π και Ρ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνονται στο σημείο Τ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΠΡΤ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς ΒΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση

$$(x-1)\left(x^2-7x+10\right)=0$$

και την ανίσωση

$$\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Πρόβλημα 3
Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$A=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{99}$$

και

$$B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=30°$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:
(α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
(β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 2\cdot \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.
(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\mathrm{A}=\frac{\left(\alpha^2-1\right)^3}{\left(\alpha-1\right)^4}$ είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Β΄ τάξη Λυκείου

1. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2-(2006\kappa+1)x+2007=0$ όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, έχει δύο ακέραιες ρίζες.

2. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 4, ΒΓ = 2 και σημείο Μ στο εσωτερικό του με ΜΓ = 1 και ΜΒ = $\sqrt{3}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

3. Έστω $\kappa = 2+2^2+2^3+\ldots+2^{2008}$. Να αποδείξετε ότι ο 30 διαιρεί τον κ.

4. α) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{19}$
   β) Να λύσετε την εξίσωση:
$$2^{-1}x+x^{-1}=\frac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 - 2y^2 + 2y^4 + 2 = 0.$$

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών κ, λ, μ, για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$ έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ημιευθεία $\mathrm{A}x // \mathrm{B\Gamma}$ (η $\mathrm{A}x$ βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο Γ ως προς την ευθεία ΑΒ). Στην ημιευθεία $\mathrm{A}x$ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΒΓΔΕ να είναι ρόμβος (το σημείο Ε βρίσκεται ανάμεσα στο Α και στο Δ). Στο σημείο Δ θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο Ζ.
(α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.
(β) Να αποδειχθεί ότι το Ε είναι έγκεντρο του τριγώνου ΑΓΖ.

Πρόβλημα 4.
Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x^2y + 2yz^2 &= 70xz \\ 7y^2z + 4zx^2 &= 256xy \\ 5z^2x + 6xy^2 &= 52yz. \end{aligned}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από δύο, έχουν ως τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Μονάδες 5

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 90^\circ$. Φέρουμε από το Α κάθετη προς τη ΒΓ που την τέμνει στο σημείο Ε και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ$.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$
$$x+y+z=300.$$

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ έτσι ώστε

$$ΑΓ \perp ΑΜ \text{ και } ΑΓ = ΑΜ \,,\ ΒΔ \perp ΜΒ \text{ και } ΒΔ = ΜΒ,$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{ο}}$

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2$^{\text{ο}}$

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $\mathrm{A_1, B_1, \Gamma_1}$ είναι τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma, A\Gamma, AB}$ αντίστοιχα και $\mathrm{A_2, B_2, \Gamma_2}$ είναι τα μέσα των $\mathrm{OA, OB, O\Gamma}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $\mathrm{A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1}$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{B_1B_2}$ και $\mathrm{\Gamma_1\Gamma_2}$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3$^{\text{ο}}$

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009} = \frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \frac{x-y+2}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4$^{\text{ο}}$

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+y)^3 = z-2x-y \\ (y+z)^3 = x-2y-z \\ (z+x)^3 = y-2z-x\end{array}\right\} \qquad (\Sigma),$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
Ιστοσελίδα: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β΄ Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$
$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$
$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και οι κύκλοι $c_1(\text{Α}, \text{ΑΒ})$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα $R_1 = \text{ΑΒ}$) και $c_2(\text{Α}, \text{ΑΓ})$ (με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα $R_2 = \text{ΑΓ}$). Ο κύκλος $c_1(\text{Α}, \text{ΑΒ})$ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\text{Α}, \text{ΑΓ})$ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\text{ΕΚΝ}$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\text{ΓΑ} = \text{ΓΒ}$ και $\hat{\Gamma} = 30^o$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\text{ΕΚΝ}$ είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{\text{Α}} = 90^o)$ και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου $\text{Β}\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Νοεμβρίου 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ \ x\neq\pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2},$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Πρόβλημα 2
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ z=y^3+2y-2,\ x=z^3+2z-2.$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω K, των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν $\alpha \neq 0$ και $-1<\alpha<1$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}-1+\alpha,$$

όπου

$$\mathrm{A}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad \mathrm{B}=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2-2\kappa x-1+\kappa^2=0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3}=\frac{y}{2012y+5}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N, αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2+3x+1}{x}-\frac{27x}{9x^2+3x+1}\geq 6.$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α,β,γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=\beta$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες η αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2-x+2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K,Λ,M,N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2-10xy+13y^2+2|x-y|=5$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $\mathrm{AB}<\mathrm{AC}<\mathrm{BC}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο Α και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του Α) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται επάνω στο κύκλο (c).

Πρόβλημα 4
Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A = \sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} + \sqrt{x^4 + 32y^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Κ στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ν των ΑΚ, ΒΚ , αντίστοιχα, και έστω ότι οι ευθείες ΓΝ, ΔΜ τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΡΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΓΔ .

Πρόβλημα 3
Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}, \frac{a+2}{5}, a$.

(β) Να βρείτε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \leq \frac{2x+a}{3}, \quad 2(3x-a)+x > 2(x+1)-a, \quad a-x \leq 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α.

Πρόβλημα 4
Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma : \begin{cases} a\sqrt[3]{b} - c = a \\ b\sqrt[3]{c} - a = b \\ c\sqrt[3]{a} - b = c \end{cases}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$\mathrm{A} = \left(\alpha^2 + 18\right)^2 - \left(8\alpha + 1\right)^2$$

είναι πρώτος.

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}\,.$$

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x + \frac{1}{x} - w = 2,\ \ y + \frac{1}{y} - w = 2,\ \ z + \frac{1}{x} + w = 2,\ \ y + \frac{1}{z} + w = 2\right\}$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός ρ είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι λύση και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0 .$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}} = 45^{\mathrm{o}}$. Ο κύκλος $\mathrm{C}_{\Gamma}(\Gamma, \Gamma\mathrm{A})$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω $\mathrm{C}_{\mathrm{B}\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_{Γ} στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x + y + z + w = 8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 .$$

Πρόβλημα 3

Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot \mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$. Η παράλληλη από το Ο προς την ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1), του τριγώνου ΑΔΟ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και το κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ στο σημείο Ζ. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(β) Τα τρίγωνα ΟΖΕ και ΟΓΕ είναι ίσα.
(γ) Τα σημεία Γ, Ο, Η είναι συνευθειακά.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \alpha^3+\beta^3=90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha+\beta$ και $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}-\{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda-3)x^2+(\lambda^2+1)x-(11\lambda-18)=0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x+y))=x-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)+f(-x)$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3^{x+1}-x\cdot 3^{x}-4x-1=0.$$

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 $\kappa\alpha\iota$ $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν $\mathrm{B\hat{K}\Gamma}=\mathrm{B\hat{\Lambda}\Gamma}=\mathrm{B\hat{M}\Gamma}$, τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα **ΚΒ· ΚΓ**, **ΛΒ· ΛΓ** και **ΜΒ· ΜΓ** είναι άνισα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στα σημεία Α και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\big(f(x) - f(y)\big) = f\big(f(x)\big) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Μονάδες 5

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Μονάδες 5

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{AM} \ , \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2 \cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ $1^{ο}$.
Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x\left(x-2\right)+11x-10y=2015$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $2^{ο}$
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)-f\left(y-f\left(x\right)\right)=2f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right),$$

για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x-f(x))=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $3^{ο}$
Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\text{ψηφία}}\alpha}$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\alpha\,00\cdots00\,\alpha}$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά.
Να αποδείξετε ότι: “ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33”.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ $4^{ο}$.
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1, \frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Ν) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ΟΝ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$71^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Γ΄ Λυκείου

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$. Το ύψος του $\mathrm{A\Delta}$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{B\Delta Z}$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E. Αν η ευθεία $\mathrm{E\Delta}$ τέμνει την ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ στο K και η ευθεία ZK τέμνει την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $\mathrm{B\Lambda}$.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

- **α.** Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.
- **β.** Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$ και $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B, αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(\mathrm{O}_1,\mathrm{r}_1)$, $c_2(\mathrm{O}_2,\mathrm{r}_2)$ και ισχύει ότι $\mathrm{r}_1<\mathrm{r}_2$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{MA}<\mathrm{MB}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R},$, αν το σύστημα

$$\left\{\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda,\qquad 2x-y=-\lambda\right\}\qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3
Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=a_n-a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=a_1-a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0,ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n$.
2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n>10^3$ και $S_{n+1}\le 8\cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία $\mathrm{A,I,\Lambda,M}$ και $\mathrm{A,I,K,N}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Αν η $\mathrm{A\Delta}$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ που αντιστοιχεί στη κορυφή A, τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση
$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι
$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$
και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Πρόβλημα 4
Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$2x^2-5x-2x\sqrt{x^2-5x}=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Πρόβλημα 3
Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση
$$4x^4+(8+4a)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$
έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $T\Sigma,K\Gamma,NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
1 Νοεμβρίου 2014

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186, \alpha \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{l} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{array}\right\}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A}\Gamma < \mathrm{B}\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $\mathrm{B}\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $\mathrm{A}\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $\mathrm{B}\Delta\mathrm{H}\Theta$, $\mathrm{B}\Delta\mathrm{EK}$ και $\Delta\mathrm{Z}\Theta\mathrm{K}$ είναι εγγράψιμα.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta,\frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma,-\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta,-\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha+\beta=\gamma+\delta$

(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}\,.$$

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη-αρνητικούς ακεραίους x,y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p,q πρώτοι αριθμοί.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ και έστω D,E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
12 Νοεμβρίου 2016

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y = x^2$ και τα σημεία της Α, Β και Γ με τετμημένες α, β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \omega > 0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}} = 45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1) = 1,\ P(2) = 4, P(3) = 9,\ P(4) = 16.$

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{A} = 14^7 + 14^2 + 1$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$f\left(a\right)=0 \text{ και } f\left(f\left(x\right)\right)=xf\left(x\right)+a, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Πρόβλημα 2
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$x^7+x^6+x^5+1=0 \ .$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=36^{\mathrm{o}}$. Ο κύκλος $\mathrm{C}_1\left(\Gamma,\Gamma\mathrm{A}\right)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ και ότι η ΔΓ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 4
Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
10 Νοεμβρίου 2018

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης
$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0 \;,$$
στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πρόβλημα 2
Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot \mathrm{A}$.

Πρόβλημα 3
Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:
$$x + 2y^2 = 3z^3$$
$$y + 2z^2 = 3x^3$$
$$z + 2x^2 = 3y^3$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ (με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο B του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $ΔΓ$ στο σημείο E. Έστω Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.
Να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία $ΑΔ$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου $ΔΒΕ$.
(β) Το σημείο Μ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου $ΟΒΓ$.
(γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$108\left(x-2\right)^4+\left(4-x^2\right)^3=0 \ .$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της ΔΕ προς το μέρος του Ε παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΔ. Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΒΕ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} xy^3=-108 \\ \left(x+y\right)y=-3 \end{matrix}\right\}$.

Πρόβλημα 4
Με κ διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς 2, 3, 4,…,1024 έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του κ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

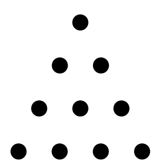
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι και ισχύει $\alpha + \beta = 1000$. Είναι δυνατόν να ισχύει $3\alpha + 5\beta = 3005$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

2. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 6 λευκά, 9 κίτρινα, 12 κόκκινα και 15 πράσινα σφαιρίδια. Να προσδιορισθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να πάρουμε τυχαία έτσι ώστε να εξασφαλισθεί η παρουσία στο δείγμα τουλάχιστον
   Α) 3 λευκών
   Β) 5 κίτρινων
   Γ) 6 κόκκινων
   Δ) 10 πράσινων σφαιριδίων
   (τέσσερα διαφορετικά ερωτήματα).

3. Δέκα σημεία είναι τοποθετημένα σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου όπως στο σχήμα



   Να διαγραφεί ο ελάχιστος αριθμός σημείων έτσι ώστε τα υπόλοιπα να μη σχηματίζουν κανένα ισόπλευρο τρίγωνο.

4. Ποιος από τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{99}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99}\right)$$

και

$$B = \frac{1}{100}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right)$$

είναι μεγαλύτερος και γιατί;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς ν που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός $\dfrac{42}{2\nu+1}$ να είναι ακέραιος.

2. Θεωρούμε οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$ και την προέκταση ΟΓ της πλευράς ΟΑ. Στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΓ και περιέχει το σημείο Β, φέρουμε ευθεία $\mathrm{O\Delta} \perp \mathrm{OA}$ και ευθεία $\mathrm{OE} \perp \mathrm{OB}$. Αν είναι $\widehat{\Gamma\mathrm{OE}} = 4\widehat{\mathrm{AOB}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

3. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $(\gamma-\delta)(\gamma+\delta) \neq 0$ και

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta},$$

να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισούται με 0.

4. Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $\overline{xyzxyz}$, όπου x, y, z είναι ψηφία με $x \neq 0$ διαιρείται με τους αριθμούς 7, 11 και 13.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.

Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2008-4(4x+5y)-48x-60y.$$

Πρόβλημα 2.

Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του a ;

Πρόβλημα 3

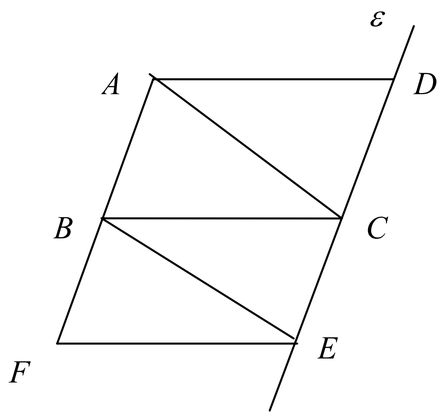
Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ABC και ευθεία ε που περνάει από το C παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον, δίνεται ότι

$$CD=CE=AB.$$

Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF=AB$.

α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).

β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC ;



Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $\mathrm{A}=ababab$, όπου a,b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $\mathrm{A}=ababab$, όπου a,b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2$, $\mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8$, όπου $x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΓ > ΑΒ) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του ΑΗ και η διχοτόμος του ΑΔ.

(α) Αν $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους ΑΗ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 .$$

Μονάδες 2

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11} \right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9} \right).$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,$ έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x;

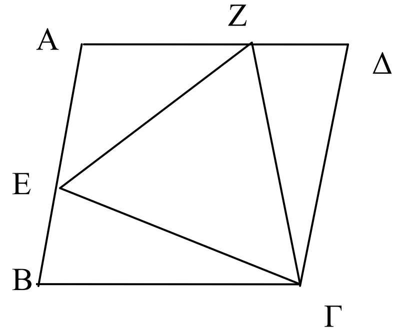
Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $\mathrm{AB} = x$ μέτρα και μήκος $\mathrm{B}\Gamma = y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 5



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011
Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right) \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

Μονάδες 3

(β) Αν ισχύει ότι:
$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$
να βρείτε την τιμή της παράστασης:
$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Μονάδες 2

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=27$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\alpha\gamma\beta}=100\alpha+10\gamma+\beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x+12<5x-1$.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙ-ΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012
Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\ \text{ και }\ \mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}.$$

Μονάδες 2

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma\ \text{ και }\ \alpha\beta\gamma\neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

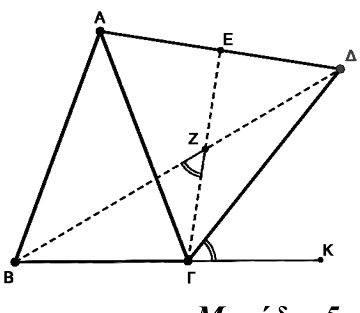
$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$) και οξυγώνιο, το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $\mathrm{A\Delta}$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $\mathrm{B\Gamma}$ και οι $\mathrm{B\Delta}, \mathrm{\Gamma E}$ τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{Z}\Gamma}$ και $\mathrm{K\hat{\Gamma}\Delta}$, είναι ίσες.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right) \text{ και } \mathrm{B}=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία $\mathrm{B\Delta}$ τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$.

(β) Αν το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta E}$ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\omega$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Πρόβλημα 2
Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση ΑΔ, μεγάλη βάση ΒΓ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:
(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda$.
(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ, συναρτήσει του μήκους $\alpha=\mathrm{A\Delta}$.

Πρόβλημα 4
Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}$.

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 390 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}$ *και* $14\frac{2}{7}$ *είναι μεικτοί.*

Πρόβλημα 3.

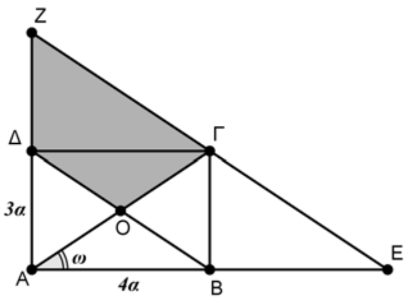
Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ ισούται με το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$\mathrm{AB}=4\alpha\ cm\ ,\ \mathrm{A}\Delta=3\alpha\ cm\ .$$

1.Βρείτε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}$ συναρτήσει της γωνίας ω.
2.Αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}\Gamma=\Gamma\mathrm{Z}=\Gamma\mathrm{E}$.
3.Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.



Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

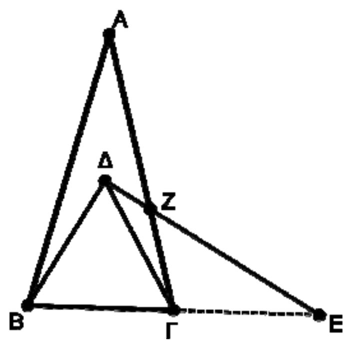
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ και $\beta = 0,\overline{3}$..
(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.
(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \left(3\alpha - 5\beta\right)^{2015} + \left(18\alpha^2 + \beta^2\right)^{2016}$$

Πρόβλημα 2.
Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και $\hat{A} = 30^0$. Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και είναι τέτοιο ώστε $B\Gamma = \Gamma E$. Αν η πλευρά $A\Gamma$ τέμνεται από τη ΔE στο σημείο Z, τότε:
(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $A\hat{B}\Delta$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$.
(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελή.
(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.



Πρόβλημα 4
Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.
(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α, β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha + \beta = 4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης**:**

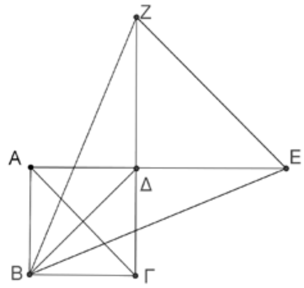
$$\mathrm{A} = \left(2 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{6}{7} - 3\left(\frac{2 \cdot \alpha}{\beta} - \frac{9}{27}\right).$$

Πρόβλημα 2.

Ο θετικός ακέραιος Α έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{B}\Delta$, (δείτε το διπλανό σχήμα).



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$.

Πρόβλημα 2.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Πρόβλημα 3
Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma=2\cdot\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ και $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B}=2\cdot\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma$.

Πρόβλημα 4
Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρείτε πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

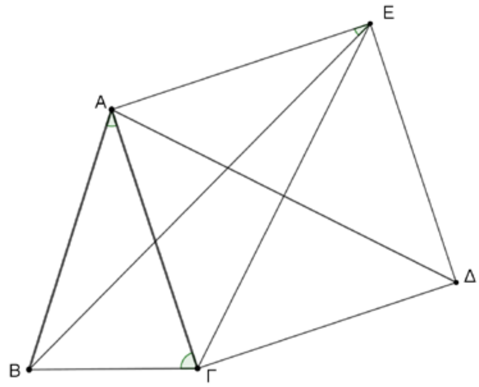
αν δίνεται ότι: $\frac{\alpha}{\beta}=3$.

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}=2\cdot\hat{\mathrm{A}}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.



Πρόβλημα 3
Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας.
Σημείωση: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Πρόβλημα 4
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta,$$

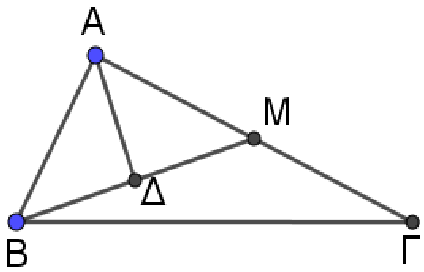
όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Πρόβλημα 2

Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha\ cm$ και $\mathrm{A\Gamma}=2\alpha\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.



(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.

(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{x + 2x + 3x + \ldots + 100x = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101}$.

2. Ποιο από τα κλάσματα

$$K = \frac{33333333331}{33333333334}$$

και

$$\lambda = \frac{22222222221}{22222222223}$$

είναι μεγαλύτερο και γιατί;

3. Δίνεται τραπέζιο **ΑΒΓΔ**, όπου **ΑΔ = α, ΒΓ = β, ΑΒ = α + β** και η πλευρά ΑΒ είναι κάθετος προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΔ. Να υπολογισθεί η απόσταση της κορυφής Α από το μέσο της πλευράς ΓΔ συναρτήσει των α και β.

4. Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ και ε είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha) = (\alpha + \gamma)(\gamma + \varepsilon)(\varepsilon + \beta)(\beta + \delta)(\delta + \alpha);$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνεται ο αριθμός $\mathrm{A} = 2^{92} \cdot 5^{90} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Να βρείτε σε πόσα μηδενικά λήγει ο Α και ποιο είναι το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του.

2. Να προσδιορίσετε τους φυσικούς αριθμούς x, y, z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z}.$$

3. Έστω Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=6. Αν είναι $\mathrm{MK} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{M\Lambda} \perp \mathrm{A\Gamma}$ και $\mathrm{K_1\Lambda_1}$ είναι η προβολή του ΚΛ στη ΒΓ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{KK_1\Lambda_1\Lambda}$.

4. Οι 15 μαθητές μιας τάξης έχουν συνολικά στις τσάντες τους 115 τετράδια. Αν κάθε μαθητής έχει ένα τουλάχιστον τετράδιο, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον μαθητές έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$68^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008
Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-\left(24b+52a\right)^{-2}-\left(72b+156a\right)^{-1}.$$

Πρόβλημα 2

Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα.

Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Πρόβλημα 3

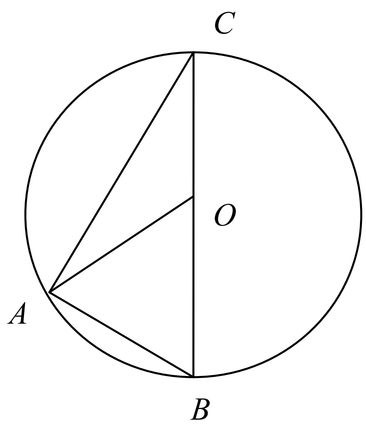
Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και επιπλέον $AB=2\sqrt{7}$ και $AC=6$.

α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E}>\frac{2}{3}.$$



Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A}=abc$, όπου a,b,c ψηφία με $a>0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 ο αριθμός που προκύπτει ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να προσδιορίσετε τον αριθμό Α.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$69^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^{4}\right]^{3}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία με $a\neq 0$, που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β, ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Έστω ο ακέραιος

$$\mathrm{A} = \left[(-1)^{\nu} + (-1)^{2\nu} + (-1)^{3\nu} + (-1)^{4\nu}\right]\cdot \nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b$, όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

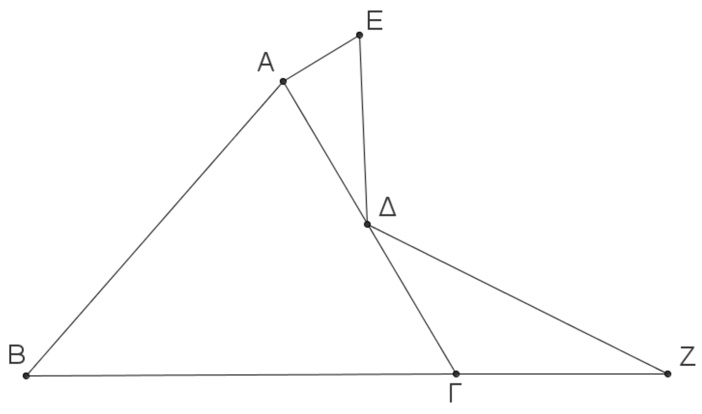
$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\mathrm{A\Gamma} = \beta$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, η ευθεία ΔΕ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΓ , $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 30^0$.

(i) Να βρείτε τη γωνία θ. ***Μονάδες 1***

(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β. ***Μονάδες 4***



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$ ***Μονάδες 2***

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Οι ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\le 10,\ \beta\ge 12 \text{ και } (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ισοσκελές. ***Μονάδες 1***
(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου. ***Μονάδες 2***
(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος ΕΑΒΓΔΕ και εσωτερικά του κύκλου C. ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\mathrm{A}=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $\mathrm{A}-\mathrm{B}=198$, όπου $\mathrm{B}=\overline{\gamma\beta\alpha}=100\gamma+10\beta+\alpha$.

(ii) Η εξίσωση $\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

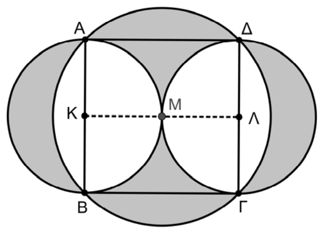
αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$. ***Μονάδες 2***

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{K} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $\mathrm{K} \le 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της. ***Μονάδες 3***

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $\mathrm{K}\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x) = \left(\alpha x^2 + \beta x\right)\left(\gamma x^2 + \delta\right) + 4,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2}, y=3^{-3}.$$

Μονάδες 2

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2
Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.
(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}$.
(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.
(iii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right)\ \text{και}\ Q(x)=a^2x^3+4x^2+dx+e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1)=21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\ \ \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν } x=3^{-3},\ y=3^{-4}.$$

Πρόβλημα 2
Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{5}{2}\left(x^2+1\right)$.

Πρόβλημα 3
Δύο θετικοί ακέραιοι x, y με $x>y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{A\Delta}=\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.
(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = \mathrm{P}(2x) - 19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\dfrac{a}{b}$.

Πρόβλημα 3

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$ και υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{N\Lambda} \perp \mathrm{B\Delta}$.

2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες   ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}\ .$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

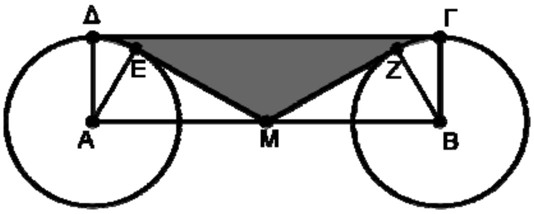
(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256$ ισούται με τον κύβο ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=4\alpha$. Με κέντρα τα σημεία Α , Β και ακτίνα α γράφουμε κύκλους Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ , τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ , το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ .



Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες.

Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

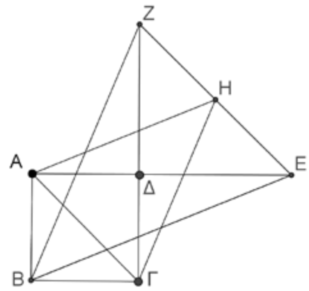
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$77^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3},\ \gamma=-\frac{27}{16}.$$

Πρόβλημα 2



Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{B}\Delta$. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:
(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.
(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ
(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.
Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Πρόβλημα 3
(α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.
(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

Πρόβλημα 4
Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, διαπιστώνει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3}$, $\gamma=-\dfrac{18}{2^3}$, $\delta=\dfrac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2
Μία ομάδα εργατών τελειώνει το $\dfrac{1}{4}$ ενός έργου στο $\dfrac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ιδίας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x)=a(x+2)^2+b(x+3)+c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x>y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{P(x)-P(y)}{x-y}$ είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{A}}=72^\circ$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.
Σημείωση: *Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

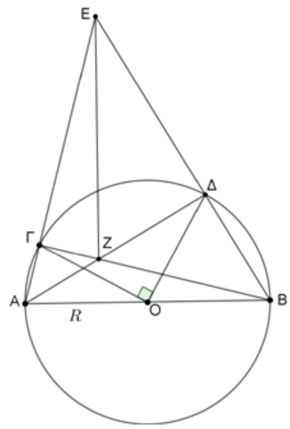
Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma\,,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\beta = (-2)^{-2}$, $\gamma = -\frac{1}{2^3}$.

Πρόβλημα 2
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Πρόβλημα 3
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $\mathrm{AB} = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.
(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$.
(β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{EZ} = 2R$.
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Πρόβλημα 4
Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

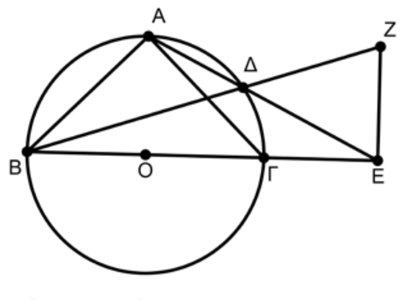
$$\alpha + 9 = (\beta - 3)^2 \qquad \text{και} \qquad \beta + 9 = (\alpha - 3)^2 ,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + \beta^2$.

Πρόβλημα 2
Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Πρόβλημα 3.
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β,
(ii) ο $\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ,
(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\widehat{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\widehat{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z = 90^0$.



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = EZ$.
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$66^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί α και $\alpha + 2$ είναι πρώτοι με $\alpha > 3$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha + 4$ είναι σύνθετος.

2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha + \beta = \lambda$. Να δεχθεί ότι

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}.$$

3. Έστω ΑΒΓ ένα σκαληνό τρίγωνο. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;

4. Έστω Α και Β δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5}. Να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα Α και Β περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$ και η παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha\left|\delta-\gamma\right|+\alpha\left|\delta-\varepsilon\right|+\varepsilon\left|\beta-\alpha\right|+\varepsilon\left|\beta-\gamma\right|}{\left|\beta-\alpha\right|+\left|\beta-\gamma\right|+\left|\delta-\gamma\right|+\left|\delta-\varepsilon\right|}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι: $\beta<\mathrm{K}<\delta$.

(ii) Αν είναι

$$x=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta),\ y=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta),\ z=(\alpha+\delta)(\beta+\gamma),$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς x,y,z.

2. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ υπάρχει σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{M}\mathrm{B}\Gamma}=\widehat{\mathrm{M}\Gamma\mathrm{B}}$ και πάνω στις ΜΒ και ΜΓ υπάρχουν σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ και $\widehat{\mathrm{MA}\Delta}=\widehat{\mathrm{MAE}}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Αν είναι $x,y>0$ και $x^3+y^2\le 64$, να αποδείξετε ότι:

$$x^4+y^3<512.$$

4. Έχουμε κέρματα και χαρτονομίσματα των 1, 10 και 100 ευρώ. Είναι δυνατόν με 1000 ακριβώς από αυτά να σχηματίσουμε το ποσό των 50000 ευρώ;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K}=(x+y)^3-(x-y)^3-6x^2y-y^3$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A}=200004^3-199996^3-24\cdot 200000^2-64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b ισχύει ότι

$$a^2+b^2-2a=2b+ab-4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3-(x-b)^3-x^3=0.$$

.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta}=\alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:

το άθροισμα $\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M}\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί x,y,z είναι τέτοιοι ώστε $x>0, y+1>0, z+2>0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\leq 3.$$

Για ποιες τιμές των x,y,z ισχύει η ισότητα;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0,\ xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α , β , αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{Z\Delta}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A\Lambda}\perp\mathrm{EZ}$. ***Μονάδες 3***

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α. ***Μονάδες 2***

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc}=100a+10b+c$, όπου a,b,c ψηφία με $a\neq 0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α , για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x|=\alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω $A_1,\ B_1,\ C_1$ τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του $A,\ B,\ C$. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2, αντίστοιχα, και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία $A_1,\ A_2$, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία $B_1,\ B_2$ και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2.
Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1),(\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3-y^3=26z^3$$
$$x^2y-xy^2=6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z. ***Μονάδες 3***

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x+2y+3z=8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Μονάδες 2

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α,β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

Μονάδες 3

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Μονάδες 2

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2 = x^2+4\alpha ,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ και ευθεία (ε) που διέρχεται από την κορυφή του A και είναι παράλληλη προς τη πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Δ και έστω E το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή A. Από το A τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την EB η οποία τέμνει τη $\mathrm{B\Delta}$ στο σημείο M και τη $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AB}=\mathrm{BK}=\mathrm{K\Delta}=\mathrm{\Delta A}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α,β,γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha+\beta+\gamma=2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 67^2 .$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$72^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{A}}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο Μ διαφορετικό από το Α στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z}=\hat{\mathrm{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x,y,a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2+(y^2-a^2)x+y(y-a)^2=0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\,.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\ \text{ και }\ \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)\,.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B},\mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2$ και Γ_1,Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_2,\Gamma_1,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_1,\Gamma_2,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2+2a\left(\sqrt{2}-1\right)x+\sqrt{x-2}+3-2\sqrt{2}=0,$$

όπου $x\in\mathbb{R}$ άγνωστος και $a\in\mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x=\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y=\sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \quad \text{και} \quad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right)\leq 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}>\mathrm{B\Gamma}$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma,\mathrm{B\Gamma})$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $\mathrm{B\Gamma}$) τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\mathrm{A},\mathrm{A\Delta})$ (με κέντρο A και ακτίνα $\mathrm{A\Delta}$) τέμνει την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E και τον κύκλο $c_1(\Gamma,\mathrm{B\Gamma})$ στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου $\mathrm{A\Delta Z}$ τέμνει την ευθεία BE στο σημείο M.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM είναι μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a,b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2+4b^2=2a+12b-5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a+b$ και οι τιμές των a,b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\frac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Delta=\Gamma\Delta$. Φέρουμε το ύψος του ΔΕ, όπου Ε σημείο της πλευράς ΑΒ. Έστω Ζ το συμμετρικό της κορυφής Α ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw}=1000x+100y+10z+w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx}=1000w+100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

.Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}}$$, όπου $x>0$ και $x\neq 27$.

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0$ έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{A}=40^\circ$. Έστω $Δ$ το μέσο της πλευράς $ΑΓ$. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $ΑΕΔ$ και $ΔΓΖ$ των οποίων οι κορυφές $Ε$, $Ζ$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την $ΑΓ$ και στο οποίο ανήκει η κορυφή $Β$. Αν η $ΕΔ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Κ$, να αποδείξετε ότι η $ΚΖ$ είναι κάθετη στη $ΒΓ$.

Πρόβλημα 4

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:
$$x^2+4x-9=4|x|.$$

Πρόβλημα 2
Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc}=100a+10b+c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:
$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c$$

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε τετράπλευρο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ ώστε $\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=240^\circ$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{B}},\hat{\Gamma}$ τέμνονται πάνω στην πλευρά $\mathrm{A\Delta}$.

Πρόβλημα 4
Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\frac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από τους δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 2
Έστω $\mathrm{A} = \kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.
(α) Να αποδείξετε ότι ο Α ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακεραίων.
(β) Είναι δυνατόν να είναι ο Α ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Πρόβλημα 3
Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ το άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, το ύψος του είναι ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R.

Πρόβλημα 4
Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3 + \beta^3 = 2\alpha\beta\left(\alpha+\beta\right)$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K} = \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Πρόβλημα 2
Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{50}{3n-2}$ και $\dfrac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.
(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = 2\left(n+1\right) - 3\left(m+2\right) + 7 .$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση: $B = \dfrac{162}{n^2} - \dfrac{m^2}{3721}$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy} = \frac{3z+5y}{yz} = \frac{5x+z}{zx} = \frac{140}{x^2+y^2+z^2}$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 60^\circ$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C\left(\mathrm{O}, R\right)$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\mathrm{B\Delta} = 2\cdot\Delta\Gamma$.
(α) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\hat{\mathrm{O}}\Gamma = 30^\circ$
(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α,β με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2,$ να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

Πρόβλημα 2
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y,ω με $x-2y+\omega>0$, $2x-y+\omega>0$ ισχύουν:

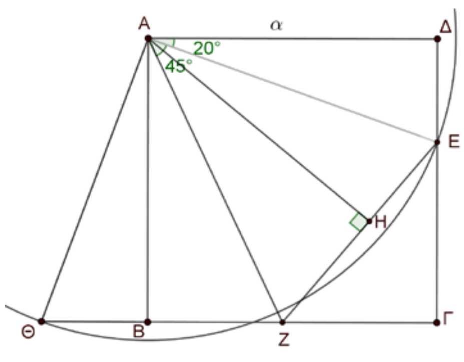
$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1.$

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α,β,γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $2\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E=20^0$ και $E\hat{A}Z=45^0$. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta=ZE$ και να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του α. ***Σημείωση:*** *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

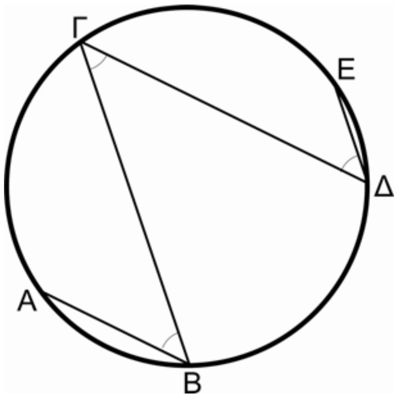
1. Υπάρχει θετικός ακέραιος ν τέτοιος ώστε:
   Α) Ο **3ν** είναι τέλειος κύβος, ο **4ν** τέλεια τέταρτη δύναμη και ο **5ν** τέλεια πέμπτη δύναμη;
   Β) Ο **3ν** είναι τέλειος κύβος, ο **4ν** τέλεια τέταρτη δύναμη, ο **5ν** τέλεια πέμπτη δύναμη και ο **6ν** τέλεια έκτη δύναμη;

2. Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί *x, y, z, w* για τους οποίους ισχύει

$$\sqrt{x-y}+\sqrt{y-z}+\sqrt{z-w}+\sqrt{x+w}=x+2.$$

3. Οι κορυφές Α, Β, Γ, Δ, Ε μιας τεθλασμένης γραμμής βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο όπως στο σχήμα και οι γωνίες **ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ** έχουν μέτρο **45^0**. Να αποδειχτεί ότι

$$\mathbf{AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta E^2.}$$



4. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι ορισμένη στο **R** και για κάθε $x \in R$ ισχύει

$$f(x+1)f(x)+f(x+1)+1=f(x).$$

Να δεχθεί ότι για κάθε $x \in R$ ισχύουν:

1) $f(x) \neq -1$, **2)** $f(x) \neq 0$, **3)** $f(x+4)=f(x)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ " Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)\left(1 - x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ.

2. Θεωρούμε τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = 90^\circ$ και προεκτείνουμε τη χορδή ΑΒ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ=ΑΒ. Ονομάζουμε Δ το σημείο επαφής της εφαπτομένης του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ από το Γ και Κ το ίχνος της κάθετης από το Α προς τη ΒΔ. Να αποδείξετε ότι: ΚΒ= 2ΚΑ.

3. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha+\beta}} \geq \alpha^\alpha \beta^\beta .$$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΓ και ΑΒ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν είναι ΜΚ= x, ΜΛ= y, να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης

$$S = x^2 + y^2$$

και τη θέση του σημείου Μ για την οποία λαμβάνεται αυτό.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες *Καλή επιτυχία*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}\,.$$

Πρόβλημα 2
Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμό. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Πρόβλημα 3
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y,z ισχύει

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0\,,$$

τότε να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+m\le 0\,.$$

Πρόβλημα 4.
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\mathrm{A}+\mathrm{A\Gamma}<\Delta\mathrm{B}+\mathrm{B\Gamma}$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$
$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$. ***Μονάδες 4***

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$. ***Μονάδες 1***

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ , ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} &x^3 + y^3 = 65z^3 \\ &x^2y + xy^2 = 20z^3 \\ &x - y + 2z = 10. \end{aligned}$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC , K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3 . Να αποδείξετε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά , δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο, όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8 \\ x^2+y^2+z^2 &= 26 \\ xy+xz &= \left(yz+1\right)^2. \end{aligned}$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \le \frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2} < 2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Από το σημείο Α φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r = \mathrm{OM}$ (Μ είναι το μέσο της ΒΓ). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Τ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν και το κύκλο (c) στο σημείο $\mathrm{N_1}$ (θεωρούμε $\mathrm{BN} < \mathrm{BM}$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Κ και το κύκλο (c) στο σημείο $\mathrm{K_1}$ (θεωρούμε $\mathrm{\Gamma K} < \mathrm{\Gamma M}$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{BN_1}, \mathrm{\Gamma K_1}$ και ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$72^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a \neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x, y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{Bmatrix} 1+y-\left|x^2-3x+1\right| > 0 \\ y-2+\left|x-2\right| < 0 \end{Bmatrix}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x, y)$, όπου (x, y) λύση του συστήματος (Σ).

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο M. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{M},\mathrm{AM})$ τέμνει την προέκταση της $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \mathrm{AB}$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2+ax+b}$, όπου a,b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5 .$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών, με $x<0$, για τα οποία ισχύει ή ισότητα:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2|=5 .$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right) \leq 4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3| \leq 1$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $\mathrm{AB\Delta}$ $(\mathrm{AB}=\mathrm{A\Delta})$ και $\mathrm{A\Gamma E}$ $(\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AE})$ με $\mathrm{B\hat{A}\Delta}=\mathrm{\Gamma\hat{A}E}=\hat{\theta}<90^\circ$. Οι BE και $\mathrm{\Gamma\Delta}$ τέμνονται στο σημείο K. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ και ABE τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B\hat{A}K}=\mathrm{\Gamma\hat{A}M}$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{13-2x}+\sqrt{13+2x}$$

είναι ακέραιος.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74$^{\text{ος}}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει η ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6a^2, \\ x + y &= 3a, \\ y + z &\geq 3a, \end{aligned}$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο D και τον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{D} = \mathrm{I}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{C}$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3.$$

Πρόβλημα 2
Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$, είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

Πρόβλημα 3
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB=BD=CD$ και με τη γωνία $\hat{A}=75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=4x^2+kx+m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k,m δεν είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1 = (2-x)^2$, $\alpha_2 = 2^2 + x^2, \ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός.
Να προσδιορίσετε:
(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.
(β) Την τιμή του $n, (n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Πρόβλημα 2
Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση
$$10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την ΑΜ και τέμνει τις ΑΓ, ΜΝ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓΝ και τέμνει την ΒΓ στο σημείο Λ. Η ΕΛ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΔΝΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\frac{a}{b} + \frac{17b}{36a}$ να είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
28 Ιανουαρίου 2017

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των παραμέτρων $a,b\in\mathbb{R}, ab\neq 0$, έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2+ax+b=a|x|$$

να έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις.
Είναι δυνατόν η εξίσωση να έχει τρεις διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+\ldots+x_{2017}+2017=0 \\ x_1^4+x_2^4+\ldots+x_{2017}^4=\left(-x_1\right)^3+\left(-x_2\right)^3+\ldots+\left(-x_{2017}\right)^3 \end{array}\right\}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ρητών (a,b) που είναι τέτοια ώστε οι αριθμοί $\dfrac{ab+1}{a}$ και $\dfrac{ab+1}{b}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2018

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2+2x+3} > \frac{x+a}{x^2+x+1}.$$

Πρόβλημα 2
Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y$, $a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5 + y^5$ είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β έτσι ώστε $\beta = 2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{N} \geq 4$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(AB \mathbin{/\!/} ΓΔ)$ για το οποίο ισχύει $ΓΔ = 2AB$. Αν E είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς το B και K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΕ$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΕ$ εφάπτεται στην $ΓΔ$ στο σημείο $Γ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΚ$ εφάπτεται στην $ΓΕ$ στο σημείο $Γ$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$\left||x+8|-3x\right| = \frac{x+7}{6}.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y = y+3z = z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των $x,\ y,\ z$ για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + 6x \cdot \sigma\upsilon\nu(xy) + 9 = 0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D = \left\{(x, y) : -\pi \le x \le \pi, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$.

Πρόβλημα 4
Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Delta} = 90^\circ$. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(\mathrm{A}, \mathrm{AH})$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(\mathrm{O}, R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I} = \Gamma\mathrm{K} = \mathrm{B}\Delta$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)}+\frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)}=\frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις $x_1,\ x_2$ διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1-x_2|=7$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x,y)=x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7,\ x,y\in\mathbb{R}.$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x,y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy=1,\ x,y>0,$ να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x,y)$ και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

Πρόβλημα 3
Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσον όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.
- Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A}=45°$. Ο κύκλος $c_1(Γ,ΑΓ)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Δ,ΓΔ)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Αν η $ΓΔ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο Z, να αποδείξετε ότι τα σημεία B,O,E είναι συνευθειακά και ότι η OZ είναι παράλληλη στην $ΔΕ$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α) Να βρεθεί το $f(1)$.

Β) Να εξετασθεί αν η συνάρτηση

$$g(x) = x^3 + x^2 f(x) - 2x f^2(x) + 3$$

είναι 1-1.

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt{5}.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{5} - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

3. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε **ΑΔ = ΒΓ**, ΑΔ μη παράλληλη προς τη ΒΓ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο Ρ διάφορο του Ο τέτοιο ώστε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΡΒΔ και ΡΑΓ να ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών ΡΒ και ΡΑ αντίστοιχα.

4. Έστω $2\nu > \kappa$ και έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό λ υπάρχουν δείκτες i, j από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, \nu\}$ τέτοιοι ώστε

$$\kappa \mid \alpha_i + \alpha_j - \lambda.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Str.
GR. 106 79 - Athens – HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
Web site: www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ "
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν $\log_{150} 2 = x,\ \log_{150} 3 = y$ τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = 50^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}$$

2. Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έχει τις πραγματικές ρίζες x_1, x_2, και x_3 που ανά δύο είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Να εκφράσετε την παράσταση

$$\Gamma = \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)\left(1 + x_3^2\right)$$

συναρτήσει των κ, λ .

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση:

$$\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}} = \frac{2x^3+1}{3}.$$

4. Αν Ι είναι το έγκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$ με $B\Gamma=2$ και $\widehat{BA\Gamma} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι:

$$IA + IB + I\Gamma \leq 2\sqrt{3}.$$

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν ο z είναι μιγαδικός με $\operatorname{Re}(z) \neq 0$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ και

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι: $|z| = 1$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x^3 + 3xy + y^3 = 1 \\ x^3 - x^2 = y^3 - y^2 \end{array}\right\} \qquad (\Sigma)$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Πρόβλημα 4

. Έστω Σ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες ΑΣ, ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Α′, Β′ και Γ′ αντίστοιχα, ώστε $\Sigma\mathrm{A}' \leq \mathrm{A}\Sigma$, $\Sigma\mathrm{B}' \leq \mathrm{B}\Sigma$ και $\Sigma\Gamma' \leq \Gamma\Sigma$.

Αν θέσουμε $x = (\Sigma\mathrm{AB})$, $y = (\Sigma\mathrm{B}\Gamma)$ και $z = (\Sigma\mathrm{A}\Gamma)$,να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -3x + 6$, $g(x) = mx$, $m \in \mathbb{R}$, και τον άξονα των x ισούται με 3. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 2

Έστω H το ορθόκεντρο και O το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, E και Z τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}, \text{ με } \lambda > 1.$$

Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το H τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \Gamma_1$ και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού n, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. ***Μονάδες 5***

Πρόβλημα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $(f(\mathbb{R}) = \mathbb{R})$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση:

$$f\big(f(f(x)) - f(y)\big) = f(x) - f(f(y)),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$70^{ος}$ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία $a_n,\, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n+kn,\ n\in\mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1=1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας $a_n,\, n\in\mathbb{N}^*$.

.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ με $(a,b)\neq(0,0)$ και $(x,y)\neq(0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2-y^2\right)-2bxy=x\left(a^2-b^2\right)-2aby$$
$$b\left(x^2-y^2\right)+2axy=y\left(a^2-b^2\right)+2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x=a$ και $y=b$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r}=15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2+2xy=\ \ 5$$
$$y^2-3xy=-2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n-\frac{k}{2^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ \ a_1=1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι k, n τέτοιοι ώστε : $a_n=\dfrac{1}{2^{1000}}$.

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu = 1,2,3,\ldots$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha \neq 0$, διαφορά $\omega \neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1} + \cdots + \alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4},\ y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4},\ z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του $\mathrm{A\Delta}, \mathrm{BE}, \mathrm{\Gamma Z}$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $\mathrm{O\Delta}, \mathrm{OE}, \mathrm{OZ}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a,b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:
$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2
Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$$f\left(x^2\right) - y^2 = f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός
$$\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x},$$
όπου $a > 1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014
Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Πρόβλημα 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D = \left\{ (x, y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 8 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x + y,$ όταν $(x, y) \in D$, και τις τιμές των x, y για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k, για την οποία η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $C\colon (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$, προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Πρόβλημα 3

Έστω $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, όπου $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3\left[\left(f(1) - 1 \right)^2 + \left(f(2) - 1 \right)^2 + \ldots + \left(f(k+1) - 1 \right)^2 \right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ τέτοιο, ώστε

$$f(a) \geq k + 2 .$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται κύκλος $c(\mathrm{O}, R)$, δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές AB, $\Gamma\Delta$ και τα μέσα τους K, M, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου OKM τέμνει το κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στα σημεία E, Z (το σημείο E ανήκει στο μικρό τόξο AB). Η EZ τέμνει τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ, N, αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία $\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}$ και N ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{K}\Lambda\mathrm{E}$ εφάπτεται στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a,b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a=b$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB<AC<BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B), θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K,KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB, η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1 = (x-4)^2$, $b_2 = x^2+16, \ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός.
Να προσδιορίσετε:
(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.
(β) Την τιμή του $n, (n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathrm{A} \to R$, όπου $\mathrm{A} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Αν για κάθε $x, y \in \mathrm{A}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f\left(g(x)\right)}{y} \quad (1), \qquad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g\left(f(x)\right)}{y}, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι:
(α) Οι συναρτήσεις f, g είναι '1-1' (ένα προς ένα).
(β) $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Ο κύκλος $c_1(C,AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B,BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F. Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4 - 32x^2 + 257 - \frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} = 0.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \sqrt{n(n+182)}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ του μικρού τόξου ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, την ΑΓ στο Ζ και τον περιγεγραμμένο κύκλο c(O,R) (για δεύτερη φορά) στο Η. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου ΒΔΕ τέμνει την ΒΖ στο Κ και την ΒΓ στο Λ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_2 του τριγώνου ΓΖΗ τέμνει την ΕΓ στο Μ και την ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο, στον οποίο εφάπτεται η ευθεία ΝΖ.

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$f(2xf(y)+y) + f(2x(y+1)) = f(2x+y) + 4xy, \qquad (1)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a) = 1$.

(ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση
$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^4+4\right),$$
για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a.

Πρόβλημα 2
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε
$$f(x+T)=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ $(AB \parallel \Gamma\Delta \text{ και } AB<\Gamma\Delta)$ και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $O\Delta\Gamma$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $M\Delta$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $M\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Πρόβλημα 4
Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p,q,r με $p>q>r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
19 Ιανουαρίου 2019

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$\mathrm{A}=\overline{xxxabc}=x\cdot 10^5+x\cdot 10^4+x\cdot 10^3+a\cdot 10^2+b\cdot 10+c,$$

όπου x,a,b,c ψηφία με $x\neq 0$, διαιρούνται με το 37.

Πρόβλημα 2
Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=|mx+4|+|mx-4|, m>0$ και $y=12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με 20 τ. μ. Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m>0$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}$.

Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}<90^\circ$ και $\mathrm{A\Delta}+\mathrm{B\Gamma}=\Gamma\Delta$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία πραγματικών αριθμών a_n, $n=1,2,3,....$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των μέσων όρων $M_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, $n=1,2,3,...$ να ικανοποιεί την ισότητα

$$M_{n+1}=\frac{M_n+M_{n+2}}{2},\ \text{για κάθε } n=1,2,3,...$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία a_n, $n=1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Πρόβλημα 2

Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.
- Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P(x^2)=(P(x))^2-2P(x)+2,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ$ και έστω c_1 ο κύκλος που το κέντρο του $Δ$ βρίσκεται επάνω στην $ΒΓ$ και περνά από τα σημεία $Β,Ο$. Ο κύκλος c_1 τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο $Ε$ και τον κύκλο c στο σημείο $Ζ$. Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος $c_2(Ο,Δ,Ε)$ του τριγώνου $ΟΔΕ$, τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο $Κ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $Γ,Δ,Ζ,Ο$ βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΟΚ$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

Λύσεις Β΄ Γυμνασίου

1. Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$A=(111-144:12):11+1=(111-12):11+1=99:11+1=9+1=10$$

2. Επειδή ο 100 λήγει σε 0 και τα πολλαπλάσια του 10 λήγουν σε 0, θα πρέπει και ο αριθμός που εκφράζει τα νομίσματα των 2€ να λήγει σε 0. Άρα τα νομίσματα των 2€ θα είναι 5 ή 10 ή 15. Όμως παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να είναι 5 ή 15. Άρα θα είναι 10 . Πράγματι

$$10\cdot 2+8\cdot 10=100.$$

3. Έχουμε:

$$\frac{6}{100}\alpha=\frac{4}{100}\beta \;\; \textit{οπότε}\;\; \alpha=\frac{2}{3}\beta$$. Έτσι έχουμε

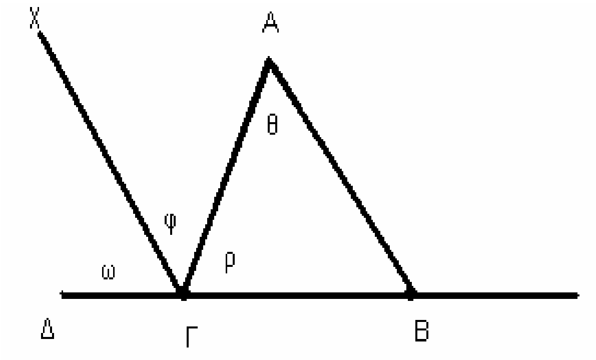
$$\kappa=\frac{9\cdot\frac{2}{3}\beta-3\beta}{6\cdot\frac{2}{3}\beta-\beta}=\frac{6\beta-3\beta}{4\beta-\beta}=\frac{3\beta}{3\beta}=1$$

4. Αφού η Γx είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Gamma}\Delta$ θα ισχύει $\omega=\phi$. Επειδή Γx//ΑΒ θα ισχύει $\phi=\theta$ και αφού

ΑΒ=ΒΓ θα είναι $\theta = \rho$. Άρα $\omega = \phi = \theta = \rho$, και

$\omega + \phi + \rho = 180^0$, οπότε $\omega = \phi = \rho = 60^0$

Άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^0$.



Λύσεις Γ΄ Γυμνασίου

1. Έχουμε

$$\Delta\hat{\Gamma}\text{E} = \text{A}\hat{\Gamma}\text{B} = 180^0 - 3x - 4x = 180^0 - 7x$$

$$\Delta\hat{\text{E}}\Gamma = \text{H}\hat{\text{E}}\text{Z} = 180^0 - 2x - 6x = 180^0 - 8x$$

Έτσι, έχουμε, στο τρίγωνο ΓΔΕ:

$\Delta\hat{\Gamma}\text{E} + \Delta\hat{\text{E}}\Gamma + \hat{\Delta} = 180^0$ οπότε

$180^0 - 7x + 180^0 - 8x + 5x = 180^0 \Leftrightarrow 10x = 180^0 \Leftrightarrow x = 18^0.$

2. $\text{A} = \alpha^2 \cdot (-2\beta)^2 \cdot (-\frac{\gamma}{2})^2 = \alpha^2 \cdot 4\beta^2 \cdot \frac{\gamma^2}{4} = \alpha^2\beta^2\gamma^2 =$

$= (\alpha\beta\gamma)^2 = 10^2 = 100.$

3. Έστω $\text{A}=27p+1$. Για p=2 έχουμε $\text{A}=27\cdot 2+1=55=5\cdot 11$, ενώ για p≠2 ο 27p είναι περιττός οπότε ο Α είναι άρτιος.

4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2}a\beta^{-1}+\frac{10}{3}a^{-1}\beta\right)^2=9, \text{ οπότε}$$

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2+10=9 \text{ οπότε}$$

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2=9-10=-1, \textit{ που δεν ισχύει.}$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Α΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090 \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha\ge 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha\ge 20 \Rightarrow \beta>20 \Rightarrow \beta\ge 21$$

$$\gamma>\beta\ge 21 \Rightarrow \gamma>21 \Rightarrow \gamma\ge 22$$

$$\delta>\gamma\ge 22 \Rightarrow \delta>22 \Rightarrow \delta\ge 23$$

$$\varepsilon>\delta\ge 23 \Rightarrow \varepsilon>23 \Rightarrow \varepsilon\ge 24$$

Συνεπώς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon \geq 110$, άτοπο λόγω της (1). Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x+3\lambda=\lambda^3+2\lambda x-2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x-2\lambda x=\lambda^3-3\lambda-2 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\lambda^2-2\lambda\right)=\lambda^3-3\lambda-2$$

$$\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\left(\lambda-2\right)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \;\; \acute{\eta} \;\; \lambda=2$$

1. Αν λ=0 είναι αδύνατη
2. Αν λ=2 είναι αόριστη
3. Αν λ≠0 και λ≠2 τότε

$$x=\frac{\lambda^3-3\lambda-2}{\lambda^2-2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda\left(\lambda-2\right)} \Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

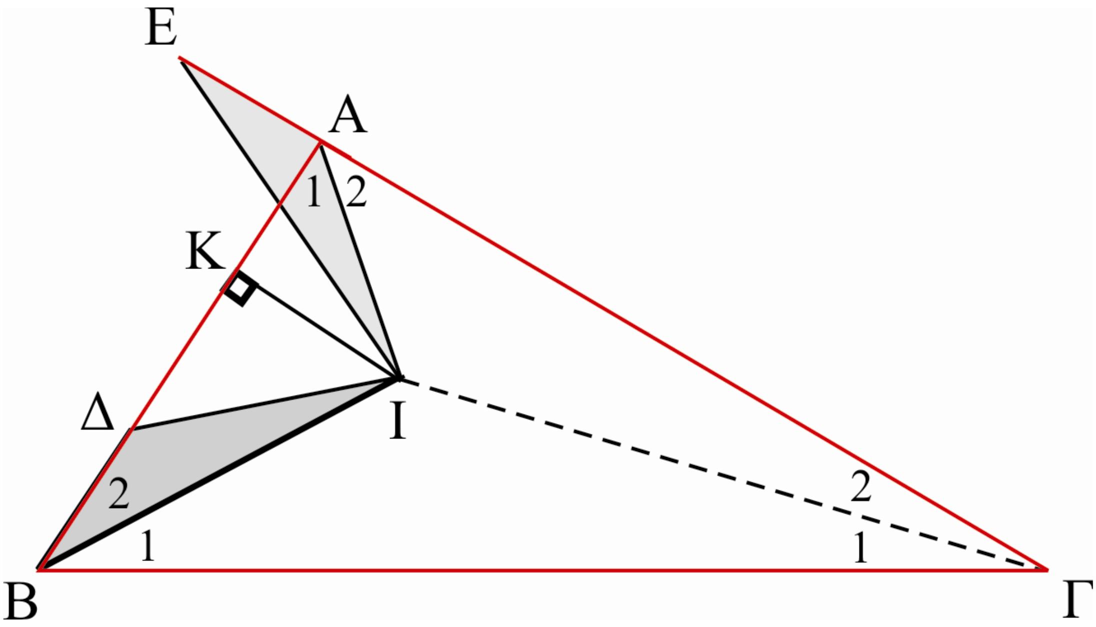
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+2\frac{\alpha}{\gamma}+2\frac{\gamma}{\beta}+2\frac{\beta}{\alpha} \geq 3\frac{\alpha}{\gamma}+3\frac{\gamma}{\beta}+3\frac{\beta}{\alpha}, \text{ αρκεί}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0, \text{ αρκεί}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν ΓΕ=α τότε ΑΕ=α-β=ΒΔ και ΓΙ η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\triangle}{\mathrm{I\Gamma E}}=\overset{\triangle}{\mathrm{I\Gamma B}}$ διότι ΙΓ=ΙΓ, ΓΕ=ΓΒ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ άρα $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1$, ΙΕ=ΙΒ.

Άρα $\overset{\triangle}{\mathrm{IAE}}=\overset{\triangle}{\mathrm{IB\Delta}}$ διότι ΒΔ=ΑΕ, ΙΕ=ΙΒ και $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}_2$, άρα ΙΑ=ΙΔ.

Β΄ τρόπος

Αρκεί το Ι να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Αν δηλαδή ΙΚ⊥ΑΔ, αρκεί ΚΑ=ΚΔ. Πράγματι ΚΑ=τ–α
και ΚΔ=|ΒΚ–ΒΔ|=|τ–β– (α–β)|=|τ–α|=τ–α, αφού τ>α.

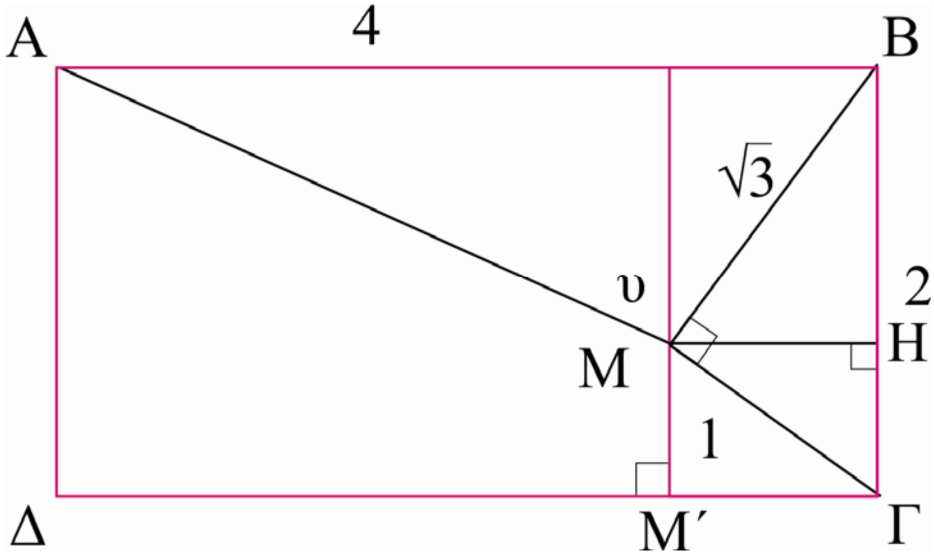
<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Β΄ τάξη Λυκείου

1. Αν x_1, x_2 οι ρίζες , τότε

$x_1 + x_2 = 2006\kappa + 1 \quad (1)$ και $x_1 \cdot x_2 = 2007 \quad (2)$.

Από την (2) προκύπτει ότι οι x_1, x_2 θα είναι περιττοί. Αλλά τότε το άθροισμα τους $x_1 + x_2$ θα είναι άρτιος, οπότε δεν θα ισχύει η (1).

2.



Παρατηρούμε ότι $\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2 = 4 = 2^2$ οπότε το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο στο Μ. Επειδή

$$\text{ΜΓ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} \;\acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\; \text{Μ}\hat{\text{Β}}\text{Γ} = 30^0,$$

οπότε $\text{Μ}\hat{\Gamma}\text{Β} = 60^0 \;\kappa\alpha\iota\; \text{Μ}\hat{\Gamma}\Delta = 30^0$. Έστω

$MM' \perp \Delta\Gamma$, τότε $MM' = \frac{1}{2}$ άρα $\upsilon = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{MAB}$ είναι $E = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 3$..

β΄ τρόπος

$MB^2 = B\Gamma \cdot BH$ οπότε $3 = 2 \cdot \upsilon$ άρα $\upsilon = \frac{3}{2}$

3. Είναι

$$\kappa = (2+2^2+2^3+2^4)+2^4(2+2^2+2^3+2^4)+...+2^{2004}(2+2^2+2^3+2^4) =$$

$$= 30(1+2^4+2^8+...+2^{2004}) = \pi o\lambda.30$$

4. α) Από τη γνωστή ανισότητα: $\frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta}$ όπου α, β θετικοί με $\alpha \neq \beta$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}{2} > \sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{6}$$

Οπότε $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} > 2\sqrt[6]{6}$.

Αρκεί λοιπόν

$$2\sqrt[6]{6} \geq \sqrt[3]{19}, \quad \acute{\eta} \quad 2^6 \cdot 6 \geq 19^2, \quad \acute{\eta} \quad 384 \geq 361$$

που ισχύει.

β) Αν $\lambda = \dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ τότε

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \ \textit{οπότε}\ \lambda^2 < 2.$$

Η εξίσωση για $x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $x^2 - 2\lambda x + 2 = 0$ με $\Delta = 4(\lambda^2 - 2) < 0$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

<u>β΄ τρόπος</u>

$$x^2 - 2\lambda x + 2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda^2 + 2 =$$

$$= (x-\lambda)^2 + (2-\lambda^2) \geq 2 - \lambda^2 > 0$$

<u>ΛΥΣΕΙΣ</u> Γ΄ τάξη Λυκείου

1. Για $x = 0$ έχουμε $f(f(y)) = -f(y)\ \textit{για κάθε}\ y \in \mathbb{R}$.
Για $y = 0$ έχουμε $f(f(x)) = x - f(0)\ \textit{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}$.
Άρα

$$f(f(x)) = -f(x)\ \textit{και}\ f(f(x)) = x - f(0),\ \textit{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}$$

Επομένως
$-f(x) = x - f(0)$ ή

$f(x) = f(0) - x \quad (1)$ και $f(-x) = f(0) + x \quad (2),\ \textit{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}$

Οπότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) + f(-x) = 2f(0),\ \textit{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι σταθερή.

2. Έστω ότι η εξίσωση έχει μια ακέραια λύση ρ. Τότε

$$3^{\rho+1}-\rho\cdot 3^{\rho}-4\rho-1=0 \Rightarrow 3^{\rho}(3-\rho)=4\rho+1$$

$$\Rightarrow 3^{\rho}=\frac{4\rho+1}{3-\rho}\ (\text{αφού προφανώς } \rho\neq 3) \Rightarrow \frac{4\rho+1}{3-\rho}>0$$

$$\Rightarrow (4\rho+1)(\rho-3)<0 \Rightarrow -\frac{1}{4}<\rho<3 \Rightarrow \rho\in\{0,1,2\}.$$

Όπως βρίσκουμε εύκολα, οι αριθμοί ρ=0 και ρ=1 δεν είναι λύσεις της εξίσωσης. Ο αριθμός ρ=2 όμως είναι λύση της εξίσωσης. Άρα η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση ρ=2.

3. Επειδή

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(\overline{z_1}z_2\right)=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+\overline{z}_2z_1=|z_1+z_2|^2$$

αρκεί να δείξουμε ότι: $\dfrac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\dfrac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}\geq|z_1+z_2|^2$.

Πράγματι

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\eta\mu^2\theta}=(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)\left(\left(\frac{|z_1|}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2+\left(\frac{|z_2|}{\eta\mu\theta}\right)^2\right)\geq\left(|z_1|+|z_2|\right)^2\geq|z_1+z_2|^2$$

4. Από την ισότητα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ έχουμε ότι τα Κ, Λ, Μ βρίσκονται στο ίδιο τόξο χορδής ΒΓ. Έστω

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma=\phi.$$

Αν ΚΒ· ΚΓ= ΛΒ· ΛΓ= ΜΒ· ΜΓ, τότε

$$\frac{1}{2}\mathrm{KB}\cdot\mathrm{K}\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\Lambda\mathrm{B}\cdot\Lambda\Gamma\,\eta\mu\phi=\frac{1}{2}\mathrm{MB}\cdot\mathrm{M}\Gamma\,\eta\mu\phi$$

$$\Rightarrow (\mathrm{KB}\Gamma)=(\Lambda\mathrm{B}\Gamma)=(\mathrm{MB}\Gamma).$$

Αυτό σημαίνει ότι τα Κ, Λ, Μ θα βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη στην ΒΓ, άτοπο αφού το μέγιστο πλήθος κοινών σημείων ευθείας και κύκλου είναι 2.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
$68^{ου}$ ΘΑΛΗΣ
24 Νοεμβρίου 2007

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $\mathrm{A}=(200:8+12\cdot 100)+\left[200:(8+2)+762\right]\cdot\left[(-1)^{13}+(-1)^{12}+(-1)^{2007}\right]^2$

$=(25+1200)+(200:10+762)\cdot\left[(-1)+1+(-1)\right]^2$

$=1225+(20+762)\cdot(-1)^2$

$=1225+782\cdot 1=2007.$

2. Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή $\text{ΕΚΠ}\left[6,8,10\right]=120$, έπεται ότι $\omega\in\{120,240,360,480,...\}$ και αφού $300<\omega<400$, θα είναι $\omega=360.$
Αν x,y,z είναι ο αριθμός των μαθητών της Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}=\lambda \text{ και } x+y+z=360.$$

Άρα είναι

$$x=5\lambda, y=4\lambda, z=3\lambda$$

$$\text{και } 5\lambda+4\lambda+3\lambda=360 \Leftrightarrow 12\lambda=360 \Leftrightarrow \lambda=30.$$

Άρα είναι: $x=5\cdot 30=150,\ y=4\cdot 30=120,\ z=3\cdot 30=90.$

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200\cdot 3=600$ ευρώ.
Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200\cdot\dfrac{10}{100}=20$ κιλά, οπότε του έμειναν

$$200-20=180 \text{ κιλά.}$$

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600+600\cdot\frac{20}{100}=720 \text{ ευρώ.}$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720:180=4$ ευρώ.

4. (α) Αν $x=\mathrm{B\Gamma}$, $y=\mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{AE}=\upsilon$, τότε $x=2y$ και

$$\frac{(x+y)\upsilon}{2}=\mathrm{E}=(\mathrm{AB\Gamma\Delta})\Leftrightarrow 3y\cdot\upsilon=2\mathrm{E}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=\frac{2\mathrm{E}}{3}\Leftrightarrow y\cdot\upsilon=200cm^2.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta})=\frac{1}{2}y\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot 200cm^2=100cm^2.$$

(β) $(\mathrm{ABK\Gamma})=2(\mathrm{AB\Gamma})=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2y\cdot\upsilon=2(y\cdot\upsilon)=2\cdot 200=400cm^2.$

Διαφορετικά

Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει καθέτους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$(\text{ΑΒΚΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΚ} = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2\upsilon = 2(y \cdot \upsilon) = 2 \cdot 200 = 400cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $$\mathrm{A} = -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2\right] : (-2)^4 = -\left[2^8 : 4^2 + 4^2\right] : 2^4$$

$$= -\left[2^8 : \left(2^2\right)^2 + 4^2\right] : 2^4 = -\left(2^8 : 2^4 + 4^2\right) : 2^4$$

$$= -\left(2^4 + 4^2\right) : 2^4 = -32 : 16 = -2.$$

$$\mathrm{B} = -(x-3) - 3(y-4) - \left[x(y-2) - y(x+3)\right]$$

$$= -x + 3 - 3y + 12 - (xy - 2x - yx - 3y)$$

$$= -x - 3y + 15 - xy + 2x + xy + 3y = x + 15.$$

$$\mathrm{A} > \mathrm{B} \Leftrightarrow -2 > x + 15 \Leftrightarrow -x > 17 \Leftrightarrow x < -17.$$

2. (α) $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}x = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΒΓ και ε).
Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και ΒΓ προκύπτει ότι $\mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 40^\circ$ προκύπτει ότι

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \hat{\Gamma} = 70^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = 180^\circ - 2\cdot 70^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \mathrm{Z}\hat{\mathrm{A}}x = 40^\circ.$$

(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της ΑΓ, το τρίγωνο ΚΑΓ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΚΓ, οπότε η ΚΕ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΚΓ. Άρα έχουμε

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z}.$$

Επειδή είναι $\varepsilon \parallel \mathrm{B}\Gamma$ θα έχουμε

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z},$$

οπότε θα είναι και

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K},$$

οπότε το τρίγωνο ΚΑΖ είναι ισοσκελές με ΚΑ = ΑΖ .

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0,1,4,5,6,9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b \in \{0,1,4,5,6,9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b \in \{1,5,9\}$.

Επειδή ο Α διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:

$$3a + 2b = \text{πολλαπλάσιο του } 9. \qquad (1)$$

- Για $b=1$ λαμβάνουμε $3a+2=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=5$ λαμβάνουμε $3a+10=\pi o\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=9$ λαμβάνουμε $3a+18=\pi o\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a\in\{3,6,9\}$. Άρα είναι $\mathrm{A}=33399$ ή $\mathrm{A}=66699$ ή $\mathrm{A}=99999$.

4. **(α)** Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R=\mathrm{B}\Gamma=\alpha$. Επιπλέον $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\Gamma=2\cdot 75^\circ=150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAE}\Gamma\right)=\pi\alpha^2\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}=\frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\hat{\Gamma}=75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες ΑΔ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΓ) και $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=90^\circ-\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma=75^\circ$, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $\mathrm{OA}\perp\mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta\parallel\mathrm{B}\Gamma$ θα είναι και $\mathrm{OA}\perp\mathrm{B}\Gamma$, οπότε η ΟΑ περνάει από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Από το τρίγωνο ΟΜΓ έχουμε

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{O}\Gamma^2-\mathrm{M}\Gamma^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{OM}^2=\frac{3\alpha^2}{4}\Leftrightarrow\mathrm{OM}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι $\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=\alpha\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$\left(\mathrm{AB}\Gamma\right)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\left(\alpha+\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\alpha^2\left(2+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\left\{\begin{array}{l} xy=(x-50)(y+40) \\ xy=(x+100)(y-20) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 40x-50y=2000 \\ -20x+100y=2000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=100 \\ y=20 \end{array}\right\}.$$

2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0,$$

οπότε έχουμε

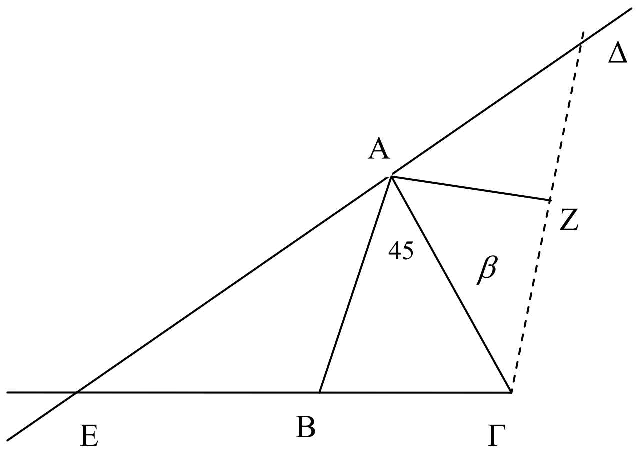
$$\mathrm{A}=\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\beta^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\alpha-\beta)(\gamma^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+(\gamma-\alpha)\beta^2+(\alpha-\beta)\gamma^2+(\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma))}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}==-\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}=1.$$

3.



(α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ = *β*, $\Gamma\Delta=\sqrt{\beta^2+\beta^2}=\beta\sqrt{2}$ και ύψος $\mathrm{AZ}=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{\beta\sqrt{2}}{2}$. Άρα έχει εμβαδόν

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\frac{\beta+\beta\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{2}}{2}=\frac{\beta^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}.$$

(β) Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΔΓ είναι όμοια, οπότε, αν $EA = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x + \beta \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}-1\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta\left(\sqrt{2}+1\right).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$\left(x^3 + y^2\right)^2 + 3\left(x^3 + y^2\right) + 2 = 42$$

$$\left(x^3 + y^2 + 1\right) \cdot \left(x^3 + y^2 + 2\right) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως $x^3 + y^2 + 1$ και $x^3 + y^2 + 2$, είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$ και γινόμενο

$$42 = 1 \cdot 41 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$
$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$
$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$
$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις $(1), (2), (3)$ είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x = 1 \text{ και } y = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x = 1$ και $y = 2$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\underbrace{x^6-2x^3+1}+\underbrace{x^4-2x^2y^2+y^4}+\underbrace{y^4-2y^2+1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1\right)^2+\left(x^2-y^2\right)^2+\left(y^2-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3-1=0 \text{ και } x^2-y^2=0 \text{ και } y^2-1=0\right).$$

$$\Leftrightarrow \left(x=1 \text{ και } y=1\right) \text{ ή } \left(x=1 \text{ και } y=-1\right)$$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\kappa\mu=0 \Leftrightarrow \lambda^2=4\kappa\mu .$$

Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι: $x_1=x_2=\dfrac{-\lambda}{2\kappa}$

Ο αριθμός $4\kappa\mu$ είναι άρτιος. Άρα και ο λ^2 είναι άρτιος, οπότε ο λ είναι άρτιος.
Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο λ (δεδομένου ότι είναι μονοψήφιος θετικός ακέραιος) είναι: $\lambda=2$ ή $\lambda=4$ ή $\lambda=6$ ή $\lambda=8$.

Αν $\lambda=2$ τότε: $4=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=1$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$\kappa=1 \text{ και } \mu=1.$$

Αν $\lambda=4$ τότε: $16=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=4$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=1 \text{ και } \mu=4) \text{ ή } (\kappa=4 \text{ και } \mu=1) \text{ ή } (\kappa=2 \text{ και } \mu=2).$$

Αν $\lambda=6$ τότε: $36=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=9$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=1 \text{ και } \mu=9) \text{ ή } (\kappa=9 \text{ και } \mu=1) \text{ ή } (\kappa=3 \text{ και } \mu=3).$$

Αν $\lambda=8$ τότε: $64=4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu=16$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa=2 \text{ και } \mu=8) \text{ ή } (\kappa=8 \text{ και } \mu=2) \text{ ή } (\kappa=4 \text{ και } \mu=4).$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα (κ,λ,μ) είναι:

$$(1,2,1),\ (1,4,4),\ (2,4,2),\ (1,6,9),\ (3,6,3),\ (2,8,8),\ (4,8,4).$$

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.
Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

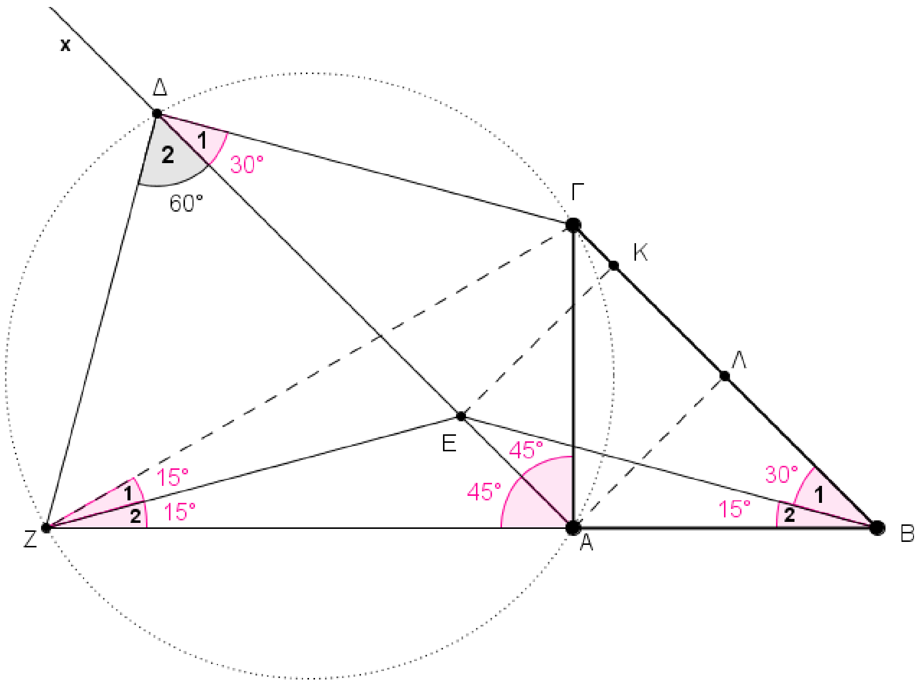
$$x^2+2x+1=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-1,$$

$$x^2+4x+4=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-2,$$

$$x^2+6x+9=0 \text{ με διπλή λύση } x_1=x_2=-3.$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\text{ΒΓ}=\text{ΓΔ}=\text{ΔΕ}=\text{ΒΕ} \qquad (1)$$



Θεωρούμε $ΑΛ$ και $ΕΚ$ κάθετες στη $ΒΓ$.
Τότε $ΑΛ = ΕΚ$ (διότι $ΑΛΚΕ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).
Η $ΑΛ$ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, οπότε $ΑΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα $ΑΛ = ΕΚ = \frac{ΒΓ}{2} \overset{(1)}{=} \frac{ΒΕ}{2}$. Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΕΚ$, έχουμε:

$$ΕΚ = \frac{ΒΕ}{2} \text{ οπότε } \hat{Β}_1 = 30^o.$$

Από το ρόμβο $ΒΓΔΕ$ έχουμε $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = 30^o$ και επειδή $Γ\hat{Δ}Ζ = 90^o$ έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{Δ}_2 = 60^o} \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο $ΑΓΔΖ$ είναι εγγράψιμο (διότι $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90^o$) και η $ΑΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Άρα το $Δ$ είναι μέσο του τόξου $ΓΖ$, οπότε

$$\boxed{ΔΓ = ΔΖ \overset{(1)}{=} ΔΕ} \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο.

(β) Προφανώς η $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Α}Ζ$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $ΖΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Γ\hat{Ζ}Α$.
Εφόσον το τρίγωνο $ΔΕΖ$ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει $ΕΖ = ΕΒ$ και επειδή $\hat{Β}_2 = 15^o$, θα ισχύει:

$$\hat{Ζ}_2 = 15^o \qquad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΔΖ έχουμε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \hat{\Delta}_1 = 30^o$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{Z}}_1 = 15^o$.

4. Για $xyz \neq 0$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z}+\frac{2yz}{x}=70,\ \frac{7yz}{x}+\frac{4zx}{y}=256,\ \frac{5zx}{y}+\frac{6xy}{z}=52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z}=u,\ \frac{yz}{x}=v,\ \frac{zx}{y}=w$$

γίνεται

$$\left.\begin{cases} 3u+2v=70 & (1)\\ 7v+4w=256 & (2)\\ 5w+6u=52 & (3)\end{cases}\right\}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u+v+w)=378 \Leftrightarrow.$$

$$u+v+w=42\ . \qquad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v+4(42-u-v)=256$$

$$\Leftrightarrow -4u+3v=88. \qquad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε $u=2,\ v=32$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $w=8$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z}=2,\ \frac{yz}{x}=32,\ \frac{zx}{y}=8 \qquad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz=2\cdot 8\cdot 32\ . \qquad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{matrix} 32x^2=2\cdot 8\cdot 32\\ 8y^2=2\cdot 8\cdot 32\\ 2z^2=2\cdot 8\cdot 32\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2=16\\ y^2=64\\ z^2=256\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=\pm 4\\ y=\pm 8\\ z=\pm 16\end{matrix}\right\},$$

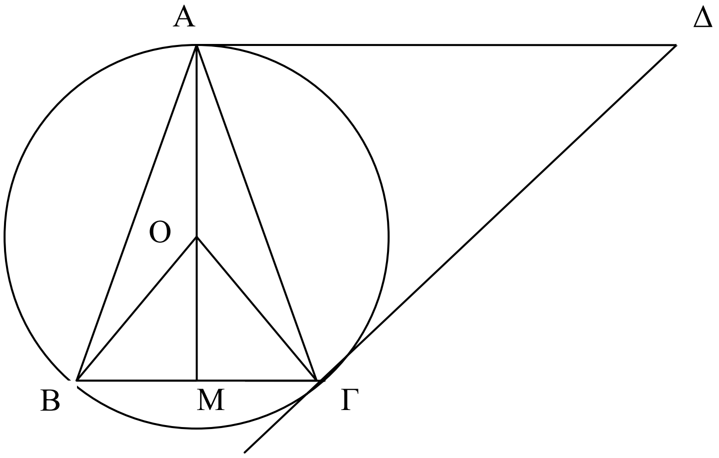
οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

$$(x,y,z)=(4,8,16)\text{ ή }(-4,-8,-16)\text{ ή }(4,8,-16)\text{ ή }(-4,-8,16)$$

$$\text{ή }(4,-8,-16)\text{ ή }(-4,8,16)\text{ ή }(4,-8,16)\text{ ή }(-4,8,-16).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1.



(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ισοσκελή ΄(ΔΑ = ΔΓ, ως εφαπτόμενες από το Δ στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$, ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = B\Gamma = \alpha$.

Έστω η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Μ. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ και ΑΒ = ΑΓ η ΟΑ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ. Άρα είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο ΑΜΓ έχουμε $AM = \alpha\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$A\Gamma^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια ($\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta$), θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow A\Delta = \alpha\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Άρα είναι

$$\left(AB\Gamma\Delta\right) = \frac{\alpha + \alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} \cdot \frac{\alpha\left(2+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(9+5\sqrt{3}\right)}{4}$$

2. **(α)** Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\left\{\begin{matrix} 8\lambda - 2\left(\mu+4\right) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4\cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{matrix}\right\}.$$

(β) Για λ=2 και μ=3 η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$2x^3-7x-2=(x-2)(2x^2+4x+1)$$
$$3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2).$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{2x^2+4x+1}{3x+2}=\frac{17}{8},\quad x\in\mathbb{R}-\left\{2,-\frac{2}{3}\right\}.$$
$$\Leftrightarrow 16x^2-19x-26=0,\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-\frac{13}{16},\ x\in\mathbb{R}-\left\{2,\ -\frac{2}{3}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{13}{16}.$$

3. Για $x=y=0$ από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:

$$f\left(f(0)-f(0)\right)=f\left(f(0)\right)-0$$
$$\Leftrightarrow f(0)=f\left(f(0)\right) \qquad (2)$$

Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου y το $f(x)$ έχουμε:

$$f\Big(f(x)-f\big(f(x)\big)\Big)=f\left(f(x)\right)-f(x) \qquad (3)$$

Αν τώρα στη (3) θέσουμε $x=0$ έχουμε:

$$f\Big(f(0)-f\big(f(0)\big)\Big)=f\left(f(0)\right)-f(0)$$

και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$.

Θέτοντας στην (1) όπου $x=0$, έχουμε:

$f\left(f(0)-f(y)\right)=f\left(f(0)\right)-y$ και δεδομένου ότι $f\left(f(0)\right)=f(0)=0$,

καταλήγουμε στη σχέση

$$f\left(-f(y)\right)=-y. \qquad (4)$$

Θέτοντας στην (1) όπου y το x έχουμε:

$$f\left(f(x)-f(x)\right)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow f(0)=f\left(f(x)\right)-x \Leftrightarrow$$
$$f\left(f(x)\right)=x \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου y το $f(x)$, έχουμε:

$$f\Big(-f\big(f(x)\big)\Big)=-f(x)$$

και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-x)=-f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

δηλαδή η f είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε $x=\dfrac{a+b}{a-b}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{b}=\frac{x+1}{x-1} \qquad (1)$$

(είναι $x \neq 1$, αφού $b \neq 0$). Ομοίως, αν θέσουμε $y = \dfrac{b+c}{b-c}$, $z = \dfrac{c+a}{c-a}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1} \tag{2}$$

και $$\frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1}\ . \tag{3}$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$0 \le (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \ge 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \ge 2.$$

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 1 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2008

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4$$

Λύση

$$A = 4^2 \cdot 25^2 + 2008 : 4 + (3^3 - 5^2) \cdot 249 - 10^4 = \left(4 \cdot 25\right)^2 + 502 + \left(27 - 25\right) \cdot 249 - 10^4$$

$$= 100^2 + 502 + 2 \cdot 249 - 10000 = 10000 + 502 + 498 - 10000 = 1000$$

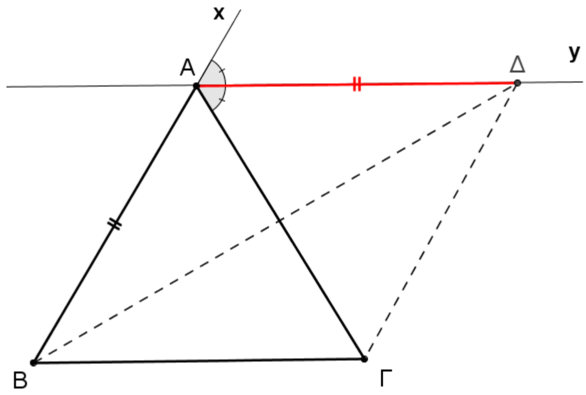
2. Στο διπλανό σχήμα η ευθεία $A y$ είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$.

Δίνεται ακόμη ότι

$B\hat{A}\Gamma = 62^\circ$ και ΑΒ = ΑΔ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να εξηγήσετε γιατί η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή η $A y$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ θα είναι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}x$. Όμως είναι $\Gamma\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}x = 180^0 - B\hat{A}\Gamma = 180^0 - 62^0 = 118^0$, οπότε καθεμία από τις γωνίες $\Gamma\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}x$ είναι 59°.

Επειδή είναι $A y \parallel B\Gamma$ έχουμε τις ισότητες γωνιών

$$\hat{B} = \Delta\hat{A}x = 59^0 \text{ και } \hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta = 59^0.$$

(β) Επειδή είναι ΑΒ = ΑΔ. έπεται ότι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}B. \quad (1)$$

Λόγω της παραλληλίας των ευθειών ΒΓ και $A y$ έχουμε ότι

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}\Gamma,$$

οπότε η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$.

3. Αν για το θετικό ακέραιο αριθμό α ισχύει: $\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστα σης

$$\mathrm{A} = \alpha + 5(4+\alpha) + 3(\alpha - 4) + 1919 \ .$$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{21}{5} < \frac{42}{\alpha} < \frac{21}{4} \Leftrightarrow \frac{42}{10} < \frac{42}{\alpha} < \frac{42}{8} \Leftrightarrow 8 < \alpha < 10,$$

οπότε θα είναι $\alpha = 9$, αφού α θετικός ακέραιος. Άρα είναι:

$$\mathrm{A} = 9 + 5(4+9) + 3(9-4) + 1919 = 9 + 5\cdot 13 + 3\cdot 5 + 1919 = 2008 .$$

4. Ένα Γυμνάσιο συμμετέχει στην παρέλαση για την επέτειο μιας Εθνικής Εορτής με το 60% του αριθμού των αγοριών και το 80% του αριθμού των κοριτσιών του. Τα αγόρια που συμμετέχουν, αν παραταχθούν σε τριάδες, τότε δεν περισσεύει κανείς, ενώ, αν παραταχθούν σε πεντάδες ή επτάδες, τότε και στις δύο περιπτώσεις περισσεύουν από τρεις**.** Όλα τα αγόρια του Γυμνασίου είναι περισσότερα από 100 και λιγότερα από 200. Αν το 80% των κοριτσιών είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό που αντιστοιχεί στο 60% του αριθμού των αγοριών, να βρείτε το συνολικό αριθμό των κοριτσιών και αγοριών του Γυμνασίου.

Λύση

Αν είναι A_1 ο αριθμός των αγοριών που συμμετέχουν στην παρέλαση, τότε ο A_1 είναι πολλαπλάσιο του 3 και επιπλέον έχουμε

$$\left\{ \begin{matrix} \mathrm{A}_1 = \pi o\lambda.5 + 3 \\ \mathrm{A}_1 = \pi o\lambda.7 + 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \mathrm{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.5 \\ \mathrm{A}_1 - 3 = \pi o\lambda.7 \end{matrix} \right\},$$

οπότε ο αριθμός $\mathrm{A}_1 - 3$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 5 και 7. Τότε ο αριθμός $\mathrm{A}_1 - 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5,7)=35, δηλαδή θα είναι ένας από του αριθμούς

35, 70, 105, 140,...,

Επομένως ο αριθμός A_1 θα είναι κάποιος από τους αριθμούς

38, 73, 108, 143,....

Αν Α είναι ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου, τότε από την υπόθεση είναι

$$100 < \mathrm{A} < 200 \Rightarrow \frac{60}{100}\cdot 100 < \frac{60}{100}\cdot \mathrm{A} < \frac{60}{100}\cdot 100 \Rightarrow 60 < \mathrm{A}_1 < 120,$$

οπότε οι αποδεκτές τιμές για τον αριθμό A_1 είναι οι 73 και 108. Επειδή ο αριθμός A_1 είναι και πολλαπλάσιο του 3, έπεται ότι $\mathrm{A}_1 = 108$, οπότε ο αριθμός των αγοριών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{A} = 108\cdot \frac{100}{60} = 180.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι τα κορίτσια που συμμετείχαν στην παρέλαση ήταν $2\cdot 108 = 216$, οπότε ο αριθμός Κ των κοριτσιών του Γυμνασίου είναι:

$$\mathrm{K} = 216\cdot \frac{100}{80} = 270 .$$

Άρα συνολικά το Γυμνάσιο έχει 180+270=450 μαθητές και μαθήτριες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad \mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

Λύση

Επειδή $1-\left(-1\right)^{2009}=1-\left(-1\right)=2\neq 0$ έχουμε $\left[1-\left(-1\right)^{2009}\right]^0=1$, οπότε:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0}=\frac{3^4}{2^4}\cdot 2^4-3^4+x=x.$$

Επίσης έχουμε

$$\mathrm{B}=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}=\frac{\left(4+1\right)^2}{5}+\frac{x}{2}=5+\frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}\Leftrightarrow x=5+\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2x=10+x\Leftrightarrow x=10.$$

2. Το σημείο $\mathrm{A}(-\lambda+2,4\lambda-1))$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος *λ,*

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α προς τους θετικούς ημιάξονες *Ox* και *Oy*, αντίστοιχα.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda+2>0 \text{ και } 4\lambda-1>0\Leftrightarrow \lambda<2 \text{ και } \lambda>\frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda=1$.

(β) Για $\lambda=1$ είναι $\mathrm{A}\left(1,3\right)$, οπότε

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}.$$

(γ)

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{OAB\Gamma}\right)=1\cdot 3=3$$

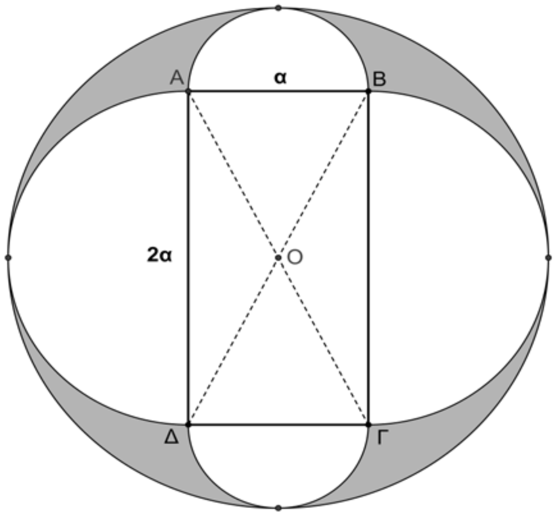
3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$, $\mathrm{A\Delta}=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα α.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2=\frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$, τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2=\pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\mathrm{E}=\frac{9\pi\alpha^2}{4}-\frac{\pi\alpha^2}{4}-\pi\alpha^2-2\alpha^2=\frac{4\pi\alpha^2-8\alpha^2}{4}=(\pi-2)\alpha^2.$$

4. Αν ισχύει $\frac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{45^\nu.2^{2\nu}}{6^\nu}=900\Leftrightarrow\frac{45^\nu\cdot 4^\nu}{6^\nu}\Leftrightarrow\left(\frac{45\cdot 4}{6}\right)^\nu=900\Leftrightarrow 30^\nu=2^2\cdot3^2\cdot5^2.$$

$$\Leftrightarrow 30^\nu=\left(2\cdot3\cdot5\right)^2\Leftrightarrow 30^\nu=30^2\Leftrightarrow 30^{\nu-2}=1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $\nu-2=0\Leftrightarrow\nu=2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $\nu-2$ η τιμή της δύναμης $30^{\nu-2}$ δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}=2003\cdot(-1)^2-(-1)^{2+1}+4(-1)^{2+2}=2003\cdot1-\left(-1\right)+4\cdot1=2003+1+4=2008..$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+1255=x \Leftrightarrow x-\frac{x}{8}-\frac{x}{4}=1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8}=1255 \Leftrightarrow x=\frac{1255\cdot 8}{5}=2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$0 \leq x \leq y \leq z,$$
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44.$$

Λύση

Η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} & xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44 \\ \Leftrightarrow\ & xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=45 \\ \Leftrightarrow\ & xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (xy+x+y+1)(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(y+1)(z+1)=45. \qquad (1) \end{aligned}$$

Επειδή οι x, y, z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x \leq y \leq z$, έπεται ότι:

$$1 \leq x+1 \leq y+1 \leq z+1. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) και αφού $45=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ προκύπτουν οι περιπτώσεις

$$(x+1, y+1, z+1)=(1,3,15) \text{ ή } (1,5,9) \text{ ή } (3,3,5) \text{ ή } (1,1,45)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,2,14) \text{ ή } (0,4,8) \text{ ή } (2,2,4) \text{ ή } (0,0,44).$$

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

Λύση

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$).

1η περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΒΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

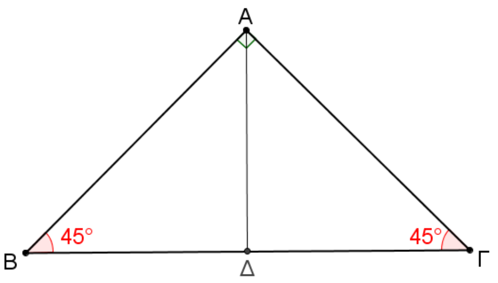
- Αν είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\hat{\mathrm{B}}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$ τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) :
$\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\hat{x}$ και $\hat{\mathrm{A}}_2=\hat{\Delta}_1=2\hat{x}$, (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x}=180^o \Leftrightarrow \hat{x}=36^o.$$

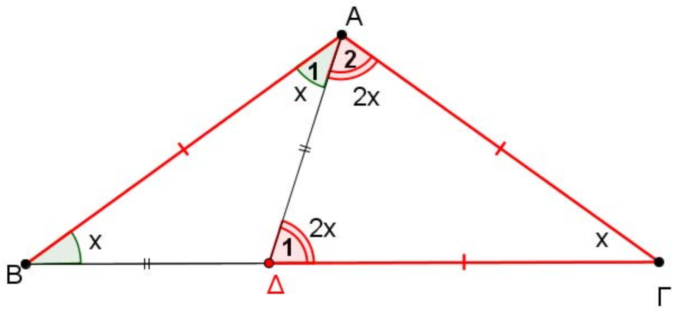
Στη περίπτωση αυτή είναι $\hat{\mathrm{A}}=108^o$ και $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=36^o$.

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma}}$, τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο ΑΒΓ.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta = B\hat{\Delta}A}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}A}$, τότε προκύπτουν οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\hat{\Gamma} = \mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma}$ έπεται ότι: $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow 180^\circ - \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

2η περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΑΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΓΔ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \hat{\mathrm{A}}$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = \hat{\Gamma}$, τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{x}$$

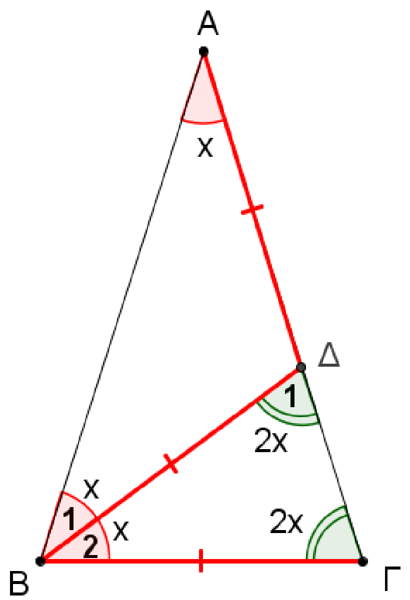
$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε

$$\hat{x} + \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 2x \Rightarrow \hat{\mathrm{B}}_2 = x.$$

Από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

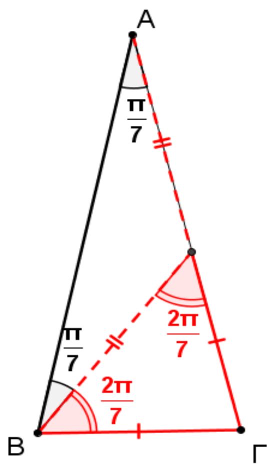
$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$



Σχήμα 4

Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{\mathrm{A}} = 36^\circ \text{ και } \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 72^\circ.$$



Σχήμα 5

- Αν $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \hat{\mathrm{A}} = x$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}\Gamma} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = y$, τότε θα έχουμε $y = 2x$ και $3x + 2y = \pi$.οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{\mathrm{A}} = \frac{\pi}{7},\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί $x,\ y$ και z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους $x,\ y,\ z$ ισούται με 0.

Λύση

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \left(x + y + z\right) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$x + y + z = 0, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι $z = -\left(x + y\right)$ και

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + \left[-\left(x + y\right)\right]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy\left(x + y\right) \\ &= -3xy\left(-z\right) = 3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα $x + y + z = 0$ προκύπτει ότι $z = -x - y$, οπότε η ισότητα $x^2 - y = z^2$ γίνεται

$$x^2 - y = \left(x + y\right)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow y \cdot \left(y + 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1.$$

- Για $y = 0$ λαμβάνουμε $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$, οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$\left(x, y, z\right) = \left(0, 0, 0\right) \text{ ή } \left(1, 0, -1\right).$$

- Για $y = -2x - 1$ από την (1) λαμβάνουμε

$$z = -x - y = x + 1,$$

οπότε με αντικατάσταση των y, z στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x\left(x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$\left(x, y, z\right) = \left(0, -1, 1\right) \text{ ή } \left(-1, 1, 0\right).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

2^{ος} τρόπος για το (β)

Οι δεδομένες ισότητες $x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2$ με πολλαπλασιασμό επί y^2, z^2 και x^2, αντίστοιχα, γίνονται

$$\left(x^2 - z^2\right)y^2 = y^3,\ \left(y^2 - x^2\right)z^2 = z^3, \left(z^2 - y^2\right)x^2 = x^3,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε $xyz = 0$, δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από 2, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής: $100x+15$, όπου x μη αρνητικός ακέραιος.

Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$S=(100x_1+15)+(100x_2+15)+\cdots+(100x_{15}+15)=100(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+15\cdot 15=$$

$$=25\cdot 4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+25\cdot 9=25\cdot\left[4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+9\right],$$

δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του 25.

Παρατήρηση

Η "κεντρική ιδέα" της άσκησης είναι ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta$", έχει τη μορφή $100x+\overline{\alpha\beta}$.

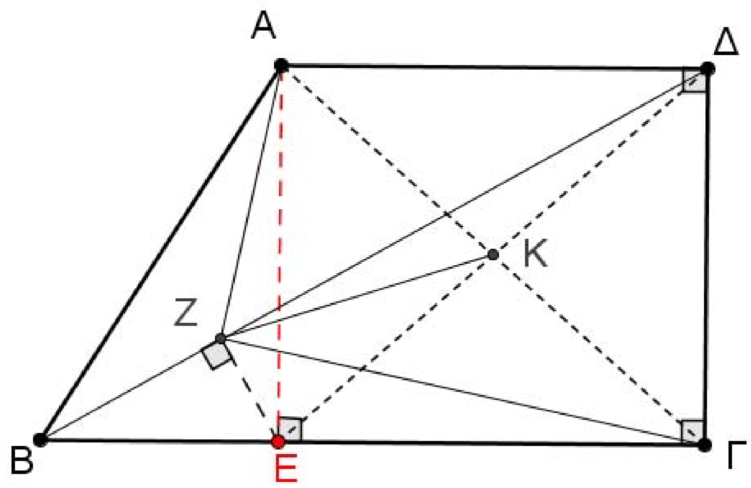
Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta\gamma$", έχει τη μορφή $1000x+\overline{\alpha\beta\gamma}$.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΑΕ και από το Ε κάθετη προς την διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Ζ}Γ$.

Λύση (1ος τρόπος)

Επειδή είναι $Α\hat{Ε}Γ=\hat{Γ}=\hat{Δ}=90^\circ$ το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι ορθογώνιο, οπότε οι διαγώνιοι του είναι ίσες και διχοτομούνται, δηλαδή το σημείο Κ είναι μέσον των ΑΓ και ΕΔ και

$$ΑΓ=ΕΔ. \tag{1}$$

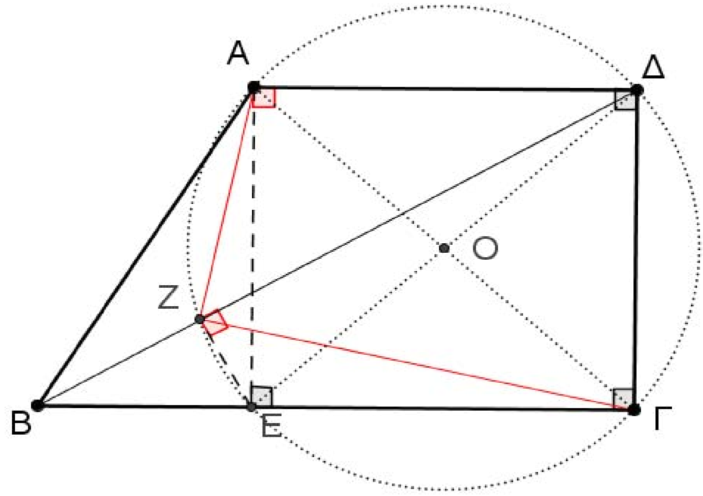


Σχήμα 6

Επειδή είναι $ΕΖ\perp ΒΔ$ το τρίγωνο ΕΖΔ είναι ορθογώνιο και η ΖΚ είναι η διάμεσος αυτού προς την υποτείνουσα. Άρα είναι

$$ΖΚ=\frac{ΕΔ}{2}. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $ZK = \dfrac{A\Gamma}{2}$, δηλαδή η διάμεσος του τριγώνου ΑΖΓ προς την πλευρά ΑΓ ισούται με το μισό της πλευράς ΑΓ. Επομένως είναι $A\hat{Z}\Gamma = 90^\circ$.



Σχήμα 7

2^{ος} Τρόπος

Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε θα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων του O.

Εφόσον $E\hat{Z}\Delta = E\hat{A}\Delta = 90^o$, το τετράπλευρο $EZA\Delta$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια τα σημεία A, Δ, Γ, E, Z είναι ομοκυκλικά. Άρα $A\hat{Z}\Gamma = 90^o$ (διότι βαίνει στη διάμετρο $A\Gamma$).

3. Βρείτε τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2,$$
$$x+y+z=300.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2 \Leftrightarrow x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y=2$$
$$\Leftrightarrow (x^2y-y^2x)-(x^2z-y^2z)+(z^2x-z^2y)=2$$
$$\Leftrightarrow xy(x-y)-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left[xy-z(x+y)+z^2\right]=2 \Leftrightarrow (x-y)(xy-zx-zy+z^2)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x-z)=2.$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον, από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι

$$x-y \geq 0 \text{ και } x-z \geq y-z > 0$$

και αφού

$$(x-y)+(y-z)=x-z,$$

έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$ είναι:

$$x-y=1, y-z=1, x-z=2.$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε από το προηγούμενο σύστημα λαμβάνουμε:

$$x-y=1,\ y-z=1 \Leftrightarrow x=y+1,\ z=y-1,$$

όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x,y,z)=(k+1,k,k-1),\ \text{όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Από την εξίσωση $x+y+z=300$ λαμβάνουμε:

$$(k+1)+k+(k-1)=300 \Leftrightarrow 3k=300 \Leftrightarrow k=100,$$

οπότε η ζητούμενη τριάδα είναι μόνον η

$$(x,y,z)=(101,\ 100,\ 99).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB. Θεωρούμε τυχόν σημείο M εκτός του AB και τέτοιο ώστε η κάθετη από το M προς την ευθεία AB να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέτοια ώστε

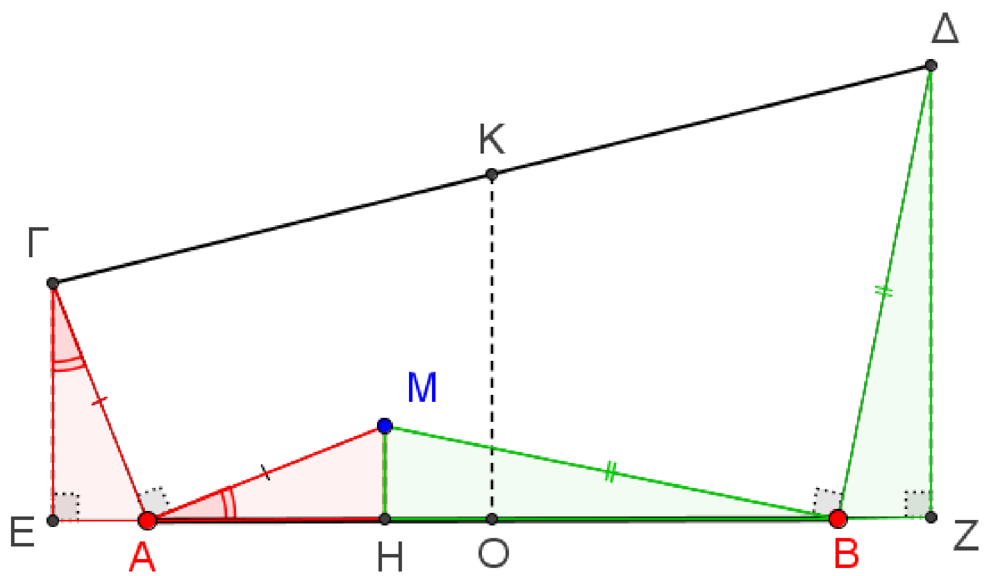
$$A\Gamma \perp AM \text{ και } A\Gamma = AM,\quad B\Delta \perp MB \text{ και } B\Delta = MB,$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, M και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB. Να αποδείξετε ότι το μέσον K του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου M.

Λύση

Από τα σημεία Γ, M και Δ φέρουμε καθέτους ΓE, MH και ΔZ προς την ευθεία AB. Τότε οι οξείες γωνίες $M\hat{A}H$ και $A\hat{\Gamma}E$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $M\hat{B}H$ και $B\hat{\Delta}Z$. Έτσι από την υπόθεση $A\Gamma = AM$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα AHM, ΓEA είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Gamma E = AH \qquad (1)$$
$$EA = MH. \qquad (2)$$



Σχήμα 8

Ομοίως από την υπόθεση $B\Delta = MB$ και $B\Delta \perp MB$ προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα MHB, $BZ\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα έχουμε:

$$\Delta Z = HB \qquad (3)$$
$$BZ = MH. \qquad (4)$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2}. \qquad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$\mathrm{OK} = \frac{\Gamma\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}}{2} = \frac{\mathrm{AH} + \mathrm{HB}}{2} = \frac{\mathrm{AB}}{2}. \qquad (6)$$

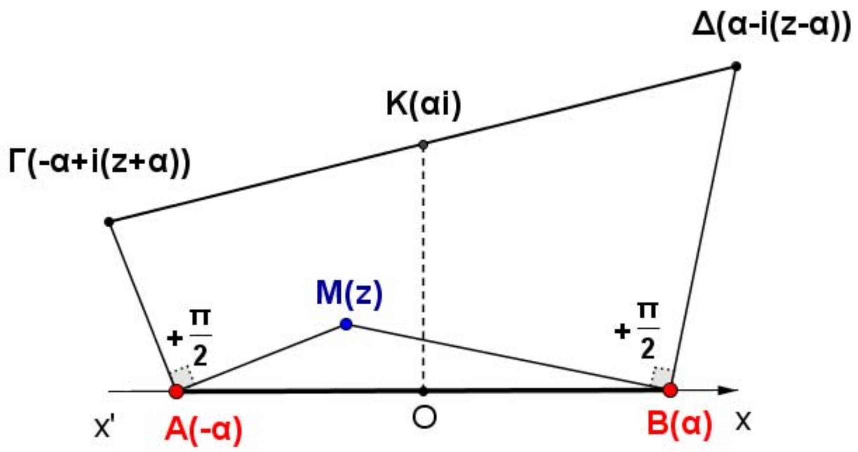
Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OE} - \mathrm{AE} = \mathrm{OZ} - \mathrm{BZ} = \mathrm{OB}. \qquad (7)$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το μισό του ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε την ευθεία ΑΒ ως άξονα των πραγματικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο και το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ως την αρχή των αξόνων. Έστω ότι το σημείο Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z, το σημείο Β είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού a, οπότε το σημείο Α θα είναι η εικόνα του πραγματικού αριθμού $-a$. Τότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $z+a$ και επειδή είναι $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM}$, $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AM}$ έπεται ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}\right) = 90^\circ$, οπότε στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $i(z+a)$. Επομένως στο διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$, άρα και στο σημείο Γ, αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $-a+i(z+a)$.



Σχήμα 9

Με το ίδιο σκεπτικό, αλλά με την παρατήρηση ότι $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}}\right) = -90^\circ$, καταλήγουμε ότι στο σημείο Δ αντιστοιχίζεται ο μιγαδικός αριθμός $a-i(z-a)$.

Επομένως το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι εικόνα του μιγαδικού αριθμού

$$\frac{-a+i(z+a)+a-i(z-a)}{2} = ai,$$

οπότε το σημείο Κ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του μιγαδικού αριθμού z, άρα ανεξάρτητο από τη θέση του σημείο Μ.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$\mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta \text{ και } \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta .$$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών α, β και των αριθμών Α και Β ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών α, β. Τότε από τις σχέσεις $\delta | \alpha$ και $\delta | \beta$ λαμβάνουμε ότι ο δ διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους , οπότε

$$\delta | (4\alpha + 5\beta) = \mathrm{A} \text{ και } \delta | (3\alpha + 4\beta) = \mathrm{B},$$

δηλαδή ο δ είναι κοινός διαιρέτης των Α και Β.

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων Α και Β. Τότε από τις υποθέσεις $\delta | \mathrm{A} = 4\alpha + 5\beta$ και $\delta | \mathrm{B} = 3\alpha + 4\beta$ έπεται ότι $\delta | \mathrm{A} - \mathrm{B} = \alpha + \beta$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta | 5(\mathrm{A} - \mathrm{B}) - \mathrm{A} = \alpha \quad \text{και} \quad \delta | \mathrm{A} - 4(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \beta ,$$

οπότε ο δ είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών α και β.

Επομένως και οι αριθμοί Α και Β έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\mathrm{A} = n^2 - n + 1$ και $\mathrm{B} = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση

Έχουμε $\mathrm{A} = n(n - 1) + 1$ και $\mathrm{B} = n(n + 1) + 1$, οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων $n(n - 1)$ και $n(n + 1)$ είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι $\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2n > 0$, οπότε $\mathrm{A} < \mathrm{B}$. Έστω $\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2\kappa - 1)$, όπου κ θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών Α και Β. Τότε πρέπει

$$\mathrm{A}+(2\kappa-1) = \mathrm{B} - 1,$$

δηλαδή

$$\mathrm{B} - \mathrm{A} = 2\kappa \Leftrightarrow 2n = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών Α και Β βρίσκονται n άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι

$$\mathrm{A} + 1, \mathrm{A} + 3, \ldots, \mathrm{A} + (2n - 1),$$

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma = n\mathrm{A} + [1 + 3 + \ldots + (2n - 1)] = n^3 - n^2 + n + \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^3 + n .$$

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Λύση

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:

$$
\begin{aligned}
xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x) &= x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2\\
&= xy(x-y)+(x-y)z^2-(x^2-y^2)z\\
&= (x-y)\left[xy+z^2-xz-yz\right]\\
&= (x-y)\left[x(y-z)-z(y-z)\right]\\
&= (x-y)(y-z)(x-z).
\end{aligned}
$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z)=6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση $x\geq y\geq z$ έπεται ότι $x-y\geq 0$ και $x-z\geq y-z>0$, και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$, είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \qquad (1)$$

$$\text{ή} \quad x-y=2, y-z=1, x-z=3 \qquad (2)$$

$$\text{ή} \quad x-y=1, y-z=1, x-z=6 \qquad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά , αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:

  $$x-y=1,\ \ y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1,\ \ z=y-2,$$

  όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

  $$(x,y,z)=(k+1,k,k-2),\text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:

  $$(x,y,z)=(k+2,k,k-1),\text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+1,k,k-2), k\in\mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+1)^2+k^2+(k-2)^2=3k^2-2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2-2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(1,0,-2)$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $(x,y,z)=(k+2,k,k-1), k\in\mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S=(k+2)^2+k^2+(k-1)^2=3k^2+2k+5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k=-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k)=3k^2+2k+5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0)=5$ και $S(-1)=6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για κ=0 από την τριάδα $(x,y,z)=(2,0,-1)$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες

$$(x,y,z)=(1,0,-2) \text{ και } (x,y,z)=(2,0,-1).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ . Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{AM} \text{ και } \mathrm{A\Gamma} = 2\cdot \mathrm{AM}\ ,\ \ \mathrm{B\Delta} \perp \mathrm{MB} \text{ και } \mathrm{B\Delta} = 2\cdot \mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Λύση

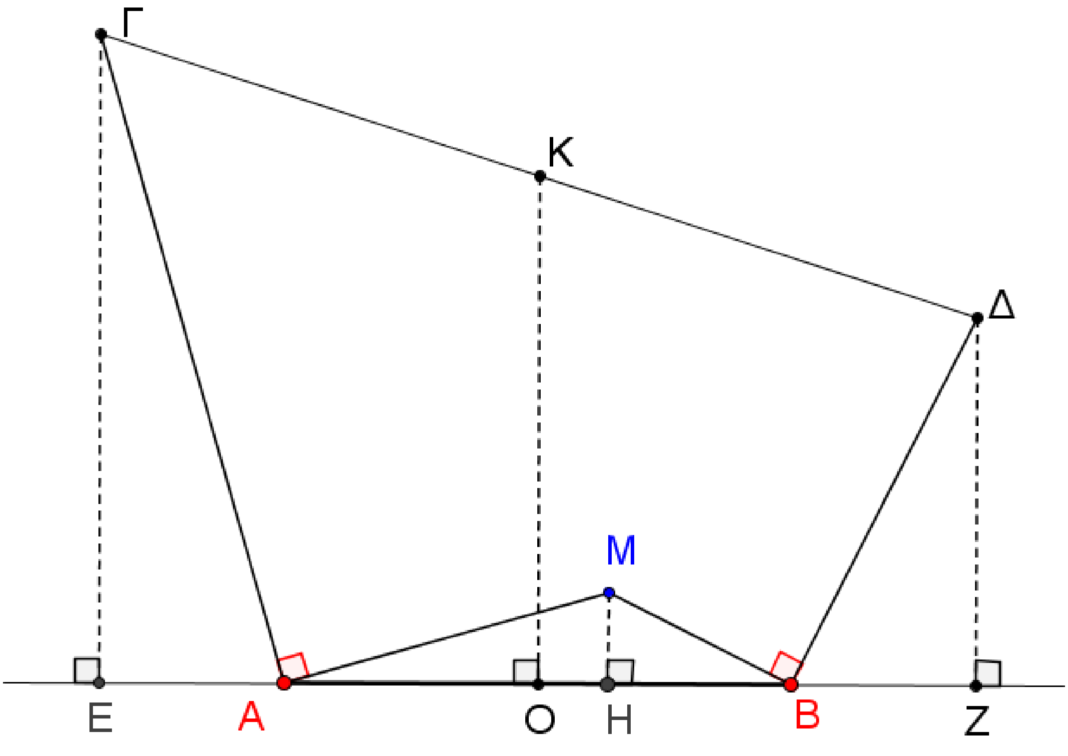
Από τα σημεία Γ, Μ και Δ φέρουμε καθέτους ΓΕ, ΜΗ και ΔΖ προς την ευθεία ΑΒ. Τότε οι οξείες γωνίες $\mathrm{M\hat{A}H}$ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\mathrm{M\hat{B}H}$ και $\mathrm{B\hat{\Delta}Z}$. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΜ , ΓΕΑ είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\Gamma \mathrm{E}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{MH}} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AM}} = 2\,,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\Gamma\mathrm{E} = 2\cdot \mathrm{AH} \qquad (1)$$

$$\mathrm{EA} = 2\cdot \mathrm{MH}\,. \qquad (2)$$



Σχήμα 10

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΗΒ, ΒΖΔ είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$\Delta Z = 2 \cdot HB \tag{3}$$

$$BZ = 2 \cdot MH\,. \tag{4}$$

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον Κ της ΓΔ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ο. Τότε η ΚΟ θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΓΕΖΔ, οπότε θα ισχύει:

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2}\,. \tag{5}$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} = \frac{2 \cdot AH + 2 \cdot HB}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB\,. \tag{6}$$

Επιπλέον, το μέσον Ο της ΕΖ είναι και μέσον της ΑΒ, αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ΕΑ = ΒΖ, οπότε θα έχουμε

$$OA = OE - AE = OZ - BZ = OB\,. \tag{7}$$

Επομένως το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ σε απόσταση από το μέσον Ο ίση προς το ΑΒ. Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

Παρατήρηση

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $a = 4 - 2\frac{1}{5}$ και $b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή παράστασης:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a}.$$

Λύση.
Είναι

$$a = 4 - 2\frac{1}{5} = \frac{4}{1} - \frac{11}{5} = \frac{20}{5} - \frac{11}{5} = \frac{9}{5} \text{ και } b = 5 + \frac{-3}{2} - \frac{-5}{-2} = 5 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 5 - \frac{8}{2} = 5 - 4 = 1,$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A} = a : b^{2009} - b - \frac{1}{5a} = \frac{9}{5} : 1^{2009} - 1 - \frac{1}{5 \cdot \frac{9}{5}} = \frac{9}{5} : 1 - 1 - \frac{1}{9} = \frac{9}{5} - 1 - \frac{1}{9} = \frac{76}{45} - 1 = \frac{31}{45}.$$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω α θετικός ακέραιος τον οποίο διαιρούμε με 4.

(i) Ποιες είναι οι δυνατές μορφές του παραπάνω θετικού ακέραιου α;

(ii) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός α , αν είναι περιττός μεγαλύτερος από 39 και μικρότερος από 50, και διαιρούμενος με το 4 δίνει υπόλοιπο 1.

Λύση

(i) Οι δυνατές μορφές του ακέραιου αριθμού α είναι οι εξής:
α = 4ρ, όπου ρ θετικός ακέραιος, ή α = 4ρ + 1 ή α = 4ρ + 2 ή α = 4ρ + 3 όπου ρ μη αρνητικός ακέραιος.

(ii) Σύμφωνα με την υπόθεση είναι α = 4ρ + 1, οπότε έχουμε:

$$39 < 4\rho + 1 < 50 \Leftrightarrow 38 < 4\rho < 49 \Leftrightarrow 9,5 < \rho < 12,25$$

Επομένως, αφού ο ρ είναι μη αρνητικός ακέραιος, έπεται ότι ρ = 10 ή ρ = 11 ή ρ = 12 και α = 41 ή α = 45 ή α=49.

ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ έχουν άθροισμα 140^0 και είναι ανάλογες με τους αριθμούς 1 και 6, αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν το ύψος και η διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στην πλευρά του ΒΓ.

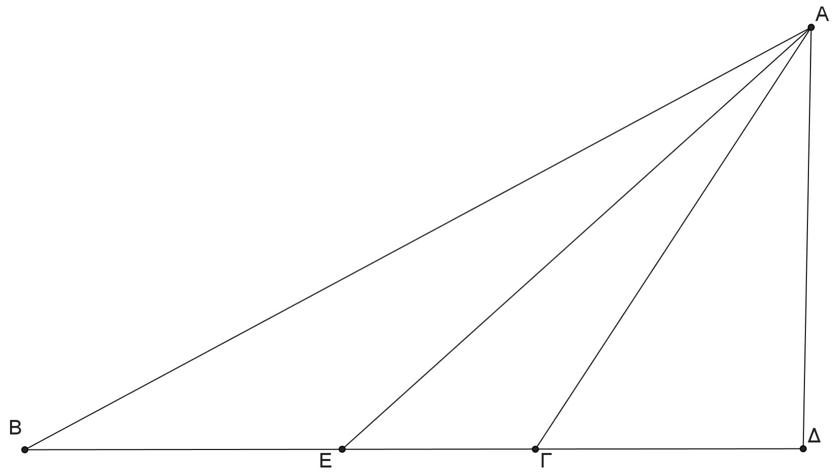
Λύση

α) Κατ' αρχή έχουμε: $\hat{A} = 180^0 - \left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) = 180^0 - 140^0 = 40^0$.

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε: $\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6}$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 140^0$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\hat{B}}{1} = \frac{\hat{\Gamma}}{6} = \lambda \Rightarrow \hat{B} = \lambda, \hat{\Gamma} = 6\lambda \text{ και } \lambda + 6\lambda = 140^0 \Rightarrow \lambda = 20^0.$$

Άρα είναι: $\hat{B} = 20^0$ και $\hat{\Gamma} = 120^0$.



Σχήμα 1

β) Έστω ΑΔ το ύψος και ΑΕ η διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β και Δ, αφού διαφορετικά το τρίγωνο ΑΓΔ θα είχε άθροισμα γωνιών μεγαλύτερο των 180^0. Έτσι έχουμε:

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}E = \left(90^\circ - \Delta\hat{\Gamma}A\right) + \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\hat{A} = 40^0$, $\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 120^0 = 60^0$, από τη σχέση (1) λαμβάνουμε $\Delta\hat{A}E = 50^0$.

ΘΕΜΑ 4^{o}

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου, το $\frac{1}{4}$ ασχολείται με το στίβο, το $\frac{1}{5}$ ασχολείται με το μπάσκετ, το $\frac{1}{8}$ ασχολείται με το βόλεϊ και περισσεύουν και 80 μαθητές που δεν ασχολούνται με κανένα από αυτά τα αθλήματα. Δεδομένου ότι οι μαθητές του Γυμνασίου οι ασχολούμενοι με τον αθλητισμό, ασχολούνται με ένα μόνο άθλημα, εκτός από 12 μαθητές που ασχολούνται και με το μπάσκετ και με το βόλεϊ, να βρείτε:

α) Ποιος είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου;

β) Πόσοι είναι οι μαθητές του Γυμνασίου που ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

α) Έχουμε $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{23}{40}$. Όμως στα $\frac{23}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου έχουν υπολογιστεί δύο φορές οι 12 μαθητές που ασχολούνται με μπάσκετ και βόλεϊ. Άρα οι 80 -12=68 μαθητές είναι τα $\frac{40}{40}-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$ των μαθητών του Γυμνασίου. Έτσι όλο το σχολείο έχει :

$$68:\frac{17}{40}=68\cdot\frac{40}{17}=4\cdot 40=160 \text{ μαθητές.}$$

β) Μόνο με το μπάσκετ ασχολούνται $160\cdot\frac{1}{5}-12=32-12=20$ μαθητές.

2^{ος} τρόπος

α) Αν x είναι ο αριθμός των μαθητών του Σχολείου, τότε , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{8}+80-12=x,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$10x+8x+5x+3200-480=40x \Leftrightarrow 17x=2720 \Leftrightarrow x=160.$$

β) $\frac{x}{5}-12=\frac{160}{5}-12=20$ μαθητές ασχολούνται μόνο με το μπάσκετ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Αν ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}.$$

Λύση

$$\mathrm{A}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}=4\cdot(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)}{5}-7\cdot\frac{\left[(-1)^{3}\right]^{\nu}}{5}$$

$$=4\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}-\frac{7\cdot(-1)^{\nu}}{5}=\left(4-\frac{7}{5}\right)\cdot(-1)^{\nu}-\frac{2}{5}=\frac{13\cdot(-1)^{\nu}-2}{5},$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν ν άρτιος, τότε $\mathrm{A}=\frac{13-2}{5}=\frac{11}{5}$.
- Αν ν περιττός, τότε $\mathrm{A}=-3$.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 2. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α.

Λύση

Αφού ο α διαιρούμενος με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2, θα είναι της μορφής $\alpha = 5\lambda + 2$, όπου λ μη αρνητικός ακέραιος. Όμως, αν ο λ ήταν άρτιος, τότε ο α επίσης θα ήταν άρτιος, που αντίκειται στην υπόθεση. Άρα ο λ είναι περιττός, δηλαδή είναι $\lambda = 2\kappa + 1$, όπου κ μη αρνητικός ακέραιος.

Επομένως, έχουμε

$$\alpha = 5\cdot(2\kappa+1)+2 = 10\kappa+7,$$

σχέση που δείχνει ότι ο θετικός ακέραιος α διαιρούμενος με το 10 αφήνει υπόλοιπο 7, δηλαδή με άλλα λόγια, το τελευταίο ψηφίο του α είναι 7. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο α έχει κ δεκάδες και 7 μονάδες, οπότε το τελευταίο του ψηφίο είναι 7.

ΘΕΜΑ 3^o

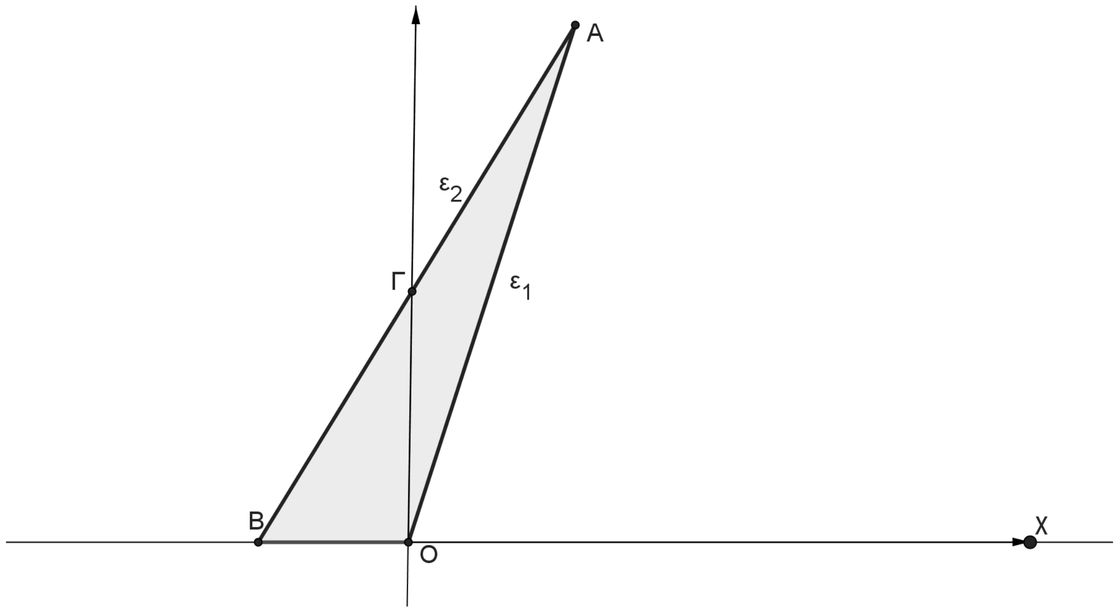
Δίνονται δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4 , ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y = 2x$ και διέρχεται από το σημείο Γ(0,6).

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, Α το κοινό σημείο των ευθειών και Β το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $y = 4x$, ενώ η ευθεία ε_2 έχει εξίσωση $y = 2x + \beta$, αφού είναι παράλληλη με την (η). Όμως διέρχεται από το σημείο Β(0,6), οπότε θα ισχύει $6 = 2\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_2 είναι $y = 2x + 6$. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε ότι το κοινό σημείο τους είναι το $\mathrm{A}(3,12)$.



Σχήμα 2

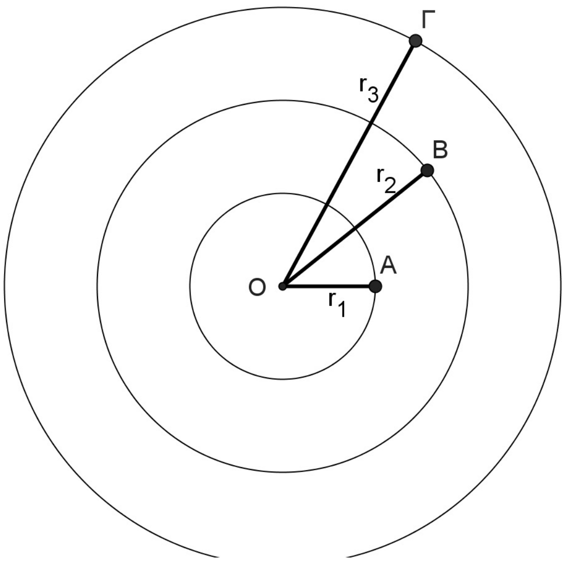
β) Η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα των x στο σημείο $\mathrm{B}(-3,0)$, οπότε η τη βάση του τριγώνου έχει μήκος 3, ενώ το ύψος του ίσο με 12. Άρα έχουμε:

$$\text{Ε(ΟΑΒ)} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12 = 18 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4º

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0 < r_1 < r_2 < r_3$. Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_1, r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο και ακτίνες r_2, r_3. Αν είναι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$ και $r_3 = 3r_1$, να βρείτε το λόγο $\frac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)}$, όπου $\text{Ε}(\Delta_1)$ και $\text{Ε}(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε

$$\frac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2 + r_1\right)}{\left(r_3 - r_2\right)\left(r_3 + r_2\right)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2}, \qquad (1)$$

αφού δίνεται ότι $r_2 - r_1 = r_3 - r_2$. Από την ίδια σχέση προκύπτει ότι $r_2 = \frac{r_1 + r_3}{2}$, οπότε, λόγω τη σχέσης $r_3 = 3r_1$ λαμβάνουμε $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)} = \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_2} = \frac{3r_1}{3r_1 + 2r_1} = \frac{3r_1}{5r_1} = \frac{3}{5}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να βρούμε πρώτα τη σχέση $r_2 = \frac{r_1 + 3r_1}{2} = 2r_1$ και στη συνέχεια να εργαστούμε με το λόγο

$$\frac{\text{Ε}(\Delta_1)}{\text{Ε}(\Delta_2)} = \frac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{\pi\left(r_3^2 - r_2^2\right)} = \frac{\pi\left[\left(2r_1\right)^2 - r_1^2\right]}{\pi\left[\left(3r_1\right)^2 - \left(2r_1\right)^2\right]} = \frac{3r_1^2}{5r_1^2} = \frac{3}{5}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 - 10x = 75 \Leftrightarrow x^2 - 10x - 75 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \text{ ή } x = -5.$$

Επειδή ο ζητούμενος αριθμός είναι θετικός, η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός 15.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι αριθμοί μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2} + 4^{\nu+2} \le 2^{\mu+\nu+1},$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

Λύση.

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή

$$\left(2^2\right)^{\mu-2} + \left(2^2\right)^{\nu+2} - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \le 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2}\right)^2 + \left(2^{\nu+2}\right)^2 - 2\cdot 2^{\mu+\nu} \le 0 \Leftrightarrow \left(2^{\mu-2} - 2^{\nu+2}\right)^2 \le 0$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$2^{\mu-2} - 2^{\nu+2} = 0 \Leftrightarrow 2^{\mu-\nu-4} = 1 \Leftrightarrow \mu - \nu - 4 = 0.$$

Επομένως έχουμε

$$\mathrm{A} = 2^{\mu} + 2^{\nu} = 2^{\nu+4} + 2^{\nu} = 2^{\nu}\cdot\left(2^4+1\right) = 17\cdot 2^{\nu} = 34\cdot 2^{\nu-1},$$

που είναι πολλαπλάσιο του 34, αφού ο ν είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

(α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

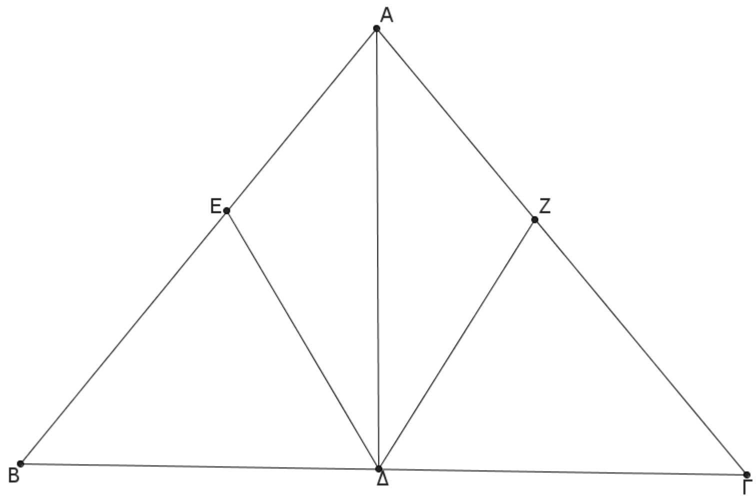
(β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το μέρος του Α, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση

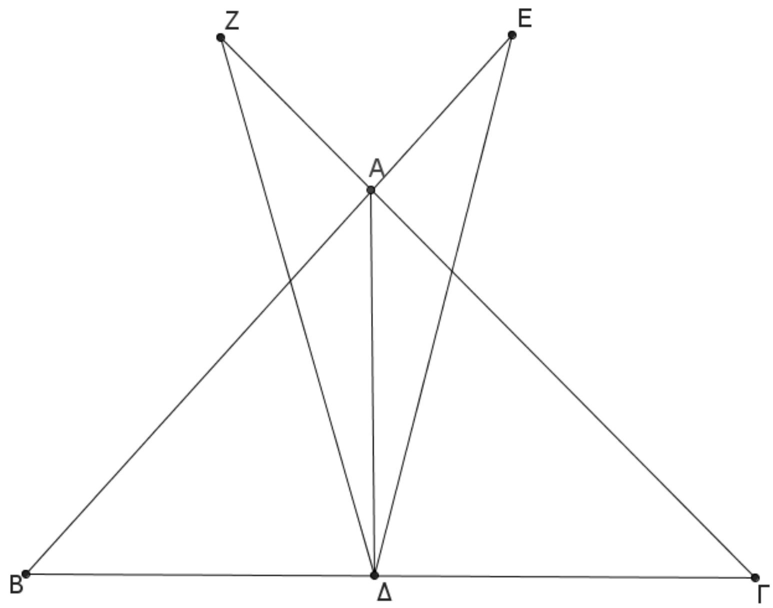
(α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($\mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}\Delta, \Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{Z}$) και τις περιεχόμενες γωνίες των ίσων πλευρών ίσες, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ, τα οποία είναι ορθογώνια με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$ και έχουν την πλευρά ΑΔ κοινή και τις οξείες γωνίες

$\Delta\hat{A}B$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ίσα , οπότε θα έχουν και $AB = A\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές



Σχήμα 4



Σχήμα 5

(β) Ομοίως όπως στο ερώτημα (α) τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΔΖ είναι ίσα, οπότε θα έχουν

$$\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z .$$

Επειδή οι γωνίες $\Gamma\hat{A}E$ και $B\hat{A}Z$ είναι ίσες ως κατά κορυφή, έπεται ότι:

$$\Delta\hat{A}E - \Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z - B\hat{A}Z \Rightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B ,$$

οπότε και στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ. Στη συνέχεια προχωράμε όπως στο ερώτημα (α).
Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΔΖ προκύπτει και η ισότητα $\Delta\hat{Z}A = \Delta\hat{E}A$, οπότε εύκολα προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΔΓΖ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\Delta B = \Delta\Gamma$, η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ. Άρα είναι ΑΒ = ΑΓ.
Και στις δύο περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα της Γεωμετρίας, βάσει του οποίου, αν σε ένα τρίγωνο ένα ύψος του είναι και διχοτόμος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 4^o

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή (όταν βέβαια είναι γεμάτη) σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει μία άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν (για να γεμίσει η δεξαμενή) να είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

Λύση

Έστω x, ο αριθμός των ωρών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή. Τότε οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός (μαζί με τις αντίστοιχες εξισώσεις που δημιουργούνται) είναι:

(1) Α-Β-Γ $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+6-6 \Leftrightarrow x=\frac{12}{5}$

(2) Β-Α-Γ $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+8-6 \Leftrightarrow x=\frac{14}{5}$

(3) Α-Γ-Β $\quad \frac{x}{3}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{4}=1 \Leftrightarrow 5x=12+9-4 \Leftrightarrow x=\frac{17}{5}$

(4) Β-Γ-Α $\quad \frac{x}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{x-3}{3}=1 \Leftrightarrow 5x=12+12-4 \Leftrightarrow x=4$

(5) Γ-Β-Α $\quad \frac{x}{4}+\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+4 \Leftrightarrow x=\frac{16}{5}$

(6) Γ-Α-Β $\quad \frac{x}{3}+\frac{x-1}{4}-\frac{x}{6}=1 \Leftrightarrow 5x=12+3 \Leftrightarrow x=3$

Ένας τρόπος ανοίγματος είναι Β-Γ-Α με αντίστοιχη διάρκεια $x=4$ ώρες (περίπτωση **(4)**).
Ένας δεύτερος τρόπος ανοίγματος είναι Γ-Α-Β με αντίστοιχη διάρκεια $x=3$ ώρες (περίπτωση **(6)**).
Στη περίπτωση **(4)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Β), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Β.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Β θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{4}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Γ η οποία θα λειτουργήσει $x-2$ ώρες και θα αδειάσει τα $\frac{x-2}{6}$ της δεξαμενής. Τέλος θα ανοίξει η βρύση Α η οποία θα λειτουργήσει $x-3$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-3}{3}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(4)**.

Στη περίπτωση **(6)** (που ανοίγει πρώτα η βρύση Γ), ο χρόνος αρχίζει να μετράει με το άνοιγμα της βρύσης Α (διότι ο μηχανισμός χρονομέτρησης αρχίζει μόλις πέσει νερό στη δεξαμενή).

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο απαιτούμενος χρόνος για να γεμίσει η δεξαμενή είναι x ώρες, τότε η βρύση Α θα έχει γεμίσει τα $\frac{x}{3}$ της δεξαμενής. Στη συνέχεια ανοίγει η βρύση Β η οποία θα λειτουργήσει $x-1$ ώρες και θα γεμίσει τα $\frac{x-1}{4}$ της δεξαμενής.

Τέλος η βρύση Γ θα λειτουργήσει x ώρες, και θα αδειάσει τα $\frac{x}{6}$ της δεξαμενής. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η εξίσωση **(6)**.

Ανάλογα εξηγούνται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο (

Αν α,β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\le\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{\alpha\beta}\le\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (1)$$

που ισχύει γιατί είναι ισοδύναμη με την αληθή ανισότητα $0\le\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2$.

Επιπλέον έχουμε

$$\frac{4}{\alpha+\beta}\le\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \qquad (2)$$

η οποία ισχύει γιατί γράφεται ως

$$\frac{4}{\alpha+\beta}\le\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\Leftrightarrow\frac{4}{\alpha+\beta}\le\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\Leftrightarrow 4\alpha\beta\le(\alpha+\beta)^2\Leftrightarrow 0\le(\alpha-\beta)^2.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των δύο ανισοτήτων (1) και (2) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

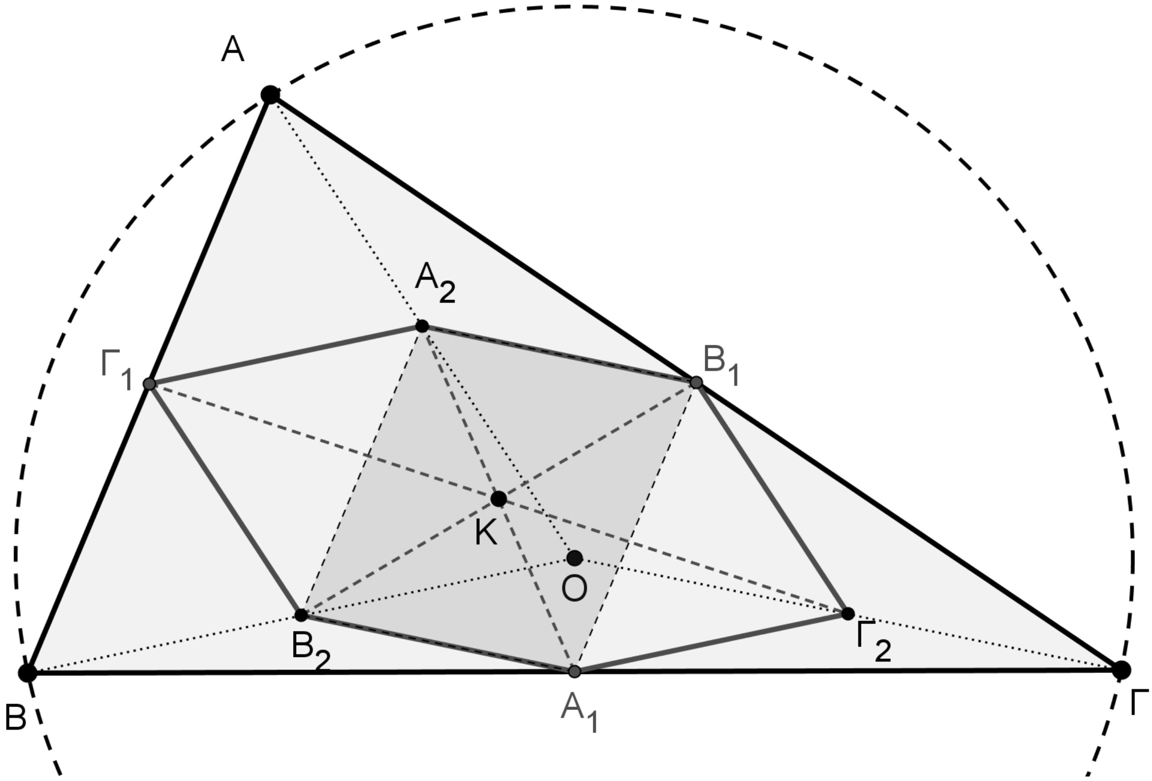
$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}\le\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2ο .

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Αν $Α_1, Β_1, Γ_1$ είναι τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ$ αντίστοιχα και $Α_2, Β_2, Γ_2$ είναι τα μέσα των $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $Α_2Β_1Γ_2Α_1Β_2Γ_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του $Α_1Α_2$, $Β_1Β_2$ και $Γ_1Γ_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Εφόσον Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, θα ισχύει: $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R$.



Σχήμα 6

Το ευθύγραμμο τμήμα $Α_2Β_1$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΟΑΓ$, άρα:

$$Α_2Β_1 = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{R}{2} \qquad (1).$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $Α_1Β_2$ συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου $ΟΒΓ$, άρα:

$$Α_1Β_2 = \frac{ΟΓ}{2} = \frac{R}{2} \qquad (2).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες με $\frac{R}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $Α_1Β_1Α_2Β_2$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται στο σημείο K.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $A_1\Gamma_2A_2\Gamma_1$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε και σε αυτή τη περίπτωση οι διαγώνιες θα διχοτομούνται στο σημείο K.

ΘΕΜΑ 3ο .

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\frac{x-y+2}{2}.$$

Λύση

Οι άρρητες παραστάσεις ορίζονται γιατί δίνεται ότι: $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$.

Αν θέσουμε $\sqrt{x-2009}=a$ και $\sqrt{y+2009}=b$, τότε λαμβάνουμε $x=a^2+2009$ και $y=b^2-2009$, από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση $x+y=a^2+b^2$.

Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a+b=\frac{a^2+b^2}{2}+1 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a-2b+2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=0 \Leftrightarrow a-1=b-1=0 \Leftrightarrow a=b=1,$$

οπότε θα είναι $x=2010, y=-2008$ και $A=2010$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l}(x+y)^3=z-2x-y\\(y+z)^3=x-2y-z\\(z+x)^3=y-2z-x\end{array}\right\} \qquad (\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Λύση

Θέτουμε $x+y=\alpha$, $y+z=\beta$ και $z+x=\gamma$, οπότε το δοσμένο σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha^3+2\alpha=\beta\\\beta^3+2\beta=\gamma\\\gamma^3+2\gamma=\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha(\alpha^2+2)=\beta\\\beta(\beta^2+2)=\gamma\\\gamma(\gamma^2+2)=\alpha\end{array}\right.$$

Από τη τελευταία έκφραση του συστήματος συμπεραίνουμε ότι έχει τη προφανή λύση:

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση.

Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ τότε πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις έχουμε:

$$\alpha\beta\gamma(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)=1.$$

Η τελευταία ισότητα δεν είναι δυνατό να ισχύει , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha=0$ τότε θα ισχύει: $\beta=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\gamma=0$.

Αν υποθέσουμε ότι $\gamma=0$ τότε θα ισχύει: $\alpha=\beta=0$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύστημα δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Άρα το αρχικό σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2+3x(x-2)+11x-10y=2015.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x(x+1)-2y=403 . \qquad (1)$$

Επειδή για όλους τους θετικούς ακέραιους x, y οι αριθμοί $x(x+1)$ και $2y$ είναι άρτιοι θετικοί ακέραιοι και η διαφορά τους $x(x+1)-2y$ θα είναι άρτιος θετικός ακέραιος, οπότε δεν είναι δυνατόν να ισούται με 403.

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x-f(y))-f(y-f(x))=2f(f(x)-f(y)) \text{ , για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξτε ότι $f(x-f(x))=0$,για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το x και παίρνουμε:

$$f(x-f(x))-f(x-f(x))=2f(f(x)-f(x)),$$

οπότε θα είναι $f(0)=0$.

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου x το 0 και παίρνουμε:

$$f(0-f(y))-f(y-f(0))=2f(f(0)-f(y))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f(-f(y))-f(y)=2f(-f(y)) \Leftrightarrow f(-f(y))=-f(y).$$

Θέτουμε (στη τελευταία ισότητα) όπου y το x και έχουμε τη σχέση:

$$f(-f(x))=-f(x). \qquad (1)$$

Θέτουμε στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το 0 και παίρνουμε:

$$f(x-f(0))-f(0-f(x))=2f(f(x)-f(0))$$

και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=0$, καταλήγουμε:

$$f(x)-f(-f(x))=2f(f(x)). \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις *(1)* και *(2)* έχουμε: $f(f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Θέτουμε τέλος στη δοσμένη συναρτησιακή σχέση όπου y το $f(x)$ και χρησιμοποιώντας τη προηγούμενη ισότητα έχουμε $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3°.

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί της μορφής $\overline{\boldsymbol{\alpha}\underbrace{\mathbf{000\cdots000}}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\boldsymbol{\alpha}}$, όπου $\boldsymbol{\alpha}$ είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{00}\cdots\mathbf{00}\boldsymbol{\alpha}}$, μεσολαβούν $\boldsymbol{2\nu}$ το πλήθος μηδενικά. Να αποδείξετε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$ ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το $\boldsymbol{33}$".

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$ διαιρείται με το 11. Πράγματι, κάθε αριθμός της παραπάνω μορφής γράφεται;

$$\begin{aligned}\overline{\alpha 00\cdots 00\alpha} &= \alpha\cdot 10^0 + 0\cdot 10^1 + \cdots + 0\cdot 10^{2\nu} + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha + \alpha\cdot 10^{2\nu+1} = \\ &= \alpha(1+10^{2\nu+1}) = \\ &= \alpha(1+10)(\underbrace{10^{2\nu} - 10^{2\nu-1} + \cdots + 1}_{\kappa}) = 11\alpha\cdot\kappa.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τρεις οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000\cdots000}_{2\nu-\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}\alpha}$. Θα αποδείξουμε ότι: "ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 3 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 3". **(1)**

Αν κάποιος από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ διαιρείται με το 3, τότε προφανώς θα ισχύει η πρόταση.

Έστω ότι το 3 δεν διαιρεί κανένα από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Τότε υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

1) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+1$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3m$

2) Αν όλοι οι αριθμοί είναι της μορφής $3k+2$, τότε προφανώς $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3n$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις ένας τουλάχιστον αριθμός θα είναι της μορφής $3k+1$ και ένας τουλάχιστον της μορφής $3k+2$, οπότε το άθροισμα αυτών των δύο αριθμών θα είναι προφανώς πολλαπλάσιο του τρία.

Επειδή καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ της μορφής $\overline{\alpha 00\cdots 00\alpha}$ διαιρείται με το 11, έπεται ότι και το άθροισμα οσωνδήποτε από αυτούς θα διαιρείται με το 11.

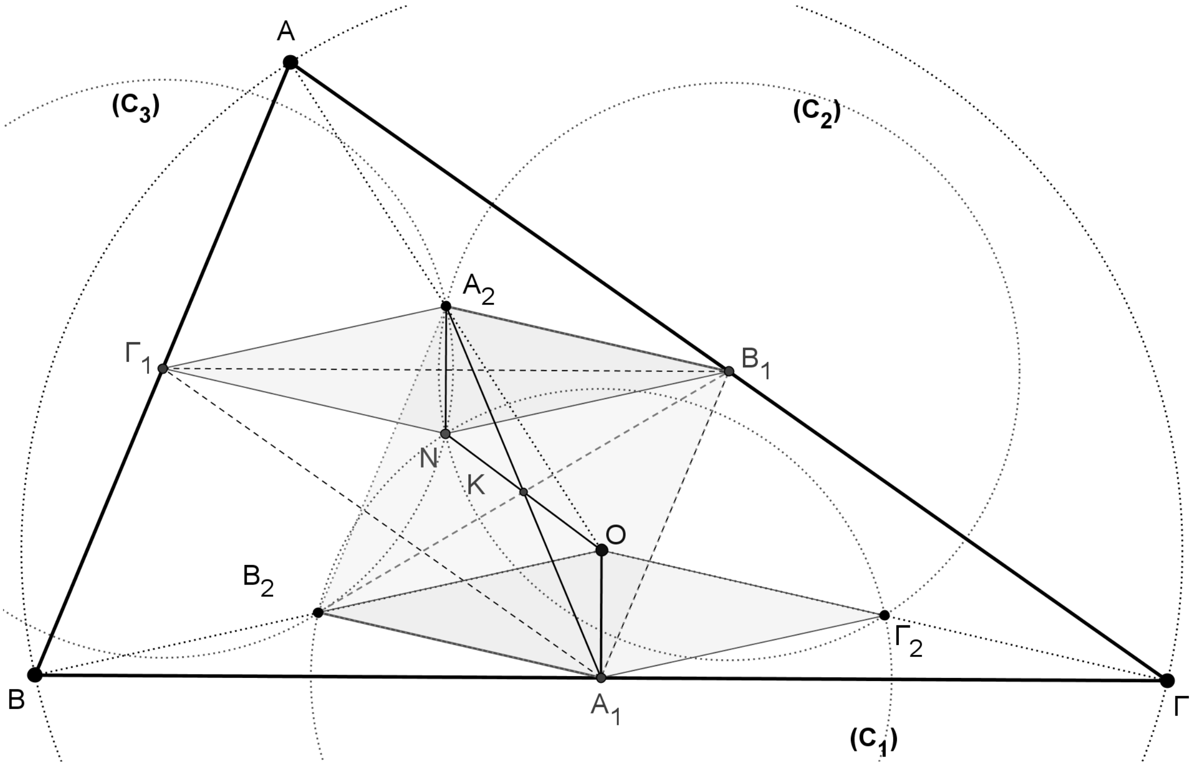
Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες προτάσεις, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 4° .

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών του $\mathrm{B\Gamma}, \mathrm{A\Gamma}, \mathrm{AB}$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(\mathrm{A}_1, \frac{R}{2})$, $C_2(\mathrm{B}_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξτε ότι οι A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\lambda = \frac{1}{2}$, οπότε ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ θα έχει ακτίνα $\frac{R}{2}$.



Σχήμα 7

Οι κύκλοι τώρα που έχουν κέντρα τις κορυφές του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$ και ακτίνα $\frac{R}{2}$ θα περνάνε από το περίκεντρο N του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$. (Το σημείο N είναι το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $AB\Gamma$)

Αν A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα, τότε:

$$A_1B_2 = A_1\Gamma_2 = B_1A_2 = B_1\Gamma_2 = \Gamma_1A_2 = \Gamma_1B_2 = \frac{R}{2}.$$

(Τα παραπάνω τμήματα $A_1B_2, A_1\Gamma_2, B_1A_2, B_1\Gamma_2, \Gamma_1A_2, \Gamma_1B_2$ είναι διάμεσοι προς την υποτείνουσα των ορθογωνίων τριγώνων OA_1B, $OA_1\Gamma$, OB_1A, $OB_1\Gamma$, $O\Gamma_1A$ και $O\Gamma_1B$.)

Άρα τα δεύτερα κοινά σημεία των κύκλων $C_1(A_1, \frac{R}{2})$, $C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και $C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$ είναι τα σημεία A_2, B_2, Γ_2.

Τα τετράπλευρα $\Gamma_1 N B_1 A_2$ και $O B_2 A_1 \Gamma_2$ είναι ρόμβοι με πλευρές μήκους $\frac{R}{2}$ και οι πλευρές του ενός τετραπλεύρου, είναι παράλληλες με τις πλευρές του άλλου ($A_2B_1 = // B_2A_1$, $\Gamma_1A_2 = // A_1\Gamma_2, \ldots.$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Το τετράπλευρο A_2OA_1N είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η A_1A_2 περνά από το μέσο K του ON που είναι μέσο και του A_1A_2.

Το τετράπλευρο $\Gamma_1A_2\Gamma_2A_1$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η $\Gamma_1\Gamma_2$ περνά από το μέσο K του A_1A_2 που είναι μέσο και του $\Gamma_1\Gamma_2$.

Τέλος το τετράπλευρο $B_1\Gamma_1B_2\Gamma_2$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή η B_1B_2 και περνά από το μέσο K του $\Gamma_1\Gamma_2$ που είναι μέσο και του B_1B_2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έστω $x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5$ και $y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2$.

(α) Να βρεθούν οι αριθμοί x και y.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο θετικό ακέραιο A, του οποίου οι αριθμοί x και y είναι πολλαπλάσια.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x = 3^2 - 4\cdot 2^3 : 4 + 2^5 = 9 - 4\cdot 8 : 4 + 32 = 9 - 32 : 4 + 32 = 9 - 8 + 32 = 33.$$

$$y = 4\cdot 5^2 - 4^3 + 7\cdot 3^2 = 4\cdot 25 - 64 + 7\cdot 9 = 100 - 64 + 63 = 99.$$

(β) Για την εύρεση του A αρκεί να βρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των αριθμών x, y. Επειδή είναι $\text{ΜΚΔ}(33,99) = 33$, έπεται ότι θα είναι $A = 33$.

2. Έστω α, β φυσικοί αριθμοί. Δίνεται ότι η Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο τον α και διαιρέτη τον β δίνει πηλίκο 6. Να βρεθεί ο αριθμός α, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ο α είναι πολλαπλάσιο του 7, ενώ ο αριθμός β είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 16, 32 και 248.

Λύση

Με τη γνωστή διαδικασία της διαίρεσης των δεδομένων ακέραιων με τον μικρότερό τους, βρίσκουμε το ΜΚΔ των αριθμών 16, 32 και 248. Έχουμε

$$\begin{array}{ccc} 16 & 32 & 248 \\ 16 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 \end{array},$$

οπότε είναι $\beta = \text{ΜΚΔ}(16,\ 32,\ 248) = 8$.

Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha = 8\cdot 6 + \upsilon = 48 + \upsilon$, όπου υ ακέραιος με δυνατές τιμές από 0 μέχρι και 7. Δοκιμάζοντας τις δυνατές τιμές του υ στην παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι μόνο για $\upsilon = 1$, ο αριθμός $\alpha = 49$ που προκύπτει, είναι πολλαπλάσιο του 7.

Άρα έχουμε $\alpha = 49$ και $\beta = 8$.

3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Ι. Η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ ενώ η παράλληλη από το σημείο Ι προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν είναι $Ι\hat{Δ}Γ = 70^0$ και $Ι\hat{Ε}Γ = 130^0$, να βρεθούν:

α) η γωνία $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) οι γωνίες $Β\hat{Ι}Δ$ και $Ε\hat{Ι}Γ$.

Λύση

α. Εφόσον $ΙΔ//ΑΒ$ θα ισχύει: $\hat{Β} = \hat{Δ}_1 = 70^o$,(ως εντός εκτός επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΔ, ΑΒ$ τεμνομένων από την $ΒΔ$).

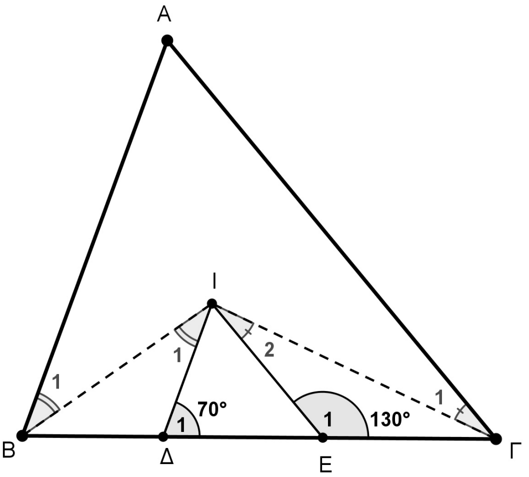
Επειδή είναι $ΙΕ//ΑΓ$, θα ισχύει: $\hat{Γ} = \hat{Ε}_1 = 180^o - 130^o = 50^o$. (Οι γωνίες $\hat{Γ}, \hat{Ε}_1$ είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων $ΙΕ, ΑΓ$ τεμνομένων από την $ΕΓ$).

Οι γωνίες $\hat{Α}, \hat{Β}, \hat{Γ}$ είναι γωνίες του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε θα ισχύει:

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^o \Leftrightarrow \hat{Α} = 180^o - \hat{Β} - \hat{Γ} = 180^o - 70^o - 50^o = 60^o.$$

β. Επειδή η $ΙΔ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Β}$, θα ισχύει: $\hat{Β}_1 = \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$.

Επίσης, επειδή $ΙΔ//ΑΒ$, θα ισχύει: $\hat{Ι}_1 = \hat{Β}_1 = 35^o$, γιατί οι γωνίες $\hat{Ι}_1, \hat{Β}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΔ, ΑΒ$ που τέμνονται από την $ΙΒ$.



Σχήμα 1

Εφόσον $ΙΓ$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$, θα ισχύει: $\hat{Γ}_1 = \frac{\hat{Γ}}{2} = \frac{50^o}{2} = 25^o$.

Επίσης είναι $ΙΕ//ΑΓ$, οπότε θα ισχύει: $\hat{Ι}_2 = \hat{Γ}_1 = 25^o$, αφού οι γωνίες $\hat{Ι}_2, \hat{Γ}_1$ είναι εντός εναλλάξ στις παράλληλες $ΙΕ, ΑΓ$ που τέμνονται από την $ΙΓ$.

4. Ένας αγρότης καλλιέργησε δύο κτήματα με ελαιόδενδρα. Το ένα κτήμα είναι δικό του και έχει 80 ελαιόδενδρα, ενώ το άλλο το μισθώνει και έχει 120 ελαιόδενδρα. Η συνολική παραγωγή λαδιού ήταν 2600 κιλά λάδι. Αν είχε συμφωνήσει να δώσει στον ιδιοκτήτη του μισθωμένου κτήματος το 10% της παραγωγής λαδιού του μισθωμένου κτήματος, πόσα κιλά λάδι θα πάρει ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Καθένα από τα ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων παράγει τα ίδια κιλά λάδι.

β. Κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος έχει απόδοση σε λάδι ίση με το 150% της απόδοσης σε λάδι κάθε ελαιόδενδρου του κτήματος του αγρότη.

Λύση

α. Επειδή θεωρούμε ότι τα 120+80=200 ελαιόδενδρα των δύο κτημάτων είναι της ιδίας απόδοσης σε λάδι, έπεται ότι το λάδι που παράγεται από κάθε ελαιόδενδρο είναι 2600:200=13 κιλά. Επομένως τα 120 ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος παρήγαγαν $120 \cdot 13 = 1560$ κιλά λάδι.

Άρα ο ιδιοκτήτης του μισθωμένου κτήματος θα πάρει $1560 \cdot \frac{10}{100} = 156$ κιλά λάδι.

β. Αν υποθέσουμε ότι τα ελαιόδενδρα του κτήματος του αγρότη παράγουν x κιλά λάδι το καθένα, τότε κάθε ελαιόδενδρο του μισθωμένου κτήματος θα παράγει $x \cdot \frac{150}{100} = \frac{3x}{2}$ κιλά λάδι. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση

$$80 \cdot x + 120 \cdot \frac{3x}{2} = 2600 \Leftrightarrow 80x + 180x = 2600 \Leftrightarrow 260x = 2600 \Leftrightarrow x = \frac{2600}{260} = 10.$$

Επομένως τα ελαιόδενδρα του μισθωμένου κτήματος θα παράγουν $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ κιλά λάδι το καθένα, οπότε το μισθωμένο κτήμα θα παράγει συνολικά $120 \cdot 15 = 1800$ κιλά λάδι και ο ιδιοκτήτης του θα πάρει $1800 \cdot \frac{10}{100} = 180$ κιλά λάδι.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A=7x+10y-3w-87$.

Λύση

Έχουμε $x+y=3\cdot(-2)^2=3\cdot 4=12$ και

$$y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-24}=\left(-\frac{3}{5}\right)^{24}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^{24}.$$

$$=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\right]^{24}=1^{24}=1.$$

Άρα είναι:

$$A=7x+10y-3w-87=7x+7y+3y-3w-87$$
$$=7(x+y)+3(y-w)-87=7\cdot 12+3\cdot 1-87=84+3-87=0.$$

2. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,
(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,
(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,
(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

Λύση

Έστω $\overline{xyzw}=1000\cdot x+100\cdot y+10\cdot z+w$ ο ζητούμενος τετραψήφιος φυσικός αριθμός. Τότε, σύμφωνα με το **(α)** θα είναι $w=0$ ή 4 ή 8, οπότε σύμφωνα με το **(β)** θα είναι $z=0$ ή 2 ή 4, αντίστοιχα. Επίσης, σύμφωνα με το **(γ)** θα είναι $y=1$ ή 5.

Έτσι οι δυνατές μορφές του αριθμού είναι:

$$\overline{x100},\ \overline{x124},\ \overline{x148},\ \overline{x500},\ \overline{x524},\ \overline{x548}.$$

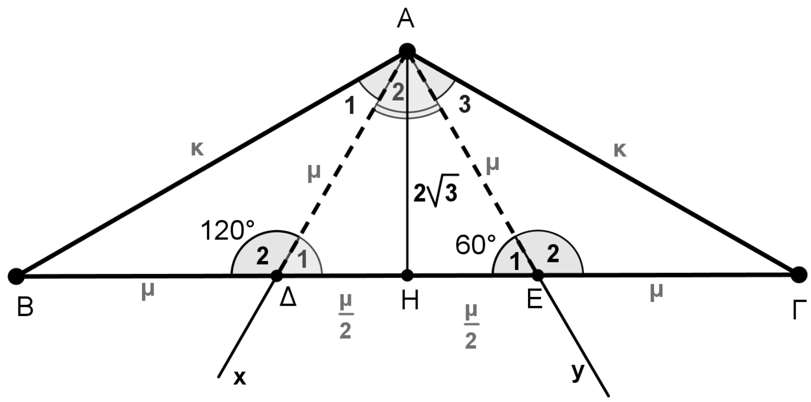
Λαμβάνοντας υπόψη και το (δ) καταλήγουμε στους αριθμούς $4500, 4524, 4548$, αφού το πρώτο ψηφίο τετραψήφιου φυσικού αριθμού δεν μπορεί να είναι το 0.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^0$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Ax και Ay κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα, που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε , αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B=120^0$, $A\hat{E}\Delta=60^0$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.
β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
γ. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Λύση

α. Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι παραπληρωματική της γωνίας $\hat{\Delta}_2 = \mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 120^o$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 = 60^o$. Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι $\hat{\mathrm{E}}_1 = 60^o$. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.



Σχήμα 2

β. Εφόσον οι ημιευθείες ΑΔ (Αx) και ΑΕ (Αy) είναι κάθετες προς τις ΑΓ και ΑΒ, θα ισχύει: $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma - 90^\circ = 120^0 - 90^\circ = 30^o$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν: $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$ (από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΕ), $\hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{E}}_2 = 120^o$ και $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_3 = 30^o$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ είναι ίσα και συνεπώς $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΔΓ που έχουν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = 60^\circ = \mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 30^0$, δηλαδή ΑΒΓ ισοσκελές.

γ. Έστω μ το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ και κ το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε:

$$\mathrm{A}\Delta^2 = \mathrm{AH}^2 + \Delta\mathrm{H}^2 \text{ δηλαδή } \mu^2 = \frac{\mu^2}{4} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3\mu^2}{4} = 12 \Leftrightarrow \mu = 4.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ έχουμε:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AH}^2 + \mathrm{HB}^2, \text{ δηλαδή } \kappa^2 = \left(\frac{3\mu}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \kappa^2 = 48 \Leftrightarrow \kappa = 4\sqrt{3}.$$

Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $12 + 8\sqrt{3}$.

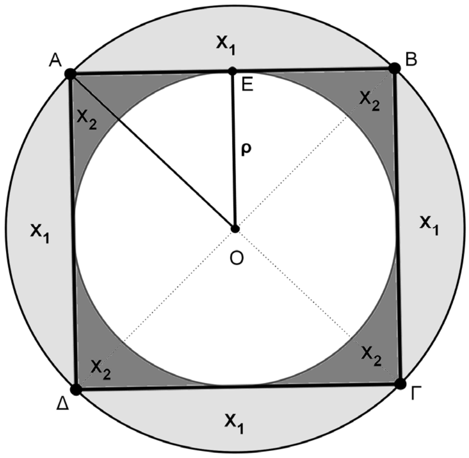
Η περίμετρος του τριγώνου ΑΔΕ είναι 12, οπότε ο λόγος του θα είναι $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ. Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(\mathrm{O},\rho,\mathrm{OA})$ που ορίζεται από τους κύκλους $\mathrm{C}(\mathrm{O},\rho)$ και $\mathrm{C}(\mathrm{O},\mathrm{OA})$.

β. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{X}_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα έχουν λόγο $\frac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\frac{13}{5}$.

γ. Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O,x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O,\rho,OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτύλιους ίσου εμβαδού.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΕ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος λαμβάνουμε $OA^2 = \rho^2 + \rho^2 \Leftrightarrow OA^2 = 2\rho^2 \Leftrightarrow OA = \rho\sqrt{2}$, οπότε είναι

$$E(\Delta(O,\rho,OA)) = \pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho^2 - \pi\rho^2 = \pi\rho^2.$$

(β) Το εμβαδόν του χωρίου X_1 προκύπτει από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας $\rho\sqrt{2}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ.

Άρα είναι

$$E(X_1) = \pi\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - (2\rho)^2 = 2\pi\rho^2 - 4\rho^2 = (2\pi - 4)\rho^2.$$

Το εμβαδόν του χωρίου X_2 προκύπτει από το εμβαδόν του τετράγωνο ΑΒΓΔ, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κυκλικό δίσκου κέντρου Ο και ακτίνας ρ, δηλαδή

$$E(X_2) = (2\rho)^2 - \pi\rho^2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4 - \pi)\rho^2.$$

Άρα είναι $\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi}$ και ισχύει ότι:

$$\frac{E(X_1)}{E(X_2)} = \frac{2\pi - 4}{4 - \pi} > \frac{13}{5} \Leftrightarrow 5(2\pi - 4) > 13(4 - \pi) \Leftrightarrow 23\pi > 72 \Leftrightarrow \pi > \frac{72}{23} \cong 3{,}1304,$$

το οποίο είναι αληθές, αφού είναι $\pi \cong 3{,}14$.

(γ) Θα πρέπει να είναι $\rho < x < \rho\sqrt{2}$ και τα εμβαδά των δύο κυκλικών δακτύλιων που ορίζονται να είναι ίσα, δηλαδή

$$\pi\left[\left(\rho\sqrt{2}\right)^2 - x^2\right] = \pi\left(x^2 - \rho^2\right) \Leftrightarrow 2\rho^2 - x^2 = x^2 - \rho^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 3\rho^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3\rho^2}{2} \Leftrightarrow x = \rho\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14, \quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

Λύση

Η εξίσωση $x^2-5x=14$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-5)=14$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm7,\pm14\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2-5x-14=0, \text{ με } \alpha=1, \beta=-5, \gamma=-14,$$

οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=81$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=7$ ή $x=-2$.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4} \Leftrightarrow 2x-2+x^2-1<x^2-x \Leftrightarrow 3x<3 \Leftrightarrow x<1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η $x=-2$.

2. Αν οι α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

Λύση

$$\begin{aligned}
A&=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4\\
&=\left(\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2\right)-\left(\alpha^2\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta^3\gamma^2+\beta^4\gamma^2\right)-\left(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^4\right)\\
&=\alpha^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\beta^2\gamma^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2\right)=\left[\alpha^2-(\beta\gamma)^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\\
&=(\alpha+\beta\gamma)(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).
\end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}, \quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{y}=w$ και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} x-8w=2 \\ x-4w=13 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ x=13+4w \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ 2+8w=13+4w \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ 8w-4w=13-2 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8w \\ 4w=11 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+8\cdot\dfrac{11}{4} \\ w=\dfrac{11}{4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=2+2\cdot 11 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=24 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{Bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=\left(24,\ \dfrac{4}{11}\right)$

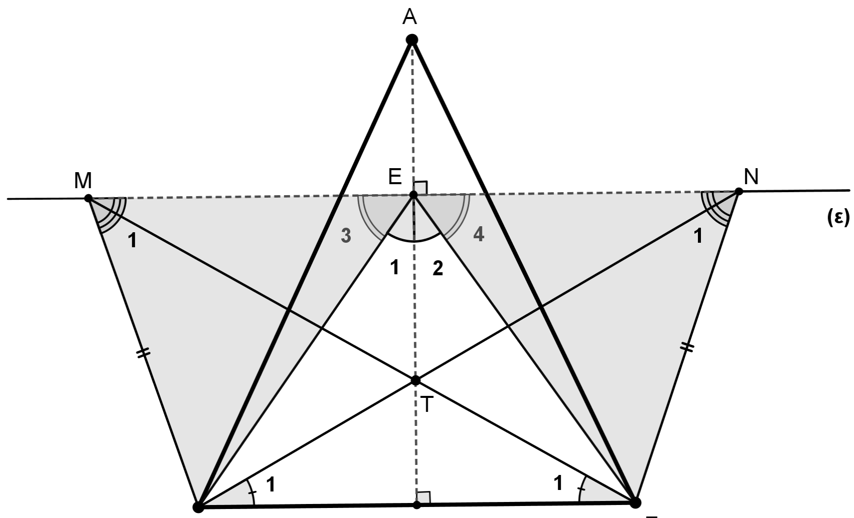
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ και το ύψος του $ΑΔ$. Από τυχόν σημείο $Ε$ του ύψους $ΑΔ$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $ΒΓ$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $Μ, Ν$ έτσι ώστε $ΕΜ=ΕΝ$ και $ΜΒ<ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΓ$ και $ΝΒ$ τέμνονται πάνω στο ύψος $ΑΔ$.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες $(ΑΒ=ΑΓ)$ και δύο οξείες γωνίες $(\hat{Β}=\hat{Γ})$ ίσες. Άρα $ΔΒ=ΔΓ$, δηλαδή το $Δ$ είναι μέσο της $ΒΓ$.

Τα τρίγωνα τώρα $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($ΕΔ$ κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα $ΔΒ=ΔΓ$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν $\hat{Ε}_1=\hat{Ε}_2$ και ΕΒ = ΕΓ.

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει $\hat{Ε}_3=\hat{Ε}_4$ γιατί οι γωνίες $\hat{Ε}_3, \hat{Ε}_4$ είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Ε}_1, \hat{Ε}_2$.



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα $ΕΜΒ$ και $ΕΝΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $ΕΜ=ΕΝ$ (από τα δεδομένα της άσκησης).

2. $ΕΒ=ΕΓ$ (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$).

3. $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{E}_1, \hat{E}_2$).

Άρα θα έχουν $MB = N\Gamma$ και $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$.

Τα τρίγωνα MNB και $MN\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $MN = MN$ (η πλευρά MN είναι κοινή).

2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

3. $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

Άρα θα έχουν και $M\Gamma = NB$.

Τα τρίγωνα τέλος $MB\Gamma$ και $NB\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $B\Gamma = B\Gamma$ (η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή)

2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$)

3. $M\hat{B}\Gamma = M\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = N\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B$

Άρα θα έχουν και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Αν τώρα συμβολίσουμε με T το σημείο τομής των $M\Gamma$ και NB, σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, συμπεραίνουμε ότι η $T\Delta$ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $TB\Gamma$, δηλαδή η $T\Delta$ είναι κάθετη προς τη $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Άρα το σημείο T, θα ανήκει στο ύψος $A\Delta$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2-y-z}=x-2$$
$$\sqrt{y^2-z-x}=y-2$$
$$\sqrt{z^2-x-y}=z-2,$$

να αποδείξετε ότι $x+y+z=6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z.

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες προκύπτει ότι πρέπει να αληθεύουν οι περιορισμοί: $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$, αλλά και οι περιορισμοί $x^2 \geq y+z,\ y^2 \geq z+x$ και $z^2 \geq x+y$. Στη συνέχεια με ύψωση στο τετράγωνο των δύο μελών των δεδομένων εξισώσεων λαμβάνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y-z=x^2-4x+4 \\ y^2-z-x=y^2-4y+4 \\ z^2-x-y=z^2-4z+4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x-y-z=4 \\ -x+4y-z=4 \\ -x-y+4z=4 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε: $x+y+z=6$.

Οι αριθμοί x, y, z προκύπτουν από τις εξισώσεις του συστήματος (1), αν τις γράψουμε στη μορφή

$$\left\{\begin{array}{l} 5x-(x+y+z)=4 \\ 5y-(x+y+z)=4 \\ 5z-(x+y+z)=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x-6=4 \\ 5y-6=4 \\ 5z-6=4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{array}\right\}.$$

Διαφορετικά, αν υποθέσουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ανισότητες $x \geq 2,\ y \geq 2$ και $z \geq 2$ αληθεύει μόνον ως γνήσια ανισότητα, έστω $x > 2$, τότε με πρόσθεση αυτών κατά μέλη προκύπτει ότι $x+y+z>6$, που είναι άτοπο. Άρα θα είναι $x=y=z=2$.

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι κύκλοι $c_1(Α, ΑΒ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_1 = ΑΒ$) και $c_2(Α, ΑΓ)$ (με κέντρο το σημείο $Α$ και ακτίνα $R_2 = ΑΓ$). Ο κύκλος $c_1(Α, ΑΒ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Ε$ και την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Α, ΑΓ)$ τέμνει την ευθεία $ΒΓ$ στο σημείο $Κ$ και την ευθεία $ΑΓ$ στο σημείο $Ν$.

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΓΑ = ΓΒ$ και $\hat{Γ} = 30^{o}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΕΚΝ$ είναι τετράγωνο.

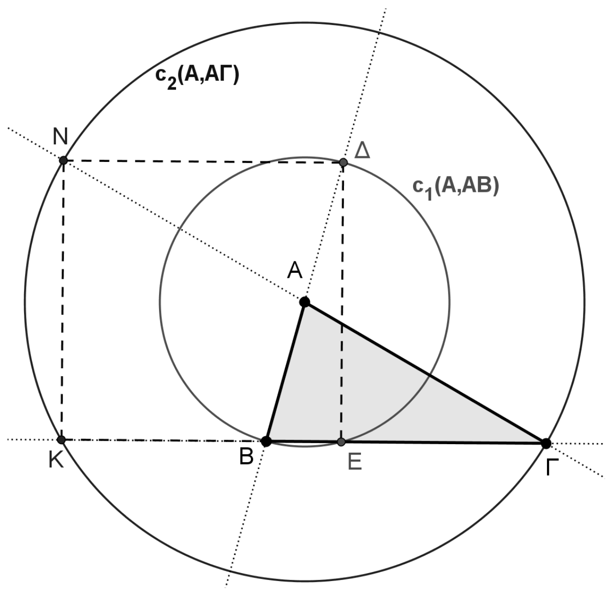
Λύση

α. Η $Β\Delta$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_1(A, AB)$, οπότε A είναι το μέσο του $B\Delta$ και $B\hat{E}\Delta = 90^o$.
Η ΓN (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_2(A, A\Gamma)$, οπότε A είναι το μέσο του ΓN και $\Gamma\hat{K}N = 90^o$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $N\Delta\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιες του διχοτομούνται, οπότε $N\Delta = // B\Gamma$.

Από την ισότητα $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{K}N = 90^o$ προκύπτει ότι οι ευθείες NK και ΔE είναι κάθετες προς την ευθεία ΒΓ, οπότε θα είναι $NK // \Delta E$.

Από τις προηγούμενες παραλληλίες συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι παραλληλόγραμμο και από την ισότητα $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{K}N = 90^o$ καταλήγουμε στο ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.



Σχήμα 5

.

β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $NK\Gamma$ ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^o$, οπότε η κάθετη πλευρά απέναντι από τη γωνία Γ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Άρα θα έχουμε

$$KN = \frac{N\Gamma}{2} = A\Gamma = B\Gamma,$$

οπότε, λόγω της ισότητας ΝΔ = ΒΓ, συμπεραίνουμε ότι ΚΝ = ΝΔ, δηλαδή δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογώνιου ΔΕΚΝ είναι ίσες, οπότε αυτό είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση
Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{4x^2+4x+1}{x}+\frac{4y^2+4y+1}{y}\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } 4(x+y)+8+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 25$$

$$\text{ή αρκεί: } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1.$$

Η τελευταία ανισότητα μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι μέσω της σχέσης

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4,$$

αν θέσουμε $x+y=4$, η οποία αληθεύει γιατί

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2+2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4.$$

Η ισότητα ισχύει για $x=y=2$.

Διαφορετικά, αρκεί να γράψουμε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy}\geq 1\Leftrightarrow xy\leq 4\Leftrightarrow x(4-x)\leq 4\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0$$

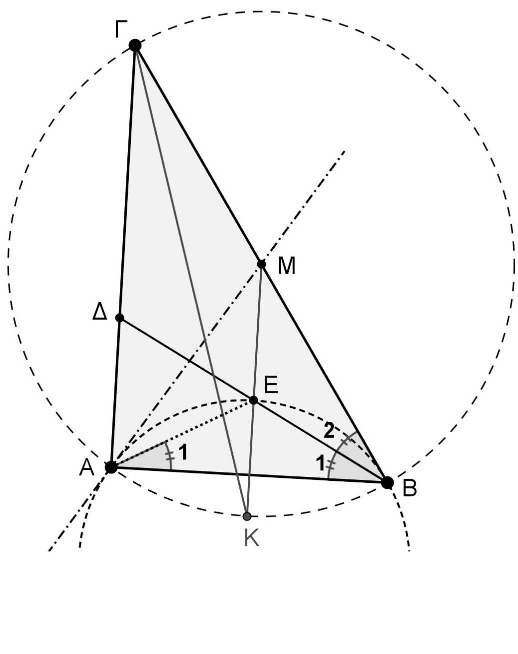
$$\Leftrightarrow (x-2)^2\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Στην τελευταία σχέση η ισότητα ισχύει για $x=y=2$, οπότε και η ζητούμενη σχέση αληθεύει ως ισότητα για $x=y=2$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^\circ)$ και έστω Ε το μέσο της διχοτόμου ΒΔ. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΕΒ στο σημείο Α τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΕ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Επειδή Ε είναι το μέσο της υποτείνουσας ΒΔ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ, θα ισχύει:



Σχήμα 6

$EA = EB$. Άρα το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB και $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επειδή η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, θα ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$, καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$. Άρα η ΓB είναι εφαπτόμενη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AEB και κατά συνέπεια $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε ως εξής:

Οι γωνίες $M\hat{A}E$ και $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι και οι δύο οξείες και η $M\hat{A}E$ είναι γωνία χορδής – εφαπτομένης, ενώ η $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AE του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB. Επομένως θα είναι $M\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2}$, οπότε $M\hat{A}B = \hat{B}$ και το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $MA = MB$, δηλαδή το σημείο M ανήκει στη μεσοκάθετη της πλευράς AB.

Το σημείο M είναι το μέσο της υποτείνουσας $B\Gamma$, οπότε είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τελικά η ME είναι η μεσοκάθετη της πλευράς AB, οπότε θα διέρχεται από το μέσο K του τόξου AB, από το οποίο διέρχεται και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Αν θέσουμε $a=2x^2+3x+1,\ b=x^2+3x+2$, τότε $a-b=x^2-1$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}
a^3-b^3=7(a-b)^3 &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=7(a-b)^3\\
&\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+ab+b^2-7a^2+14ab-7b^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow -(a-b)\left(6a^2-15ab+6b^2\right)=0\\
&\Leftrightarrow a-b=0 \text{ ή } 2a^2-5ab+2b^2=0\\
&\Leftrightarrow a=b \text{ ή } a=2b \text{ ή } 2a=b\\
&\Leftrightarrow x^2-1=0 \text{ ή } -3x-3=0 \text{ ή } 3x^2+3x=0\\
&\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=-1\\
&\Leftrightarrow x=-1 \text{ (τριπλή ρίζα) ή } x=0 \text{ ή } x=1.
\end{aligned}$$

2ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι και στους τρεις όρους των δύο μελών της εξίσωσης υπάρχει ο κοινός παράγοντας $(x+1)^3$, οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

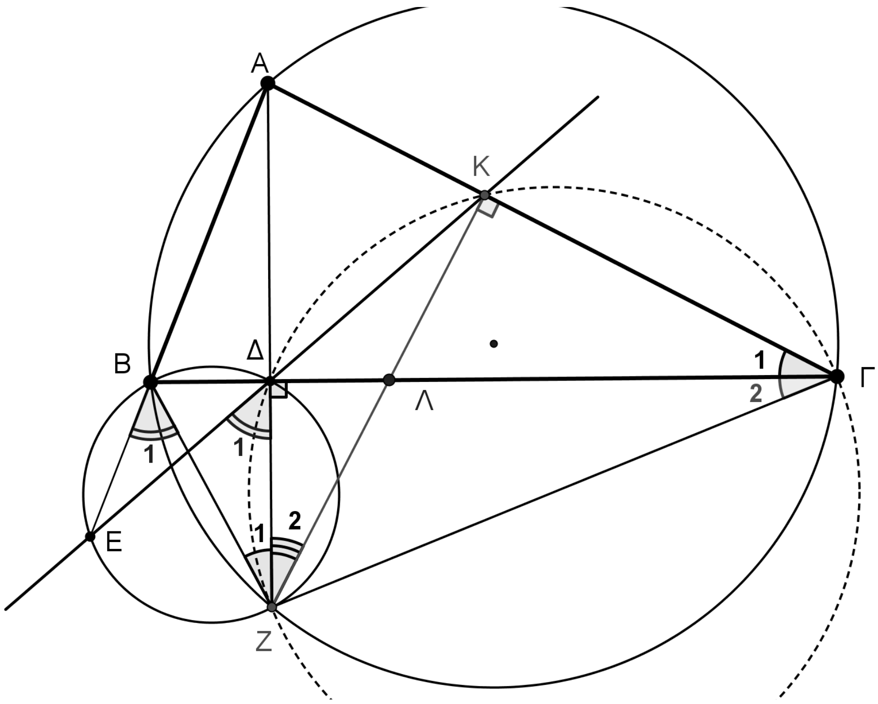
$$\begin{aligned}
&(x+1)^3\left[(2x+1)^3-(x+2)^3-7(x-1)^3\right]=0 \Leftrightarrow x=-1 (\text{τριπλή ρίζα})\\
&\text{ή } 8x^3+12x^2+6x+1-x^3-6x^2-12x-8-7x^3+21x^2-21x+7=0\\
&\qquad \Leftrightarrow x=-1(\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } 27x^2-27x=0\\
&\qquad \Leftrightarrow x=-1(\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=1.
\end{aligned}$$

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Το ύψος του $ΑΔ$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο $Ζ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΔΖ$ τέμνει την ευθεία $ΑΒ$ στο σημείο $Ε$. Αν η ευθεία $ΕΔ$ τέμνει την ευθεία $ΑΓ$ στο $Κ$ και η ευθεία $ΖΚ$ την $ΒΓ$ στο σημείο $Λ$, να αποδείξετε ότι το σημείο $Δ$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $ΒΛ$.

Λύση

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΖΓ$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{Γ}_1+\hat{Γ}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ΑΒΔΖΕ$ έχουμε: $\hat{B}_1=\hat{Δ}_1$.



Σχήμα 7

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, οπότε το τετράπλευρο ΔΚΓΖ είναι εγγράψιμο. Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΖΓ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$, δηλαδή στο τρίγωνο ΒΖΛ η ΖΔ είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε "γύρους". Στον πρώτο "γύρο" ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου "γύρου" κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο "γύρο" ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου "γύρου". Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κλπ.

α. Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.

β. Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρεθεί ο αριθμός των αθλητών που συμμετείχαν.

Λύση

Από την ανάλυση των κανόνων διεξαγωγής του τουρνουά μπορούμε να συμπεράνουμε τα παρακάτω:

Στο 1^o γύρο συμμετέχουν 2^m αθλητές, γίνονται 2^{m-1} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-1} νικητές.

Στο $2^{ο}$ γύρο συμμετέχουν 2^{m-1} αθλητές, γίνονται 2^{m-2} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-2} νικητές.

Στο $3^{ο}$ γύρο συμμετέχουν 2^{m-2} αθλητές, γίνονται 2^{m-3} αγώνες και ανακηρύσσονται 2^{m-3} νικητές και ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία στο $m^{ο}$ γύρο βρίσκουμε ότι συμμετέχουν $2^{m-m+1}=2^1=2$ αθλητές, γίνεται $2^{m-m}=2^0=1$ αγώνας και ανακηρύσσεται $2^{m-m}=2^0=1$ νικητής.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι:

Συνολικά γίνονται m "γύροι" και $2^{m-1}+2^{m-2}+2^{m-3}+\cdots+2+1=2^m-1$ αγώνες.

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\alpha^n-1=(\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\cdots+\alpha+1).$$

α. Αν τώρα ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε $m=3k$, όπου k θετικός ακέραιος, και το συνολικό πλήθος των αγώνων γράφεται:

$$2^m-1=2^{3k}-1=\left(2^3\right)^k-1=8^k-1=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)=7n,$$

όπου n θετικός ακέραιος.

β. Ο πρωταθλητής έχει παίξει και στους m γύρους, οπότε οι βαθμοί που θα συγκεντρώσει είναι:

$$10+20+30+\cdots+(m\cdot 10)=10(1+2+3+\cdots+m)=10\cdot\frac{m(m+1)}{2}=5m(m+1).$$

Άρα προκύπτει η εξίσωση:

$$5m(m+1)=210\Leftrightarrow m(m+1)=42\Leftrightarrow m=6,$$

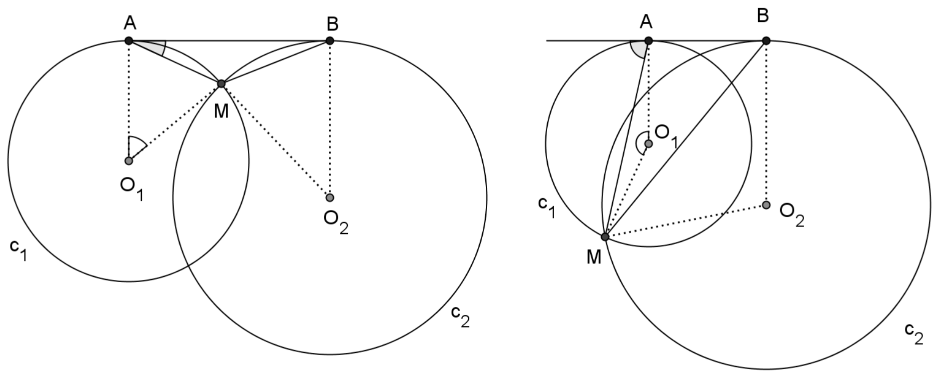
δηλαδή συμμετείχαν $2^6=64$ αθλητές.

4. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1=(O_1,r_1)$ και $c_2=(O_2,r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία A και B αντιστοίχως. Αν το M είναι κοινό σημείο των c_1,c_2 και ισχύει $r_1<r_2$, να αποδείξετε ότι $MA<MB$.

Λύση

Είναι $MA=2r_1\cdot\eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_1A}{2}\right)$ και $MB=2r_2\cdot\eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_2B}{2}\right)$, οπότε

$$\frac{MA}{MB}=\frac{r_1\cdot\eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_1A}{2}\right)}{r_2\cdot\eta\mu\left(\dfrac{M\hat{O}_2B}{2}\right)}. \qquad (1)$$



Σχήμα 8

Η γωνία $\frac{M\hat{O}_1A}{2}$ ισούται πάντοτε με μια από τις δύο γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB, και επειδή αυτές οι δύο είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, τα ημίτονα και των τριών γωνιών είναι ίσα. Καθώς $M\hat{A}B$ είναι μια από τις γωνίες υπό της χορδής MA και της εφαπτομένης AB θα έχουμε $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)=\eta\mu(M\hat{A}B)$. Ομοίως, ισχύει ότι $\eta\mu\left(\frac{M\hat{O}_1A}{2}\right)=\eta\mu(M\hat{B}A)$ και η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{MA}{MB}=\frac{r_1\cdot\eta\mu(M\hat{A}B)}{r_2\cdot\eta\mu(M\hat{B}A)} \qquad (2)$$

Από το θεώρημα ημιτόνων στο τρίγωνο MAB έχουμε $\frac{\eta\mu(M\hat{A}B)}{\eta\mu(M\hat{B}A)}=\frac{MB}{MA}$, οπότε η σχέση (2) δίνει

$$\frac{MA}{MB}=\frac{r_1\cdot MB}{r_2\cdot MA}\Rightarrow\left(\frac{MA}{MB}\right)^2=\frac{r_1}{r_2}<1\Rightarrow MA<MB\,.$$

Σημείωση

Η προηγούμενη λύση αφορά τεμνόμενους κύκλους, αλλά και κύκλους εφαπτόμενους εξωτερικά.

Τα σημεία A, B, M πάντοτε δημιουργούν τρίγωνο, αφού τα A, B είναι διακεκριμένα από την υπόθεση, και το M δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα από τα A, B (αφού σε διαφορετική περίπτωση η ευθεία AB θα είχε με κάποιον από τους δοσμένους κύκλους δύο τουλάχιστον κοινά σημεία και δεν θα ήταν εφαπτομένη του).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)$$
$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός και το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2}{\nu-\frac{1}{5}}:\frac{\nu-\frac{\nu}{2}}{9}.$$

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\frac{10}{\nu}$ παριστάνει φυσικό αριθμό και ο αριθμός ν είναι πρώτος φυσικός αριθμός, έπεται ότι οι δυνατές τιμές του ν είναι $\nu=2$ ή $\nu=5$.

- Για $\nu=2$,έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{2-\frac{1}{5}}:\dfrac{2-\frac{2}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{9}{5}}:\dfrac{2-1}{9}=\dfrac{10}{9}:\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}\cdot 9=10$.
- Για $\nu=5$, έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2}{5-\frac{1}{5}}:\dfrac{5-\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{2}{\frac{24}{5}}:\dfrac{\frac{5}{2}}{9}=\dfrac{10}{24}:\dfrac{5}{18}=\dfrac{10}{24}\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{180}{120}=\dfrac{3}{2}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις αριθμοί α , β , γ είναι ανάλογοι με τους αριθμούς 3 , 9 , 11 αντίστοιχα. Αν πάρουμε τον αριθμό γ ως μειωτέο και τον αριθμό α ως αφαιρετέο, τότε προκύπτει διαφορά ίση με 56. Να βρεθούν οι αριθμοί α , β και γ.

Λύση

Από την πρώτη υπόθεση του προβλήματος έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{9}=\frac{\gamma}{11}=\omega$, οπότε θα είναι $\alpha=3\omega$, $\beta=9\omega$ και $\gamma=11\omega$. Έτσι από τη δεύτερη υπόθεση του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\gamma-\alpha=56 \Leftrightarrow 11\omega-3\omega=56 \Leftrightarrow 8\omega=56 \Leftrightarrow \omega=7 .$$

Άρα είναι: $\alpha=3\cdot 7=21$, $\beta=9\cdot 7=63$ και $\gamma=11\cdot 7=77$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΔ κατά το ευθύγραμμο τμήμα ΔΗ έτσι ώστε ΑΔ = ΔΗ. Από το σημείο Η φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ζ.

1. Να αποδείξετε ότι : $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\text{Ε}\hat{\Delta}\text{Ζ}$, αν γνωρίζετε ότι : $\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}=20^0$.

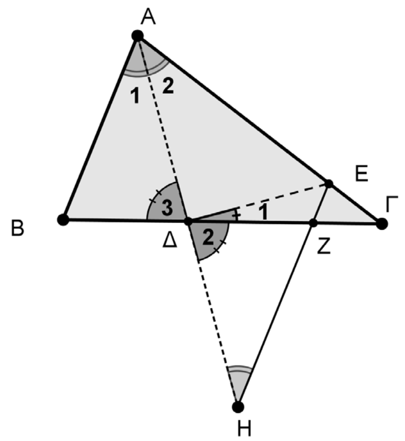
Λύση

1. Επειδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$, θα ισχύει: $\hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Α}}_2=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}$.

Από την παραλληλία των ΑΒ και ΖΗ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Η}}$ (εντός εναλλάξ).

Άρα θα ισχύει $\hat{\text{Α}}_2=\hat{\text{Η}}$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΗ είναι ισοσκελές.

Το Δ είναι το μέσο της βάσης ΑΗ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, οπότε η διάμεσος ΕΔ θα είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΕΗ, δηλαδή θα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΗ}$ και $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$



2. Επειδή $\Gamma\hat{\Delta}\text{Ε}=\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε}=90^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{\text{Ε}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\hat{\Delta}_3 .$$

Σχήμα 1

Η $\hat{\Delta}_3$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ, δηλαδή παραπληρωματική της γωνίας $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma$, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_3=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}+\hat{\Gamma}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε:

$$\hat{\text{Ε}}_1=90^\circ-\hat{\Delta}_2=90^\circ-\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\text{Α}}}{2}+\frac{\hat{\text{Β}}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\frac{\hat{\text{Α}}}{2}-\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{20^o}{2}=10^o .$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

Λύση

Έχουμε:

$\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1+3} = 10^2$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5+7} = 10^2$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000 = 10^{-1} \cdot 10^3 = 10^2$.

Άρα η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{6 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2}{10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2 + 10^2 \cdot 10^2} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^{2+2+2}}{10^{2+2} + 10^{2+2} + 10^{2+2}} \right)^{-2} = \left(\frac{6 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} \right)^{-2}$$

$$= \left(2 \cdot 10^{6-4} \right)^{-2} = \left(2 \cdot 10^2 \right)^{-2} = \frac{1}{\left(2 \cdot 10^2 \right)^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{4 \cdot 100} = \frac{1}{400}$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \qquad \text{και} \qquad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x .$$

Λύση

Λύνουμε καθεμία από τις ανισώσεις. Έχουμε:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{x}{2} - 4 \cdot \frac{x-5}{4} \le 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 2x - (x-5) \le 8 \Leftrightarrow 2x - x + 5 \le 8 \Leftrightarrow x \le 3 .$$

$$\frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{2} - \frac{6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow \frac{\frac{x-6}{2}}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6}{8} - \frac{2x-9}{8} \le x \Leftrightarrow 8 \cdot \frac{x-6}{8} - 8 \cdot \frac{2x-9}{8} \le 8 \cdot x \Leftrightarrow x - 6 - (2x-9) \le 8x$$

$$\Leftrightarrow x - 6 - 2x + 9 \le 8x \Leftrightarrow 3 \le 9x \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le x \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν όταν $\frac{1}{3} \le x \le 3$, οπότε οι ακέραιοι που συναληθεύουν τις δύο ανισώσεις είναι οι 1,2 και 3.

Πρόβλημα 3

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $\mathrm{K}(2,8)$.

(α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ .

(β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda\left(-4,-4\right)$ και $\mathrm{M}\left(-1,2\right)$ ανήκουν στην ευθεία $\left(\varepsilon\right)$ και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Λύση

(α) Επειδή είναι $\left(\varepsilon\right)\|\left(\delta\right)$, οι δύο ευθείες θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε προκύπτει η εξίσωση $3\lambda-1=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=1$. Έτσι η εξίσωση της ευθείας $\left(\varepsilon\right)$ γίνεται $y=2x+2\mu$. Επιπλέον, από την υπόθεση, το σημείο $\mathrm{K}\left(2,8\right)$ ανήκει στην ευθεία $\left(\varepsilon\right)$, οπότε θα ισχύει: $8=2\cdot 2+2\mu \Leftrightarrow 2\mu=4 \Leftrightarrow \mu=2$. Άρα έχουμε:

$$\lambda=1,\ \mu=2 \quad \text{και} \quad \left(\varepsilon\right):\ y=2x+4.$$

(β) Επειδή ισχύουν $2\cdot\left(-4\right)+4=-4$ και $2\cdot\left(-1\right)+4=2$, τα σημεία $\Lambda\left(-4,-4\right)$ και $\mathrm{M}\left(-1,2\right)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας $\left(\varepsilon\right)$, οπότε αυτά είναι σημεία της ευθείας $\left(\varepsilon\right)$. Επιπλέον, παρατηρούμε οι αποστάσεις του σημείου Μ από τα σημεία Κ και Λ είναι ίσες. Πράγματι, έχουμε

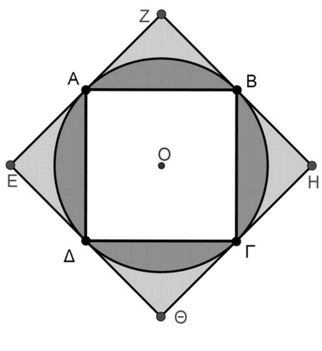
$$\mathrm{MK}=\sqrt{\left(2+1\right)^2+\left(8-2\right)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

$$\mathrm{M\Lambda}=\sqrt{\left(-4+1\right)^2+\left(-4-2\right)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

Επομένως το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C\left(\mathrm{O},\rho\right)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



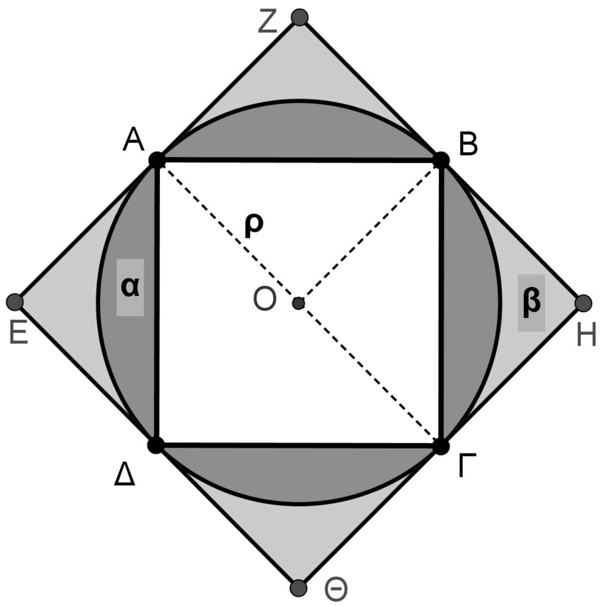
(α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C\left(\mathrm{O},\rho\right)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

(β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C\left(\mathrm{O},\rho\right)$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_2}<\dfrac{4}{3}$. (Θεωρείστε ότι $\pi=3{,}1415$).

Λύση

1. Επειδή είναι ΟΑ = ΟΒ, $\mathrm{OA}\perp\mathrm{EZ}$ και $\mathrm{OB}\perp\mathrm{ZH}$, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΒ είναι τετράγωνο, οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο στο Ο. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:
$$\mathrm{AB}^2=\rho^2+\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2=2\rho^2 \Leftrightarrow \mathrm{AB}=\rho\sqrt{2}.$$
Άρα το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $2\rho^2$. Το εμβαδόν του κύκλου είναι $\pi\rho^2$, οπότε το άθροισμα Σ_1, θα είναι:
$$\Sigma_1=\pi\rho^2-2\rho^2=(\pi-2)\rho^2$$



Σχήμα 2

2. Επειδή είναι $\mathrm{OA} \perp \mathrm{EZ}$ και $\mathrm{O\Gamma} \perp \mathrm{H\Theta}$, έπεται ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου $C(\mathrm{O}, \rho)$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΗΖ είναι ορθογώνιο, οπότε $\mathrm{ZH} = 2\rho$. Επομένως το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι ίσο με $4\rho^2$. Άρα έχουμε:

$$\Sigma_2 = 4\rho^2 - \pi\rho^2 = (4-\pi)\rho^2.$$

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε:

$$\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{(\pi-2)\rho^2}{(4-\pi)\rho^2} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(\pi-2) < 4(4-\pi) \Leftrightarrow 3\pi - 6 < 16 - 4\pi$$

$$\Leftrightarrow 7\pi < 22 \Leftrightarrow \pi < \frac{22}{7} = 3{,}1428...., \text{ που ισχύει.}$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\begin{Bmatrix} (x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2} \end{Bmatrix}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1,\ \beta=-7,$ $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x \Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$

$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2}=\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+\left(1+x\right)^3}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)}{x^2+1}=\frac{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=x^2+x+1-\left(x+1\right)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa\left(x+2\right)-\frac{3\left(\kappa x-1\right)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa\left(x+2\right)-3\left(\kappa x-1\right)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$

$$\Leftrightarrow\left(\kappa+1\right)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-5$ και είναι αδύνατη.

2. Αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{8\kappa+3}{\kappa+1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x=\frac{8\kappa+3}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\left(\kappa+1\right)-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$x=8-\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\kappa+1\in\{-1,1,-5,5\}\Leftrightarrow\kappa\in\{-2,0,-6,4\}.$$

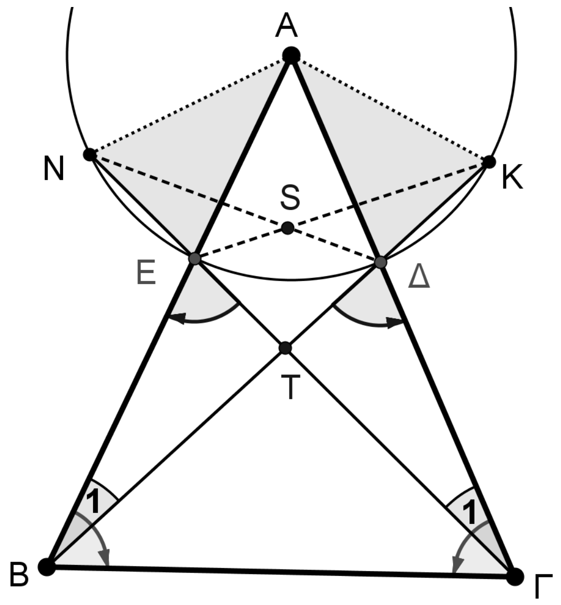
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΕΓ, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{\text{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$\text{B}\hat{\text{T}}\Gamma = \Gamma\hat{\text{T}}\text{B}. \qquad (1)$$

- $\text{A}\hat{\Delta}\text{B} = \text{A}\hat{\text{E}}\Gamma$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$\text{B}\hat{\text{E}}\Gamma = \text{B}\hat{\Delta}\Gamma \qquad (2)$$

- $$\Delta\text{B} = \Delta\Gamma. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $\text{B}\hat{\text{T}}\Gamma = \Gamma\hat{\text{T}}\text{B}$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $\text{BT}\Gamma$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $\text{B}\Gamma$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\text{BT}\Gamma$ έχουμε: $\text{TB} = \text{T}\Gamma$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $\text{TE} = \text{T}\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $\text{B}\hat{\text{E}}\Gamma = \text{B}\hat{\Delta}\Gamma$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $\text{A}\Delta\text{K}$ και AEN. Άρα $\Delta\text{K} = \text{EN}$ και επειδή $\text{TE} = \text{T}\Delta$, καταλήγουμε $\text{TK} = \text{TN}$.

Από τις ισότητες $\text{TE} = \text{T}\Delta$ και $\text{TK} = \text{TN}$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων ETK και ΔTN.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $\text{SEN} = \text{S}\Delta\text{K}$ και στη συνέχεια η ισότητα $\text{SAE} = \text{SAK}$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\text{A}}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\mathrm{K}(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2},\ x\neq\pm\sqrt{2}.$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}.$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

Λύση

(α) Εκτελούμε τις πράξεις και παραγοντοποιούμε τον αριθμητή της παράστασης:

$$\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}=\frac{(x+2)\left(2x^2-3x+1\right)+x-4}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x^3-3x^2+x+4x^2-6x+2+x-4}{x^2-2}=\frac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$$

$$=\frac{2x\left(x^2-2\right)+x^2-2}{x^2-2}=\frac{\left(x^2-2\right)(2x+1)}{x^2-2}=2x+1.$$

(β) Για $x=2010$ η προηγούμενη παράσταση γίνεται ίση με την Α, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{A}=\mathrm{K}(2010)=2\cdot 2010+1=4021.$$

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2},$$

με άγνωστο το x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,b,c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

Λύση

Για $a=b$ η εξίσωση γίνεται: $\dfrac{2}{x-a}=\dfrac{1}{c^2}\Leftrightarrow x=a+2c^2$.

Έστω $a\neq b$. Τότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$(x-a)(x-b)=c^2(x-a+x-b),\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b$$

$$\Leftrightarrow x^2-\left(a+b+2c^2\right)x+ab+(a+b)c^2=0,\ \text{με}\ x\neq a\ \text{και}\ x\neq b \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\Delta=\left(a+b+2c^2\right)^2-4ab-4(a+b)c^2=(a+b)^2-4ab+4c^4=(a-b)^2+4c^4>0,$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες

$$x_{1,2}=\frac{a+b+2c^2\pm\sqrt{(a-b)^2+4c^4}}{2}. \qquad (2)$$

Οι δύο ρίζες είναι δεκτές, αν τα a και b δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Για $x=a$ η εξίσωση γίνεται: $(a-a)(x-b)=c^2(a-a+x-b)\Leftrightarrow 0=c^2(a-b)$, που είναι άτοπο, αφού είναι $c \neq 0$ και έχουμε υποθέσει ότι $a \neq b$. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο για $x = b$. Επομένως, για $a \neq b$, η δεδομένη εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες στο $\mathbb{R}$ που δίνονται από τις ισότητες (2).

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y = x^3 + 2x - 2,\ z = y^3 + 2y - 2,\ x = z^3 + 2z - 2.$$

Λύση

Με αφαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος λαμβάνουμε:

$$y - z = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + 2\right) \qquad (1)$$

$$z - x = (y - z)\left(y^2 + yz + z^2 + 2\right) \qquad (2)$$

Επειδή είναι $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$ και ομοίως προκύπτει ότι $y^2 + yz + z^2 + 2 = \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3z^2}{4} + 2 > 0$, αν υποθέσουμε ότι είναι $x > y$, τότε από την (1) λαμβάνουμε ότι $y > z$. Στη συνέχεια από τη σχέση (2) λαμβάνουμε $z > x$.

Έτσι έχουμε $x > y > z > x$, άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $x < y$. Επομένως έχουμε $x = y,$ οπότε θα είναι και $y = z$. Τότε από τις αρχικές εξισώσεις έχουμε:

$$x = x^3 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 + x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{\mathrm{A}}$, $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι:

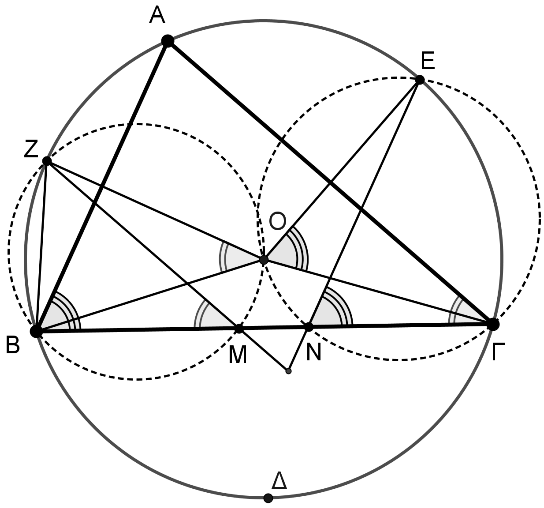
α) Τα τετράπλευρα BMOZ και $\mathrm{\Gamma NOE}$ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Delta\mathrm{I}$, όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$.

Λύση

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $\mathrm{A\Gamma}$, θα ισχύει: $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $\mathrm{Z\hat{O}B}$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $\mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{Z\hat{M}B} = \mathrm{Z\hat{O}B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τετράπλευρο BMOZ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 4

Ομοίως προκύπτει ότι $E\hat{N}\Gamma = E\hat{O}\Gamma = \hat{B}$ και ότι το τετράπλευρο ΓΝΟΕ είναι εγγράψιμο.

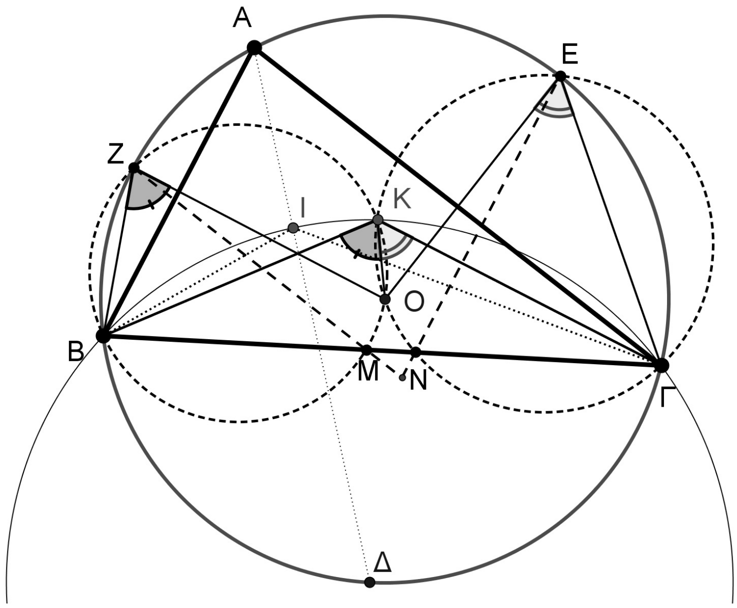
β) Επειδή το σημείο Ι είναι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{I}B = \Delta\hat{B}I = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} \text{ και } \Delta\hat{I}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\Delta B = \Delta I = \Delta\Gamma$ και επίσης εύκολα προκύπτει ότι: $B\hat{I}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία Β, Ι, Κ, Γ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι

$$B\hat{K}\Gamma = \hat{A} + \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} = B\hat{I}\Gamma.$$



Σχήμα 5

Το τρίγωνο ΟΒΖ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OB} = \mathrm{OZ} = R)$, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{Z} = \hat{\Gamma}$. Άρα $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} = 90^{\mathrm{o}} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$. Το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OE} = R)$, με $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}$. Άρα $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^{o} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Έτσι ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\mathrm{B} + \mathrm{O}\hat{\mathrm{K}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{O} + \Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} = 90^{o} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^{o} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$

$$= 180^{o} - \left(90^{\circ} - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 90^{\circ} + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι τα τριώνυμα x^2+3x+2 και x^2+x-2 έχουν παράγοντα το $x+2$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+2\right)^4\left[\left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^4=0 \text{ ή } \left(x+1\right)^4+\left(x-1\right)^4-16=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } 2x^4+12x^2-14=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^4+6x^2-7=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x^2=1 \text{ ή } x^2=-7 \text{ (αδύνατη)}$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4) ή } x=1 \text{ ή } x=-1.$$

2ος τρόπος

Αν θέσουμε $a=x^2+3x+2,\ b=x^2+x-2$, τότε $a-b=2x+4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$a^4+b^4=\left(a-b\right)^4 \Leftrightarrow a^4+b^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

$$\Leftrightarrow -ab\left(2a^2-3ab+2b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } 2a^2-3ab+2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0,$$

αφού η εξίσωση $2a^2-3ab+2b^2=0$, αν $ab\neq 0$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2u^2-3u+2=0,\ u=\frac{a}{b},$$

η οποία δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε:

$$a=0 \text{ ή } b=0 \text{ ή } a=b=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \text{ ή } x^2+x-2=0 \text{ ή } x^2+3x+2=x^2+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=-2 \text{ (διπλή)}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ (με πολλαπλότητα 4)}$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, , αν το σύστημα

$$\left.\begin{cases}\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda\\ 2x-y=-\lambda\end{cases}\right\},\qquad (\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, δια κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{Bmatrix} \alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda \\ 2x-y=-\lambda \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\left(x^2+\left(2x+\lambda\right)^2\right)+2x+2x+\lambda=\lambda \\ y=2x+\lambda \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 5\alpha x^2+4\left(\alpha\lambda+1\right)x+\alpha\lambda^2=0 & (1) \\ y=2x+\lambda & (2) \end{Bmatrix}$$

Αν ήταν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 16\left(\alpha\lambda+1\right)^2 - 20\alpha^2\lambda^2 = 4\left(-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4\right)$$

Επειδή το σύστημα έχει λύση στο $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή της παραμέτρου λ, έπεται ότι θα είναι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4 \geq 0 . \qquad (3)$$

Όμως , το τριώνυμο $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4$ έχει διακρίνουσα $\Delta' = 80\alpha^2 > 0$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (αφού είναι $\lambda_1\lambda_2 = -\dfrac{4}{\alpha^2} < 0$).

Επομένως θα έχουμε $-\alpha^2\lambda^2+8\alpha\lambda+4<0$, για $\lambda<\lambda_1$ ή $\lambda>\lambda_2$, άτοπο.

Για $\alpha=0$ η εξίσωση (1) έχει τη λύση $x=0$, οπότε προκύπτει ότι $y=\lambda$ και το σύστημα έχει τη λύση $(x,y)=(0,\lambda)$. Άρα είναι $\alpha=0$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n = a_n - a_{n-1}$, με $n=1,2,.3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = a_1 - a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0, ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n > 10^3$ και $S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3$.

Λύση

1. Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε:

$$d_1 = \omega,\ d_n = d_1 + (n-1)\omega = n\omega, n = 2,3,\dots .$$

οπότε θα είναι:

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \left(a_1 - a_0\right) + \left(a_2 - a_1\right) + \ldots + \left(a_n - a_{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \omega + 2\omega + \ldots + n\omega = a_n - a_0 \Leftrightarrow a_n = a_0 + \left(1 + 2 + \ldots + n\right)\omega$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2}\omega.$$

Για το άθροισμα S_{n+1} έχουμε:

$$S_{n+1}=a_0+a_1+\cdots+a_n=(n+1)a_0+\left(\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left((1^2+1)+(2^2+2)+\ldots+(n^2+n)\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\omega+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\omega$$

$$=(n+1)a_0+\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)\omega=(n+1)a_0+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\omega.$$

2. Αν είναι $a_0=1$ και $a_1=7$, τότε έχουμε $\omega=6$ και

$$a_n=1+3n(n+1),\ S_{n+1}=n+1+n(n+1)(n+2)=(n+1)\left[1+n(n+2)\right]=(n+1)^3.$$

Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα των ανισώσεων:

$$a_n>10^3 \text{ και } S_{n+1}\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow a_n=1+3n(n+1)>10^3,\ S_{n+1}=(n+1)^3\le 8\cdot 10^3 \Leftrightarrow$$

$$n(n+1)>333,\ n+1\le 2\cdot 10 \Leftrightarrow n>18,\ n\le 19 \Leftrightarrow n=18 \text{ ή } n=19.$$

αφού είναι $17\cdot 18=306,\ 18\cdot 19=342$.

Άρα ο ζητούμενος ελάχιστος θετικός ακέραιος n είναι ο 18.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Τ, τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}\Gamma}$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$ στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α, Ι, Λ, Μ και Α, Ι, Κ, Ν είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

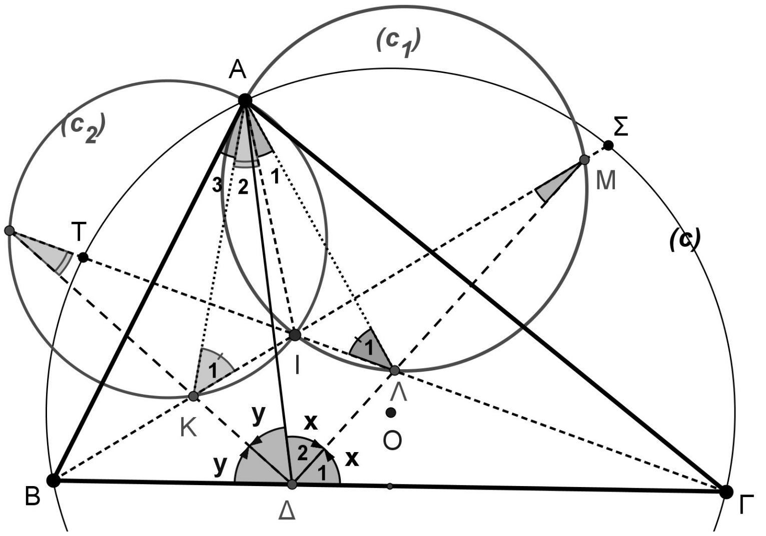
β) Αν η ΑΔ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχεί στη κορυφή Α τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

α) Από την κατασκευή των διχοτόμων συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Κ, Λ είναι τα έκκεντρα των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ αντίστοιχα.

Ισχύει τώρα η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}}_1=\mathrm{I\hat{A}\Gamma}-\mathrm{\Lambda\hat{A}\Gamma}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma}}{2}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-\frac{180^0-2\hat{x}-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}-90^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2}+\hat{x}=\hat{x}-\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$$



Σχήμα 6

Από το τρίγωνο $M\Delta B$ έχουμε: $\hat{x}=\hat{M}+\frac{\hat{B}}{2}\Leftrightarrow \hat{M}=\hat{x}-\frac{\hat{B}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_1=\hat{M}=\hat{x}-\frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $AI\Lambda M$ είναι εγγράψιμο.

Ισχύει επίσης η ισότητα των γωνιών:

$$\hat{A}_2=I\hat{A}B-K\hat{A}B=\frac{\hat{A}}{2}-\frac{\Delta\hat{A}B}{2}=\frac{\hat{A}}{2}-\frac{180^0-2\hat{y}-\hat{B}}{2}=\frac{\hat{A}}{2}-90^o+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{y}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από το τρίγωνο $N\Delta\Gamma$ έχουμε: $\hat{y}=\hat{N}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}\Leftrightarrow \hat{N}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$, δηλαδή $\hat{A}_2=\hat{N}=\hat{y}-\frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Άρα το τετράπλευρο $AIKN$ είναι εγγράψιμο.

β) Εφόσον I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$A\hat{I}B=\hat{\Gamma}+\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=90^o+\frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } A\hat{I}\Gamma=\hat{B}+\frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}=90^o+\frac{\hat{B}}{2}.$$

Από το τρίγωνο AIK έχουμε:

$$\hat{K}_1=180^o-A\hat{I}B-\hat{A}_2=180^o-90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{N}=90^o-\frac{\hat{\Gamma}}{2}-\hat{y}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=90^o-\hat{y}.$$

Από το τρίγωνο $AI\Lambda$ έχουμε:

$$\hat{\Lambda}_1=180^o-A\hat{I}\Gamma-\hat{A}_1=180^o-90^o-\frac{\hat{B}}{2}-\hat{M}=90^o-\frac{\hat{B}}{2}-\hat{x}+\frac{\hat{B}}{2}=90^o-\hat{x}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $A\Delta\perp B\Gamma$ τότε $\hat{x}=\hat{y}=45^o$, οπότε $\hat{K}_1=\hat{\Lambda}_1$.

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι (οι ίσες γωνίες $\hat{K}_1,\hat{\Lambda}_1$ βαίνουν στη κοινή χορδή AI).

Παρατηρήσεις

α) Τα κέντρα των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκονται επάνω στην ΣT.

β) Το σημείο A είναι το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου $\Delta KI\Lambda MN$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
20 Οκτωβρίου 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right).$$

Λύση

$$\mathrm{A}=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)=\frac{88}{5}\cdot\frac{5}{44}-\frac{39}{5}\cdot\frac{5}{39}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2
Αν ο κ είναι πρώτος θετικός ακέραιος και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των ακεραίων 12, 30 και 54, να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του κ και της παράστασης:

$$\mathrm{B}=\frac{2-\frac{\kappa}{2}}{\kappa-\frac{1}{2}}:\frac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}.$$

Λύση
Είναι $\mathrm{MK\Delta}(12,30,54)=6$. Οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6 και από αυτούς πρώτοι είναι οι 2 και 3. Άρα έχουμε $\kappa=2$ ή $\kappa=3$.

Για $\kappa=2$ έχουμε: $\mathrm{B}=\dfrac{2-\frac{2}{2}}{2-\frac{1}{2}}:\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}:\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{1}=\dfrac{8}{3}.$

Για $\kappa = 3$ ο διαιρέτης $\dfrac{\frac{3-\kappa}{2}}{\kappa}$ της παράστασης Β γίνεται $\dfrac{\frac{3-3}{2}}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$, ενώ ο διαιρετέος γίνεται $\dfrac{2-\frac{3}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{1}{5} \neq 0$, οπότε η παράσταση Β δεν ορίζεται.

Πρόβλημα 3

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει παραγωγή λαδιού 800 κιλά. Για την καλλιέργεια του ελαιώνα του ξόδεψε 407 ευρώ και για τη συγκομιδή του καρπού από τις ελιές του ξόδεψε 1050 ευρώ. Η τιμή πώλησης του λαδιού είναι 2,5 ευρώ το κιλό και κατά την πώληση του λαδιού υπάρχουν κρατήσεις σε ποσοστό 6% πάνω στην τιμή πώλησης.

(α) Να βρείτε πόσα κιλά λάδι πρέπει να πωλήσει ο παραγωγός για να καλύψει τα έξοδά του.

(β) Αν επιπλέον το ελαιοτριβείο (εργοστάσιο που παράγεται το λάδι) κρατάει για την αμοιβή του το 8% του παραγόμενου λαδιού, να βρείτε πόσα κιλά λάδι θα μείνουν στον παραγωγό μετά την πώληση λαδιού για την κάλυψη των εξόδων του.

Λύση

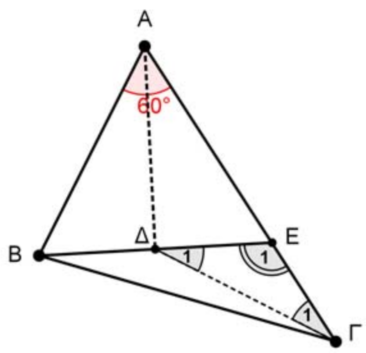
(α) Κατά την πώληση του λαδιού οι κρατήσεις είναι $2,5 \cdot \dfrac{6}{100} = 0,15$ ευρώ, οπότε η καθαρή τιμή πώλησης είναι $2,5 - 0,15 = 2,35$ ευρώ. Τα έξοδα του παραγωγού είναι $1050 + 407 = 1457$ ευρώ, οπότε ο παραγωγός πρέπει να πωλήσει $1457 : 2,35 = 620$ κιλά λάδι.

(β) Το ελαιοτριβείο θα κρατήσει $800 \cdot \dfrac{8}{100} = 64$ κιλά λάδι, οπότε θα μείνουν στον παραγωγό $800 - (620 + 64) = 116$ κιλά λάδι.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $A\Gamma = \dfrac{3}{2} \cdot AB$. Παίρνουμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $AE = AB$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ στο σημείο Δ, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ.

Λύση



Σχήμα 1

Για συντομία, θα συμβολίσουμε με α το μήκος του τμήματος AB, δηλαδή: $\mathrm{AB}=\alpha$.
Εφόσον $\mathrm{A\Gamma}=\frac{3}{2}\mathrm{AB}=\frac{3}{2}\alpha$ και $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}=\alpha$, έχουμε:

$$\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{AE}=\frac{3}{2}\alpha-\alpha=\frac{\alpha}{2}.$$

Το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{AE}$) και η γωνία του $\hat{\mathrm{A}}$ είναι 60^o, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η διχοτόμος του $\mathrm{A\Delta}$ είναι και διάμεσος.

Άρα είναι $\mathrm{\Delta E}=\frac{\alpha}{2}$ και το τρίγωνο $\mathrm{\Delta E\Gamma}$ είναι ισοσκελές, αφού $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{E\Gamma}=\frac{\alpha}{2}$.

Η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$ είναι εξωτερική του ισόπλευρου τριγώνου ABE. Άρα έχουμε

$$\hat{\mathrm{E}}_1=180^\circ-\mathrm{A\hat{E}B}=180^\circ-60^\circ=120^\circ,$$

οπότε : $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1=\dfrac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^o$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}},\ \text{αν είναι } x=2^{-10},y=4^{-8},z=8^{-6}$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έχουμε:

$$x=2^{-10},y=4^{-8}=\left(2^2\right)^{-8}=2^{-16},z=8^{-6}=\left(2^3\right)^{-6}=2^{-18}.$$

Ο αριθμητής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}=x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}&=\left(2^{-10}\right)^2\cdot\left(2^{-16}\right)^4\cdot\left(2^{-18}\right)^6\cdot 2^{182}\\&=2^{-20}\cdot 2^{-64}\cdot 2^{-108}\cdot 2^{182}=2^{-10}.\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned}\Pi&=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}=3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+2^4\cdot 3^6\right)^{-1}=3\cdot\left[2^2\cdot 3^3\left(13+2^2\cdot 3^3\right)\right]^{-1}\\&=3\cdot\left(2^2\cdot 3^3\cdot 121\right)^{-1}=3\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-3}\cdot 121^{-1}=2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 11^{-2}.\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K}=\frac{2^{-10}}{2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 121^{-1}}=\frac{3^2\cdot 121}{2^8}=\frac{3^2\cdot 11^2}{2^8}=\left(\frac{33}{2^4}\right)^2=\left(\frac{33}{16}\right)^2.$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x-5\alpha+2<\alpha\left(x-3\right)+2\left(\alpha-1\right).$$

Λύση

Ο αριθμός 3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

$$4\cdot 3-5\alpha+2<\alpha(3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow 12-5\alpha+2<2\alpha-2\Leftrightarrow 16<7\alpha\Leftrightarrow \alpha>\frac{16}{7}.$$

Ο αριθμός -3 είναι λύση της δεδομένης ανίσωσης, αν ισχύει ότι

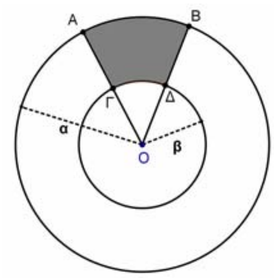
$$4\cdot(-3)-5\alpha+2<\alpha(-3-3)+2(\alpha-1)\Leftrightarrow -12-5\alpha+2<-6\alpha+2\alpha-2$$

$$\Leftrightarrow -8<\alpha\Leftrightarrow \alpha>-8.$$

Επομένως οι αριθμοί 3 και -3 είναι λύσεις της ανίσωσης , όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha>\frac{16}{7}$ και $\alpha>-8$, δηλαδή όταν $\alpha>\frac{16}{7}$.

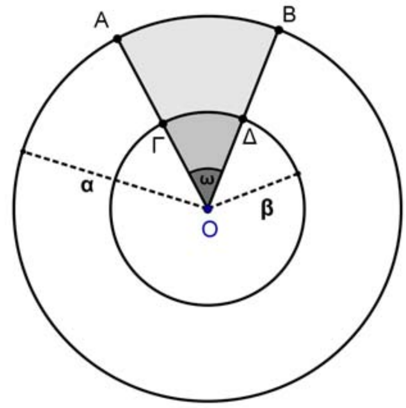
Πρόβλημα 3

Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ και την τιμή της παράστασης:



$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3.$$

Λύση



Σχήμα 2

Το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ ισούται με τη διαφορά των εμβαδών των κυκλικών τομέων $\left(\mathrm{O},\widehat{\mathrm{AB}}\right)$ και $\left(\mathrm{O},\widehat{\Gamma\Delta}\right)$, δηλαδή είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\Gamma)=\pi\alpha^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}-\pi\beta^2\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\omega}{2}.$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, ισούται με $\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)=\pi\left(\alpha^2-\beta^2\right)$, οπότε, σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\Gamma)}{\mathrm{E}(\mathrm{O},\beta,\alpha)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\omega}{2\pi\left(\alpha^2-\beta^2\right)}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Επειδή είναι $\eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\omega=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, έχουμε

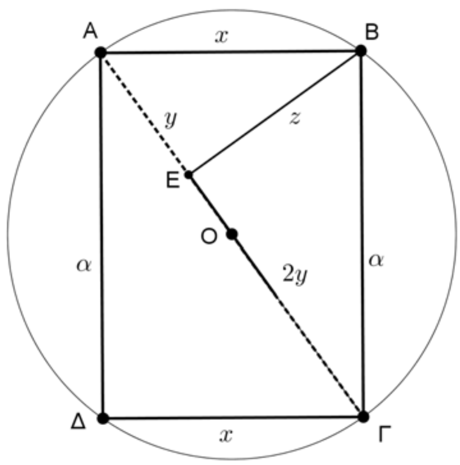
$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)^3=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $ΑΔ=\alpha$ cm και $ΑΒ<ΑΔ$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $ΕΓ=2\cdot ΑΕ$, να βρείτε:

- **(i)** το μήκος της πλευράς ΑΒ
- **(ii)** Το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

Λύση



Σχήμα 3

(i) Έστω $ΑΒ=ΓΔ=x$, $ΑΕ=y$, $ΕΓ=2y$ και $ΒΖ=z$.

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΑΒΕ έχουμε:

$$x^2=y^2+z^2\Rightarrow z^2=x^2-y^2. \qquad (1)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνα ΒΓΕ έχουμε:

$$\alpha^2=4y^2+z^2\Rightarrow z^2=\alpha^2-4y^2. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\alpha^2-4y^2=x^2-y^2\Rightarrow x^2=\alpha^2-3y^2 \qquad (3)$$

Από την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$9y^2=x^2+\alpha^2\Rightarrow x^2=9y^2-\alpha^2. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$9y^2-\alpha^2=\alpha^2-3y^2\Rightarrow y^2=\frac{\alpha^2}{6}\Rightarrow y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6},$$

οπότε λαμβάνουμε και

$$x^2=\alpha^2-3\left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2=\alpha^2-3\cdot\frac{\alpha^2}{6}=\frac{\alpha^2}{2}\Rightarrow x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) Διάμετρος του κύκλου είναι η $ΑΓ=3y$, οπότε η ακτίνα του είναι $R=\frac{3}{2}y=\frac{\alpha\sqrt{6}}{4}$. Το εμβαδό του κύκλου είναι $E=\pi R^2=\pi\cdot\frac{6\alpha^2}{16}=\frac{3\pi\alpha^2}{8}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Λύση

Η εξίσωση $x(x-2)=24 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0$ είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=100$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x=\frac{2\pm 10}{2} \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα $x=-4$, γιατί $(-4)^2=16<25$, ενώ $6^2=36>25$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)\\
&=\alpha^3+\beta^3-(\alpha^2-\beta^2)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta+\beta\alpha-2\beta^2)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\right]\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).
\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)$$

Άρα, αφού $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}=\alpha-\beta.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4(\lambda^2-1)=4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = -\lambda + 1$ και $x_2 = -\lambda - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-5,2)$, όταν

$$-5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3$$

$$\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

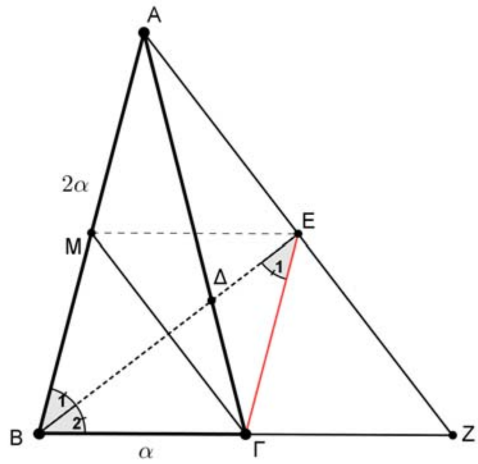
$$(-\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει $-1 < \lambda < 4$ το ζητούμενο ισχύει για $\lambda = 3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$ και $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} = 2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή $\mathrm{E\Gamma} // \mathrm{AB}$, θα ισχύει $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$ και αφού η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, θα είναι $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2$. Επομένως έχουμε $\hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{E}}_1$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή: $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E} = \alpha$.

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος. Λόγω της παραλληλίας των ΕΓ, ΑΒ θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ, από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{BZ} = 2 \cdot \mathrm{\Gamma Z}$$

Επομένως το σημείο Γ είναι το μέσο της ΒΖ, δηλαδή $\mathrm{BZ} = 2 \cdot \mathrm{B\Gamma} = 2\alpha$. Επειδή είναι και $\mathrm{AB} = 2\alpha$ το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΒΓΕΜ είναι ρόμβος, διότι: έχει $\mathrm{BM} = // \mathrm{\Gamma E} = \alpha$ (οπότε ΒΓΕΜ παραλληλόγραμμο) και $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{\Gamma E} = \alpha$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα $\mathrm{ME} = \mathrm{BZ}$ και κατά συνέπεια το Ε είναι μέσο του ΑΖ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΖ, η ΒΕ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\kappa\ \alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha$,

όπου

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}},\ \mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\ .$$

Λύση

Από τις υποθέσεις έχουμε ότι $1+\alpha > 0$ και $1-\alpha > 0$, οπότε

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha+1-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

$$\mathrm{B} = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{1+\alpha-(1-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 + \alpha = \frac{1}{\alpha} - 1 + \alpha = \frac{1-\alpha+\alpha^2}{\alpha}.$$

Επειδή είναι $1-\alpha+\alpha^2 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, για όλες τις τιμές του α, έπεται ότι η παράσταση Κ έχει το πρόσημο του α, δηλαδή θετικό, αν $0 < \alpha < 1$ και αρνητικό, αν $-1 < \alpha < 0$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0,5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4\left(-1+\kappa^2\right) = 4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = \kappa + 1$ και $x_2 = \kappa - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(0,5)$, όταν

$$0 < \kappa + 1 < 5 \text{ και } 0 < \kappa - 1 < 5 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 4 \text{ και } 1 < \kappa < 6 \Leftrightarrow 1 < \kappa < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$(\kappa+1)^4 + (\kappa-1)^4 = 82 \Leftrightarrow 2\kappa^4 + 12\kappa^2 + 2 = 82 \Leftrightarrow \kappa^4 + 6\kappa^2 - 40 = 0,$$

από την οποία λαμβάνουμε

$$\kappa^2 = 4 \text{ ή } \kappa^2 = -10 \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = -2.$$

Επομένως για $\kappa = 2$ ισχύει το ζητούμενο, αφού η τιμή $\kappa = -2$ απορρίπτεται λόγω της σχέσης $1 < \kappa < 4$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3}=\frac{y}{2012y+5}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Λύση

Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+3}{x}=\frac{2012y+5}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{3}{x}=2012+\frac{5}{y}=2012+\frac{7}{z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{3}{x}=\frac{5}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=3\lambda,\ y=5\lambda,\ z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747 θα έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=83\lambda^2 \mid 747 \Rightarrow \frac{747}{83\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z}\Rightarrow \frac{9}{\lambda^2}=\kappa\in\mathbb{Z},$$

Επομένως οι μοναδικές αποδεκτές τιμές για το λ^2 είναι οι 1, 3 και 9.

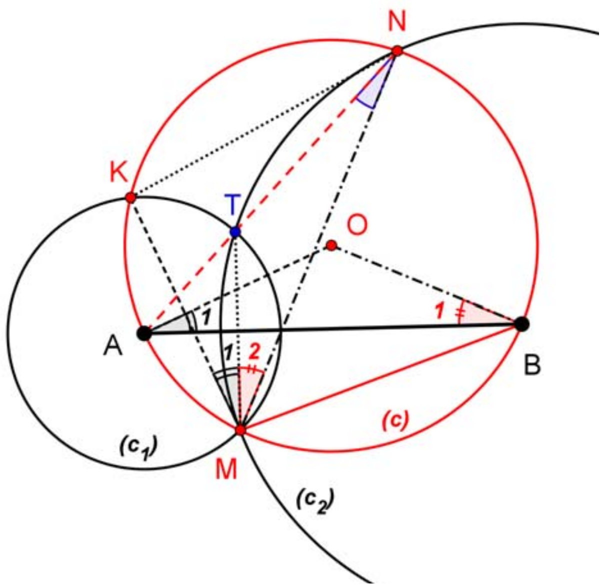
- Για $\lambda^2=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$ έπεται ότι $(x,y,z)=(3,5,7)$ ή $(x,y,z)=(-3,-5,-7)$.
- Για $\lambda^2=3\Leftrightarrow\lambda=\pm\sqrt{3}$ προκύπτουν για τα x, y, z μη ακέραιες τιμές, άτοπο.
- Για $\lambda^2=9\Leftrightarrow\lambda=\pm3$ έπεται ότι $(x,y,z)=(9,15,21)$ ή $(x,y,z)=(-9,-15,-21)$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K και N αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η διάκεντρος τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 5

Η KM είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_1(A,AM)$. Άρα

η OA είναι μεσοκάθετη της KM. (1)

Η MT είναι κοινή χορδή των κύκλων $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η AB είναι μεσοκάθετη της MT. (2)

Η MN είναι κοινή χορδή των κύκλων $c(O,R)$ και $c_2(B,BM)$. Άρα

η OB είναι μεσοκάθετη της MN. (3)

Από τις καθετότητες (1) και (2), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{A}_1 = \hat{M}_1$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες).

Από τις καθετότητες (2) και (3), προκύπτει η ισότητα γωνιών:

$\hat{B}_1 = \hat{M}_2$ (γιατί έχουν πλευρές κάθετες)

και τελικά από το ισοσκελές τρίγωνο OAB, έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1.$$

Οι τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών μας οδηγούν στην ισότητα: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$.

Η γωνία $A\hat{N}M$ και $A\hat{B}M$ είναι ίσες, διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AM}$.

Η γωνία $T\hat{N}M$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_2(B,BM)$, οπότε θα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $T\hat{B}M$, δηλαδή: $T\hat{N}M = A\hat{B}M$

Άρα $A\hat{N}M = T\hat{N}M$ και κατά συνέπεια τα σημεία A,T,N είναι συνευθειακά.

Ισχύει τώρα η ισότητα $A\hat{N}K = A\hat{N}M$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα AM και AK). Επομένως η NA είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{N}M$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση
$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\cdots+x}=\frac{2011}{2013}.$$

Λύση
Επειδή $1+2+3+...+x=\frac{x(x+1)}{2}$, για κάθε θετικό ακέραιο x, η δεδομένη εξίσωση γράφεται:
$$\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{2}{x(x+1)}=\frac{2011}{2013}$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2011}{2013}$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x+1}=\frac{2011}{2013}\Leftrightarrow\frac{2}{x+1}=\frac{2}{2013}\Leftrightarrow x=2012.$$

Πρόβλημα 2
Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=ax^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a,b,c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Λύση
Από την υπόθεση έπεται ότι η εξίσωση
$$ax^2+bx+c=cx+b\Leftrightarrow ax^2+(b-c)x+(c-b)=0$$
έχει μοναδική λύση. Επομένως η διακρίνουσά της ισούται με 0, δηλαδή
$$\Delta=(b-c)^2+4a(b-c)=0\Leftrightarrow(b-c)(b-c+4a)=0\Leftrightarrow c-b=4a,$$
αφού $b\neq c$.
Όταν $c-b=4a$ η εξίσωση γίνεται:
$$ax^2-4ax+4a=0\Leftrightarrow a\left(x^2-4x+4\right)=0\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow x=2.$$
Άρα το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων είναι το $\mathrm{M}(2,2c+b)$.

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x,y και z για τους οποίους ισχύει ότι
$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$
και το άθροισμα των τετραγώνων των x,y και z ισούται με 147.

Λύση
Από το δεδομένο σύστημα έχουμε

$$\frac{2012x+y}{x}=\frac{2012y+z}{y}=\frac{2012z+7}{z}$$

$$\Leftrightarrow 2012+\frac{y}{x}=2012+\frac{z}{y}=2012+\frac{7}{z}\Leftrightarrow \frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}$$

οπότε, αν θέσουμε $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{7}{z}=\frac{1}{\lambda}$ έπεται ότι: $x=7\lambda^3$, $y=7\lambda^2$, $z=7\lambda$.

Επειδή το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z ισούται με 147 θα έχουμε

$$x^2+y^2+z^2=147\Leftrightarrow 49\lambda^6+49\lambda^4+49\lambda^2=147$$

$$\Leftrightarrow \lambda^6+\lambda^4+\lambda^2=3\Leftrightarrow \lambda^6-1+\lambda^4-1+\lambda^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+\lambda^2+1+\lambda^2+1+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^4+2\lambda^2+3\right)=0\Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1,$$

αφού η εξίσωση $\lambda^4+2\lambda^2+3=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-8<0$.

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες ακεραίων είναι:

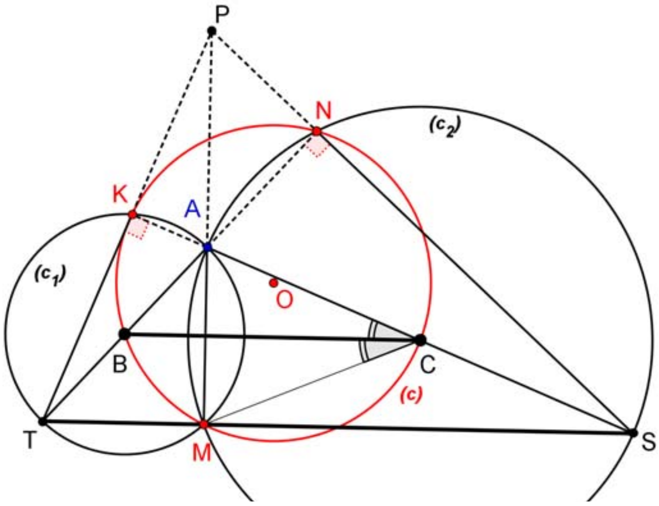
$$\left(x,y,z\right)=\left(7,7,7\right) \text{ ή } \left(x,y,z\right)=\left(-7,-7,-7\right)$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B,BM)$, $c_2(C,CM)$ στα σημεία T, S αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση

Θα αποδείξουμε, πρώτα, ότι τα σημεία K, A, C, S και N, A, B, T είναι συνευθειακά.



Σχήμα 6

Η AM είναι η κοινή χορδή των κύκλων $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$.

Άρα η διάκεντρός τους BC είναι μεσοκάθετη της AM.

Η BC όμως είναι παράλληλη με την TS (από την κατασκευή του σχήματος). Άρα η TS είναι κάθετος με την AM ($AM \perp TS$). Δηλαδή $A\hat{M}T = A\hat{M}S = 90^o$.
Από την τελευταία ισότητα γωνιών προκύπτει ότι τα σημεία A,T και A,S είναι αντιδιαμετρικά στους κύκλους $c_1(B,BM)$ και $c_2(C,CM)$ αντίστοιχα.
Επομένως, τα σημεία A,C,S και A,B,T είναι συνευθειακά.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K,A,C και N,A,B είναι συνευθειακά.
Στον κύκλο $c(O,R)$, το σημείο B είναι μέσο του τόξου KM (διότι BM, BK είναι ακτίνες του κύκλου $c_1(B,BM)$). Άρα οι εγγεγραμμένες στα τόξα BM και BK γωνίες, θα είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως

$$K\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (1).$$

Εφόσον η διάκεντρος BC είναι μεσοκάθετη της AM, τα τρίγωνα ABC και MBC είναι ίσα, οπότε :

$$A\hat{C}B = M\hat{C}B \qquad (2).$$

Από τις ισότητες των γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $K\hat{C}B = A\hat{C}B$ και κατά συνέπεια τα σημεία K,A,C είναι συνευθειακά.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία N,A,B είναι επίσης συνευθειακά.
Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $AMTK$ και $AMSN$ συμπεραίνουμε ότι:

$$A\hat{K}T = A\hat{N}S = 90^o.$$

Επομένως προκύπτουν οι καθετότητες $TK \perp KS$ και $TN \perp NS$.
Σε συνδυασμό τώρα με την καθετότητα $AM \perp TS$, συμπεραίνουμε ότι τα AM, KT, NS είναι ύψη του τριγώνου ATS, οπότε θα συγκλίνουν στο ορθόκεντρό του.

Παρατηρήσεις

Έστω P το ορθόκεντρο του τριγώνου ATS. Τότε τα σημεία P,A,T,S αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα και κατά συνέπεια το σημείο A είναι ορθόκεντρο του τριγώνου PTS.

Το τρίγωνο KMN είναι ορθικό του τριγώνου PTS και κατά συνέπεια το σημείο A είναι έκκεντρο του τριγώνου KMN.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
19 Οκτωβρίου 2013

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 32 - 12:4 + 53 + 3\cdot 4 + \frac{16}{9}:\frac{1}{8} - \frac{74}{9} \quad .$$

Λύση

$$A = 32 - 12:4 + 53 + 3\cdot 4 + \frac{16}{9}:\frac{1}{8} - \frac{74}{9} = 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{16}{9}\cdot 8 - \frac{74}{9}$$

$$= 32 - 3 + 53 + 12 + \frac{128}{9} - \frac{74}{9} = 94 + \frac{54}{9} = 94 + 6 = 100.$$

Πρόβλημα 2
Ένας οικογενειάρχης πήρε από την τράπεζα ένα ποσόν χρημάτων. Από αυτά ξόδεψε το 20% για την αγορά ενός φορητού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στη συνέχεια, από τα χρήματα που του έμειναν ξόδεψε το 15% για αγορά τροφίμων της οικογένειας. Αν του έμειναν τελικά 1360 ευρώ, να βρείτε:
(α) Πόσα χρήματα πήρε από την τράπεζα ο οικογενειάρχης.
(β) Πόσα χρήματα στοίχισαν τα τρόφιμα.
(γ) Ποιο ποσοστό των χρημάτων που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε συνολικά.

Λύση
(α) Μετά την αγορά τροφίμων έμειναν στον οικογενειάρχη 1360 ευρώ. Αυτά τα χρήματα αποτελούν το 85% των χρημάτων που του έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή. Άρα το 85% αντιστοιχεί σε ποσόν 1360 ευρώ, οπότε το ποσόν που του έμεινε μετά την αγορά του υπολογιστή είναι

$$1360\cdot\frac{100}{85} = \frac{16\cdot 100}{1} = 1600 \text{ ευρώ}.$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

το $(100-20)\% = 80\%$ του ποσού που πήρε αντιστοιχούν σε $1600\,\text{ευρώ}$.

Άρα τα χρήματα που πήρε από την τράπεζα είναι:

$$1600\cdot\frac{100}{80} = 2000 \text{ ευρώ}.$$

(β) Τα τρόφιμα στοίχισαν το 15% των χρημάτων που έμειναν μετά την αγορά του υπολογιστή, δηλαδή

$$1600 \cdot \frac{15}{100} = 240 \text{ ευρώ.}$$

Το ποσό αυτό μπορεί να βρεθεί και με την αφαίρεση: $1600 - 1360 = 240$.

(γ) Ο οικογενειάρχης από τα 2000 ευρώ που πήρε από την τράπεζα ξόδεψε $2000 - 1360 = 640$ ευρώ, δηλαδή ποσοστιαία επί τις εκατό

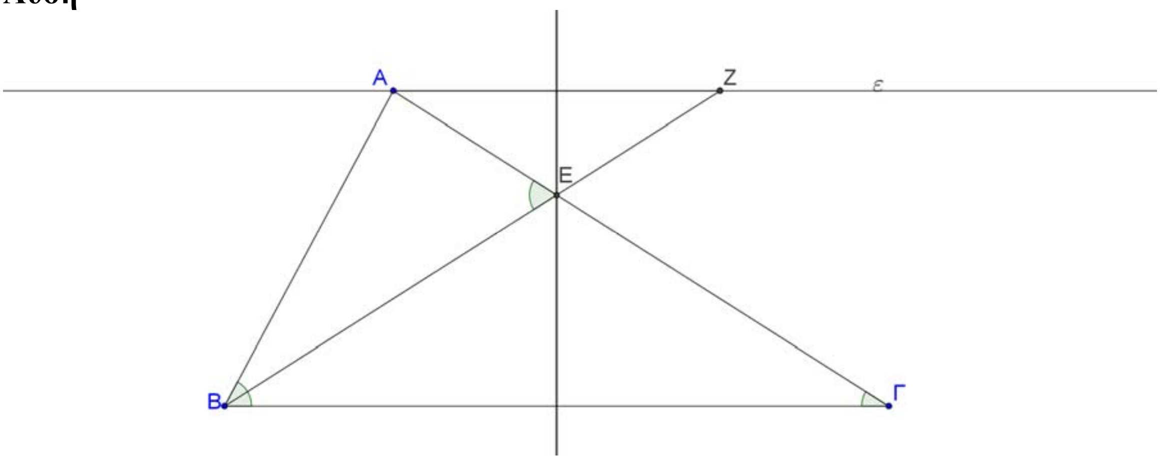
$$\frac{640}{2000} \cdot 100 = \frac{64}{2} = 32.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και η ευθεία ΒΕ τέμνει την ευθεία ε, που περνάει από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{AZ} = \mathrm{AB}$, **(β)** $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{B}}$.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή το σημείο Ε ανήκει στη μεσοκάθετη της ΒΓ έπεται ότι $\mathrm{EB} = \mathrm{E}\Gamma$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ προκύπτει $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Επειδή $\mathrm{AZ} \parallel \mathrm{B}\Gamma$ έπεται ότι: $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$ (εντός εναλλάξ γωνίες). Από τη σχέση της υπόθεσης $\hat{\mathrm{B}} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$, έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \hat{\Gamma} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΖ.

(β) Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΕΒΓ, οπότε

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}.$$

Πρόβλημα 4

Ο λόγος δυο φυσικών αριθμών είναι $\frac{7}{5}$. Διαιρώντας τον μεγαλύτερο αριθμό με το 18, το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 8, ενώ διαιρώντας τον μικρότερο αριθμό με το 12 το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με τον αριθμό 9. Αν γνωρίζετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του μεγαλύτερου αριθμού με το 18 είναι πενταπλάσιο του υπόλοιπου της διαίρεσης του μικρότερου αριθμού με το 12, να βρείτε τους δυο αριθμούς.

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω α, β οι δυο φυσικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, Τότε θα είναι $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{7}{5}$ και επιπλέον

$$\alpha = 18 \cdot 8 + 5\upsilon \text{ και } \beta = 12 \cdot 9 + \upsilon .$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 5\alpha = 7\beta \text{ (ιδιότητα ίσων κλασμάτων)}, \text{ οπότε έχουμε:}$$

$$5 \cdot (144 + 5\upsilon) = 7 \cdot (108 + \upsilon) \Leftrightarrow \text{ (από επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$720 + 25\upsilon = 756 + 7\upsilon \Leftrightarrow 18\upsilon = 36 \Leftrightarrow \upsilon = 2, \text{ οπότε θα είναι } \alpha = 154 \text{ και } \beta = 110 .$$

2ος τρόπος.

Έχουμε: $\alpha = 18 \cdot 8 + \upsilon_1$, με $\upsilon_1 = 0,1,2,...,17$ και $\beta = 12 \cdot 9 + \upsilon_2$, με $\upsilon_2 = 0,1,2,...,11$.

Τα ζεύγη για τα οποία μπορεί να ισχύει η ισότητα $\upsilon_1 = 5\upsilon_2$ είναι τα :

$$(\upsilon_1, \upsilon_2) = \{(0,0), (5,1), (10,2), (15,3)\}$$

και από αυτά μόνο το ζεύγος $(10,2)$ μας δίνει $\alpha = 154$ και $\beta = 110$ και το κλάσμα $\dfrac{154}{110}$ που είναι ισοδύναμο με το $\dfrac{7}{5}$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 3 \cdot (3\alpha - 4,6) - 2 \cdot (\alpha - 0,2).$$

Λύση

Έχουμε: $4 < 5$, οπότε $\sqrt{4} < \sqrt{5} \Rightarrow 2 < \sqrt{5}$. Είναι
$2,1^2 = 4,41,\ 2,2^2 = 4,84$ *και* $2,3^2 = 5,29$, οπότε η ζητούμενη τιμή του α είναι $\alpha = 2,2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε: $\mathrm{A} = 2$

Πρόβλημα 2

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5 ,$$

να λύσετε ως προς άγνωστο x την ανίσωση:

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta} .$$

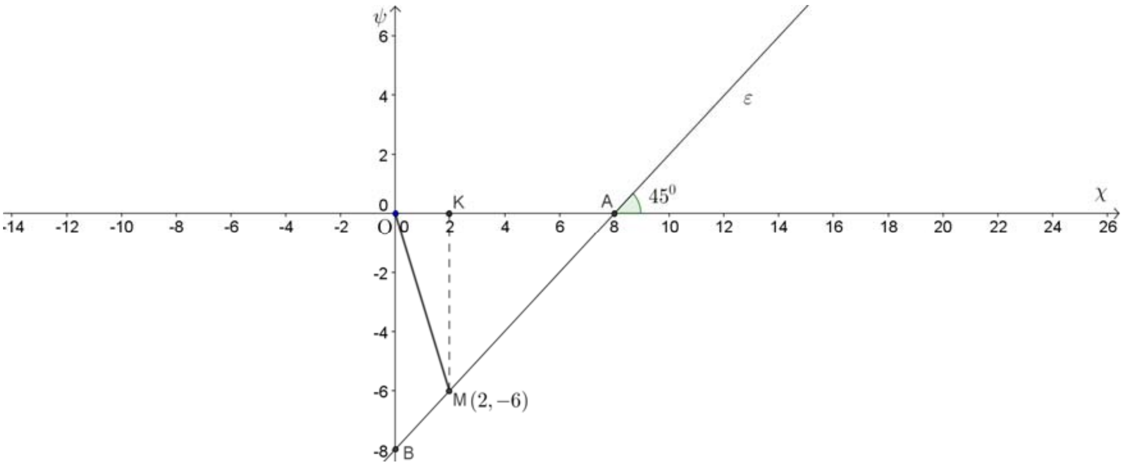
Λύση

Έχουμε $-4 < 1 - 2\beta < 5 \Leftrightarrow -5 < -2\beta < 4 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{2} < \dfrac{-2\beta}{-2} < \dfrac{-5}{-2} \Leftrightarrow -2 < \beta < \dfrac{5}{2}$. Επειδή ο β είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\beta = 1$ ή $\beta = 2$.

- Για $\beta=1$ η ανίσωση γίνεται: $2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<x \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<x \Leftrightarrow x>1$.
- Για $\beta=2$ η ανίσωση γίνεται:
  $2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)<\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2}<\frac{x}{2} \Leftrightarrow 0\cdot x<-1$, η οποία είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3
Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $\chi O\psi$ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία 45^0 και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα $\chi'\chi$ και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα $\psi'\psi$ και στην ευθεία (ε).
(α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).
(β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α , Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .
(γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

Λύση
α) Η ζητούμενη εξίσωση έχει τη μορφή $\psi=\alpha\chi+\beta$, όπου $\alpha=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$. Επειδή η ευθεία περνάει από το σημείο $M(2,-6)$ έχουμε ότι $-6=2+\beta \Leftrightarrow \beta=-8$. Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι : $\psi=\chi-8$



Σχήμα 2

β) Τα σημεία τομής με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι τα $A(8,0)$ και $B(0,-8)$. Άρα έχουμε

$$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32 \text{ τετρ. μονάδες}$$

γ) Αν Κ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$, τότε το τρίγωνο ΚΜΑ είναι ορθογώνιο στο Κ και οι κάθετες πλευρές του έχουν μήκη $KM=6$ και $KA=6$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε

$$AM=\sqrt{KM^2+KA^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{36\cdot 2}=6\sqrt{2}.$$

Ομοίως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ λαμβάνουμε:

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{64\cdot 2}=8\sqrt{2}.$$

Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΑΒ έχουν κοινό ύψος από την κορυφή Ο, έστω υ, έχουμε:

$$\frac{(\mathrm{OAM})}{(\mathrm{OAB})}=\frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AM}\cdot \upsilon}{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \upsilon}=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$(\mathrm{OAM})=\frac{3}{4}(\mathrm{OAB})=\frac{3}{4}\cdot 32=24 \text{ τετρ. μονάδες.}$$

Παρατήρηση:

Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΜ, μπορούμε να το υπολογίσουμε, παρατηρώντας ότι η ΚΜ είναι ύψος του τριγώνου ΟΑΜ (έχει μήκος 6) και η ΟΑ βάση με μήκος 8.

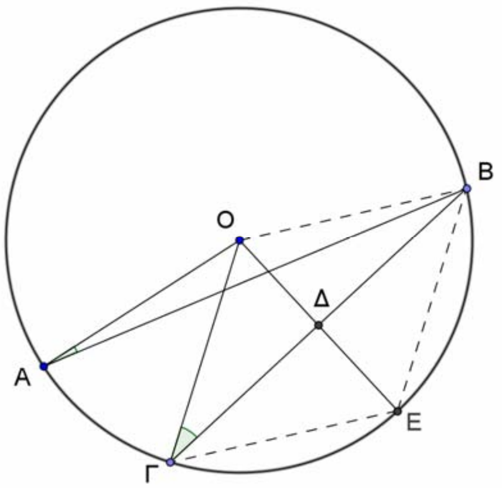
Άρα $(\mathrm{OAM})=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24$ **.**

6. Σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ$ και $\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=30^\circ$. Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}$ σε μοίρες.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδό του.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{B}A}=\mathrm{O\hat{A}B}=10^\circ.$$

Επειδή το τρίγωνο ΟΓΒ είναι ισοσκελές $(\mathrm{O\Gamma}=\mathrm{OB}=R)$, έπεται ότι:

$$\mathrm{O\hat{\Gamma}B}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}=30^\circ.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=\mathrm{O\hat{B}\Gamma}-\mathrm{O\hat{B}A}=30^\circ-10^\circ=20^\circ$ και $\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}=40^\circ$.

(β) Το ύψος του τριγώνου ΟΓΒ είναι και διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{\Gamma\hat{O}B}$, οπότε $\mathrm{\Gamma\hat{O}\Delta}=90^\circ-\mathrm{O\hat{\Gamma}\Delta}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$, οπότε θα είναι και $\mathrm{\Gamma\hat{O}E}=60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΟΓΕ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{\Gamma E}=\mathrm{O\Gamma}=R$. Επειδή η ευθεία ΟΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $\mathrm{EB} = \Gamma\mathrm{E} = R$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες , δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $\mathrm{O}\Delta = \mathrm{O}\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, οπότε $\left(\mathrm{OBE}\Gamma\right) = R \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad \text{και } (\Sigma_2)\ \begin{Bmatrix} \alpha x + \beta y \ \ = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{Bmatrix}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \varphi + \omega = \dfrac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \dfrac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\dfrac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \dfrac{1}{4} - \omega \\ \omega = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \dfrac{1}{2} \\ \omega = -\dfrac{1}{4} \end{Bmatrix},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2), οπότε θα έχουμε;

$$\begin{Bmatrix} 2\alpha - 4\beta \ \ = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - 2\beta \ \ = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - 2\beta \ \ = 2 \\ -\beta = -4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha \ \ = 10 \\ \beta = 4 \end{Bmatrix}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \qquad \text{και} \qquad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A = 8x+1$ και $B = 2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση

Έστω $A = 8x+1 = \alpha^2$ και $B = 2x-3 = \beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x = \frac{\alpha^2 - 1}{8} = \frac{\beta^2 + 3}{2} \qquad (1)$$

και

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13 \ . \qquad (2)$$

Από τη σχέση 92) έχουμε:

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = 13 \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 13$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha + 2\beta = 13 \\ \alpha - 2\beta = 1 \end{matrix}\right\} \text{ή} \left\{\begin{matrix} \alpha + 2\beta = -13 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{matrix}\right\} \text{ή} \left\{\begin{matrix} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha - 2\beta = 13 \end{matrix}\right\} \text{ή} \left\{\begin{matrix} \alpha + 2\beta = -1 \\ \alpha - 2\beta = -13 \end{matrix}\right\}$$

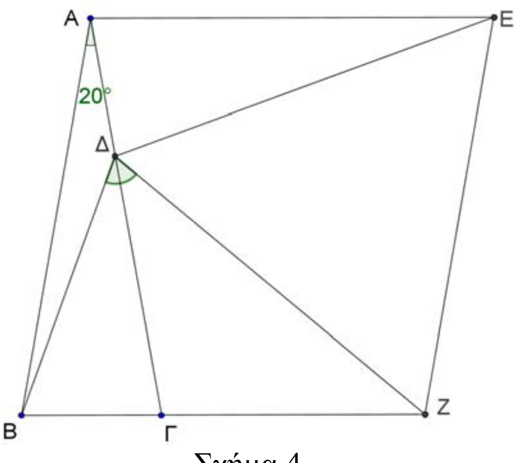
$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta) = (7,3) \text{ ή } (\alpha,\beta) = (-7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta) = (7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta) = (-7,3).$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι: $x = 6$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}} = 20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\text{ΑΔ} = \text{ΒΓ}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\text{ΑΕ} \parallel \text{ΒΓ}$, $\text{ΑΕ} = \text{ΑΒ}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\text{Β}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ}$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{\text{Α}} = 20^\circ$ και $\text{ΑΕ} \parallel \text{ΒΓ}$ έχουμε ότι:

$$\text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = \hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ .$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία $(\text{ΑΒ} = \text{ΕΑ},\ \text{ΒΓ} = \text{ΑΔ})$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\left(\text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma = \text{Ε}\hat{\text{Α}}\text{Δ} = 80^\circ\right)$.

Επομένως , έχουμε: $\mathrm{E\Delta} = \mathrm{A\Gamma} = \mathrm{AB}$, $\mathrm{A\hat{E}\Delta} = 20^\circ$.
Επειδή το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(\mathrm{AE} = \mathrm{AB})$, είναι ρόμβος, οπότε $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB} = \mathrm{E\Delta}$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $\mathrm{A\hat{E}Z} = \hat{\mathrm{B}} = 80^\circ$. Επομένως $\mathrm{\Delta\hat{E}Z} = \mathrm{A\hat{E}Z} - \mathrm{A\hat{E}\Delta} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.
Τότε είναι: $\mathrm{B\hat{Z}\Delta} = \mathrm{B\hat{Z}E} - \mathrm{\Delta\hat{Z}E} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΖΔ $(\mathrm{ZB} = \mathrm{AB} = \mathrm{Z\Delta})$ προκύπτει ότι: $\mathrm{B\hat{\Delta}Z} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:
$$\frac{9x^2+3x+1}{x} - \frac{27x}{9x^2+3x+1} \geq 6.$$
Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση
Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2+3x+1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$$\left(9x^2+3x+1\right)^2 - 27x^2 \geq 6x\left(9x^2+3x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)^2 - 6x\left(9x^2+3x+1\right) - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)\left(9x^2-3x+1\right) - 27x^2 \geq 0.$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(9x^2-1\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$
Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$, αφού $x > 0$.

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση
Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad (1)$$
$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \qquad (2)$$
Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε
$$\alpha\left(\beta^2 - 1\right) + \beta(\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta + \alpha + \beta = 0.$$
Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha + \gamma = -1$ και $\alpha + \gamma = 0$, αδύνατο.
Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:
$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta+1} = -1 + \frac{1}{\beta+1}.$$

Επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$ πρέπει: $\dfrac{1}{\beta+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \beta \in \{-2,0\}$. Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\beta = 0$, οπότε έχουμε: $\alpha + \gamma = 0$ και $\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 0,$ το οποίο απορρίπτεται αφού από την υπόθεση έχουμε $\alpha \neq 0$.
- $\beta = -2$, οπότε έχουμε $\alpha + \gamma = 2$ και $4\alpha + \gamma = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2,\ \gamma = 4$. Επομένως προκύπτει η τριάδα συντελεστών $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -2, 4)$.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

Λύση
Θέλουμε να βρούμε για ποιους θετικούς ακεραίους λ έχει λύση ως προς x η εξίσωση

$$\frac{2x^2 + x - 4}{x^2 - x + 2} = \lambda \Leftrightarrow (2-\lambda)x^2 + (1+\lambda)x - 2(2+\lambda) = 0.$$

Αν $\lambda = 2$ προκύπτει από την εξίσωση η λύση $x = \dfrac{8}{3}$.
Αν $\lambda \neq 2$, τότε η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση ως προς x, αν, και μόνον αν, η διακρίνουσά της είναι μη αρνητική. Έχουμε

$$\Delta = (\lambda+1)^2 + 8(4-\lambda^2) = -7\lambda^2 + 2\lambda + 33 = (-\lambda^2 + 2\lambda) + (33 - 6\lambda^2),$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda \geq 3$ και οι δύο παρενθέσεις είναι αρνητικές, οπότε $\Delta < 0$.
Επομένως, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, διάφορος του 2, έπεται ότι: $\lambda = 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$.
Άρα για $x = \dfrac{8}{3}$ το κλάσμα παίρνει την ακέραια τιμή 2 και για $x = -1 \pm \sqrt{7}$ παίρνει την ακέραια τιμή 1.

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την AB στο σημείο M και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία K, Λ, M, N είναι ισοσκελές τραπέζιο.

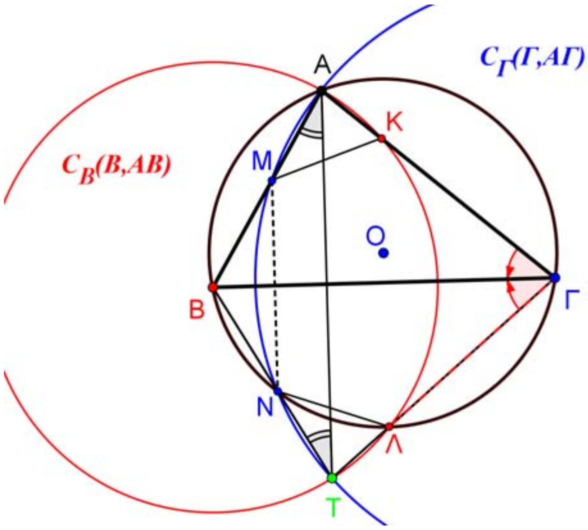
Λύση
Έστω T το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων C_A και C_B. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.
Οι χορδές BA και $B\Lambda$ του κύκλου C είναι ίσες μεταξύ τους, διότι είναι ακτίνες του κύκλου C_A, οπότε οι εγγεγραμμένες (στο κύκλο C) γωνίες που βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα, θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \qquad (1).$$

Η $B\Gamma$ είναι διάκεντρος των κύκλων C_B και C_Γ, οπότε θα είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής AT και θα διχοτομεί τη γωνία $A\hat{\Gamma}T$, δηλαδή

$$B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma} \qquad (2).$$

Άρα τα σημεία T, Λ, Γ είναι συνευθειακά.



Σχήμα 5

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία T, N, B είναι συνευθειακά.

Το τρίγωνο BAT είναι ισοσκελές ($BA = BT$). Άρα $M\hat{A}T = N\hat{T}A$, οπότε τα αντίστοιχα τόξα AN και MT (του κύκλου C_Γ) είναι ίσα μεταξύ τους.

Από την ισότητα των τόξων $AN = AM + MN$ και $MT = TN + MN$, προκύπτει η ισότητα των τόξων AM και TN. Άρα το τετράπλευρο $MATN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $MN \,//\, AT$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $KAT\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $K\Lambda \,//\, AT$. Άρα $MN \,//\, K\Lambda$ και κατά συνέπεια το $MK\Lambda N$ είναι τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι κοινή μεσοκάθετη των παράλληλων πλευρών του.

Τα τρίγωνα AKM και $T\Lambda N$ είναι ίσα. Άρα το $MK\Lambda N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

Λύση

Περιορισμός: $x^2 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή $x \geq 5$. Η εξίσωση, για $x \leq 0$ ή $x \geq 5$, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2 + \left(x^2 - 5x\right) - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{x^2 - 5x}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \;\left(\mathrm{E}_1\right) \text{ ή } x - \sqrt{x^2 - 5x} = -1 \;\left(\mathrm{E}_2\right)$$

- $\left(\mathrm{E}_1\right): x - \sqrt{x^2 - 5x} = 1 \;\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 5x}, x \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty),\; x \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x^2-5x,\ \text{με } x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3},\ x\geq 5,\ \text{απορρίπτεται.}$$

- $\left(\mathrm{E}_2\right): x-\sqrt{x^2-5x}=-1 \ \Leftrightarrow x+1=\sqrt{x^2-5x}, x\in\left(-\infty,0\right]\cup\left[5,+\infty\right),\ x\geq -1$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-5x,\ \text{με } -1\leq x\leq 0 \text{ ή } x\geq 5$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{7},\ -1\leq x\leq 0 \text{ ή } x\geq 5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}.$$

Πρόβλημα 2

Αν α,β ακέραιοι και ο αριθμός $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B}=\alpha^2+\beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

Λύση

Έστω ότι $\mathrm{A}=\alpha^2+2\beta=x^2$, όπου $x\in\mathbb{Z}$. Τότε $\beta=\dfrac{x^2-\alpha^2}{2}$. Επειδή $\beta\in\mathbb{Z}$, πρέπει ο αριθμητής $x^2-\alpha^2$ να είναι άρτιος ακέραιος, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Έτσι έχουμε

$$\alpha^2+\beta=\alpha^2+\frac{x^2-\alpha^2}{2}=\frac{x^2+\alpha^2}{2}=\frac{\left(x+\alpha\right)^2+\left(x-\alpha\right)^2}{4}=\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2,$$

όπου οι αριθμοί $\dfrac{x+\alpha}{2}$ και $\dfrac{x-\alpha}{2}$ είναι ακέραιοι, αφού οι ακέραιοι α και x είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί.

Πρόβλημα 3

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a η εξίσωση

$$4x^4+\left(8+4a\right)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2=0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}
&4x^4+\left(8+4a\right)x^3+\left(a^2+8a+4\right)x^2+\left(a^3+8\right)x+a^2\\
&=\left(4x^4+8x^3+a^2x^2\right)+\left(4ax^3+8ax^2+a^3x\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\
&=x^2\left(4x^2+8x+a^2\right)+ax\left(4x^2+8x+a^2\right)+\left(4x^2+8x+a^2\right)\\
&=\left(4x^2+8x+a^2\right)\left(x^2+ax+1\right).
\end{aligned}$$

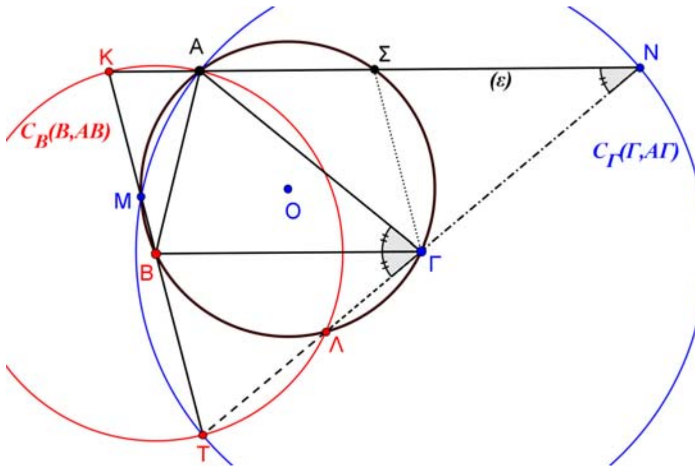
Επομένως, η εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς, αν, και μόνον αν, και τα δύο τριώνυμα x^2+ax+1 και $4x^2+8x+a^2$ έχουν πραγματικές ρίζες

$$\Leftrightarrow a^2-4\geq 0 \ \text{ και } 64-16a^2\geq 0 \Leftrightarrow a^2-4\geq 0 \text{ και } a^2-4\leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=-2 \text{ ή } a=2.$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή A και είναι παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Ο κύκλος $C_B(B,AB)$ (με κέντρο B και ακτίνα AB), τέμνει την (ε) στο σημείο K και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο Λ. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $A\Gamma$), τέμνει την (ε) στο σημείο N και τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο M. Οι κύκλοι $C_B(B,AB)$, $C_\Gamma(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνονται στο σημείο T και η (ε) τέμνει τον $C(O,R)$ στο σημείο Σ.
(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Να αποδείξετε ότι οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση
(α) Το τρίγωνο ΓAN είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma N$ ως ακτίνες του κύκλου C_Γ). Άρα $A\hat{N}\Gamma = N\hat{A}\Gamma$.



Σχήμα 6

Από την παραλληλία $(\varepsilon)//B\Gamma$ (με τέμνουσα την ΑΓ) έχουμε: $N\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.
Από τις προηγούμενες ισότητες γωνιών, προκύπτει: $A\hat{N}\Gamma = \hat{\Gamma} \qquad (1)$.
Από την ισότητα των χορδών AB και $B\Lambda$ του κύκλου $C(O,R)$ (οι χορδές AB και $B\Lambda$ είναι ακτίνες του κύκλου C_B) έχουμε: $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma} \qquad (2)$.
Από τις σχέσεις *(1)* και *(2)* συμπεραίνουμε ότι: $A\hat{N}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Lambda = \hat{\Gamma}$, δηλαδή τα σημεία Γ,N,Λ είναι συνευθειακά.
Η διάκεντρος $B\Gamma$ (των κύκλων C_B και C_Γ) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους AT. Άρα $A\hat{\Gamma}B = B\hat{\Gamma}T = \hat{\Gamma}$. Από την ισότητα των γωνιών $B\hat{\Gamma}T$ και $B\hat{\Gamma}\Lambda$, προκύπτει ότι τα σημεία Γ,T,Λ είναι συνευθειακά, οπότε σε συνδυασμό με το προηγούμενο συμπέρασμα έπεται ότι τα σημεία Γ,Λ,N,T είναι συνευθειακά.
(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία B,K,M,T είναι συνευθειακά, οπότε τα σημεία B και Γ είναι μέσα των πλευρών TK και TN, αντίστοιχα, του τριγώνου TKN.
Θα αποδείξουμε ότι το σημείο Σ είναι το μέσο της πλευράς KN (οπότε οι $T\Sigma, K\Gamma, NB$ θα συντρέχουν στο βαρύκεντρο του τριγώνου TKN).

Πράγματι, το τετράπλευρο $ΑΒΓΣ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C(O,R)$, οπότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$Γ\hat{Σ}Ν = Κ\hat{Α}Β$ (από το ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΣ$)

$Κ\hat{Α}Β = Β\hat{Κ}Α$ (από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΚ$).

Άρα η $ΣΓ$ είναι παράλληλη προς την $ΚΒ$, δηλαδή το $Σ$ είναι το μέσο της $ΚΝ$.

Παρατήρηση

Δεν είναι απαραίτητο (για την απόδειξη του δευτέρου ερωτήματος) να αποδείξουμε ότι το σημείο $Λ$ ανήκει στην ίδια ευθεία με τα σημεία $Γ,Ν,Τ$.

Χρειάζεται όμως για να αποδείξουμε ότι και $ΑΤ,ΝΜ,ΚΛ$ συντρέχουν και να συμπεράνουμε ότι τα σημεία ο κύκλος $C(O,R)$ είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου $ΤΚΝ$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
1 Νοεμβρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$

Λύση

$$\mathrm{A}=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8=\frac{13}{9}-\frac{74\cdot 3}{9\cdot 37}+\left(\frac{4}{3}\right)^{2}:8$$
$$=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16}{9}:8=\frac{13}{9}-\frac{2}{3}+\frac{16:8}{9}=\frac{13}{9}-\frac{6}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος συλλεκτικών αντικειμένων αγόρασε δύο παλαιά ραδιόφωνα Α κα Β αντί 200 ευρώ και στη συνέχεια τα πούλησε με συνολικό κέρδος 40% πάνω στην τιμή της αγοράς τους. Αν το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε με κέρδος 25% και το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε με κέρδος 50%, πάνω στην τιμή της αγοράς τους, να βρείτε πόσο πλήρωσε ο έμπορος για να αγοράσει το καθένα από τα ραδιόφωνα Α και Β.

Λύση

Έστω ότι ο έμπορος αγόρασε x ευρώ το ραδιόφωνο Α. Τότε η τιμή αγοράς του ραδιοφώνου Β ήταν $200-x$ ευρώ. Τότε το ραδιόφωνο Α πουλήθηκε $x+\frac{25x}{100}=\frac{125x}{100}$ ευρώ, ενώ το ραδιόφωνο Β πουλήθηκε $\left(200-x\right)\cdot\frac{150}{100}$ ευρώ. Συνολικά τα δύο ραδιόφωνα πουλήθηκαν $200\cdot\frac{140}{100}$ ευρώ, δηλαδή 280 ευρώ.

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{125x}{100}+\left(200-x\right)\cdot\frac{150}{100}=200\cdot\frac{140}{100}\Leftrightarrow 12,5x-15x+3000=2800$$
$$\Leftrightarrow 2,5x=200\Leftrightarrow x=80.$$

Άρα ο έμπορος αγόρασε 80 ευρώ το ραδιόφωνο Α και $200-80=120$ ευρώ το ραδιόφωνο Β.

Πρόβλημα 3

Χωρίς την εκτέλεση διαιρέσεων αριθμητή με παρανομαστή, να βρείτε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο από τους παρακάτω αριθμούς:

$$\frac{1003}{2015}, \frac{1007}{2019}, \frac{1009}{2021}, \frac{997}{2009}, \frac{1011}{2023}, \frac{999}{2011}, \frac{1001}{2013}, \frac{1005}{2017}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα δεδομένα κλάσματα την ίδια διαφορά:

(Παρανομαστής) - (Αριθμητής) = 1012.

Έτσι γράφουμε:

$$\frac{1003}{2015}=1-\frac{1012}{2015}, \frac{1007}{2019}=1-\frac{1012}{2019}, \frac{1009}{2021}=1-\frac{1012}{2021}, \frac{997}{2009}=1-\frac{1012}{2009}$$

$$\frac{1011}{2023}=1-\frac{1012}{2023}, \frac{999}{2011}=1-\frac{1012}{2011}, \frac{1001}{2013}=1-\frac{1012}{2013}, \frac{1005}{2017}=1-\frac{1012}{2017}$$

Γνωρίζουμε ότι μεταξύ ρητών αριθμών με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μικρότερο παρανομαστή, οπότε έχουμε:

$$\frac{2012}{2009}>\frac{2012}{2011}>\frac{2012}{2013}>\frac{2012}{2015}>\frac{2012}{2017}>\frac{2012}{2019}>\frac{2012}{2021}>\frac{2012}{2023}$$

Άρα έχουμε:

$$1-\frac{2012}{2009}<1-\frac{2012}{2011}<1-\frac{2012}{2013}<1-\frac{2012}{2015}<1-\frac{2012}{2017}<1-\frac{2012}{2019}<1-\frac{2012}{2021}<1-\frac{2012}{2023},$$

οπότε ο αριθμός $\frac{1011}{2023}$ είναι ο μεγαλύτερος από τους δεδομένους ρητούς αριθμούς,

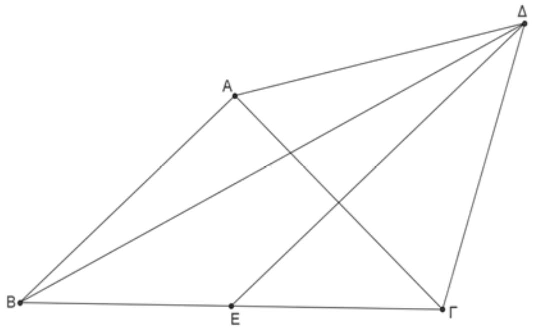
ενώ ο $\frac{997}{2009}$ είναι ο μικρότερος.

Πρόβλημα 4

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma$. Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευρά ΒΓ.

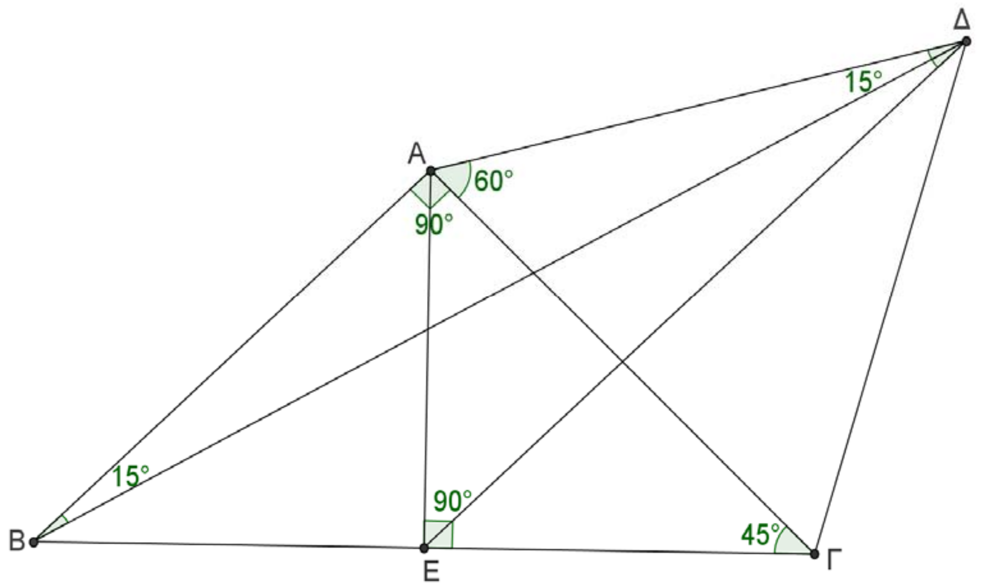
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.



Σχήμα 1

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ και η διάμεσός του ΑΕ είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο στο Ε με μία γωνία του 45°. Επομένως θα έχει $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^\circ - \left(90^\circ + 45^\circ\right) = 45^\circ$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $\mathrm{EA} = \mathrm{E}\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε ότι: $\Delta\mathrm{A} = \Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα άκρα Α και Γ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ, οπότε η ευθεία ΔΕ είναι η μεσοκάθετη του ΑΓ.

(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ λαμβάνουμε τις ισότητες $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A}\Delta$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ$, οπότε $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma + \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$. Επειδή ΑΒΔ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ .$$

Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία ΑΓ, που τις τέμνει η ευθεία ΒΔ, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε:

$$\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = 15^\circ$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \dfrac{x^4 - 1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} - \dfrac{6}{13}$, αν $x = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A} = \frac{x^4 - 1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)} - \frac{6}{13} = \frac{x^2-1}{x^2-3} - \frac{6}{13},$$

οπότε για $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{2}=\frac{16}{9}$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\left(\frac{16}{9}\right)^2-1}{\left(\frac{16}{9}\right)^2-3}-\frac{6}{13}=\frac{\frac{256}{81}-1}{\frac{256}{81}-3}-\frac{6}{13}=\frac{175}{13}-\frac{6}{13}=\frac{169}{13}=13.$$

Πρόβλημα 2

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\frac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

Λύση

Έστω n το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου. Τότε το πλήθος των μαθητών που παίζει βιολί είναι $\frac{4n}{100}$. Το πλήθος των μαθητών που παίζει και βιολί και πιάνο είναι

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{100}=\frac{4n}{300}=\frac{n}{75}.$$

Επειδή ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο αριθμητής n να είναι πολλαπλάσιο του παρανομαστή, δηλαδή πρέπει $n=75k$, όπου k θετικός ακέραιος.. Έτσι, από την υπόθεση $170\le n\le 230$, έχουμε:

$$170\le n=75k\le 230 \Leftrightarrow \frac{170}{75}\le k\le\frac{230}{75}\Leftrightarrow 2+\frac{20}{75}\le k\le 3+\frac{5}{75}\Leftrightarrow k=3.$$

Επομένως έχουμε $n=75\cdot 3=225$ μαθητές.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=\frac{\alpha}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ κατά τμήμα $\Gamma\mathrm{Z}=\mathrm{A}\Delta$. Αν $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)$ και $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB}\Delta$ και του τετραπλεύρου $\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z}$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)}{\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta\mathrm{Z})}$.

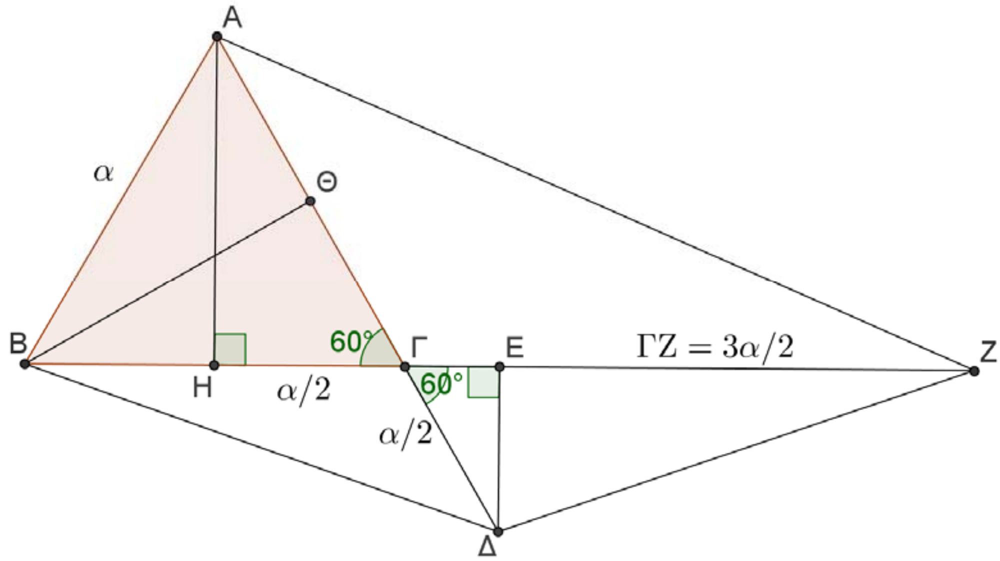
Λύση

Το τρίγωνο $\mathrm{AB}\Delta$ έχει βάση $\mathrm{A}\Delta=\frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$\mathrm{B}\Theta=\mathrm{AH}=\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Delta)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A}\Delta\cdot\mathrm{B}\Theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$



Σχήμα 3

Για το τετράπλευρο ΑΒΔΖ έχουμε: $\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) + \mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z})$.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $\mathrm{AH} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}.$$

Στο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε βάση $\mathrm{BZ} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔΕ το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ και ΓΕΔ ως εξής:

$$\frac{\mathrm{E\Delta}}{\mathrm{AH}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{A\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{E\Delta}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε: $\mathrm{E\Delta} = \Gamma\Delta\,\eta\mu 60^\circ = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$.

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{ABZ}) + \mathrm{E}(\mathrm{B\Delta Z}) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16},$$

οπότε θα είναι

$$\frac{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta})}{\mathrm{E}(\mathrm{AB\Delta Z})} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}.$$

Πρόβλημα 4

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2 με βάρη $\beta(\Delta_1)$ και $\beta(\Delta_2)$, αντίστοιχα, και λόγο βαρών $\dfrac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια Δ_1 και Δ_2.

Λύση

Έστω $\alpha(\Delta)$, $\alpha(\Delta_1)$ και $\alpha(\Delta_2)$ η αξία των διαμαντιών Δ, Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta)}{\beta(\Delta)^2}=\frac{\alpha(\Delta_1)}{\beta(\Delta_1)^2}=\frac{\alpha(\Delta_2)}{\beta(\Delta_2)^2}=\lambda$$

$$\Rightarrow \alpha(\Delta)=\lambda\beta(\Delta)^2, \alpha(\Delta_1)=\lambda\beta(\Delta_1)^2,\ \alpha(\Delta_2)=\lambda\beta(\Delta_2)^2$$

Άρα έχουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}=\frac{\lambda\beta(\Delta_1)^2+\lambda\beta(\Delta_2)^2}{\lambda\beta(\Delta)^2}=\frac{\beta(\Delta_1)^2+\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2}=\frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2}+\frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2} \quad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta_2)}=\frac{3}{7}\Rightarrow\frac{\beta(\Delta_1)}{3}=\frac{\beta(\Delta_2)}{7}=\frac{\beta(\Delta_1)+\beta(\Delta_2)}{3+7}=\frac{\beta(\Delta)}{10}$$

$$\Rightarrow\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}=\frac{3}{10},\ \frac{\beta(\Delta_2)}{\beta(\Delta)}=\frac{7}{10} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\frac{\alpha(\Delta_1)+\alpha(\Delta_2)}{\alpha(\Delta)}=\frac{\beta(\Delta_1)^2}{\beta(\Delta)^2}+\frac{\beta(\Delta_2)^2}{\beta(\Delta)^2}=\left(\frac{\beta(\Delta_1)}{\beta(\Delta)}\right)^2+\left(\frac{\beta(\Delta)}{\beta(\Delta)}\right)^2=\frac{9}{100}+\frac{49}{100}=\frac{58}{100}.$$

Επομένως η αξία των δύο κομματιών του διαμαντιού ισούται με το 58% της αρχικής αξίας του, δηλαδή η αξία του μειώθηκε κατά 100-58 = 42%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}.$$

Λύση

Επειδή οι εμφανιζόμενες πράξεις είναι πολλές και χρονοβόρες, προσπαθούμε με κατάλληλη αντικατάσταση, να μετασχηματίσουμε την αριθμητική παράσταση σε αλγεβρική. Η παράσταση που προκύπτει μετά την απλοποίησή της οδηγεί τελικά σε απλό υπολογισμό της δεδομένης αριθμητικής παράστασης. Έτσι, αν θέσουμε $x=2014$, η παράσταση γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^2+(2x+1)^2}+\frac{(x+2)^3+(x-2)^3-18x}{x^2+(2x-1)^2}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+1\right)^2-(4x)^2}$$

$$=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2+4x+1}+\frac{2x\left(x^2+3\right)}{5x^2-4x+1}-\frac{4x\left(x^2+3\right)\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}$$

$$=2x\left(x^2+3\right)\left[\frac{1}{5x^2+4x+1}+\frac{1}{5x^2-4x+1}-\frac{2\left(5x^2+1\right)}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right]$$

$$=2x\left(x^2+3\right)\left(\frac{5x^2-4x+1+5x^2+4x+1-10x^2-2}{\left(5x^2+4x+1\right)\left(5x^2-4x+1\right)}\right)=2x\left(x^2+3\right)\cdot 0=0.$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3-2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-(4\cdot 2014)^2}=0$$

Πρόβλημα 2

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους Α και Β. 100 αντίτυπα του τόμου Α και 120 αντίτυπα του τόμου Β κοστίζουν συνολικά 4000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου Α με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου Β με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

Λύση

Έστω ότι η τιμή πώλησης του τόμου Α είναι x ευρώ και τόμου Β είναι y ευρώ. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$100x+120y=4000\Leftrightarrow 5x+6y=200 \qquad (1)$$

$$50\cdot\frac{90x}{100}+60\cdot\frac{80y}{100}=1680\Leftrightarrow 45x+48y=1680 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}5x+6y=200\\45x+48y=1680\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}45x+54y=1800\\45x+48y=1680\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}6y=120\\45x+48y=1680\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}y=20\\x=\dfrac{1680-48y}{45}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}y=20\\x=16\end{array}\right\}.$$

Άρα η τιμή πώλησης του τόμου Α ήταν 16 ευρώ και του τόμου Β ήταν 20 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right],$$

όπου x, y είναι ρητοί.

(α) Να γράψετε την παράσταση Α ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{\mathrm{B}}$ είναι ρητός για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(x^2+y^2+xy\right)^2 = \left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right) \\ &= x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3 \\ &= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \left(x^2+y^2+xy\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)^2+\left(xy\right)^2+2\left(x^2+y^2\right)xy \\ &= x^4+y^4+2x^2y^2+x^2y^2+2x^3y+2xy^3 \\ &= x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4. \end{aligned}$$

(β) Έχουμε, όπως στο προηγούμενο ερώτημα, ότι:

$$\left(x^2+y^2+2xy\right)^2 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= 2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right] = 2\left[x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4\right] \\ &= 2\left[2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4\right] = 4\left(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4\right) \\ &= 4\left(x^2+y^2+xy\right)^2, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α)

Άρα έχουμε

$$\sqrt{\mathrm{B}} = \left|2\left(x^2+xy+y^2\right)\right| = 2\left(x^2+xy+y^2\right) \in \mathbb{Q},$$

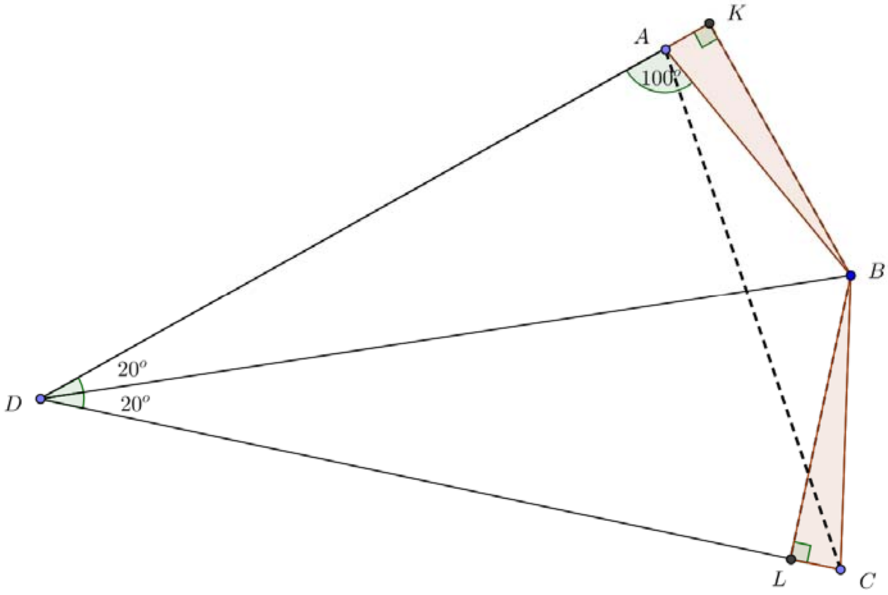
αφού οι αριθμοί x, y είναι ρητοί και $x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4} \geq 0.$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο $ABCD$ με τη γωνία $\hat{A}=100^\circ$ και $\hat{D}=40^\circ$. Αν DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

Λύση

Εφόσον η DB είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$, θα έχουμε ότι $C\hat{D}B = B\hat{D}A = 20^\circ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο DBC θα έχουμε ότι $D\hat{B}C = D\hat{C}B = 80^\circ$ και επιπλέον έχουμε ότι $D\hat{B}A = 180^\circ$-$\left(100^\circ+20^\circ\right)$=$60^\circ$. Αν τώρα φέρουμε τις προβολές BK και BL, αφού το B είναι σημείο της διχοτόμου, θα έχουμε ότι $BK=BL$ και $B\hat{A}K=80^\circ$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα BAK και BLC είναι ίσα, που σημαίνει ότι $BA = BC$. Επομένως, από το ισοσκελές τρίγωνο BAC παίρνουμε ότι: $C\hat{A}B=20^\circ$.



Σχήμα 4

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \text{ και } \mathrm{B}=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}.$$

Λύση (1ος τρόπος)
Θεωρούμε τη διαφορά των δύο αριθμών και έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1}-\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}=\frac{\left(x^k+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)-\left(x^{k+1}+1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}$$

$$=\frac{x^{k+2}+x^k+1-2x^{k+1}-1}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)}=\frac{x^k\left(x-1\right)^2}{\left(x^{k+1}+1\right)\left(x^{k+2}+1\right)},$$

οπότε, αφού $x>0$ και k ακέραιος, έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\left\{\begin{array}{l}0, \quad \text{αν } x=1\\ >0, \text{ αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}=\mathrm{B}, \quad \text{αν } x=1\\ \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{αν } 0<x\neq 1\end{array}\right\}.$$

2ος τρόπος
Έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2}=\frac{x^{2k+2}+x^k+x^{k+2}+1}{(x^{k+1}+1)^2}$$

$$=1+\frac{x^{k+2}+x^k-2x^{k+1}}{(x^{k+1}+1)^2}=1+\frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2}\geq 1.$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει, αν, και μόνο αν, $x=1$.
Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}, \text{ αν } x=1 \text{ και } \mathrm{A}>\mathrm{B}, \text{ αν } 0<x\neq 1.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 + 2|x - y| = 5$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 5 - 2|x - y| \qquad (1)$$

Η παράσταση του πρώτου μέλους γράφεται:

$$2x^2 - 10xy + 13y^2 = 2\left(x^2 - 5xy + \frac{25y^2}{4}\right) + 13y^2 - \frac{25y^2}{2} = 2\left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν: $x - \frac{5y}{2} = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Επομένως για το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1) πρέπει να ισχύει:

$$5 - 2|x - y| \geq 0 \Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |x - y| \in \{0, 1, 2\},$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

1. $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2x^2 - 10x^2 + 13x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε προκύπτουν οι λύσεις: $(x, y) = (-1, -1)$ ή $(x, y) = (1, 1)$.

2. $|x - y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1$ ή $x - y = -1 \Leftrightarrow x = y + 1$ ή $x = y - 1$.

   Για $x = y \pm 1$ η εξίσωση γίνεται: $2(y \pm 1)^2 - 10(y \pm 1)y + 13y^2 = 3$

   $\Leftrightarrow 5y^2 \mp 6y - 1 = 0$, η οποία δεν έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 56$

3. $|x - y| = 2 \Leftrightarrow x - y = 2$ ή $x - y = -2 \Leftrightarrow x = y + 2$ ή $x = y - 2$.

   Για $x = y + 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y + 2)^2 - 10(y + 2)y + 13y^2 = 1$

   $\Leftrightarrow 5y^2 - 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = \frac{7}{5}$.

   Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (3, 1)$

   Για $x = y - 2$ η εξίσωση γίνεται: $2(y - 2)^2 - 10(y - 2)y + 13y^2 = 1$

   $\Leftrightarrow 5y^2 + 12y + 7 = 0$, η οποία έχει ακέραιες λύσεις αφού η διακρίνουσα της είναι $\Delta = 4$ και έχει ρίζες $y = \frac{-12 \pm 2}{10} \Leftrightarrow y = -1$ ή $y = -\frac{7}{5}$.

   Άρα προκύπτει η λύση $(x, y) = (-3, -1)$.

   Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(-3, -1)$.

Πρόβλημα 3

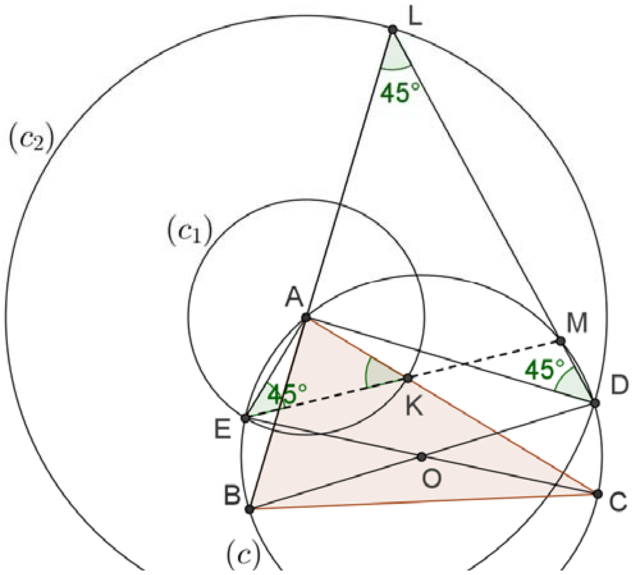
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). Ο κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. Ο κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται πάνω στο κύκλο (c).

Λύση

Έστω M το σημείο τομής της DL με τον κύκλο (c) θα αποδείξουμε ότι τα σημεία E, K, M βρίσκονται επάνω στον ίδια ευθεία.

Η γωνία $E\hat{A}C$ είναι ορθή, διότι βαίνει στη διάμετρο EC του κύκλου (c). Το τρίγωνο AEK είναι ισοσκελές (διότι AE, AK είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα:

$$A\hat{E}K = A\hat{K}E = 45^\circ. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Η γωνία $B\hat{A}D$ είναι ορθή, γιατί βαίνει στη διάμετρο BD του κύκλου (c), οπότε και η γωνία $D\hat{A}L$ είναι ορθή. Το τρίγωνο ADL είναι ισοσκελές (διότι AD, AL είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)). Άρα έχουμε

$$A\hat{D}L = A\hat{L}D = 45^\circ. \qquad (2)$$

Οι γωνίες $A\hat{D}M = A\hat{D}L$ και $A\hat{E}M$ είναι ίσες, γιατί είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overparen{AM}$, δηλαδή

$$A\hat{E}M = A\hat{D}L \qquad (3)$$

Άρα από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα $A\hat{E}K = A\hat{E}M = 45^\circ$, οπότε τα σημεία E, K, M είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 4

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

Λύση
Για το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών έχουμε τη σχέση
$$\Sigma_x \geq 8\cdot 100+\left(x-8\right)\cdot 70 \Leftrightarrow \Sigma_x \geq 70x+240, \qquad (1)$$
οπότε για το μέσο όρο των βαθμών έχουμε:
$$\text{Μ.Ο.}=\frac{\Sigma_x}{x}\geq\frac{70x+240}{x}=70+\frac{240}{x}. \qquad (2)$$
Έχοντας υπόψη ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών είναι 78, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x<30$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:
$$\text{Μ.Ο.}=\frac{\Sigma_x}{x}\geq 70+\frac{240}{x}>70+\frac{240}{30}=78, \qquad (3)$$
που είναι αντίθετο προς την υπόθεση ότι ο μέσος όρος των βαθμών είναι 78.
Επομένως δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι $x<30,$ οπότε πρέπει να είναι $x\geq 30$.
Παρατηρούμε ότι για $x=30$, έχουμε την περίπτωση
$$\text{Μ.Ο.}=\frac{\Sigma_{30}}{30}=\frac{8\cdot 100+\left(30-8\right)\cdot 70}{30}=\frac{30\cdot 70+8\cdot 30}{30}=70+8=78,$$
οπότε η **ελάχιστη δυνατή τιμή** του x είναι 30.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y=x^2-\left(3\alpha-5\right)x+186,\ \alpha\in\mathbb{Z}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση
Τα σημεία τομής της παραβολής $y=x^2-\left(3\alpha-5\right)x+186,\ \alpha\in\mathbb{Z}$ με τον άξονα των x είναι της μορφής $\mathrm{A}_1\left(x_1,0\right)$ και $\mathrm{A}_2\left(x_2,0\right),$ όπου x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:
$$x^2-\left(3\alpha-5\right)x+186=0,\ \alpha\in\mathbb{Z}.$$
Άρα έχουμε:
$$x_1+x_2=3a-5, \qquad (1)$$
$$x_1x_2=186 \qquad (2).$$
Επειδή πρέπει οι ρίζες x_1 και x_2 να είναι ακέραιοι αριθμοί, σύμφωνα με την υπόθεση διαφορετικοί μεταξύ τους, έστω $\left|x_1\right|<\left|x_2\right|$, από την εξίσωση (2), έχουμε ότι οι x_1, x_2 πρέπει να είναι ομόσημοι ακέραιοι, με γινόμενο $186=2\cdot 3\cdot 31$. Άρα έχουμε τα εξής δυνατά ζεύγη:
$$\left(x_1,x_2\right)\in\left\{\left(1,186\right),\left(2,93\right),\left(3,62\right),\left(6,31\right),\left(-1,-186\right),\left(-2,-93\right),\left(-3,-62\right),\left(-6,-31\right)\right\}$$
Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι: $\alpha=\dfrac{x_1+x_2+5}{3}$, οπότε οι δυνατές τιμές για την παράμετρο $\alpha\in\mathbb{Z}$ είναι οι εξής: 64, 14 , -30, -20 .

Πρόβλημα 2
Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα :

$$\begin{Bmatrix} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{Bmatrix}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)
Προσθέτοντας και αφαιρώντας το x^2y^2 η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)$$

Επομένως, έχουμε $x^2+y^2-xy=\frac{91}{13}=7$. Προσθέτοντας τώρα αυτή και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος, βρίσκουμε ότι: $2\left(x^2+y^2\right)=20 \Leftrightarrow x^2+y^2=10$, οπότε $xy=3$ από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος. Έτσι καταλήγουμε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2+y^2=10 \\ 2xy=6 \end{Bmatrix},$$

από το οποίο με πρόσθεση και αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη, λαμβάνουμε

$$\begin{Bmatrix} x^2+y^2+2xy=16 \\ x^2+y^2+2xy=4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x+y)^2=16 \\ (x-y)^2=4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+y=\pm 4 \\ x-y=\pm 2 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x+y=4 \\ x-y=2 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} x+y=-4 \\ x-y=2 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} x+y=4 \\ x-y=-2 \end{Bmatrix} \text{ ή } \begin{Bmatrix} x+y=-4 \\ x-y=-2 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (x,y)=(3,1) \text{ ή } (x,y)=(-1,-3) \text{ ή } (x,y)=(1,3) \text{ ή } (x,y)=(-3,-1).$$

2^{ος} τρόπος
Έχουμε

$$\begin{Bmatrix} x^4+x^2y^2+y^4=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=91 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{Bmatrix},$$

οπότε, αν θέσουμε $\varphi=x^2+y^2$ και $\omega=xy$, λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{Bmatrix} \varphi^2-\omega^2=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (\varphi+\omega)(\varphi-\omega)=91 \\ \varphi+\omega=13 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi-\omega=7 \\ \varphi+\omega=13 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi=10 \\ \omega=3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \end{Bmatrix}.$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε, όπως στον πρώτο τρόπο.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$. Η διχοτόμος $B\Delta$ τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$, στο σημείο Z. Έστω E τυχόν σημείο του τμήματος $\Delta\Gamma$. Η ευθεία BE τέμνει τον κύκλο $C(O,R)$ στο σημείο H. Οι ευθείες $A\Gamma$ και ZH τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ZE τέμνει τον κύκλο στο σημείο K. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $B\Delta H\Theta$, $B\Delta EK$ και $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμα.

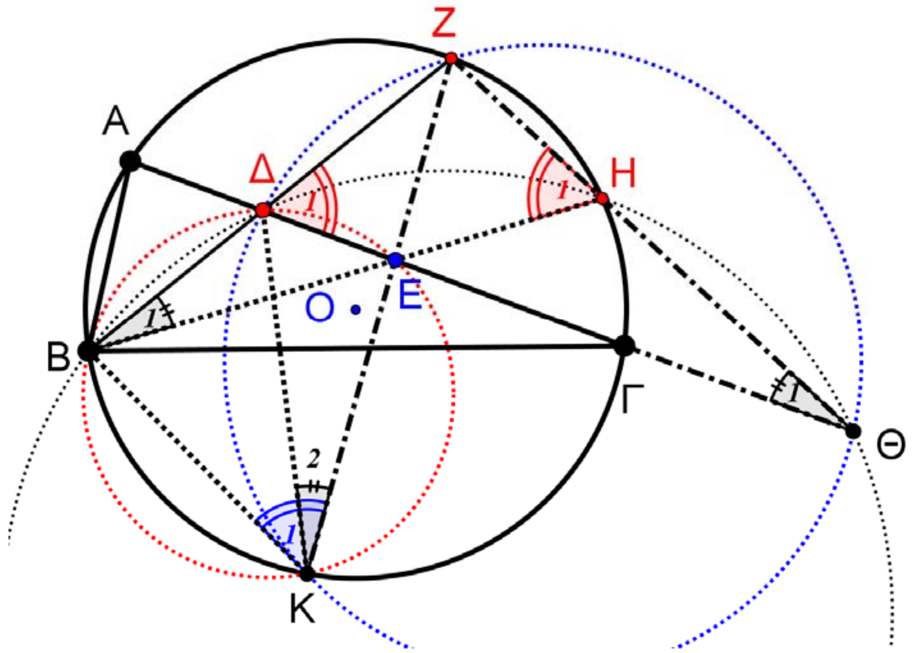
Λύση

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(O,R)$ και βαίνει στο τόξο BZ. Άρα:

$$\hat{H}_1 = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{B}}{2}.$$

Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική του τριγώνου $A\Delta Z$. Άρα:

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}Z + A\hat{Z}B = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{\Gamma}.$$



Σχήμα 6

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, προκύπτει η ισότητα των παραπληρωματικών τους γωνιών και από εκεί ότι **το τετράπλευρο $B\Delta H\Theta$ είναι εγγράψιμο.**

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BKHZ$ έχουμε: $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$, η οποία σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{H}_1 = \hat{\Delta}_1$, μας δίνει **την εγγραψιμότητα του τετραπλεύρου $B\Delta EK$.**

Από το εγγράψιμο $B\Delta EK$ έχουμε: $\hat{K}_2 = \hat{B}_1$.Από το εγγράψιμο $B\Delta H\Theta$ έχουμε: $\hat{\Theta}_1 = \hat{B}_1$. Άρα είναι: $\hat{K}_2 = \hat{\Theta}_1$.

Επομένως και **το τετράπλευρο $\Delta Z\Theta K$ είναι εγγράψιμο.**

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640.$$

Λύση

Για τους τέσσερις διαιρέτες ισχύουν οι σχέσεις

$$d_1 = 1,\ d_4 = n \ \text{ και } \ d_2 \cdot d_3 = n.$$

Επομένως, έχουμε

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640 \Leftrightarrow 1 + d_2 + d_3 + d_2 d_3 = 640$$
$$\Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 640 \Leftrightarrow (1 + d_2)(1 + d_3) = 2^7 \cdot 5$$

Αλλά $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 \Rightarrow 2 < 1 + d_2 < 1 + d_3$ και επειδή οι d_2 και d_3 είναι ακέραιοι αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + d_2 = 4, 1 + d_3 = 160 \Leftrightarrow d_2 = 3, d_3 = 159 = 3 \cdot 53$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 3 \cdot 159$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 5, 1 + d_3 = 128 \Leftrightarrow d_2 = 4, d_3 = 127$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 4 \cdot 127$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 8, 1 + d_3 = 80 \Leftrightarrow d_2 = 7, d_3 = 79$, οπότε είναι $n = 7 \cdot 79 = 553$
- $1 + d_2 = 10, 1 + d_3 = 64 \Leftrightarrow d_2 = 9, d_3 = 63$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 9 \cdot 63$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 16, 1 + d_3 = 40 \Leftrightarrow d_2 = 15, d_3 = 39$, απορρίπτονται, αφού ο $n = 15 \cdot 39$ έχει και άλλους διαιρέτες.
- $1 + d_2 = 20, 1 + d_3 = 32 \Leftrightarrow d_2 = 19, d_3 = 31$, οπότε είναι $n = 19 \cdot 31 = 589$

Τελικά, οι αριθμοί που ικανοποιούν τις αρχικές υποθέσεις είναι οι 553 και 589.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}, \quad \mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}$$

και να τις συγκρίνετε.

Λύση

$$\mathrm{A}=24:6+5^2-2\cdot 8+8:2^2+\frac{3^2}{11}=24:6+25-2\cdot 8+8:4+\frac{9}{11}=4+25-16+2+\frac{9}{11}$$
$$=15+\frac{9}{11}=15\frac{9}{11}.$$

$$\mathrm{B}=\left(2^5+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=\left(32+112\right):3^2-1+\frac{5}{7}=144:9-1+\frac{5}{7}=16-1+\frac{5}{7}$$
$$=15+\frac{5}{7}=15\frac{5}{7}.$$

Έχουμε: $\mathrm{A}-\mathrm{B}=15\frac{9}{11}-15\frac{5}{7}=15+\frac{9}{11}-15-\frac{5}{7}=\frac{9}{11}-\frac{5}{7}=\frac{63-55}{77}=\frac{8}{77}>0$,
οπότε θα είναι $\mathrm{A}>\mathrm{B}$.

Πρόβλημα 2

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος $\alpha=6$ μέτρα και πλάτος $\beta=4$ μέτρα Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20% και μειώσουμε το πλάτος του κατά 5%, να βρείτε πόσο επί τοις εκατό θα μεταβληθεί:
(i) η περίμετρος του ορθογωνίου, **(ii)** το εμβαδό του ορθογωνίου.

Λύση

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=2(\alpha+\beta)=2(6+4)=20$ μέτρα και το εμβαδό του είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta=6\cdot 4=24$ τετραγωνικά μέτρα.

Μετά την αύξηση το μήκος του ορθογωνίου θα γίνει $6+6\cdot\frac{20}{100}=6+1,2=7,2$ μέτρα,

ενώ το πλάτος του μετά τη μείωση θα γίνει $4-4\cdot\frac{5}{100}=4-0,2=3,8$ μέτρα.

Έτσι έχουμε:

(i) Η περίμετρος του ορθογωνίου μετά την μεταβολή των διαστάσεων του θα γίνει

$\Pi' = 2(7,2+3,8) = 2\cdot 11 = 22$ μέτρα, οπότε η αύξησή της είναι

$\Pi' - \Pi = 22 - 20 = 2$ μέτρα και η επί τοις εκατό αύξησή της είναι

$$\frac{\Pi' - \Pi}{\Pi} = \frac{2}{20} = \frac{10}{100}, \text{ δηλαδή } 10\%.$$

(ii) Το εμβαδό του ορθογωνίου μετά την αύξηση των διαστάσεων θα γίνει θα γίνει

$E' = 7,2\cdot 3,8 = 27,36$ τετρ.μέτρα, οπότε η μεταβολή (αύξηση) του είναι

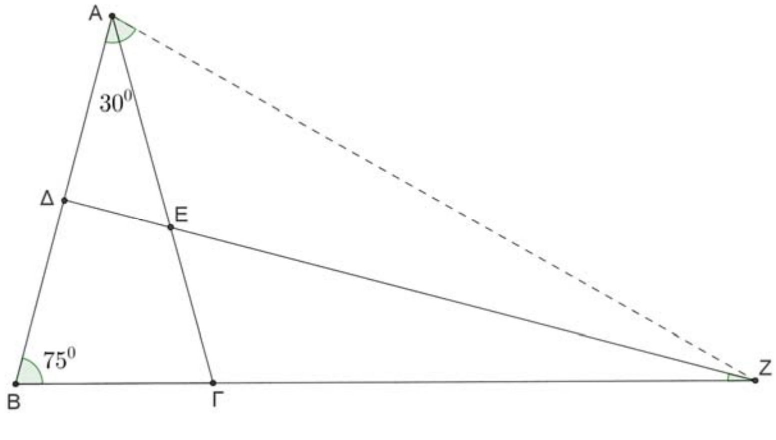
$E' - E = 27,36 - 24 = 3,36$ τετρ. μέτρα και η επί τοις εκατό αύξηση του είναι

$$\frac{E' - E}{E} = \frac{3,36}{24} = 0,14 = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } 14\%.$$

Πρόβλημα 3.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $B\hat{Z}\Delta$ και $\Gamma\hat{A}Z$.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ θα έχει τις απέναντι γωνίες τους ίσες, δηλαδή $A\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A = \frac{180^\circ - B\hat{A}\Gamma}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Επειδή το Ζ είναι σημείο της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΒ θα απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Β, δηλαδή είναι ΖΑ = ΖΒ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές και θα έχει τις γωνίες απέναντι των ίσων πλευρών του ίσες, δηλαδή $B\hat{A}Z = A\hat{B}Z = A\hat{B}\Gamma = 75^\circ$. Τότε θα είναι $A\hat{Z}B = 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ$.

Η μεσοκάθετη ΖΔ της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΖΒ είναι και διχοτόμος της γωνίας του $A\hat{Z}B$, οπότε θα είναι $B\hat{Z}\Delta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$.

Διαφορετικά, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{\Delta}Z = 90^\circ$, έχουμε:

$$B\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

Για τη γωνία $\Gamma\hat{A}Z$ έχουμε: $\Gamma\hat{A}Z = B\hat{A}Z - B\hat{A}\Gamma = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε τους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους $x-1, x, x+1$ που είναι μικρότεροι του 1000 και τέτοιοι ώστε ο x είναι πολλαπλάσιο του 10, ο $x+1$ είναι πολλαπλάσιο του 11 και ο $x-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι $x=10, x+1=11$ είναι πολλαπλάσια των 10 και 11, αντίστοιχα. Επιπλέον ο 9 είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε η τριάδα 9,10,11 είναι μία λύση του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρατηρώ ότι $\text{ΕΚΠ}(10,11)=110$, οπότε για να βρω το επόμενο ζευγάρι θετικών ακέραιων που έχουν την ίδια ιδιότητα με τους 10 και 11 πρέπει να προσθέσω και στους δύο το 110 ή κάποιο πολλαπλάσιο του 110 μέχρι που να προκύψει ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1000. Έτσι έχουμε τα ζευγάρια:

120	230	340	450	560	670	780	890
121	231	341	451	561	671	781	891

Επομένως αρκεί να ελέγξουμε ποιοι από τους αριθμούς 119, 229, 339, 449, 559, 669, 779, και 889 είναι πολλαπλάσια του 3. Τέτοιοι είναι οι αριθμοί 339 και 669, οπότε λαμβάνουμε και τις λύσεις 339,340,341 και 669,670,671.

Παρατήρηση. Μετά την εύρεση της πρώτης λύση 9,10,11, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι για να προκύψει μία αντίστοιχη τριάδα θα πρέπει να προσθέσουμε και στους τρεις ακέραιους ένα πολλαπλάσιο του $\text{ΕΚΠ}(3,10,11)=330$. Έτσι εύκολα προκύπτουν και οι άλλες δύο λύσεις του προβλήματος 339,340,341 και 669,670,671.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης . $\mathrm{A}=\dfrac{a-1}{a-3}+\dfrac{1}{33}+a^{-1}\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{27}$, αν $a=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$.

Λύση

Έχουμε $a=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{4}=\dfrac{81}{16}$, οπότε θα είναι $a^{-1}=\dfrac{16}{81}$ και

$$\mathrm{A}=\frac{a-1}{a-3}+\frac{1}{33}+a^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}=\frac{\frac{81}{16}-1}{\frac{81}{16}-3}+\frac{1}{33}+\frac{16}{81}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$$

$$=\frac{\frac{65}{16}}{\frac{33}{16}}+\frac{1}{33}+\frac{8}{27}+\frac{1}{27}=\frac{65}{33}+\frac{1}{33}+\frac{9}{27}=\frac{66}{33}+\frac{9}{27}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}.$$

Πρόβλημα 2ο

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\frac{28}{\nu}$ και $\gamma=\frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

Λύση

Οι δυνατές τιμές του ψηφίου β των δεκάδων είναι: 0, 4, 8.

Ο ακέραιος ν πρέπει να είναι θετικός και κοινός διαιρέτης των 28 και 42, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι: 1, 2, 7, 14. Τότε οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο α είναι:

$$\alpha=4,\ \text{για } \nu=7,\ \alpha=2,\ \text{για } \nu=14.$$

Οι αποδεκτές τιμές για το ψηφίο γ είναι:

$$\gamma=6, \text{για } \nu=7,\ \ \gamma=3,\ \text{για } \nu=14.$$

Επομένως έχουμε: $\alpha=4,\ \gamma=6,$ για $\nu=7$ και $\alpha=2,\ \gamma=3,$ για $\nu=14.$

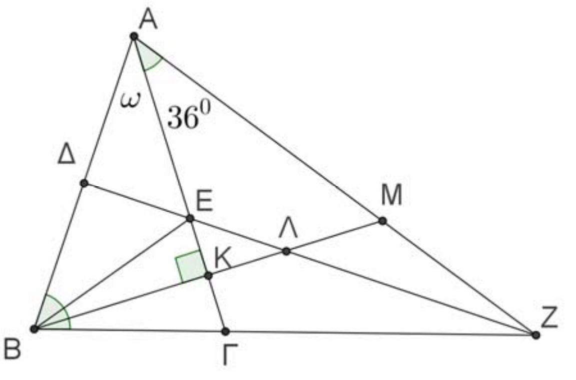
Άρα οι δυνατές τιμές του ακέραιου $\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι: 406, 446, 486, 203, 243, 283.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\omega^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z}=36^\circ$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\omega=36^\circ$, **(β)** ΑΜ = ΓΖ, **(γ)** ΒΛ = ΛΖ.

Λύση



Σχήμα 2

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ θα έχουμε:

$$\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-\omega}{2}.$$

Επειδή η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ, το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές ΖΑ = ΖΒ, οπότε θα έχουμε:

$$\mathrm{Z\hat{A}B}=\mathrm{Z\hat{B}A}\Leftrightarrow\omega+36^\circ=\hat{\mathrm{B}}\Leftrightarrow\omega+36^\circ=\frac{180^\circ-\omega}{2}\Leftrightarrow 3\omega=108\Leftrightarrow\omega=36^\circ.$$

(β) Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΜ η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος θα έχουμε

$$\mathrm{A\hat{B}K} = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ = \mathrm{A\hat{M}K}.$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΜ είναι ισοσκελές με ΑΜ = ΑΒ. Από υπόθεση είναι ΑΒ = ΑΓ. Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΖΑΒ έχουμε

$$\mathrm{A\hat{Z}B} = 180^\circ - 2\hat{\mathrm{B}} = 180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}.$$

Επομένως και το τρίγωνο ΓΑΖ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΓΖ. Άρα έχουμε:

ΑΜ = ΑΒ = ΑΓ = ΓΖ.

(γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = 90^\circ - \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$, ενώ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε: $\Lambda\mathrm{BZ} = \mathrm{KB}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Άρα έχουμε: $\Lambda\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B} = \Lambda\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = 18^\circ \Rightarrow \Lambda\mathrm{BZ}$ ισοσκελές τρίγωνο με ΒΛ = ΛΖ.

Πρόβλημα 4

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = (x+y)\cdot z^m - w$.

Λύση

Από τη συνθήκη, οι x, y, z, w, m είναι οι αριθμοί 1,2,3,4,5 με διαφορετική ίσως σειρά.

Για τη μέγιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο ελάχιστος, δηλαδή $w = 1$. Τους αριθμούς 4 και 5 πρέπει να τους χρησιμοποιήσουμε στη δύναμη z^m. Παρατηρούμε ότι $4^5 > 5^4$, οπότε για τη μέγιστη τιμή $z = 4, m = 5$. Οπότε απομένει να έχουμε $x + y = 2 + 3 = 5$. Συνεπώς η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $5\cdot 4^5 - 1 = 5\cdot 1024 - 1 = 5119$.

Για την ελάχιστη τιμή, θα πρέπει ο αριθμός που αφαιρούμε να είναι ο μέγιστος, δηλαδή $w = 5$ και η δύναμη z^m να είναι η ελάχιστη, οπότε $z = 1$. Η μικρότερη τιμή τώρα για το $x + y$ είναι $x + y = 2 + 3 = 5$ η ελάχιστη τιμή είναι $5\cdot 1^4 - 5 = 0$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4}$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

Λύση. Έχουμε:

$$2x + (x+1)(x-1) < x^2 + x - 2 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2x + x^2 - 1 < x^2 + x - 2 + \lambda \Leftrightarrow x < \lambda - 1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε

$$\frac{2x-1}{4} - \frac{3}{8} > \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 2 - 3 > 2x - 2 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2} < x < \lambda - 1,$, εφόσον ισχύει:

$$\lambda - 1 > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda > \frac{5}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα $\left\{ \begin{matrix} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \dfrac{3}{x-3}-\dfrac{4}{y+2}=11 \end{matrix} \right\}$

Λύση

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 3, y \neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3}=a$ και $\frac{1}{y+2}=b$, οπότε

$$x+y-1=(x-3)+(y+2)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}..$$

Επομένως, με περιορισμό $a,b \neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{6}{ab} \\ 3a-4b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 3a-4b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6-b \\ 3(6-b)-4b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} a=6-b \\ 7b=7 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} a=5 \\ b=1 \end{matrix} \right\},$$

οπότε $x=\frac{16}{5}, y=-1$, που πληρούν τους περιορισμούς.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x+y+x^2+y^2=p,$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x+x^2+y+y^2=p \Leftrightarrow x(x+1)+y(y+1)=p \quad (1)$

Όμως οι αριθμοί $x(x+1)$, $y(y+1)$ ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων **είναι και οι δύο άρτιοι**, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p=2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x+1)$, $y(y+1)$ **είναι άρτιοι μη αρνητικοί**, έχουμε:

$$x(x+1)+y(y+1)=2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} x(x+1)=2 \\ y(y+1)=0 \end{matrix} \right\} (\Sigma_1) \text{ ή } \left\{ \begin{matrix} x(x+1)=0 \\ y(y+1)=2 \end{matrix} \right\} (\Sigma_2)$$

Έχουμε

$$x(x+1)=2 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ και } y(y+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή } y=-1.$$

Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει τις λύσεις:

$$(x,y)=(1,0) \text{ ή } (1,-1) \text{ ή } (-2,0) \text{ ή } (-2,-1)$$

Ομοίως, για το σύστημα (Σ_2) βρίσκουμε τις λύσεις:

$$(x,y)=(0,1) \text{ ή } (-1,1) \text{ ή } (0,-2) \text{ ή } (-1,-2).$$

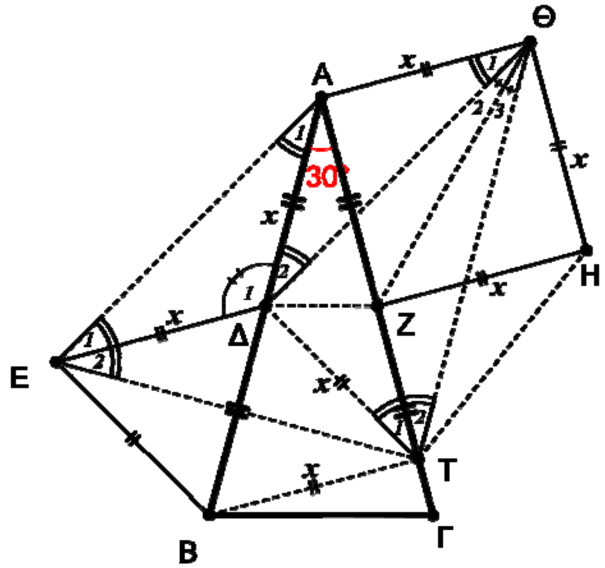
Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^o$. Έστω Δ, Z τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$ και τετράγωνο $AZH\Theta$. Η μεσοκάθετη του $B\Delta$, τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο AET είναι ισόπλευρο,

(β) τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta E = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^o$. Άρα

$$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^o.$$

Η ET είναι μεσοκάθετη της $B\Delta$, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Delta E$) έχουμε:

$$\hat{E}_2 = \frac{B\hat{E}\Delta}{2} = 30^o.$$

Στο τρίγωνο AET έχουμε, $E\hat{A}T = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^o$ και $A\hat{E}T = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^o$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η AB είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της ET. Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \qquad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $A\Delta\Theta$ και $A\Delta T$ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \Delta\hat{A}\Theta = A\hat{\Delta}T = 120^o.$$

Άρα έχουμε

$$\Delta\Theta = AT \qquad (2).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}T = 180^o - \hat{\Delta}_2 - B\hat{\Delta}T = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o.$$

$$A\hat{T}B = \hat{T}_1 + B\hat{T}\Delta = 30^o + 60^o = 90^o.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα ATB και $\Delta\Theta T$ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

Παρατήρηση. Επιπλέον, στο σημείο Z τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου $\Delta\Theta T$, δηλαδή το σημείο Z είναι έκκεντρο του τριγώνου $\Delta\Theta T$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{y}^2} + \sqrt{\mathrm{x}^4 + 32\mathrm{y}^2}$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y.

Λύση

Έχουμε ότι $x^4 + 5x^2 + 2y^2 = x^4 + 5x^2 + 4 - x^2 = x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$, οπότε

$$\sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} = x^2 + 2.$$

Επιπλέον $x^4 + 32y^2 = \left(4 - 2y^2\right)^2 + 32y^2 = 16 + 16y^2 + 4y^4 = 4\left(y^2 + 2\right)^2$, οπότε

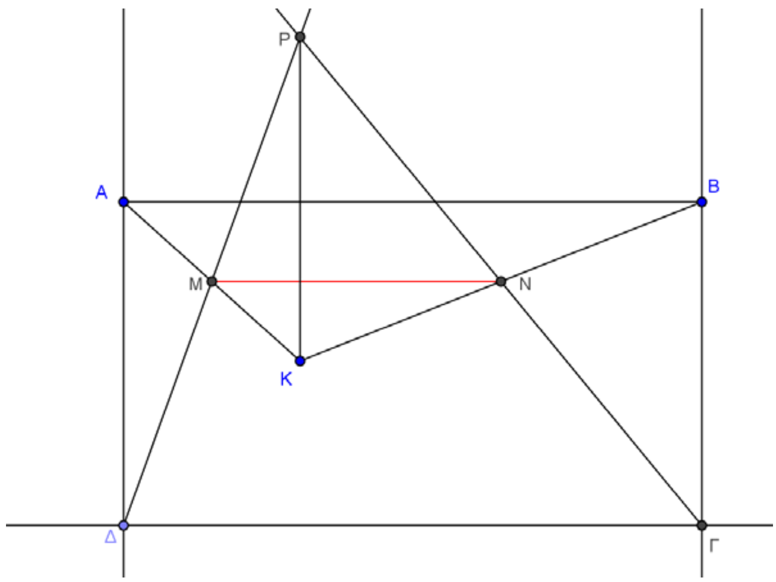
$$\sqrt{x^4 + 32y^2} = 2(y^2 + 2).$$

Συνεπώς $\mathrm{A} = x^2 + 2 + 2(y^2 + 2) = x^2 + 2y^2 + 6 = 4 + 6 = 10$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Κ στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ν των ΑΚ, ΒΚ αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες ΓΝ, ΔΜ τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΡΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΓΔ.

Λύση



Σχήμα 4

Στο τρίγωνο ΑΚΒ το τμήμα ΜΝ συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα $\mathrm{MN} // \mathrm{AB}$ και $\mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$. Όμως το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $\mathrm{AB} = \Gamma\Delta$, επομένως $\mathrm{MN} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$ και επιπλέον $\mathrm{AB} // \Gamma\Delta$ οπότε και $\mathrm{MN} // \Gamma\Delta$. Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα ΡΜΝ, ΡΔΓ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{MN}} = 2$, οπότε θα είναι και $\frac{\mathrm{P}\Delta}{\mathrm{PM}} = 2$ οπότε το Μ είναι το μέσον του $\mathrm{P}\Delta$. Άρα στο τετράπλευρο $\mathrm{PA}\Delta\mathrm{K}$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, $\mathrm{PK} // \mathrm{A}\Delta$, οπότε, αφού $\mathrm{A}\Delta \perp \Gamma\Delta$, έπεται ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}, \frac{a+2}{5}, a.$

(β) Να βρείτε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \leq \frac{2x+a}{3}, \quad 2(3x-a)+x > 2(x+1)-a, \quad a-x \leq 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α.

Λύση

(α) Αφού $a > 0$, έχουμε: $\frac{5a}{2} - a = \frac{3a}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2} > a.$ Επίσης, έχουμε $a > \frac{a+2}{5} \Leftrightarrow 5a > a+2 \Leftrightarrow 4a > 2 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$, που ισχύει αφού ο a είναι θετικός ακέραιος Άρα $a > \frac{a+2}{5}$.

Επομένως έχουμε τη διάταξη: $\frac{a+2}{5} < a < \frac{5a}{2}$.

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2} - \frac{x}{2} \leq \frac{2x+a}{3} \Leftrightarrow 9x-3a-3x \leq 4x+2a \Leftrightarrow 2x \leq 5a \Leftrightarrow x \leq \frac{5a}{2}$.
- $2(3x-a)+x > 2(x+1)-a \Leftrightarrow 6x-2a+x > 2x+2-a \Leftrightarrow 5x > a+2 \Leftrightarrow x > \frac{a+2}{5}$.
- $a-x \leq 2(x-a) \Leftrightarrow a-x \leq 2x-2a \Leftrightarrow 3a \leq 3x \Leftrightarrow x \geq a$.

Επειδή ισχύει ότι $\frac{a+2}{5} < a < \frac{5a}{2}$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις είναι: $\mathrm{A} = \left\{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq \frac{5a}{2},\ a \in \mathbb{Z}_+^* \right\} = \left[a, \frac{5a}{2} \right],\ a \in \mathbb{Z}_+^*$..

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου Α. Αν αυτοί είναι m και Μ, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακέραιων που περιέχονται στο σύνολο Α είναι: $(M-m)+1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a = 2k, k \in \mathbb{N}^*$. Τότε $\mathrm{A} = [2k, 5k]$, οπότε περιέχει $3k+1 = \frac{3a}{2}+1$ ακέραιους.
- $a = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Τότε $\mathrm{A} = \left[2k+1, 5k+\frac{5}{2}\right] = \left[2k+1, 5k+2+\frac{1}{2}\right]$, οπότε περιέχει $3k+1+1 = \frac{3(a-1)}{2}+2 = \frac{3a}{2}+\frac{1}{2}$ ακέραιους.

Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma : \begin{cases} \alpha\sqrt[3]{b} - c = \alpha \\ b\sqrt[3]{c} - \alpha = b \\ c\sqrt[3]{\alpha} - b = c \end{cases}$$

Λύση

Αν κάποιος από τους a,b,c είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε $a=b=c=0$ είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι $a,b,c>0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο c είναι μεγαλύτερος ή ίσος των a,b. Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε $\alpha\sqrt[3]{b} = \alpha + c \geq 2\alpha$, οπότε $\sqrt[3]{b} \geq 2$, δηλαδή $b \geq 8$ (1).

Οπότε θα είναι $c \geq 8$ (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $b = b\sqrt[3]{c} - a \geq 2b - a$, οπότε $a \geq b$ και από την (1) έχουμε $a \geq 8$. Η τελευταία τώρα δίνει $c = c\sqrt[3]{a} - b \geq 2c - b$, οπότε $b \geq c$.

Επομένως, τελικά έχουμε $b \geq c \geq a \geq b$, δηλαδή $a=b=c$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $a\sqrt[3]{a} = 2a$ και αφού $a>0$, έχουμε ότι $a=8$, οπότε $a=b=c=8$ είναι λύση.

Τελικά οι δύο λύσεις είναι $(a,b,c) \in \{(0,0,0),(8,8,8)\}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, $\mathrm{B}\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma, -\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta, -\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma < 0 < \beta < \alpha < \delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ που περνάει από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση:

$$y - \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} \right)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}.$$

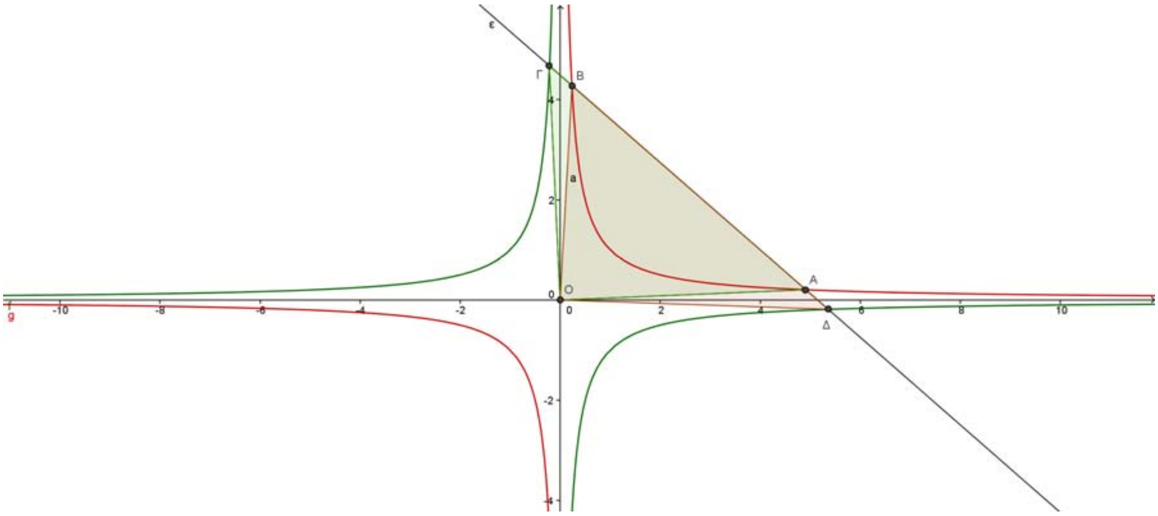
Η ευθεία $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ που περνάει από τα σημεία Γ και Δ έχει εξίσωση:

$$y+\frac{1}{\gamma}=\left(\frac{-\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\gamma}}{\delta-\gamma}\right)(x-\gamma)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\gamma\delta}x-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}.$$

Επειδή οι ευθείες ε_{AB} και $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ συμπίπτουν, έπεται ότι:

$$-\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\gamma\delta}\quad \text{και}\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta},$$

από τις οποίες προκύπτει η ισότητα: $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.



Σχήμα 5

(ii) Τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ έχουν τετμημένες $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\frac{\gamma+\delta}{2}$ οι οποίες λόγω της (i) ταυτίζονται, οπότε τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο, έστω Μ. Τότε, δεδομένης της διάταξης των σημείων πάνω στην ευθεία ε που προκύπτει από τις συνθήκες $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$, ισχύει ότι:

$$\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AM}+\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{BM}+\mathrm{M\Delta}=\mathrm{B\Delta},$$

οπότε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσες βάσεις στις οποίες αντιστοιχούν ίσα ύψη από την κορυφή Ο, οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{A}(x)=3x^2-3x+4,\ \mathrm{B}(x)=x^2+3,\ \Gamma(x)=2x^2-3x+5,\Delta(x)=2x^2+2,$$

παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω τριώνυμα έχουν αρνητική διακρίνουσα, οπότε έχουν θετική τιμή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι ποσότητες μέσα στα ριζικά των δύο μελών της εξίσωσης έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)=\Gamma(x)+\Delta(x)\Leftrightarrow \mathrm{A}(x)-\Delta(x)=\Gamma(x)-\mathrm{B}(x)=\mathrm{P}(x)=x^2-3x+2.$$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sqrt{\Delta(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\mathrm{B}(x)}=\sqrt{\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\Delta(x)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta(x)+\mathrm{P}(x)+\mathrm{B}(x)+2\sqrt{\mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]}=$$

$$(x)+\mathrm{P}(x)+\Delta(x)+2\sqrt{\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]=\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)\left[\mathrm{B}(x)-\Delta(x)\right]=0 \Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=0 \text{ ή } \mathrm{B}(x)-\Delta(x)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ ή } x^2+3-2x^2-2=0 \qquad ,$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2=1 \Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1.$$

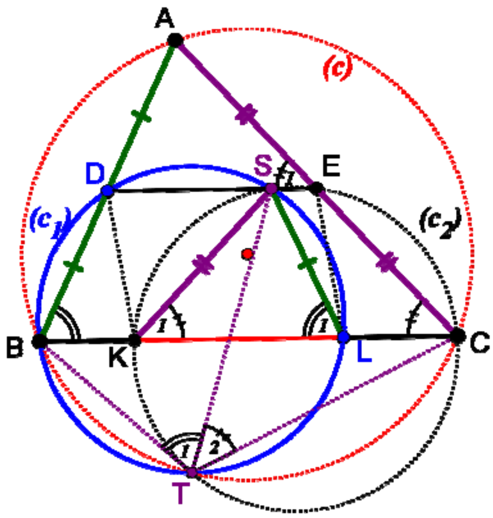
Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

Λύση
Γράφουμε $\mathrm{x}^3-\mathrm{x}=\mathrm{x}\left(\mathrm{x}^2-1\right)=\left(\mathrm{x}-1\right)\mathrm{x}\left(\mathrm{x}+1\right)$, το οποίο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, επομένως διαιρείται και από το 2 και από το 3. Επομένως ο 6 διαιρεί το $(x-1)x(x+1)$.
Όμοια ο 6 διαιρεί το $(y-1)y(y+1)$, οπότε το αριστερό μέλος διαιρείται από 6. Άρα ο 6 διαιρεί το pq, και αφού p, q πρώτοι αριθμοί, θα πρέπει $pq=6$.
Επομένως η εξίσωση γίνεται $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)=6$. Αν τώρα $x, y \geq 2$, τότε $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1) \geq 6+6=12$, οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2, έστω ο y. Τότε όμως $(y-1)y(y+1)=0$, οπότε $(x-1)x(x+1)=6$ και αφού x μη αρνητικός ακέραιος, πρέπει $x=2$. Επομένως οι λύσεις είναι:

$$(x, y) \in \{(2,0),(2,1),(0,2),(1,2)\}.$$

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ και έστω D, E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση
Η DE συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα $\mathrm{DE} // = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, άρα το τετράπλευρο $DELK$, είναι τραπέζιο. Επομένως, για να είναι το τετράπλευρο $DELK$ παραλληλόγραμμο, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $DE=KL=\frac{BC}{2}$.
Έστω ότι ο κύκλος (c_1), τέμνει το τμήμα DE στο σημείο S. Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο S. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 6

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABTC$, έχουμε: $\hat{A}+\hat{T}_1+\hat{T}_2=180^o$ (1).
Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $SLTB$, έχουμε: $\hat{T}_1=\hat{L}_1$ (2).
Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $DSLB$, έχουμε: $\hat{L}_1=\hat{B}$ (3).
Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε: $\hat{T}_2=\hat{C}$ και επειδή $\hat{E}_1=\hat{C}$ (από την παραλληλία $DE\,//\,BC$), συμπεραίνουμε ότι $\hat{T}_2=\hat{E}_1$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία $\hat{E}_1$ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική $\hat{T}_2$). Επομένως έχουμε αποδείξει ότι **το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκεται πάνω στην ευθεία DE.**

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τετράπλευρα $DSLB$ και $SECK$ είναι εγγεγραμμένα τραπέζια (άρα ισοσκελή τραπέζια), οπότε θα ισχύουν οι ισότητες τμημάτων

$$SL=DB=\frac{AB}{2},\ \ SK=EC=\frac{AC}{2}\ ,$$

από τις οποίες σε συνδυασμό με τις ισότητες γωνιών $\hat{L}_1=\hat{B}$ και $\hat{K}_1=\hat{C}$, συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ABC και SLK είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$.

Τελικά προκύπτει ότι: $DE=KL=\dfrac{BC}{2}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
12 Νοεμβρίου 2016

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

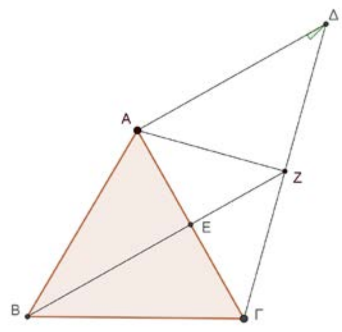
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}.$$

Λύση

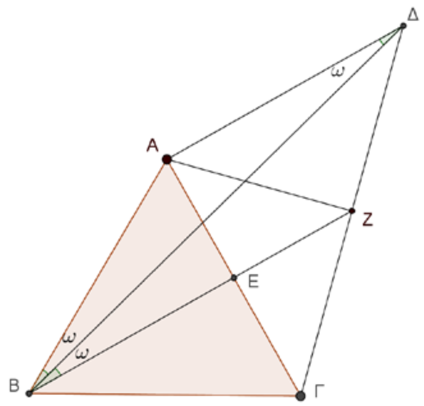
$$\mathrm{A}=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}=\left(\frac{-20}{5}\right)^2+\left(\frac{15}{-5}\right)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^3-\left(\frac{9}{-3}\right)^3$$

$$=(-4)^2+(-3)^3+(-4)^3-(-3)^3=(-4)^2+(-4)^3=16-64=-48.$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Στο σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ κάθετο προς την πλευρά ΑΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΒΕ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.
(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{A\hat{\Delta}B}$.



Λύση
(α) Η διάμεσος ΒΕ του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ. Επομένως το σημείου Ζ απέχει ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α και Γ, δηλαδή $\mathrm{ZA}=\mathrm{Z\Gamma}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή είναι $A\Delta = \alpha$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$B\hat{A}\Delta = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \qquad (2)$$

Επομένως από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Εναλλακτικά, μετά τη σχέση (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής: Η διάμεσος ΒΕ του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος, άρα κάθετη προς την πλευρά ΑΓ, όπως είναι κάθετη και η ΑΔ, από την υπόθεση. Επομένως είναι $BE \parallel A\Delta$, οπότε

$$A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}E \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E. \qquad (4)$$

Άρα η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}E$, οπότε θα έχουμε

$$A\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}E = \frac{A\hat{B}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

αφού η ΒΕ είναι και διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, δηλαδή $A\hat{B}E = \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$

Επομένως, λόγω της (1) έχουμε $A\hat{\Delta}B = 15^\circ.$

Πρόβλημα 3

Ένα κατάστημα πωλούσε μία τηλεόραση πριν τις εκπτώσεις 540 ευρώ. Την περίοδο των εκπτώσεων την πωλούσε με έκπτωση $\alpha\%$. Με το τέλος των εκπτώσεων το κατάστημα αύξησε την τιμή που πωλούσε την τηλεόραση στις εκπτώσεις κατά $\beta\%$. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα η τιμή πώλησης της τηλεόρασης να γίνει ίση με την τιμή που είχε πριν τις εκπτώσεις . Να βρείτε την τιμή του β συναρτήσει της τιμής του α.

Λύση

Η τιμή πώλησης της τηλεόρασης την περίοδο των εκπτώσεων είναι

$$540 - \frac{540\alpha}{100} \text{ ευρώ.}$$

Η τιμή της τηλεόρασης μετά την περίοδο των εκπτώσεων θα γίνει

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα ισχύει:

$$540-\frac{540\alpha}{100}+\left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\frac{\beta}{100}=540 \Leftrightarrow \left(540-\frac{540\alpha}{100}\right)\beta=540\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{540(100-\alpha)}{100}\cdot\beta=540\alpha \Leftrightarrow \beta=\frac{540\alpha\cdot 100}{540(100-\alpha)} \Leftrightarrow \beta=\frac{100\alpha}{100-\alpha}.$$

Πρόβλημα 4

Όλα τα ψηφία του θετικού ακέραιου αριθμού A είναι ίσα είτε με 8 είτε με 9 και καθένα από αυτά τα ψηφία εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά στον αριθμό. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του A, αν αυτός διαιρείται με το 4 και με το 3.

Λύση

Για να διαιρείται ένας αριθμός με 4, το τελευταίο διψήφιο τμήμα πρέπει να διαιρείται με το 4 (κριτήρια διαιρετότητας Α Γυμνασίου). Οι πιθανές περιπτώσεις για το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού είναι: $88, 89, 98, 99$. Από αυτούς μόνο ο 88 διαιρείται με το 4, οπότε ο A πρέπει να λήγει σε 88. Επίσης, ξέρουμε ότι ένας ακέραιος διαιρείται με το 3, όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με 3.

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός Α είναι διψήφιος, τότε πρέπει $\mathrm{A}=88$, ο οποίος δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τριψήφιος, τότε θα είναι είτε ο 888 είτε ο 988. Όμως στον 888 δεν χρησιμοποιείται το ψηφίο 9, ενώ ο 988 έχει άθροισμα ψηφίων 25 και δεν διαιρείται με το 3.

Αν ο αριθμός είναι τετραψήφιος είναι ένας από τους παρακάτω:

$$8888, 8988, 9888, 9988.$$

Όμως οι αριθμοί $8888, 9988$ έχουν άθροισμα ψηφίων 32 και 34 αντίστοιχα, άρα δεν διαιρούνται με το 3.

Επομένως, οι μόνοι τετραψήφιοι που ικανοποιούν τις συνθήκες είναι οι $8988, 9888$, οπότε η ελάχιστη τιμή του Α είναι 8988.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha=\frac{12^{\nu}}{3^{\nu}}:2^{2\nu-1}$ και $\beta=10^{2\nu+1}:100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha}$$

.

Λύση

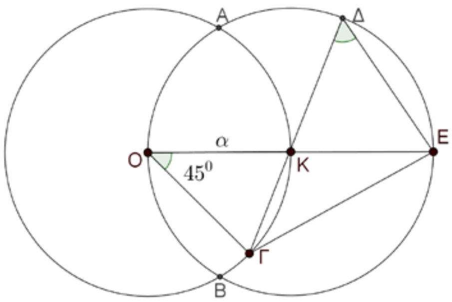
Έχουμε ότι $\alpha = \frac{12^{\nu}}{3^{\nu}} : 2^{2\nu-1} = \left(\frac{12}{3}\right)^{\nu} : 2^{2\nu-1} = 4^{\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu} : 2^{2\nu-1} = 2^{2\nu-(2\nu-1)} = 2.$

και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu} = 10^{2\nu+1} : 10^{2\nu} = 10$, οπότε είναι $\alpha^2 = 4,\ \alpha^3 = 8$ και

$$\mathrm{A} = \frac{(\alpha^3-\beta)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha} = \frac{(8-10)^3+40-20+8}{4+20-20} = \frac{-8+40-20+8}{4} = 5$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{OK} = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $\mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 45^{\circ}$, να βρείτε :

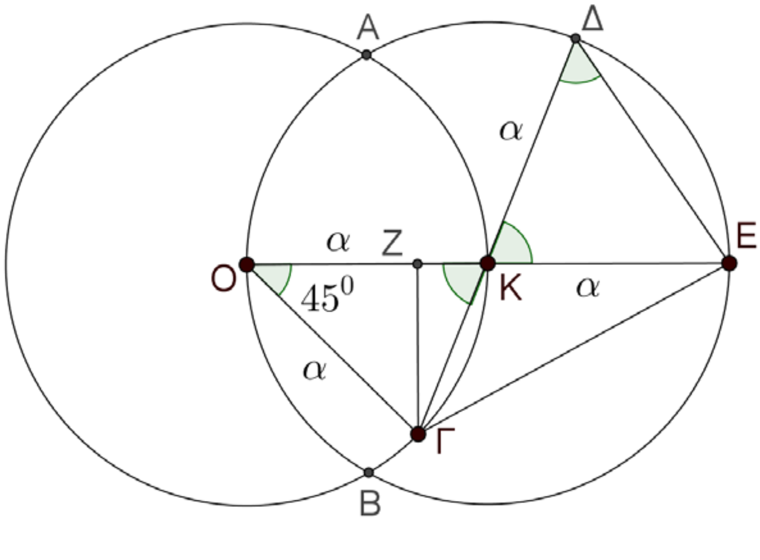


(α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{K\hat{\Delta}E}$,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α .

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΟΚΓ έχει $\mathrm{OK} = \mathrm{O\Gamma} = \alpha$, οπότε είναι ισοσκελές με βάση ΚΓ. Άρα έχει τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ίσες, οπότε θα είναι:



Σχήμα 2

$$\mathrm{O\hat{K}\Gamma} = \frac{180^{\circ}-45^{\circ}}{2} = \frac{135^{\circ}}{2} = 67{,}5^{\circ} \text{ μοίρες.}$$

Επίσης, επειδή οι γωνίες $\mathrm{\Delta\hat{K}E}$ και $\mathrm{O\hat{K}\Gamma}$ είναι κατά κορυφή, έχουμε

$$\Delta\hat{K}E = O\hat{K}\Gamma = 67,5^\circ \text{ μοίρες.}$$

Η γωνία $K\hat{\Delta}E$ είναι μία από τις ίσες γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου ΔΚΕ (έχει $K\Delta = KE = \alpha$), οπότε

$$K\hat{\Delta}E = \frac{180^\circ - 67,5^\circ}{2} = \frac{112,5^\circ}{2} = 56,25^\circ \text{ μοίρες}$$

(β) Έστω ΓΖ το ύψος του τριγώνου ΟΓΕ από την κορυφή Γ. Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΖ έχουμε

$$\Gamma Z = \alpha \cdot \eta\mu 45^\circ = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2},$$

οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ είναι

$$E\left(O\Gamma\Delta\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}.$$

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος και οι φίλοι του ήταν συνολικά x, .όπου $x \geq 4$, από την υπόθεση. Τότε ο καθένας τους αρχικά πήρε $\frac{450}{x}$ καραμέλες. Ο τρεις φίλοι επέστρεψαν στο Γιώργο συνολικά

$$3\cdot\frac{20}{100}\cdot\frac{450}{x} = \frac{270}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Ο Γιώργος πήρε συνολικά

$$\frac{450}{x} + \frac{270}{x} = \frac{720}{x} \text{ καραμέλες.}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος , πρέπει:

$$\frac{720}{x} > 120 \Leftrightarrow 120x < 720 \Leftrightarrow x < 6.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές για το x είναι $x = 4$ ή $x = 5$. Όμως η τιμή $x = 4$ απορρίπτεται, γιατί η διαίρεση $450:4$ δεν δίνει ακέραιο πηλίκο. Άρα είναι $x = 5$ και ο Γιώργος πήρε συνολικά $\frac{720}{5} = 144$ καραμέλες.

Πρόβλημα 4

Δίνονται οι αριθμοί

$$A = \overline{3a5b} = 3\cdot 10^3 + a\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b \quad \text{και} \quad B = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d\,.$$

(α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d , ισχύει ότι: $\frac{A}{36} < \frac{B}{45}$

(β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{A}{36}, \frac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων a,b,c,d .

Λύση

(α) Ισχύει ότι $\frac{\mathrm{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<\frac{3959}{36}<\frac{3960}{36}=110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{\mathrm{B}}{45}=\frac{\overline{5c3d}}{45}>\frac{5030}{45}>111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{\mathrm{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}=\frac{\mathrm{B}}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{\mathrm{A}}{36}<110<111<\frac{\mathrm{B}}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109\le\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b}>109\cdot 36\Leftrightarrow\overline{3a5b}>3924$, οπότε πρέπει $a=9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112\Leftrightarrow\overline{5c3d}<112\cdot 45\Leftrightarrow\overline{5c3d}<5040,$$

οπότε $c=0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow x^3-x^2+x^2-x+x-1+5x\le x^3+x+19$$
$$\Leftrightarrow x^3-1+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow 4x\le 20\Leftrightarrow x\le 5.$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9}\Leftrightarrow 6x-3-23>4x-21\Leftrightarrow 2x>5\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2}<x\le 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3 , 4 και 5.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $A=\overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1}\cdots\alpha_1\alpha_0}=\alpha_\nu\cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$, $\nu\geq 2,$ ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Λύση

Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1,2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

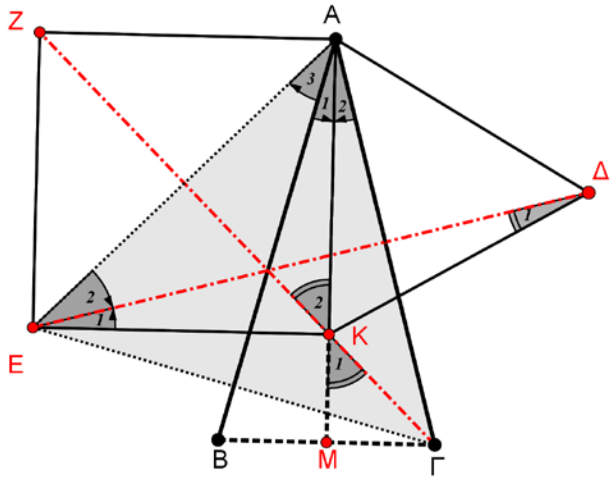
- 1,1,2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112.Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 4112 διαιρείται με το 8.
- 1,1,2,2,2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112 Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 22112 διαιρείται με το 8.

Άρα υπάρχουν δύο δυνατές τιμές του Α που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος 4112 και ο πενταψήφιος 22112.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A}=30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΜΒ=ΜΓ=ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΚ, έχουμε: $\widehat{K}_1=45^\circ$.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΖ, έχουμε: $\widehat{K}_2=45^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά, οπότε η ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ **(*)** και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές (ΓΑ=ΓΕ).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ$ (διότι $\widehat{A} = 30^\circ$) και $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45^\circ$ (διότι $E\widehat{A}K = 45^\circ$).
Άρα $E\widehat{A}\Gamma = 60^\circ$ και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο.
Επιπλέον $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30^\circ = \widehat{A}_3$.
Άρα η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{E\widehat{A}\Gamma}$ **(**)**.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΕ ισχύει $\Delta\widehat{K}E = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.
Άρα $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{E}_1 = 15^\circ$. Επειδή όμως $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\widehat{E}_2 = 30^\circ$,
δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\widehat{E}\Gamma}$ **(***)**.
Από τα συμπεράσματα (*),(**) και (***) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο
$$A = 2017 \cdot 2016 \cdot 2015 \cdot 2013 \cdot 2012 \cdot 2011,$$
να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση
Θέτουμε $n = 2014$ και τότε έχουμε: $A = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$ και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό Α στη μορφή $A = \varphi(n)^2 - k$, όπου $\varphi(n)$ πολυώνυμο μεταβλητής n με ακέραιους συντελεστές και k θετικός ακέραιος. Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:
$$A = (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 =$$
$$= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2-7)^2 - 36$$
Επομένως, αν στον αριθμό Α προσθέσουμε θετικό ακέραιο $k = 36$, παίρνουμε ότι $A + 36 = n^2(n^2-7)^2 = (n^3 - 7n)^2$, που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το k είναι η τιμή $k = 36$.

Σημείωση.
Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό $k = B^2 - A$, με $B^2 > A$, όπου Β θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα, ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $k = A^2 - A$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος
$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2$$
είναι πρώτος.

Λύση
Έχουμε

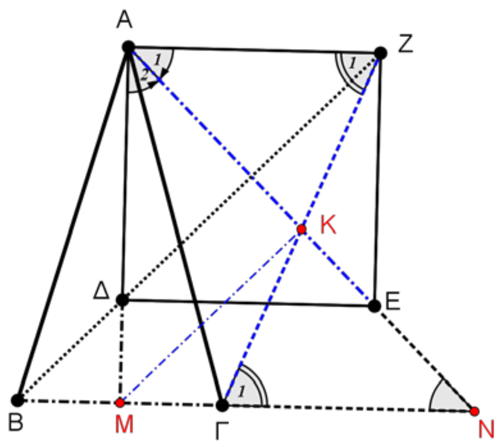
$$A = (\alpha^2 + 18)^2 - (8\alpha + 1)^2 = (\alpha^2 + 18 + 8\alpha + 1)(\alpha^2 + 18 - 8\alpha - 1)$$
$$= (\alpha^2 + 8\alpha + 19)(\alpha^2 - 8\alpha + 17) = \left[(\alpha + 4)^2 + 3\right]\left[(\alpha - 4)^2 + 1\right].$$

Επειδή $(\alpha+4)^2 + 3 \geq 3$, ο ακέραιος A θα είναι πρώτος, μόνον όταν

$$(\alpha - 4)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε ΜΒ = ΜΓ = ΜΔ. Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στην ΔΖ.

Λύση



Σχήμα 3

Προεκτείνουμε τις ΑΕ , ΒΓ και έστω Ν το σημείο τομής τους.

Από την ισότητα των γωνιών $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{N} = 45°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

Επομένως ΜΑ=ΜΝ⇔ΜΔ+ΔΑ=ΜΓ+ΓΝ και με δεδομένη την ισότητα ΜΓ=ΜΔ, καταλήγουμε: ΑΔ=ΓΝ=ΑΖ.

Θα συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ.

Ισχύουν οι ισότητες: α) ΓΝ=ΑΖ β) $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{Z}_1$ και γ) $\widehat{A}_1 = \widehat{N}$.

Άρα τα τρίγωνα ΚΑΖ και ΚΝΓ είναι ίσα, οπότε ΚΖ=ΚΓ και ΚΑ=ΚΝ.

Επομένως, η ΜΚ είναι διάμεσος (άρα και ύψος) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΝ. Οπότε οι ΜΚ και ΔΖ είναι παράλληλες (διότι είναι και οι δύο κάθετες στην διαγώνιο ΑΕ.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)
Θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \qquad (1)$$

Πράγματι, η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$\left(\frac{2\alpha+1}{\alpha}\right)^2 > \frac{4(\alpha+1)}{\alpha} \Leftrightarrow (2\alpha+1)^2 > 4\alpha(\alpha+1) \Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha+1 > 4\alpha^2+4\alpha,$$

που ισχύει.
Αν βάλουμε τώρα στην (1) όπου α το $\alpha+1$, παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+3}{\alpha+1} > 2\sqrt{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} \qquad (2)$$

Και ομοίως παίρνουμε ότι

$$\frac{2\alpha+5}{\alpha+2} > 2\sqrt{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad \frac{2\alpha+7}{\alpha+3} > 2\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2), (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε ότι:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} > 16\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\cdot\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = 16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

που είναι το ζητούμενο.

Σημείωση.
Η ανισότητα (1) θα μπορούσε να προκύψει μέσω της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου, αφού $\alpha > 0$, ως εξής:

$$\frac{2\alpha+1}{\alpha} = 1 + \frac{\alpha+1}{\alpha} > 2\sqrt{1\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}},$$

αφού είναι $\frac{\alpha+1}{\alpha} \neq 1$. Ομοίως προκύπτουν και οι ανισότητες (2), (3) και (4), οπότε τελειώνουμε την άσκηση όπως παραπάνω.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν οι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x+\frac{1}{x}-w=2,\ y+\frac{1}{y}-w=2,\ z+\frac{1}{x}+w=2,\ y+\frac{1}{z}+w=2\right\}.$$

Λύση
Έστω

$$\textbf{(Σ)}\quad \left\{x+\frac{1}{x}=w+2\ \ (1),\ y+\frac{1}{y}=w+2\ \ (2), z+\frac{1}{x}=2-w\ \ (3), y+\frac{1}{z}=2-w\ \ (4)\right\}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1-\frac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow x=y \text{ ή } xy=1.$$

Περίπτωση 1: Έστω $x=y.$ Τότε από τις (3) και (4) έχουμε:

$$z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z} \Leftrightarrow (z-x)\left(1+\frac{1}{zx}\right)=0 \Leftrightarrow x=z \text{ ή } xz=-1.$$

- Αν $x=z,$ τότε $x=y=z$ και από τις (1) και (3) προκύπτει ότι: $w=0$ και $x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow w=0$ και $x=1$. Επομένως, σε αυτή την υποπερίπτωση έχουμε τη λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Αν $xz=-1,$ τότε οι x,z θα είναι ετερόσημοι, οπότε ένας θα είναι αρνητικός.

Περίπτωση 2: Έστω $xy=1$. Τότε με αφαίρεση της (4) από την (3) λαμβάνουμε:

$$z-\frac{1}{z}=0 \Leftrightarrow z^2-1=0 \Leftrightarrow z=1, \text{ αφού } z\geq 0.$$

Με πρόσθεση των (1) και (3) λαμβάνουμε

$$x+\frac{2}{x}=3 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$$

- Για $x=1$, προκύπτει πάλι η λύση $(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.
- Για $x=2$, προκύπτει η λύση $(x,y,z,w)=\left(2,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ και τα σημεία της A,B και Γ με τετμημένες α,β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\omega>0$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ ως συνάρτηση του ω.

Λύση

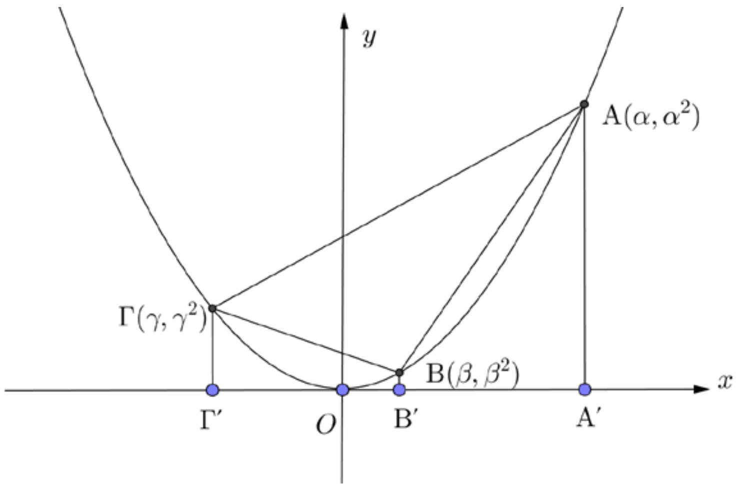
Αν είναι A',B' και Γ' οι προβολές των σημείων A,B και Γ πάνω στον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$E(\mathrm{AB\Gamma})=E(\mathrm{A\Gamma\Gamma'A'})-E(\mathrm{ABB'A'})-E(\mathrm{B\Gamma\Gamma'B'})$$

$$=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{2}\cdot 2\omega-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\cdot\omega-\frac{\beta^2+\gamma^2}{2}\cdot=\frac{\omega}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2-\beta^2-\gamma^2\right)$$

$$=\frac{\omega}{2}\cdot\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\beta^2\right)=\frac{\omega}{2}\cdot\left[\alpha^2-\beta^2-\left(\beta^2-\gamma^2\right)\right]= ,$$

$$=\frac{\omega}{2}\cdot\left[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)\right]=\frac{\omega^2}{2}\cdot(\alpha+\beta-\beta-\gamma)=\frac{\omega^2}{2}\cdot 2\omega=\omega^3$$



Σχήμα 5

Σημείωση.
Η άσκηση μπορεί να λυθεί με χρήση του τύπου εμβαδού τριγώνου από την Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου της Β΄ Λυκείου. Έχουμε

$$E(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\det(\mathbf{BA},\mathbf{B\Gamma})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha-\beta & \alpha^2-\beta^2\\ \gamma-\beta & \gamma^2-\beta^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)(\gamma^2-\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)(\gamma-\beta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma+\beta-\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)=\frac{1}{2}\omega\cdot(-\omega)(-2\omega)=\omega^3.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{\mathrm{A}}=45^\circ$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

Λύση

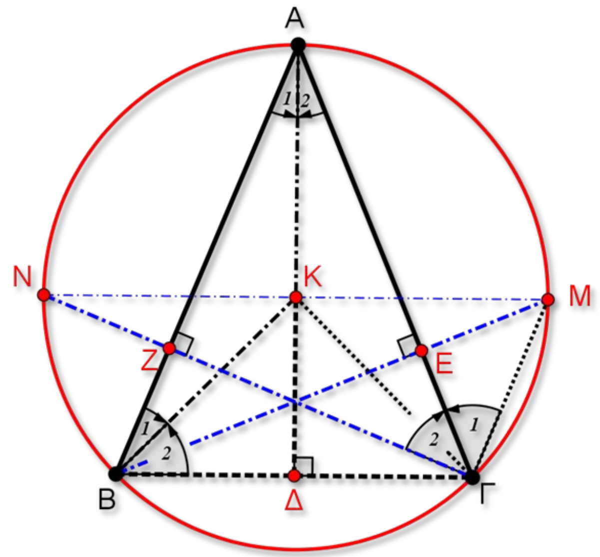
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (δηλαδή ότι το σημείο Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ).

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΚ, έχουμε: $\widehat{\mathrm{B}}_2=45^\circ$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (αφού $\widehat{\mathrm{A}}=45^\circ$) έχουμε:

$$\widehat{\mathrm{B}}=90^\circ-\widehat{\mathrm{A}}_1=90^\circ-22{,}5^\circ=67{,}5^\circ.$$

Άρα $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\mathrm{B}}_2=67{,}5^\circ-45^\circ=22{,}5^\circ=\hat{\mathrm{A}}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές με ΚΑ=ΚΒ. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ΚΑ=ΚΓ, οπότε το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 6

Η γωνία $\hat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου που βαίνει στο τόξο ΑΜ.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ).

Ισχύει επίσης $\hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 45^\circ$ (από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΖ).

Επομένως $\mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{N} = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ$, δηλαδή η ΜΝ είναι διάμετρος του κύκλου, άρα θα περνά από το κέντρο Κ του κύκλου.

Πρόβλημα 3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

(α) $P(1)=1,\ P(2)=4, P(3)=9,\ P(4)=16.$

(β) Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

Λύση

Το πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-x^2$ είναι τετάρτου βαθμού και λόγω της (α) έχει ρίζες τους αριθμούς 1,2,3 και 4. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q(x)=P(x)-x^2=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$
$$\Leftrightarrow P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+x^2$$
$$\Leftrightarrow P(x)=ax^4-10ax^3+(35a+1)x^2-50ax+24a$$

Άρα είναι

$$P(5)=24a+25.$$

Λόγω της (β) έχουμε:

$$a \le 10,\ -10a \le 10,\ 35a+1 \le 10,\ -50a \le 10,\ 24a \le 10$$

$$\Leftrightarrow a \le 10,\ \ a \ge -1,\ a \le \frac{9}{35},\ a \ge -\frac{1}{5},\ a \le \frac{10}{24} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$-\frac{1}{5} \le a \le \frac{9}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5} \le 24a \le \frac{9\cdot 24}{35} \Leftrightarrow -\frac{24}{5}+25 \le 24a+25 \le \frac{9\cdot 24}{35}+25$$

$$\Leftrightarrow \frac{101}{5} \le 24a+25 \le \frac{1091}{35} \Leftrightarrow \frac{101}{5} \le P(a) \le \frac{1091}{35},$$

δηλαδή η μικρότερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{101}{5}$ και η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(a)$ είναι $\frac{1091}{35}$.

Πρόβλημα 4

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{A} = 14^7 + 14^2 + 1$.

Λύση

Θέτουμε για ευκολία $n = 14$ και θα προσπαθήσουμε να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμό $\mathrm{A} = n^7 + n^2 + 1$. Πράγματι, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο $n^2 + n + 1$ είναι παράγοντάς του Α ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= n^7 + n^2 + 1 = n^7 - n + n^2 + n + 1 = n(n^6 - 1) + n^2 + n + 1 = \\
&= n(n^3+1)(n^3-1) + n^2 + n + 1 = n(n^3+1)(n-1)(n^2+n+1) + n^2 + n + 1 = \\
&= (n^2+n+1)(n^5 - n^4 + n^2 - n + 1)
\end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός $n^2 + n + 1 = 14^2 + 14 + 1 = 211$ διαιρεί τον αριθμό A. Επιπλέον, ο 211 είναι πρώτος και το ζητούμενο έπεται.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
11 Νοεμβρίου 2017

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

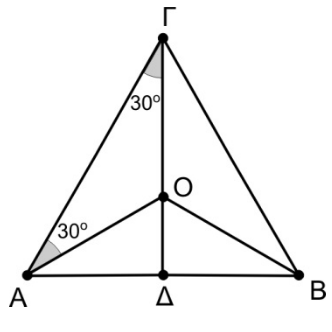
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{(-10)^3}{2^3}+\frac{(-15)^3}{(-3)^3}\right)\cdot(-2)^3+\frac{(-8)^2}{2^2}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}\\&=\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^3+\left(\frac{-15}{-3}\right)^3\right)\cdot(-2)^3+\left(\frac{-8}{2}\right)^2-(-4)^2\\&=\left((-5)^3+(+5)^3\right)\cdot(-2)^3+(-4)^2-(-4)^2\\&=\left(-5^3+5^3\right)\cdot(-2)^3+16-16=0\cdot(-2)^3+0=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση την πλευρά ΑΒ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει τη βάση ΑΒ στο σημείο Δ, να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία ΓΔ είναι κάθετη προς τη ΑΒ και το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ.
(β) Αν $\mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=30^0$, να αποδείξετε ότι η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

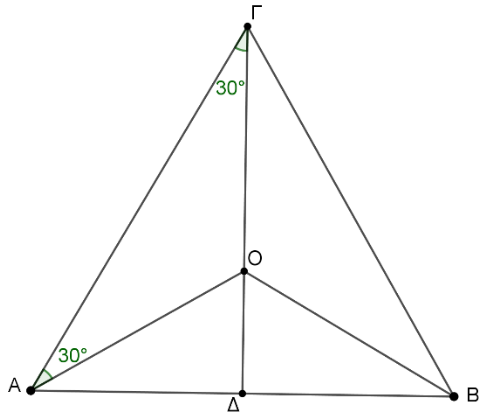


Λύση
(α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΟ είναι ισοσκελή με βάση τη ΑΒ, έχουμε ότι $\Gamma\mathrm{A}=\Gamma\mathrm{B}$ και $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$, δηλαδή τα σημεία Γ και Ο ανήκουν στη μεσοκάθετη του ΑΒ, οπότε η ευθεία ΓΟ είναι η μεσοκάθετη του ΑΒ. Επομένως τέμνει κάθετα την ΑΒ στο μέσο της, δηλαδή ΑΔ = ΔΒ.

(β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο Γ και έχει $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ$ Επομένως

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\Gamma,$$

οπότε η ΑΟ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 3

Ο Γιώργος αγόρασε ένα σαλόνι αξίας 1200 ευρώ χωρίς να συμπεριλαμβάνεται σε αυτή τη τιμή ο φόρος προστιθέμενης αξίας (ΦΠΑ). Μετά την πρόσθεση του ΦΠΑ που ήταν το 24% επί της αξίας των 1200 ευρώ, αποφάσισε να πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Να βρείτε πόσο ήταν το ποσόν κάθε μηνιαίας δόσης, αν η τελική τιμή πώλησης επιβαρύνθηκε λόγω των δόσεων κατά 5% με τόκους.

Λύση

Το ποσόν του ΦΠΑ είναι: $1200 \cdot \frac{24}{100} = 12 \cdot 24 = 288$ ευρώ, οπότε η τιμή του σαλονιού μαζί με το ΦΠΑ είναι: $1200 + 288 = 1488$ ευρώ.

Οι τόκοι που πρέπει να πληρωθούν είναι: $1488 \cdot \frac{5}{100} = \frac{7440}{100} = 74,4$ ευρώ.

Η τελική τιμή που θα πληρώσει ο Γιώργος είναι:

$$1200 + 288 + 74,4 = 1562,4 \text{ ευρώ},$$

οπότε η κάθε μηνιαία δόση είναι: $1562,4 : 12 = 130,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος Α διαιρείται με το 9 και γνωρίζουμε ότι κάθε ένα από τα τρία πρώτα ψηφία του από αριστερά προς τα δεξιά είναι το 5 ή το 8. Να βρείτε όλους τους δυνατούς αριθμούς Α.

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 5 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $15 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 5553.
- Ο Α έχει δύο φορές ψηφίο το 5 μία φορά το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $18 + x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x = 0$ ή $x = 9$. Άρα έχουμε τους αριθμούς :

5580, 5589, 5850, 5859, 8550, 8559.

- Ο Α έχει μία φορά το ψηφίο 5 δύο φορές το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $21+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=6$. Άρα έχουμε τους αριθμούς: 5886, 8586, 8856.
- Ο Α έχει τρεις φορές ψηφίο το 8 και ένα ακόμη ψηφίο τα x. Τότε το άθροισμα των ψηφίων του είναι $24+x$ και διαιρείται με το 9 μόνον για $x=3$. Άρα έχουμε τον αριθμό 8883.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018\\
&=\left(\left(-\frac{10}{2}\right)^{2\nu+1}+\left(+\frac{15}{3}\right)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+\left(-\frac{8}{2}\right)^{2\nu}-\left(-\frac{4}{1}\right)^{2\nu}+2018\\
&=\left((-5)^{2\nu+1}+(+5)^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+(-4)^{2\nu}-(-4)^{2\nu}+2018\\
&=\left(-5^{2\nu+1}+5^{2\nu-1}\right)\cdot(-2017)^2+2018=-5^{2\nu-1}\left(5^2-1\right)2017^2+2018\\
&=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot2017^2+2018=-24\cdot5^{2\nu-1}\cdot4068289+2018.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

Λύση

Ονομάζουμε A,B το εμβαδό μιας άσπρης πλάκας και μιας μαύρης πλάκας, αντίστοιχα. Έστω επίσης ότι χρησιμοποιούμε x λευκές πλάκες. Τότε αφού οι μαύρες είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού αριθμού των πλακών, χρησιμοποιούμε $2x$ από τις μαύρες πλάκες.

Επιπλέον, αφού το εμβαδό των μαύρων πλακών είναι 80τ.μ, θα έχουμε ότι $(2x)\cdot \mathrm{B}=80$. Όμως, από τα δεδομένα έχουμε ότι $\mathrm{A}=9\mathrm{B}$. Επομένως το συνολικό εμβαδό που καλύπτουν οι άσπρες πλάκες είναι $x\mathrm{A}=x(9\mathrm{B})=9x\mathrm{B}=9\cdot 40=360$. Επομένως το συνολικό εμβαδό της αυλής είναι $360+80=440$ τ.μ.

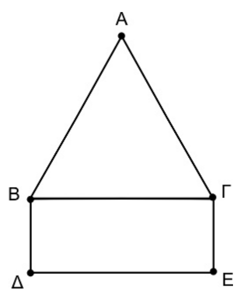
Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος να διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 6 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 6 όπως απαιτεί η εκφώνηση.
Ο θετικός ακέραιος που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής

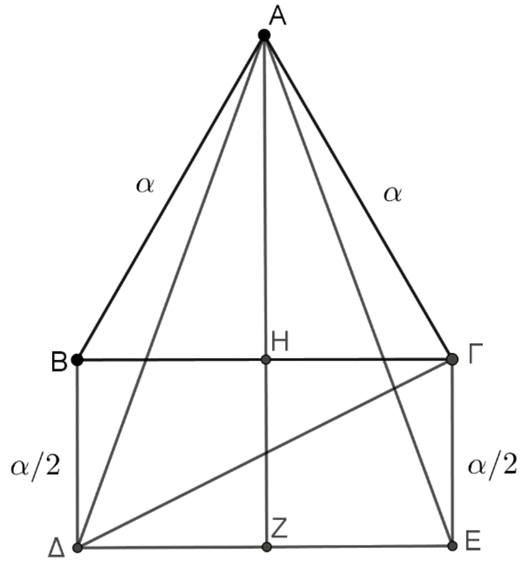
πολ.6+4 = πολ.3+3+1 =πολ.3+1,

οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επομένως τέσσερις από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,4,7,8.
Για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αριθμού πρέπει να είναι 64. Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 2 και το 8, αλλά δεν διαιρείται με το 7. Επειδή ο 664 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον τετραψήφιο αριθμό 6664 ο οποίος διαιρείται με τους 2, 4 , 8 και 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος αριθμός.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρά $\mathrm{B}\Delta = \dfrac{\alpha}{2}$.
(α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$.
(β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.



Λύση
(α) (1ος τρόπος) Έστω ότι η κάθετη από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ την τέμνει στο Η και έστω επίσης τέμνει την πλευρά ΔΕ του ορθογωνίου στο Ζ. Τότε η ΑΗ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ, οπότε ΒΗ = ΗΓ. Επειδή η ΑΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΒΓ θα είναι κάθετη και στην παράλληλή της ΔΕ. Επομένως και τα τετράπλευρα ΒΔΖΗ, ΗΖΕΓ είναι ορθογώνια, οπότε ΒΗ = ΔΖ και ΗΓ = ΖΕ. Επομένως θα είναι και ΔΖ = ΖΕ. Έτσι η ΑΖ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΔΕ, οπότε ΑΔ = ΑΕ.



Σχήμα 2

(2^{ος} τρόπος) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν ίσες πλευρές $AB = A\Gamma = \alpha$ και $B\Delta = \Gamma E = \dfrac{\alpha}{2}$, ενώ οι περιεχόμενες γωνίες σε αυτές τις πλευρές είναι επίσης ίσες, αφού

$$A\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma + \Gamma\hat{B}\Delta = 60^\circ + 90^\circ = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}E = A\hat{\Gamma}E.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $A\Delta = AE$.

(β) Σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z),$$

όπου

$$(ABH) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8},\ (B\Delta ZH) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$(A\Delta Z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha+\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{8} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\alpha^2}{8}.$$

Άρα είναι

$$(AB\Delta) = (ABH) + (B\Delta ZH) - (A\Delta Z) = \frac{\alpha^2}{8}.$$

Έχουμε επίσης $(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta)$. Όμως είναι

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4},(B\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},(AB\Delta) = \frac{\alpha^2}{8},$$

οπότε

$$(A\Delta\Gamma) = (AB\Gamma) + (B\Delta\Gamma) - (AB\Delta) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8} = \frac{\alpha^2\left(2\sqrt{3}+1\right)}{8}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση
Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90\cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90\cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90\cdot 11}{16} = \frac{45\cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2
Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Λύση
Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) = 3 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.
Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3,1,-1), (1,1,-1), (3,0,-1), (1,0,-1)$.

Πρόβλημα 3
Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

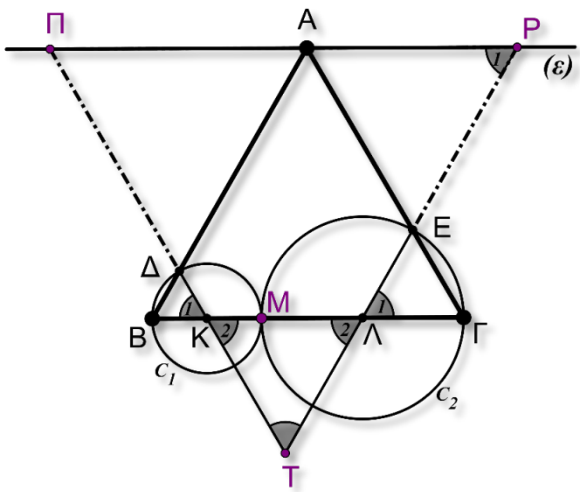
Λύση
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Στη πλευρά $ΒΓ$ ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, θεωρούμε σημείο $Μ$ (διαφορετικό από το μέσο της $ΒΓ$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη $ΒΓ$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο $Κ$ του $ΜΒ$ και ακτίνα $ΚΒ$) τέμνει την $ΑΒ$ στο $Δ$. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο $Λ$ του $ΜΓ$ και ακτίνα $ΛΓ$) τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία $Π$ και $Ρ$ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνονται στο σημείο $Τ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΠΡΤ$ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $ΒΓ$.

Λύση
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $ΤΚΛ$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές (διότι $ΚΔ, ΚΒ$ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\hat{B} = 60°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι (τελικά) ισόπλευρο.
Οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2 = 60°$.
Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{Λ}_1 = \hat{Λ}_2 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:

$$ΚΛ = ΜΚ + ΜΛ = \frac{ΜΒ}{2} + \frac{ΜΓ}{2} = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον $ΑΡ \parallel ΒΓ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Λ}_1 = \hat{Ρ}_1 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $ΤΡΠ$ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{T} = 60°$).
Το τετράπλευρο $ΑΡΛΒ$ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{Β} = \hat{Λ}_1 = \hat{Ρ}_1 = 60°$).
Άρα το τρίγωνο $ΤΡΠ$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$ΤΡ = ΤΛ + ΛΡ = ΤΛ + ΑΒ = \frac{α}{2} + α = \frac{3α}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $ΤΡΠ$ είναι:

$$(ΤΡΠ) = \frac{\left(\frac{3α}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9α^2\sqrt{3}}{16}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ο αριθμός $ρ$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο $ρ$ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

.

Λύση
Εφόσον ο αριθμός $ρ$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $ρ \neq 0$ και ισχύει:

$$ρ^3 - ρ - 1 = 0 \Leftrightarrow ρ^3 = ρ + 1 \quad (1).$$

Άρα $(ρ^3)^3 = (ρ + 1)^3 \Leftrightarrow ρ^9 = \underbrace{ρ^3}_{ρ+1} + 3ρ^2 + 3ρ + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} ρ^9 = ρ + 1 + 3ρ^2 + 3ρ + 1 \Leftrightarrow ρ^9 = 3ρ^2 + 4ρ + 2 \Leftrightarrow$$

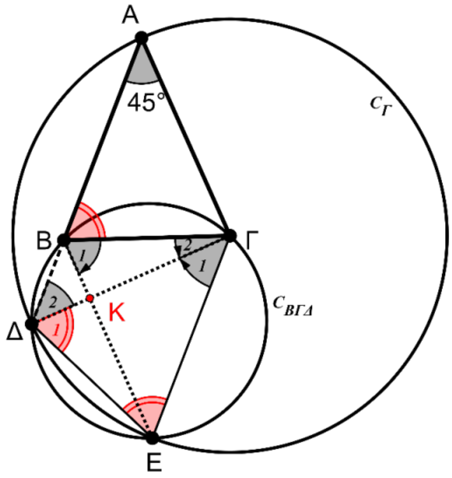
$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} ρ^9 \cdot ρ = (3ρ^2 + 4ρ + 2) \cdot ρ \Leftrightarrow ρ^{10} = 3 \cdot ρ^3 + 4ρ^2 + 2ρ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow ρ^{10} = 4ρ^2 + 5ρ + 3.$
$(*)$ ισχύει $ρ \neq 0$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) με $\hat{Α} = 45°$. Ο κύκλος $C_Γ(Γ, ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το $Γ$ και ακτίνα $ΓΑ$) τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΔ$ (έστω $C_{ΒΓΔ}$) τέμνει τον $C_Γ$ στο σημείο $Ε$ Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση
Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΑ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{Α} = \hat{Δ}_2 = 45° \qquad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{\Delta}_1 \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο $C_Γ$. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} = 67{,}5^\circ \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε: $\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$.

Άρα ΒΔ ∥ ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.

Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί ΒΕ=ΔΓ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και ΓΔ = ΓΕ (ακτίνες του $C_Γ$). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.

Άρα $\widehat{B}_1 = \Gamma_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5^\circ$ και επειδή $\hat{\Gamma}_1 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\hat{\Gamma}_2 = 22{,}5^\circ$ και κατά συνέπεια $\widehat{B}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 67{,}5^\circ + 22{,}5^\circ = 90^\circ$.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$A = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1 &= \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\left(\nu^2\right)^3 + 1\right) = \nu^5\left(\nu^2+1\right) + \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^4 - \nu^2 + 1\right) \\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu^5 + \nu^4 - \nu^2 + 1\right) = \left(\nu^2+1\right)\left[\nu^4\left(\nu+1\right) - \left(\nu+1\right)\left(\nu-1\right)\right] \\ &= \left(\nu^2+1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$A = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1} = \left(\nu+1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).$$

Για $\nu \geq 2$ είναι $\nu+1 \geq 3$ και $\nu^4-\nu+1=\nu\left(\nu^3-1\right)+1 \geq 2\cdot 7+1=15$, οπότε ο ακέραιος Α είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση
Έστω x, y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy = 2(x+y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1).

Έχουμε ότι $d^2 = x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \overset{(1)}{=} (x+y)^2-4(x+y)$.

Ισχύει ότι $(x+y)^2 \geq 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x-y)^2 \geq 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy = 8(x+y)$, άρα $(x+y)^2 \geq 8(x+y)$, οπότε $x+y \geq 8$. (2)

Θέτουμε $x+y=t$ και τότε $d^2=t^2-4t=(t-2)^2-4 \overset{(2)}{\geq} (8-2)^2-4=32$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(a)=0 \text{ και } f\left(f(x)\right)=xf(x)+a, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση
Θέτοντας $x=a$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f\left(f(a)\right)=af(a)+a \Rightarrow f(0)=a.$$

Για $x=0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f\left(f(0)\right)=0\cdot f(0)+a \overset{(1)}{\Rightarrow} f(a)=a,$ οπότε από τη σχέση $f(a)=0$ έπεται ότι $a=0$.

Για $a=0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f\left(f(x)\right)=xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x)=x^c,\ c\in\mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f\left(x^c\right)=x\cdot x^c \Rightarrow \left(x^c\right)^c = x^{c+1} \Rightarrow x^{c^2}=x^{c+1} \Rightarrow c^2=c+1 \Rightarrow c^2-c-1=0 \Rightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα μία συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ αν } x\leq 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \text{ αν } x>0. \end{cases}$

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7+x^6+x^5+1=0 \;.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^7+x^6+x^5+1 &= x^5\left(x^2+1\right)+\left(\left(x^2\right)^3+1\right)=x^5\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right) \\ &= \left(x^2+1\right)\left(x^5+x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[x^4\left(x+1\right)-\left(x+1\right)\left(x-1\right)\right] \\ &= \left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x^4-x+1\right). \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο x^4-x+1 είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$\alpha^4-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha^3-1\right)+1=0 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(\alpha\right)+1=0$.

Όμως για $\alpha\leq 0$ ή $\alpha\geq 1$ η παράσταση $f\left(\alpha\right)=\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha^2+\alpha+1\right)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f\left(\alpha\right)+1>0$.

Για $0<\alpha<1$ είναι $\alpha^4>0, -\alpha+1>0$ και $\alpha^4-\alpha+1>0$. Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε

$$x^7+x^6+x^5+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x^4-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 36°$. Ο κύκλος $C_1(Γ, ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το $Γ$ και ακτίνα $ΓΑ$) τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΔ$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο $Ε$. Να αποδείξετε ότι $ΑΕ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η $ΔΓ$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Λύση

Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΑ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{Δ}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΕ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

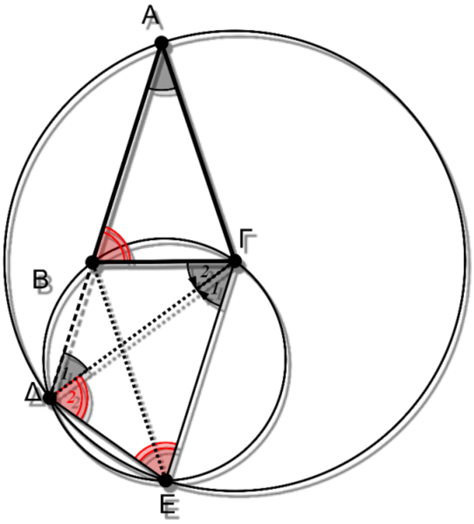
$$\hat{E} = \hat{Δ}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1), (2), (3)$ έχουμε: $\hat{A} = \hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1 = 36°$.

Άρα $ΒΔ \parallel ΓΕ$, οπότε το τετράπλευρο $ΒΔΕΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του ($ΒΕ$ και $ΓΔ$) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $ΕΒΓ$ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία $Ε$ και $Α$ ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης $ΒΓ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ οπότε η $ΑΕ$ θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



Σχήμα 5

Από την παραλληλία $B\Delta \parallel \Gamma E$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = B\hat{\Gamma}E = 72°$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα.
Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 36°$ και η $\hat{\Gamma}_2$ σχηματίζεται από τη $B\Gamma, \Delta\Gamma$ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η $\Delta\Gamma$ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9 > 8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow 4^{6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$, που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2ος τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9}\ln 9 > 9^{9^8}\ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9}\ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8}\ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9\ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8\ln 9 + \ln(\ln 8).$$

Αφού $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9\ln 8 > 9^8\ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2\ln 3}{3\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \frac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2\ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
10 Νοεμβρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

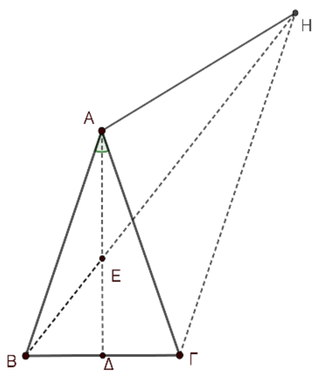
Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right).$$

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-8)^3}{2^3}+\frac{(-12)^3}{(-3)^3}+10\right)\cdot\left(\frac{(-8)^2}{2^2}+\frac{(-12)^2}{(-3)^2}-22\right)\\&=\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^3+\left(\frac{-12}{-3}\right)^3+10\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^2+\left(\frac{-12}{-3}\right)^2-22\right)\\&=\left((-4)^3+(+4)^3+10\right)\cdot\left((-4)^2+(+4)^2-22\right)\\&=\left(-4^3+4^3+10\right)\cdot(16+16-22)=10\cdot 10=100.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{\mathrm{A}}=40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Επίσης τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΗ είναι ισοσκελή με ΕΑ = ΕΒ και ΑΒ = ΑΗ.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{B}=20°$,
(β) $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{H}=40^\circ$,
(γ) η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{H}}\Gamma$.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Λύση

(**α**) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\widehat{A} = 40°$ και ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, θα είναι $\hat{A}_1 = B\hat{A}E = 20^\circ$. Επειδή το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές, συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 20^\circ$. Επειδή τέλος το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $AB = AH$, θα ισχύει: $A\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$.

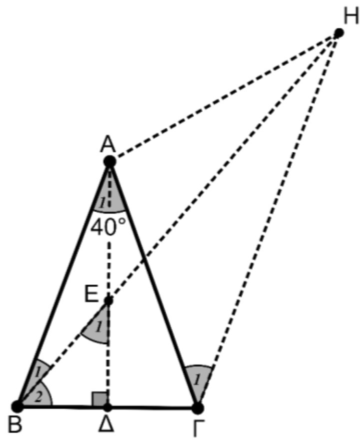
(**β**) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΗ είναι ισοσκελές με $A\hat{H}B = \hat{B}_1 = 20^\circ$ θα είναι

$$B\hat{A}H = 180^\circ - \left(20^\circ + 20^\circ\right) = 140^\circ$$

Όμως έχουμε ότι:

$$B\hat{A}H = B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}H \Rightarrow 140^\circ = 40^\circ + \Gamma\hat{A}H \Rightarrow \Gamma\hat{A}H = 100^\circ.$$

Επειδή $A\Gamma = AB = AH$, το τρίγωνο ΓΑΗ είναι ισοσκελές, οπότε



Σχήμα 1

$$2 \cdot A\hat{\Gamma}H = 180^\circ - \Gamma\hat{A}H \Rightarrow A\hat{\Gamma}H = \frac{180^\circ - \Gamma\hat{A}H}{2} = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ.$$

(γ) Από το ερώτημα (β) έχουμε ότι $A\hat{H}\Gamma = A\hat{\Gamma}H = 40^\circ$, ενώ από το ερώτημα (γ) έχουμε ότι $A\hat{H}B = 20°$, Επομένως θα έχουμε

$$B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}\Gamma - A\hat{H}B = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

δηλαδή $B\hat{H}\Gamma = A\hat{H}B = 20^\circ$, οπότε η ΒΗ είναι η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{H}\Gamma$.

Πρόβλημα 3

Ο Νίκος επισκέφθηκε για ψώνια 3 καταστήματα στη σειρά. Στο πρώτο κατάστημα ξόδεψε 30 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που είχε μαζί του. Στο δεύτερο κατάστημα ξόδεψε 40 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το πρώτο κατάστημα. Στο τρίτο κατάστημα ξόδεψε 50 ευρώ περισσότερα από το μισό των χρημάτων που του είχαν μείνει, όταν βγήκε από το δεύτερο κατάστημα. Αν μετά την αγορά του στο τρίτο κατάστημα τελείωσαν τα χρήματα του, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του όταν ξεκίνησε τις αγορές του.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο τρίτο κατάστημα είχε x ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 50 ευρώ και δεν του έμειναν καθόλου χρήματα. Επομένως ξόδεψε όσα χρήματα του είχαν απομείνει και έχουμε την εξίσωση:

$$x=\frac{x}{2}+50 \Leftrightarrow x-\frac{x}{2}=50 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=50 \Leftrightarrow x=100.$$

Επομένως, όταν έφυγε από το δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 100 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο δεύτερο κατάστημα είχε y ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 40 ευρώ και του έμειναν 100 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$y=\frac{y}{2}+40+100 \Leftrightarrow y-\frac{y}{2}=100+40 \Leftrightarrow \frac{y}{2}=140 \Leftrightarrow y=280.$$

Επομένως όταν πήγε στο δεύτερο κατάστημα του είχαν μείνει 280 ευρώ.

Ας υποθέσουμε ότι πηγαίνοντας στο πρώτο κατάστημα είχε z ευρώ. Εκεί ξόδεψε τα μισά από τα χρήματα του συν 30 ευρώ και του έμειναν 280 ευρώ. Επομένως έχουμε:

$$z=\frac{z}{2}+30+280 \Leftrightarrow z-\frac{z}{2}=280+30 \Leftrightarrow \frac{z}{2}=310 \Leftrightarrow z=620.$$

Επομένως όταν πήγε στο πρώτο κατάστημα είχε μαζί του 620 ευρώ.

Πρόβλημα 4

Τρεις θετικοί ακέραιοι α,β και γ, με $\alpha<\beta<\gamma$, έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον ακέραιο 72 και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τον ακέραιο 1008. Αν γνωρίζετε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α,β ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των β,γ, να βρείτε τις δυνατές τιμές των α,β,γ.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση οι αριθμοί α,β και γ είναι διαφορετικά πολλαπλάσια του 72. Επομένως, θα είναι της μορφής

$\alpha=72\kappa,\ \beta=72\lambda,\ \gamma=72\mu$ (όπου κ,λ,μ διαφορετικοί ανά δύο με $\kappa<\lambda<\mu$).

Επειδή πρέπει οι αριθμοί α,β και γ να είναι και διαιρέτες του $1008=14\cdot 72$, πρέπει τα κλάσματα

$$\frac{1008}{72\kappa}=\frac{72\cdot 14}{72\kappa}=\frac{14}{\kappa},\quad \frac{1008}{72\lambda}=\frac{72\cdot 14}{72\lambda}=\frac{14}{\lambda},\quad \frac{1008}{72\mu}=\frac{72\cdot 14}{72\mu}=\frac{14}{\mu},$$

να είναι ακέραιοι, δηλαδή πρέπει οι διαφορετικοί ανά δύο ακέραιοι κ,λ,μ να είναι διαιρέτες του 14. Επομένως οι δυνατές τιμές τους είναι 1, 2, 7 και 14.

Λόγω της προϋπόθεσης $\kappa<\lambda<\mu$ οι δυνατές τιμές για την τριάδα (κ,λ,μ) είναι: $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$ ή $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$.

Επομένως, έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,7)$, τότε $\alpha=72,\beta=144,\gamma=504$, η οποία είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)=72$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,2,14)$, τότε $\alpha=72,\beta=144,\gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 144=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.
- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(1,7,14)$, τότε $\alpha=72,\beta=504,\gamma=1008$, η οποία δεν είναι δεκτή, γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

- Αν είναι $(\kappa,\lambda,\mu)=(2,7,14)$, τότε $\alpha=144,\ \beta=504,\ \gamma=1008$ που δεν είναι δεκτή γιατί $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=72\neq 504=\text{ΜΚΔ}(\beta,\gamma)$.

Επομένως, οι δυνατές τιμές είναι $\alpha=72, \beta=144,\ \gamma=504$.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200.$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}\right)+200\\&=\left(\left(\frac{-20}{4}\right)^{11}+\left(\frac{-25}{-5}\right)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(\left(\frac{-8}{2}\right)^{20}-\left(\frac{4}{1}\right)^{20}\right)+200\\&=\left((-5)^{11}+(+5)^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left((-4)^{20}-4^{20}\right)+200\\&=\left(-5^{11}+5^{11}\right)\cdot(-2018)^2+\left(4^{20}-4^{20}\right)+200=0\cdot(-2018)^2+0+200=200.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: *Ο μέσος όρος ν αριθμών* $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ *είναι ο αριθμός* $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$.

Λύση

Ονομάζουμε Α το βάρος σε γραμμάρια του πρώτου μήλου, Β του δεύτερου, Γ του τρίτου και Δ του τέταρτου. Τότε είναι Α = 120 γραμμάρια και

$$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=115\Leftrightarrow \mathrm{A}+\mathrm{B}=230\Leftrightarrow 120+\mathrm{B}=230\Leftrightarrow \mathrm{B}=230-120=110.$$

Άρα το δεύτερο μήλο ήταν 110 γραμμάρια.

Μετά τη ζύγιση του τρίτου μήλου είχαμε ότι:

$$\frac{A+B+\Gamma}{3}=115-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma}{3}=105 \Leftrightarrow A+B+\Gamma=315 \Leftrightarrow \Gamma=330-(A+B)$$
$$\Leftrightarrow \Gamma=315-(120+110) \Leftrightarrow \Gamma=315-230=85.$$
Άρα το τρίτο μήλο ήταν 85 γραμμάρια.
Μετά τη ζύγιση του τέταρτου μήλου είχαμε ότι:
$$\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=105-10 \Leftrightarrow \frac{A+B+\Gamma+\Delta}{4}=95 \Leftrightarrow A+B+\Gamma+\Delta=380$$
$$\Leftrightarrow \Delta=380-(A+B+\Gamma) \Leftrightarrow \Delta=380-(120+110+85) \Leftrightarrow \Delta=380-315=65.$$
Επομένως το τέταρτο μήλο ήταν 65 γραμμάρια.

Πρόβλημα 3

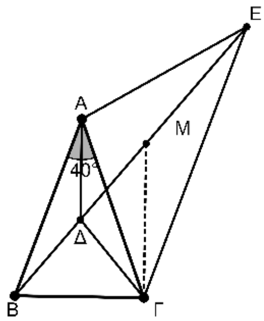
Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

Λύση

Πρέπει $x \neq 2$ *και* $x \neq 6$. Με απαλοιφή των παρονομαστών παίρνουμε ότι:
$$(x-1)(x-6)=(x-2)(x-\alpha) \Leftrightarrow x^2-7x+6=x^2-(2+\alpha)x+2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-5)x=2\alpha-6$$
Επομένως για $\alpha \neq 5$ έχουμε
$$x=\frac{2\alpha-6}{\alpha-5}=\frac{2(\alpha-5)+4}{\alpha-5}=2+\frac{4}{\alpha-5}.$$
Για να είναι ακέραιος ο αριθμός αυτός, θα πρέπει ο παρονομαστής $(\alpha-5)$ να είναι διαιρέτης του 4, οπότε $\alpha-5 \in \{\pm1, \pm2, \pm4\}$. Επομένως $\alpha \in \{1,3,4,6,7,9\}$.

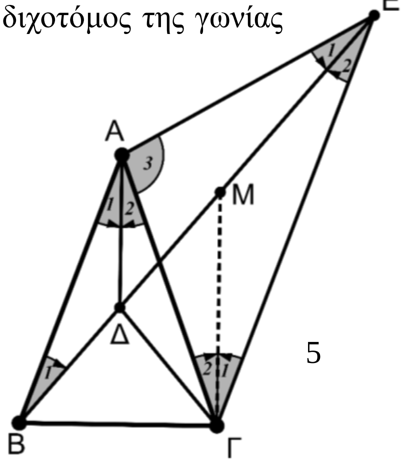
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) με $\widehat{A}=40°$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ.
Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΕ), να αποδείξετε ότι:
(α) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.
(β) $\Gamma\widehat{A}E=100°$.
(γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.
Σημείωση: *Να κάνετε το δικό σας σχήμα στην κόλλα με τις απαντήσεις σας.*



Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές (ΔΒ=ΔΓ), το σημείο Δ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Η κορυφή Α ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη της ΒΓ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές). Άρα η ΑΔ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ και κατά συνέπεια θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.



Σχήμα 2

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές (ΔΑ=ΔΒ) και $\widehat{A}_1 = 20°$, θα ισχύει $\widehat{B}_1 = 20°$. Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$ και από το άθροισμα των γωνιών του έχουμε:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 180° \Leftrightarrow 20° + 20° + \widehat{A}_3 + 20° + 20° = 180°.$$

Άρα είναι: $\widehat{A}_3 = 100°$.

(γ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές (ΑΕ = ΑΓ) με $\Gamma\widehat{A}E = \widehat{A}_3 = 100°$, οπότε:

$$\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 = 40°.$$

Ισχύει όμως $\widehat{\Gamma}_2 + \widehat{A}_2 = 20°$ (διότι $\widehat{\Gamma}_2, \widehat{A}_2$ εντός εναλλάξ ΑΔ|| ΓΜ και ΑΓ τέμνουσα).
Στο ερώτημα **(β)** είδαμε ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 = 20°$. Άρα $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{E}_2 = 20°$, οπότε το τρίγωνο ΓΜΕ είναι ισοσκελές με ΜΓ = ΜΕ. Επομένως, το Μ θα ανήκει στη μεσοκάθετη της βάσης ΓΕ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ, όπως και το Α, οπότε θα είναι ΑΜ⊥ΓΕ.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση $\left(x-1\right)\left(x^2-7x+10\right)=0$ και την ανίσωση $\dfrac{x\left(x-1\right)}{2}-2<\dfrac{x\left(x-5\right)}{2}+6$.

Λύση

Θα λύσουμε την εξίσωση και την ανίσωση και θα επιλέξουμε τους ακέραιους που ικανοποιούν και τις δύο. Για την εξίσωση έχουμε:

$$\left(x-1\right)\left(x^2-7x+10\right)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=5,$$

αφού η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta=\left(-7\right)^2-4\cdot1\cdot10=9>0$.

Για την ανίσωση έχουμε

$$\frac{x\left(x-1\right)}{2}-2<\frac{x\left(x-5\right)}{2}+6 \Leftrightarrow x^2-x-4<x^2-5x+12.$$

$$\Leftrightarrow 5x-x<12+4 \Leftrightarrow 4x<16 \Leftrightarrow x<4.$$

Επομένως. η εξίσωση και η ανίσωση αληθεύουν συγχρόνως για $x=1$ ή $x=2$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^4-36\beta^4=5\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0. \qquad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α,β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^4-9\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^2\left(\alpha^2-9\beta^2\right)+4\beta^2\left(\alpha^2-9\beta^2\right)$$

$$=\left(\alpha^2-9\beta^2\right)\left(\alpha^2+4\beta^2\right)$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2-9\beta^2\right)\left(\alpha^2+4\beta^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-9\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ ή } \alpha=-3\beta.$$

Αν $\alpha=3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\dfrac{1}{2}$, ενώ

Αν $\alpha=-3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\dfrac{-4}{-2}=2.$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^4 (αν είναι $\beta=0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται 0 = 1`, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^4 - 5\alpha^2\beta^2 - 36\beta^4 = 0 \Leftrightarrow \beta^4\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 - 5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 36\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4 - 5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 36 = 0$$

$$\overset{\frac{\alpha}{\beta}=\omega}{\Longleftrightarrow} \omega^4 - 5\omega^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left(\omega^2\right)^2 - 5\omega^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2}$$

$\Leftrightarrow \omega^2 = 9$ ή $\omega^2 = -4$ (απορρίπτεται) $\Leftrightarrow \omega = 3$ ή $\omega = -3 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$ ή $\alpha = -3\beta$.

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο:

Αν $\alpha = 3\beta$, τότε $\mathrm{K} = \frac{3\beta - \beta}{3\beta + \beta} = \frac{1}{2}$, ενώ, αν $\alpha = -3\beta$, τότε $\mathrm{K} = \frac{-3\beta - \beta}{-3\beta + \beta} = \frac{-4}{-2} = 2$.

Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$\mathrm{A} = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{99}$$

και

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}$$

Λύση

Παρατηρώντας προσεκτικά τους αριθμούς Α και Β διαπιστώνουμε ότι:

οι προσθετέοι του Α είναι της μορφής $\frac{2}{3\kappa}$, $\kappa = 1, 2, \ldots, 33$, δηλαδή ο Α έχει 33 όρους.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι ο Β έχει προσθετέους της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου το ν παίρνει όλες τις τιμές από το 2 μέχρι το 100, εκτός αυτών που είναι πολλαπλάσια του 3, δηλαδή ο Β έχει $99 - 33 = 66$ όρους, δηλαδή έχει διπλάσιους όρους από τον αριθμό Α. Επομένως πρέπει να βρούμε μία ανισωτική σχέση μεταξύ των όρων του Α και των όρων του Β η οποία σε κάθε όρο του Α θα αντιστοιχίζει δύο όρους του Β. Με απλή παρατήρηση βλέπουμε ότι πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ του όρου $\frac{2}{3\kappa}$ του Α και του αθροίσματος των όρων $\frac{1}{3\kappa - 1}$ και $\frac{1}{3\kappa + 1}$ του Β, για $\kappa = 1, 2, \ldots, 33$.

Επειδή βλέπουμε ότι $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{3\kappa - 1} + \frac{1}{3\kappa + 1} > \frac{2}{3\kappa},$$

για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, 33$. Πράγματι, κάνοντας την πρόσθεση στο πρώτο μέλος, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{6\kappa}{9\kappa^2 - 1} > \frac{2}{3\kappa}$$

ή ισοδύναμα $18k^2 > 18k^2 - 2$, που ισχύει για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots, 33$

Επομένως, έχουμε τις 33 ομόστροφες ανισότητες:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}, \ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}, \ \ldots, \frac{1}{98} + \frac{1}{100} > \frac{2}{99},$$

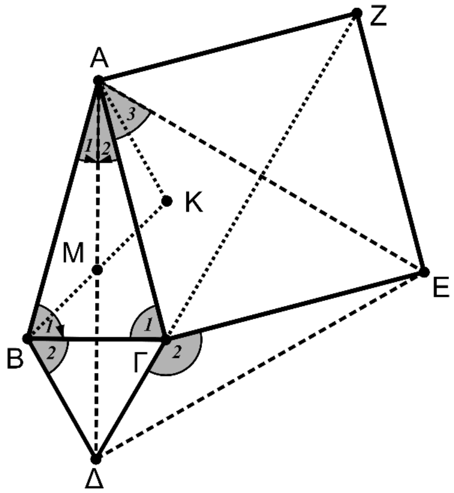
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε ότι $\mathrm{B} > \mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A} = 30°$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A} = 30°$ θα ισχύει: $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 75°$. Η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A} = 30°$, οπότε θα είναι: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15°$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ. Αυτά έχουν από τις υποθέσεις:

(i) ΑΒ=ΑΓ=ΓΕ **(ii)** ΒΔ=ΓΔ και επιπλέον για τις περιεχόμενες γωνίες έχουμε:

$$A\widehat{B}\Delta = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 75° + 60° = 135° \text{ και}$$

$$\Delta\widehat{\Gamma}E = 360° - \widehat{\Gamma}_1 - 90° - 60° = 360° - 150° - 75° = 135°\,,$$

δηλαδή ισχύει ότι: **(iii)** $A\widehat{B}\Delta = \Delta\widehat{\Gamma}E = 135°$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα και κατά συνέπεια ΑΔ = ΔΕ, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Για τη γωνία $\Delta\widehat{A}E$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta\widehat{A}E = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 15° + 45° = 60°,$$

αφού η γωνία $\hat{A}_3$ είναι οξεία γωνία του ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

(β) Για τη γωνία $\Delta\widehat{\Gamma}Z$ έχουμε: $\Delta\widehat{\Gamma}Z = \widehat{\Gamma}_2 + E\widehat{\Gamma}Z = 135° + 45° = 180°$. Άρα τα σημεία Δ, Γ, Ζ είναι συνευθειακά και επειδή η ΓΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ, συμπεραίνουμε ότι **η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ .**

Επειδή το Μ είναι μέσο της ΑΔ, και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, **η ΕΜ θα είναι μεσοκάθετη της ΑΔ** .

Εφόσον το Κ είναι το συμμετρικό του Β ως προς το Μ, ΜΑ=ΜΒ και $B\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}K$ τα τρίγωνα ΜΑΚ και ΜΔΒ είναι ίσα, οπότε $B\widehat{\Delta}M = M\widehat{A}K = 30°$. Από τις προηγούμενες ισότητες, συμπεραίνουμε ότι **η ΑΚ είναι διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη του τριγώνου ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ .**

Επομένως, οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το σημείο τομής των μεσοκάθετων του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6 - 27\beta^6} = -1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^6 - 27\beta^6 = -26\alpha^3\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0. \qquad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α, β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = \alpha^6 - \alpha^3\beta^3 + 27\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = \alpha^3\left(\alpha^3 - \beta^3\right) + 27\beta^3\left(\alpha^3 - \beta^3\right)$$

$$= \left(\alpha^3 + 27\beta^3\right)\left(\alpha^3 - \beta^3\right).$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0 \Leftrightarrow \left(\alpha^3 + 27\beta^3\right)\left(\alpha^3 - \beta^3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + 3\beta\right)\left(\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2\right)\left(\alpha - \beta\right)\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 3\beta = 0 \text{ ή } \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3\beta \text{ ή } \alpha = \beta,$$

αφού $\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2 = \left(\alpha - \dfrac{3\beta}{2}\right)^2 + \dfrac{45\beta^2}{4} > 0$, για $\alpha\beta \neq 0$ (ισχύει από την υπόθεση)

και $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \dfrac{\beta}{2}\right)^2 + \dfrac{3\beta^2}{4} > 0,$ για $\alpha\beta \neq 0$.

Αν $\alpha = -3\beta,$ τότε $\mathrm{K} = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \dfrac{9\beta^2 - \beta^2}{9\beta^2 + \beta^2} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$, ενώ, αν $\alpha = \beta,$ τότε

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2}{\beta^2 + \beta^2} = 0.$$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^6 (αν είναι $\beta = 0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται 0 = 1, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0 \Leftrightarrow \beta^6\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 = 0 \overset{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \omega}{\Longleftrightarrow} \omega^2 + 26\omega^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-26 \pm 28}{2}$$

$$\Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -27 \Leftrightarrow \alpha^3 = \beta^3 \text{ ή } \alpha^3 = -27\beta^3 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -3\beta$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο $\mathrm{K}=\frac{4}{5}$ ή $\mathrm{K}=0$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x+y+z+w=8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=x^2+y^2+z^2+w^2 .$$

Λύση

Ξεκινώντας από την υπόθεση $1\leq x\leq 5$, θα έχουμε ότι:

$$1\leq x\leq 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)\leq 0 \Leftrightarrow x^2-6x+5\leq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 6x-5,$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=1$ ή $x=5$.

Ομοίως, λαμβάνουμε

$$y^2\leq 6y-5,\ z^2\leq 6z-5,\ w^2\leq 6w-5,$$

όπου οι ισότητες ισχύουν μόνον όταν οι y, z, w παίρνουν τις τιμές 1 ή 5.

Προσθέτοντας τις παραπάνω τέσσερις ανισότητες κατά μέλη, έχουμε

$$\mathrm{A}=x^2+y^2+z^2+w^2\leq 6(x+y+z+w)-20=6\cdot 8-20=28.$$

Έχουμε ισότητα όταν ένας από τους αριθμούς ισούται με 5 και οι άλλοι με 1, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης είναι 28.

Πρόβλημα 3

Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}=\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9\cdot\mathrm{A}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9\cdot\mathrm{A}=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}9\cdot\mathrm{A}&=10\cdot\mathrm{A}-\mathrm{A}=\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 0}-\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}\\&=\left(\alpha_3\cdot 10^4+\alpha_2\cdot 10^3+\alpha_1\cdot 10^2+\alpha_0\cdot 10\right)-\left(\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10\ +\alpha_0\right)\\&=\alpha_3\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1\right)\cdot 10-\alpha_0\\&=\alpha_3\cdot 10^4+\left(\alpha_2-\alpha_3\right)\cdot 10^3+\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\cdot 10^2+\left(\alpha_0-\alpha_1-1\right)\cdot 10+(10-\alpha_0)\end{aligned}$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0,$ ο αριθμός $9\cdot\mathrm{A}$ έχει τα ψηφία $\alpha_3,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \alpha_1-\alpha_2, \alpha_0-\alpha_1-1,\ 10-\alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10\mathrm{A}-\mathrm{A}$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0,$ ως εξής:

$$\begin{array}{rccccc} & & & & 1 & \\ & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0\\ - & & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0\\ \hline & \alpha_3 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_0-\alpha_1-1 & 10-\alpha_0,\end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η παράλληλη από το Ο προς την ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1), του τριγώνου ΑΔΟ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Ζ. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο Η. Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ είναι ίσα.

(β) Τα τρίγωνα ΟΖΕ και ΟΓΕ είναι ίσα.

(γ) Τα σημεία Γ, Ο, Η είναι συνευθειακά.

Λύση

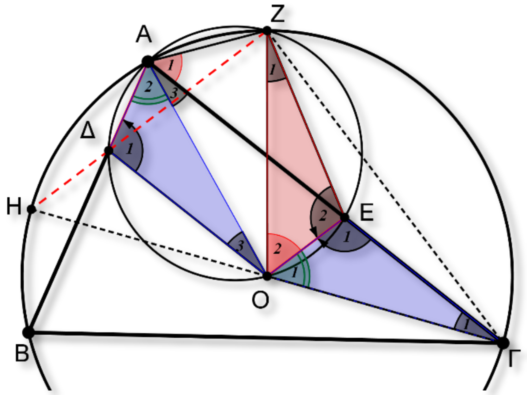
(α) Επειδή $O\Delta \parallel AE$ το τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $A\Delta = OE$.

Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ έχουν:

(1) ΑΔ=ΟΕ (από το ισοσκελές τραπέζιο ΑΔΟΕ).

(2) ΟΑ=ΟΓ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ).

(3) Το τρίγωνο ΟΑΓ είναι ισοσκελές (ΟΑ=ΟΓ) οπότε: $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}_3$. Η γωνία $\widehat{E}_1$ είναι εξωτερική στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ, οπότε: $\widehat{E}_1 = \widehat{\Delta}_1$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, καταλήγουμε και στην ισότητα: $\widehat{O}_1 = \widehat{A}_2$



Σχήμα 4

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΓΕ.

(β) Τα τρίγωνα ΟΓΕ και ΟΖΕ έχουν:

(i) $OZ = O\Gamma$ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ),

(ii) η ΟΕ είναι κοινή πλευρά.

(iii) Ισχύουν η ισότητα γωνιών:

$\widehat{A}_1 = \widehat{O}_2$ (είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο ΖΕ).

$\hat{A}_1 = \dfrac{Z\hat{O}\Gamma}{2} = \dfrac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2}$ (η γωνία $\widehat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη και στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ με αντίστοιχη επίκεντρη την $\Gamma\widehat{O}Z$), οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2.$$

Από τις σχέσεις (i), (ii) και (iii) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΟΓΕ και ΟΖΕ είναι ίσα.

(γ) Τελικά, από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων, έχουμε ότι και τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ είναι ίσα, οπότε ΟΔ = ΕΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΟΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $\Delta Z \parallel OE$.

Από την ισότητα των τριγώνων ΟΓΕ και ΟΖΕ προκύπτουν οι δύο παρακάτω ισότητες τμημάτων $\text{ΟΖ} = \text{ΟΓ}$ και $\text{ΕΖ} = \text{ΕΓ}$, από τις οποίες προκύπτει ότι η ΟΕ είναι μεσοκάθετη της ΓΖ. Άρα και η ΔΖ θα είναι κάθετη στην ΓΖ, δηλαδή το σημείο Η είναι το αντιδιαμετρικό του σημείου Γ, οπότε τα σημεία $\text{Γ}, \text{Ο}, \text{Η}$ είναι συνευθειακά.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0 \ .$$

Λύση.

Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου δεν ικανοποιούν την εξίσωση. Επομένως πρέπει να εργαστούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό και παραγοντοποίηση. Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Για $x \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το x^4, οπότε προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση:

$$x^2 - x - 18 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 18 = 0 \qquad (1)$$

Θέτουμε $x - \frac{3}{x} = \omega$, οπότε $x^2 + \frac{9}{x^2} - 6 = \omega^2 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} = \omega^2 + 6$. Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε την εξίσωση

$$\omega^2 + 6 - \omega - 18 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - \omega - 12 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4 \text{ ή } \omega = -3.$$

Άρα έχουμε;

$$x - \frac{3}{x} = 4 \text{ ή } x - \frac{3}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$. να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot \mathrm{A}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9 \cdot \mathrm{A} = 10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A}$ έχουμε ότι

$$9 \cdot \mathrm{A} = 10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 0} - \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$$

$$= \left(\alpha_4 \cdot 10^5 + \alpha_3 \cdot 10^4 + \alpha_2 \cdot 10^3 + \alpha_1 \cdot 10^2 + \alpha_0 \cdot 10\right) - \left(\alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0\right)$$

$$= \alpha_4 \cdot 10^5 + \left(\alpha_3 - \alpha_4\right) \cdot 10^4 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right) \cdot 10^3 + \left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \cdot 10^2 + \left(\alpha_0 - \alpha_1\right) \cdot 10 - \alpha_0$$

$$= \alpha_4 \cdot 10^5 + \left(\alpha_3 - \alpha_4\right) \cdot 10^4 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right) \cdot 10^3 + \left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \cdot 10^2 + \left(\alpha_0 - \alpha_1 - 1\right) \cdot 10 + (10 - \alpha_0)$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$, ο αριθμός $9 \cdot \mathrm{A}$ έχει τα ψηφία $\alpha_4, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_0 - \alpha_1 - 1, 10 - \alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10\cdot A - A$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0,$ ως εξής:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & & & 1 & \\ & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\ - & & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \hline & \alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_0-\alpha_1-1 & 10-\alpha_0, \end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 3
Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$x + 2y^2 = 3z^3$$
$$y + 2z^2 = 3x^3$$
$$z + 2x^2 = 3y^3$$

Λύση
Ας υποθέσουμε ότι ο z είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους άλλους δύο αγνώστους, δηλαδή $z \geq \max\{x, y\}$. (Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ομοίως).
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $z > 1.$ Τότε , αφού $z \geq \max\{x, y\}$, θα είναι $x + 2y^2 < z + 2z^2 < 3z^3$, άτοπο.
- $z = 1.$ Τότε $x + 2y^2 = 3$ και αφού $1 \geq \max\{x, y\}$ έπεται ότι η τελευταία ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν $x = y = 1$. Άρα έχουμε τη λύση: $(x, y, z) = (1,1,1)$.

Αυτή είναι η μοναδική λύση του συστήματος, αφού οι περιπτώσεις με $y \geq \max\{x, z\}$ ή $x \geq \max\{y, z\}$ οδηγούν στην ίδια λύση.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ (με $AB \parallel ΓΔ$ και $AB < ΓΔ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο B του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $ΔΓ$ στο σημείο E. Έστω M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.
Να αποδείξετε ότι:
(α) Η ευθεία $ΑΔ$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου $ΔΒΕ$.
(β) Το σημείο M ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου $OBΓ$.
(γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B.

Λύση
(α) Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1, \hat{Γ}_2 = \hat{Δ}_2.$$

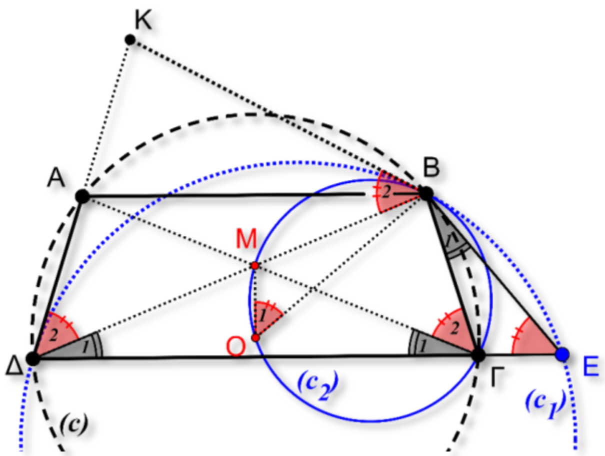
Επίσης, επειδή η BE εφάπτεται στον κύκλο (c), θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{Δ}_1$ (γωνία από τη χορδή $BΓ$ και την εφαπτόμενη BE). Άρα έχουμε

$$\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 \qquad (1).$$

Έστω (c_1) και (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{Δ}_2$ (που δημιουργείται από τη χορδή $ΒΔ$ και την $ΑΔ$) είναι ίση με την γωνία $\hat{E}$, οπότε η $ΑΔ$ θα εφάπτεται στον κύκλο (c_1). Πράγματι, η γωνία $Β\hat{Γ}Δ$ είναι εξωτερική του τριγώνου $ΒΓΕ$, οπότε:

$$Β\hat{Γ}Δ = \hat{B}_1 + \hat{E} \Leftrightarrow \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = \hat{B}_1 + \hat{E}$$

και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$, καταλήγουμε στις ισότητες: $\hat{Γ}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{E}$.



Σχήμα 5

(β) Θα αποδείξουμε ότι το σημείο τομής M των διαγωνίων του ισοσκελούς τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ανήκει στον κύκλο (c_2). Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΟΜ$ είναι εγγράψιμο.

Πράγματι, η $ΟΜ$ είναι μεσοκάθετος της $ΑΒ$, οπότε:

$$Μ\hat{Ο}Β = \hat{M}_1 = \frac{Α\hat{Ο}Β}{2} = Α\hat{Γ}Β = \hat{Γ}_2.$$

Επομένως, το τετράπλευρο $ΒΓΟΜ$ είναι εγγράψιμο.

(γ) Θεωρούμε την εφαπτόμενη του κύκλου (c_1) στο σημείο B και έστω ότι τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο σημείο K. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΒΚ είναι εφαπτομένη και του κύκλου (c_2).

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 \qquad (2)$$

γιατί η $ΚΔ$ είναι εφαπτομένη του (c_1) (όπως αποδείξαμε στα ερώτημα (α))

Ισχύουν όμως οι ισότητες γωνιών: $Κ\hat{Β}Μ = \hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{Γ}_2 = Β\hat{Γ}Μ$. Άρα η $ΒΚ$ εφάπτεται και του κύκλου (c_2).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Λύση
Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right)\\&=\left(\left(\frac{-16}{-8}\right)^5+\left(\frac{-12}{6}\right)^5+1\right)\cdot\left(\left(\frac{-16}{8}\right)^3+\left(\frac{-12}{-6}\right)^3+2019\right)\\&=\left(2^5+(-2)^5+1\right)\cdot\left((-2)^3+2^3+2019\right)\\&=\left(2^5-2^5+1\right)\cdot\left(-2^3+2^3+2019\right)=1\cdot 2019=2019.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Λύση (1ος τρόπος)
Έστω ότι ο ταξιδιώτης είχε μαζί του την πρώτη μέρα x ευρώ.

Τότε την πρώτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{3}$ ευρώ και του έμειναν $x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$ ευρώ. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{x}{6}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$ ευρώ. Την τρίτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{10}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$ ευρώ.

Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{5}=240 \Leftrightarrow \frac{2x}{5}=\frac{240}{1} \Leftrightarrow 2x=1200 \Leftrightarrow x=\frac{1200}{2} \Leftrightarrow x=600 \text{ ευρώ.}$$

2^{ος} τρόπος (χωρίς εξίσωση)

Την πρώτη μέρα του μένουν τα $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ μέρους των χρημάτων του.

Τη δεύτερη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ μέρους των χρημάτων του και του μένει το $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ μέρους των χρημάτων.

Την τρίτη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$ μέρους των χρημάτων του και του μένουν τα $\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ μέρους των χρημάτων που είναι 240€. Άρα το $\frac{1}{5}$ είναι $240:2=120$€, και επομένως τα χρήματα που είχε ήταν $120\cdot 5=600$€.

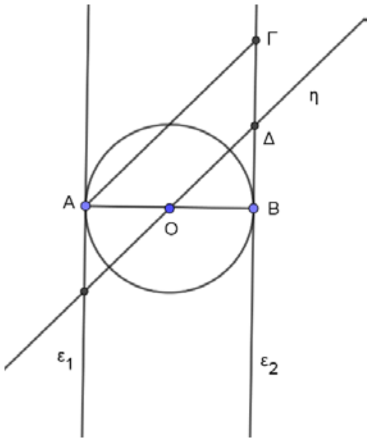
3^{ος} τρόπος

Επειδή την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας, του απέμειναν τα $\frac{4}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας που ήταν 240 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας $240\cdot\frac{5}{4}=300$ ευρώ.

Επειδή την δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει από την πρώτη μέρα, του απέμειναν τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας που ήταν 300 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας $300\cdot\frac{4}{3}=400$ ευρώ.

Επειδή την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του, του απέμειναν τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που του είχε μαζί του που ήταν 400 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι είχε μαζί του στο ξεκίνημα της πρώτης μέρας $400\cdot\frac{3}{2}=600$ ευρώ.

Πρόβλημα 3



Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB, κέντρο O και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A\Gamma}$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Δ.

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\mathrm{AB\Gamma}$ και $\mathrm{OB\Delta}$.

(β) Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$.

(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $\mathrm{AO\Delta\Gamma}$.

Λύση

(α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού είναι κάθετες στα άκρα A και B της διαμέτρου AB. Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $\mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 90^0$, $\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma}$, επομένως οι γωνίες της βάσης του $\mathrm{A\Gamma}$ είναι 45^0 η καθεμία. Στο τρίγωνο $\mathrm{O\Delta B}$, έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{O} = 90^0$, $\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = 45^0$ και $\mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{B} = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 45^0$.

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισοσκελές και από την υπόθεση $\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{AB}$ έχουμε:

$$\Delta\mathrm{B} = \mathrm{OB} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}.$$

Επομένως το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\mathrm{B\Gamma}$.

(γ) Το τετράπλευρο $\mathrm{AO\Delta\Gamma}$ είναι τραπέζιο αφού οι πλευρές του $\mathrm{AO}, \Gamma\Delta$ τέμνονται στο σημείο B και οι πλευρές του $\mathrm{A\Gamma}, \mathrm{O\Delta}$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης ισχύει $\mathrm{AO} = \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \Gamma\Delta$. Επομένως, το τετράπλευρο ΑΟΔΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Λύση

Για να ισούται ένα κλάσμα με ακέραιο πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή του. Από τους 26 δεδομένους ακέραιους πρώτοι, δηλαδή αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Οι 6 μικρότεροι από αυτούς, 2, 3, 5, 7, 11, 13, μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το $\frac{23}{1}=23.$ Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιος, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12. Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

$\frac{26}{13},\frac{25}{5},\frac{23}{1},\frac{22}{11},\frac{21}{7},\frac{20}{10},\frac{18}{9},\frac{15}{3},\frac{14}{2}$(υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)

$\frac{24}{8},\frac{16}{4},\frac{12}{6}$ (υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών).

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right).$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right)$$

$$=\left(\left(\left(\frac{-32}{4}\right)^9+\left(\frac{-16}{-2}\right)^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left((-8)^9+(+8)^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left((-5)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left(-8^9+8^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot(0+100)=\left(0\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot(+100)=20\cdot100=2000.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις. Τότε δεν απάντησε σωστά σε $12-x$ ερωτήσεις, οπότε το τελικό κέρδος του, έστω Κ, θα είναι:

$$\mathrm{K}=600+80x-40(12-x)\Leftrightarrow \mathrm{K}=600+80x-480+40x\Leftrightarrow \mathrm{K}=120+120x.$$

Επομένως, για την εύρεση του x πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$120+120x=1320\Leftrightarrow 120x=1320-120\Leftrightarrow 120x=1200\Leftrightarrow x=10.$$

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και στα δύο ερωτήματα.

Λύση.

(α) Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής $\frac{\nu+1}{\nu}=1+\frac{1}{\nu}$, οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu+1}{\mu},\frac{\nu+1}{\nu}$ έχουμε:

$$\frac{\mu+1}{\mu}>\frac{\nu+1}{\nu}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\mu}>1+\frac{1}{\nu}\Leftrightarrow \frac{1}{\mu}>\frac{1}{\nu}\Leftrightarrow \mu<\nu .$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

2ος τρόπος

Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα γράφονται ως:

$$\frac{2020}{2019}=1+\frac{1}{2019}=1\frac{1}{2019}$$
$$\frac{2021}{2020}=1+\frac{1}{2020}=1\frac{1}{2020}$$
$$\vdots$$
$$\frac{3022}{3021}=1+\frac{1}{3021}=1\frac{1}{3021}$$

Όμως $\frac{1}{2019}>\frac{1}{2020}>\cdots>\frac{1}{3021}$, οπότε μεγαλύτερο κλάσμα το πρώτο, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

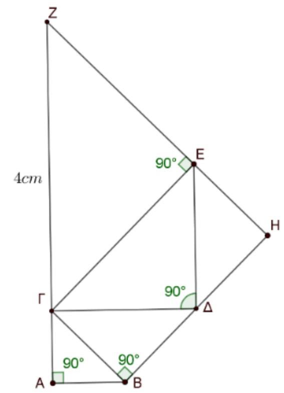
(β) Παρατηρούμε ότι τα αντίστροφα των δεδομένων κλασμάτων

$$\frac{4021}{4020},\frac{4022}{4021},\frac{4023}{4022},\frac{5021}{5020},\frac{5022}{5021},\frac{5023}{5022},$$

είναι της ιδίας μορφής με αυτά του ερωτήματος (α). Σύμφωνα με το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι μεγαλύτερο κλάσμα είναι το πρώτο και μικρότερο το τελευταίο. Επομένως, για τα αντίστροφα τους το συμπέρασμα είναι ότι μεγαλύτερο είναι το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{5023}{5022}$, και μικρότερο το πρώτο, δηλαδή το $\frac{4021}{4020}$.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}, \Delta\hat{\mathrm{B}}\Gamma, \mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma$ και $\mathrm{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$, $\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{B}\Delta$, $\Delta\Gamma = \Delta\mathrm{E}$, $\mathrm{E}\Gamma = \mathrm{EZ}$ και $\Gamma\mathrm{Z} = 4\ cm$.
Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.



(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.
(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.
(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.

Λύση

(α) Αν $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma = x$, τότε από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\mathrm{B}\Gamma^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow \mathrm{B}\Gamma = x\sqrt{2} = \mathrm{B}\Delta.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma\Delta^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 4x^2 \Rightarrow \Gamma\Delta = 2x = \Delta\mathrm{E}.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΕ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma\mathrm{E}^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2 \Rightarrow \Gamma\mathrm{E} = 2\sqrt{2}x = \mathrm{EZ}.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΕΖ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma\mathrm{Z}^2 = \left(2\sqrt{2}x\right)^2 + \left(2\sqrt{2}x\right)^2 = 16x^2 \Rightarrow \Gamma\mathrm{Z} = 4x,$$

οπότε $\Gamma\mathrm{Z} = 4x = 4 \Rightarrow x = 1\ cm.$

(β) Επειδή τα τρίγωνα $\mathrm{BA}\Gamma, \Delta\mathrm{B}\Gamma, \mathrm{E}\Delta\Gamma$ και $\mathrm{ZE}\Gamma$ είναι ορθογώνια ισοσκελή οι οξείες γωνίες τους είναι ίσες με $\frac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0$. Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 4 \cdot 45^0 = 180^0,$$

οπότε τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΗ έχει τρεις γωνίες του ορθές, αφού $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = 90^0$, $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E} = 45^0 + 45^0 = 90^0$ και $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H} = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 180^0 - 90^0 = 90^0$. Επομένως και η τέταρτη γωνία του θα είναι ορθή, οπότε αυτό είναι ορθογώνιο και έχει εμβαδό

$$\mathrm{E}_{(\mathrm{B}\Gamma\mathrm{EH})} = \mathrm{B}\Gamma \cdot \Gamma\mathrm{E} = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4\ cm^2.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ και $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$.

Λύση

Από την ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ και τις σχέσεις

$$10\left(\alpha^2+\beta^2\right)=29\alpha\beta \qquad \text{και} \qquad \alpha+\beta=7.$$

παίρνουμε ότι:

$$10\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]=29\alpha\beta \Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2-20\alpha\beta=29\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 10(\alpha+\beta)^2=49\alpha\beta \overset{\alpha+\beta=7}{\Rightarrow} \alpha\beta=\frac{10(\alpha+\beta)^2}{49}=\frac{10\cdot 7^2}{49}\Rightarrow \alpha\beta=10.$$

Έτσι έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{7}{10} \text{ και}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2-\frac{2}{\alpha\beta}=\left(\frac{7}{10}\right)^2-\frac{2}{10}=\frac{49}{100}-\frac{2}{10}=\frac{29}{100}.$$

Διαφορετικά, αφού πρώτα βρούμε ότι $\alpha\beta=10$ μπορούμε να προχωρήσουμε ως εξής: Από την εξίσωση $\alpha+\beta=7$ έχουμε ότι $\beta=7-\alpha,$ οπότε με αντικατάσταση του β στην εξίσωση $\alpha\beta=10$ έχουμε:

$$\alpha(7-\alpha)=10 \Leftrightarrow 7\alpha-\alpha^2=10 \Leftrightarrow \alpha^2-7\alpha+10=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες $\alpha=\dfrac{7\pm 3}{2}\Leftrightarrow \alpha=5$ ή $\alpha=2,$ οπότε έχουμε: $(\alpha,\beta)=(5,2)$ ή $(\alpha,\beta)=(2,5)$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε άμεσα και από τα δύο ζεύγη: $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{7}{10}$ και $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{29}{100}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Λύση

Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο παρονομαστής τους είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής

$$\frac{\nu}{\nu+1}=\frac{\nu+1-1}{\nu+1}=1-\frac{1}{\nu+1},$$

οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu}{\mu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}$ έχουμε:

$$\frac{\mu}{\mu+1}>\frac{\nu}{\nu+1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\mu+1}>1-\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{\mu+1}>-\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu+1}<\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow \mu>\nu .$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή, δηλαδή το $\frac{4021}{4022}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μικρότερο αριθμητή, , δηλαδή το $\frac{3019}{3020}$.

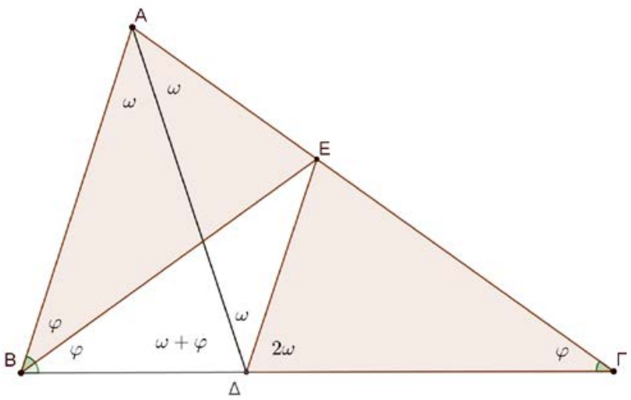
Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 2\cdot \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι $\hat{\mathrm{A}}=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma=2\omega$, $\hat{\Gamma}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}=\varphi$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=2\varphi$.

(α) Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=\frac{\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma}{2}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{BE}=\mathrm{E}\Gamma$. Επιπλέον $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\frac{\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma}{2}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$ και από την υπόθεση $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες.

(β) Από το ερώτημα (α) προκύπτουν τα εξής:

- $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=\hat{\mathrm{A}}=2\omega$
- $\mathrm{AE}=\mathrm{E}\Delta \Rightarrow$ το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές $\Rightarrow \mathrm{A}\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{AE}=\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=\omega=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta.$

Επομένως οι ευθείες ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλες, γιατί τεμνόμενες από την ΑΔ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως θα έχουν και

$$\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta \Rightarrow 2\omega = 2\varphi \Rightarrow \omega = \varphi,$$

οπότε έχουμε

$$\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + \varphi = 180^0 \Rightarrow 5\omega = 180^0 \Rightarrow \omega = 36^0.$$

Άρα είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 2\omega = 72^0$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\mathrm{A} = \dfrac{\left(\alpha^2 - 1\right)^3}{\left(\alpha - 1\right)^4}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Για $\alpha \neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{A} = \frac{\left(\alpha^2 - 1\right)^3}{\left(\alpha - 1\right)^4} = \frac{\left(\alpha - 1\right)^3\left(\alpha + 1\right)^3}{\left(\alpha - 1\right)^4} = \frac{\left(\alpha + 1\right)^3}{\alpha - 1}.$$

Αν τώρα θέσουμε $\alpha - 1 = x$, τότε έχουμε $\alpha + 1 = x + 2$ και

$$\mathrm{A} = \frac{\left(x + 2\right)^3}{x} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} = x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x}.$$

Επομένως, ο ρητός αριθμός Α είναι ακέραιος, αν και μόνον αν,

$$\frac{8}{x} = \frac{8}{\alpha - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(\alpha - 1\right) \text{ είναι διαιρέτης του } 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\right\}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \left\{2, 3, 5, 9.0, -1, -3, -7\right\}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha + \beta$ και $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$.

Λύση

Από τις ταυτότητες

$$\left(\alpha + \beta\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ και } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\alpha + \beta\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\right)$$

και τις σχέσεις $\alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 15\alpha\beta$ παίρνουμε ότι:

$$\left(\alpha + \beta\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\right) = 90\alpha\beta \overset{\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta}{\Rightarrow} \left(\alpha + \beta\right)\left(16\alpha\beta - \alpha\beta\right) = 90\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \left(\alpha + \beta\right) \cdot 15\alpha\beta = 90\alpha\beta \overset{\alpha\beta \neq 0}{\Rightarrow} \alpha + \beta = 6.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 18\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2 \Rightarrow \alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2}{18}=\frac{6^2}{18}=2,$$

οπότε θα είναι: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{2}=3$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{matrix}\right\}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Πρέπει $xy\neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{matrix} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy\cdot y^2=-8 \\ xy+y^2=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (2-y^2)\cdot y^2=-8 \\ xy=2-y^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y^4-2y^2-8=0 \\ x=\frac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y^2=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \\ x=\frac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y^2=\frac{2\pm 6}{2} \\ x=\frac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\} \overset{y^2\geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} y^2=4 \\ x=\frac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=2 \\ x=-1 \end{matrix}\right\} \text{ή} \left\{\begin{matrix} y=-2 \\ x=1 \end{matrix}\right\}.$$

2ος τρόπος

Πρέπει $xy\neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{matrix} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy\cdot y^2=-8 \\ xy+y^2=2 \end{matrix}\right\}.$$

Αν θέσουμε: $xy=\varphi,\ y^2=\omega>0$, τότε με αγνώστους φ και ω προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} \varphi\omega=-8 \\ \varphi+\omega=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi\omega=-8 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi(2-\varphi)=-8 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi^2-2\varphi-8=0 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi=\frac{2\pm 6}{2} \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi=4 \text{ ή } \varphi=-2 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (\varphi,\omega)=(4,-2) \\ \text{ή} \\ (\varphi,\omega)=(-2,4) \end{matrix}\right\}.$$

Επειδή πρέπει $\omega=y^2>0$, δεκτή είναι μόνο η λύση $(\varphi,\omega)=(-2,4)$, οπότε οι τιμές των x,y θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} xy=-2 \\ y^2=4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy=-2 \\ y=2 \text{ ή } y=-2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-1,\ 2) \text{ ή } (x,y)=(1,-2).$$

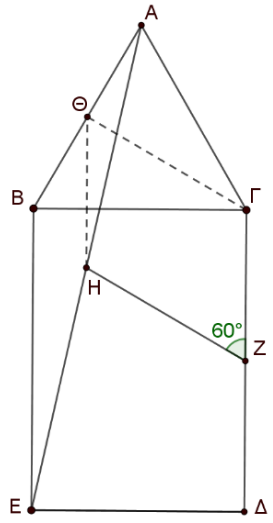
Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.

Λύση

Έστω Θ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΘΗ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΕ και ίση με το μισό της, δηλαδή $\Theta\mathrm{H}=\dfrac{\mathrm{BE}}{2}$. Επειδή το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο, έχει ίσες τις απέναντι πλευρές του, οπότε $\mathrm{BE}=\Gamma\Delta$. Επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΗ και ΓΖ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΓΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε θα είναι και $\mathrm{ZH}\parallel\Gamma\Theta$. Όμως η ΓΘ είναι κάθετη προς τη ΑΒ (ως διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος), οπότε θα είναι και $\mathrm{ZH}\perp\mathrm{AB}$.

Επιπλέον οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι οξείες και έχουν πλευρές ανά δύο κάθετες, οπότε είναι ίσες, δηλαδή $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=60^0$.



Σχήμα 4

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}-\{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda-3)x^2+(\lambda^2+1)x-(11\lambda-18)=0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Λύση

Αν β,γ είναι οι ρίζες της εξίσωσης , τότε πρέπει:

$$\beta^2+\gamma^2=\left(\sqrt{17}\right)^2=17. \qquad (1)$$

Με τον περιορισμό $\lambda\neq3$, οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν τους τύπους Vieta:

$$\beta+\gamma=-\frac{\lambda^2+1}{\lambda-3},\ \beta\gamma=-\frac{11\lambda-18}{\lambda-3} \qquad (2)$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\beta^2+\gamma^2=17\Leftrightarrow(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma=17\Leftrightarrow\frac{(\lambda^2+1)^2}{(\lambda-3)^2}+\frac{2(11\lambda-18)}{\lambda-3}-17=0$$

$$\Leftrightarrow(\lambda^2+1)^2+2(11\lambda-18)(\lambda-3)-17(\lambda-3)^2=0\Leftrightarrow\lambda^4+7\lambda^2-44=0$$

$$\Leftrightarrow\lambda^2=\frac{-7+\sqrt{225}}{2}=4(\text{η άλλη ρίζα είναι αρνητική και απορρίπτεται})\Leftrightarrow\lambda=\pm2.$$

Για $\lambda=2$ η εξίσωση γίνεται: $-x^2+5x-4=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$, ενώ για $\lambda=-2$ η εξίσωση γίνεται: $-5x^2+5x+40=0\Leftrightarrow x^2-x-8=0$ με ρίζες ετερόσημες, οπότε δεν μπορεί η μία από αυτές να είναι το μήκος πλευράς τριγώνου. Επομένως η μόνη αποδεκτή τιμή για την παράμετρο λ είναι το 2.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$108(x-2)^4+\left(4-x^2\right)^3=0 \ .$$

Λύση
Η εξίσωση γράφεται:

$$108(x-2)^4+\left(4-x^2\right)^3=0 \Leftrightarrow 108(x-2)^4+(2-x)^3(2+x)^3=0$$

$$\Leftrightarrow 108(x-2)^4-(x-2)^3(2+x)^3=0 \Leftrightarrow (x-2)^3\left[108(x-2)-(x+2)^3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3\left(108x-216-x^3-6x^2-12x-8\right)=0 \Leftrightarrow (x-2)^3\left(-x^3-6x^2+96x-224\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3\left(x^3+6x^2-96x+224\right)=0 \Leftrightarrow (x-2)^3=0 \text{ ή } x^3+6x^2-96x+224=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \,(\text{τριπλή ρίζα}) \text{ ή } x^3+6x^2-96x+224=0.$$

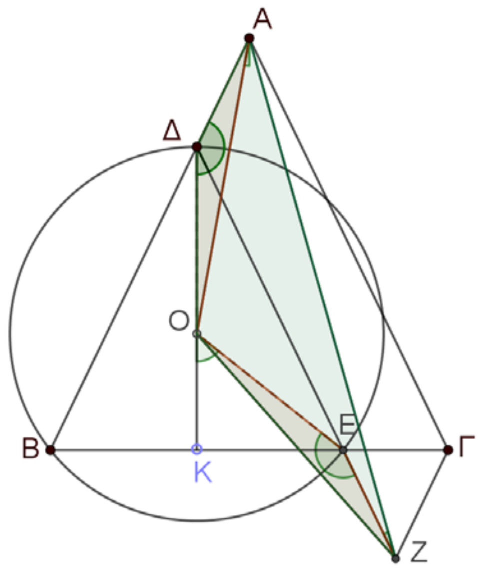
Η εξίσωση $x^3+6x^2-96x+224=0$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες, όλους τους διαιρέτες του 224. Με το σχήμα Horner διαπιστώνουμε εύκολα ότι μία ακέραια ρίζα της είναι το 4 με παραγοντοποίηση:

$$x^3+6x^2-96x+224=(x-4)\left(x^2+10x-56\right)=(x-4)^2(x+14).$$

Επομένως η εξίσωση έχει τις λύσεις: 2 (τριπλή), 4 (διπλή) και -14.

Πρόβλημα 2
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της ΔΕ προς το μέρος του Ε παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΔ. Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΒΕ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 5

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές, αφού από την παραλληλία $\Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{A}\Gamma$ έπεται ότι $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$. Επομένως η ευθεία ΟΔ είναι μεσοκάθετη της πλευρά ΒΕ και διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E}$, οπότε $\mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{B}$.
Παρατηρούμε τώρα ότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ έχουν από τις υποθέσεις δύο πλευρές τους ίσες, ΑΔ = ΕΖ και ΟΔ = ΟΕ. Επιπλέον, έχουμε

$$\mathrm{O}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 180^0 - \mathrm{O}\hat{\mathrm{E}}\Delta = 180^0 - \mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 180^0 - \frac{\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{E}}{2} = 180^0 - \mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{B} = \mathrm{O}\hat{\Delta}\mathrm{A}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΖΕ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{E} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{Z}}\Delta$, δηλαδή οι κορυφές Α και Ζ του τετραπλεύρου ΟΖΑΔ βλέπουν την πλευρά ΑΟ υπό ίσες γωνίες, οπότε τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} xy^3 = -108 \\ (x+y)\,y = -3 \end{array}\right\}$.

Λύση (1ος τρόπος)
Πρέπει $xy \neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3 = -108 \\ (x+y)\,y = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy\cdot y^2 = -108 \\ xy + y^2 = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left(-3-y^2\right)\cdot y^2 = -108 \\ xy = -3-y^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^4 + 3y^2 - 108 = 0 \\ x = \dfrac{-3-y^2}{y} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2 = \dfrac{-3 \pm \sqrt{441}}{2} \\ x = -\dfrac{3+y^2}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2 = \dfrac{-3 \pm 21}{2} \\ x = -\dfrac{3+y^2}{y} \end{array}\right\} \overset{y^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{c} y^2 = 9 \\ x = -\dfrac{3+y^2}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 3 \\ x = -4 \end{array}\right\} \text{ή} \left\{\begin{array}{c} y = -3 \\ x = 4 \end{array}\right\}.$$

2ος τρόπος
Πρέπει $xy \neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{array}{c} xy^3 = -108 \\ (x+y)\,y = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy\cdot y^2 = -108 \\ xy + y^2 = -3 \end{array}\right\}.$$

Αν θέσουμε: $xy = \varphi,\ y^2 = \omega > 0$, τότε με αγνώστους φ και ω προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi\omega = -108 \\ \varphi + \omega = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi\omega = -108 \\ \omega = -3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi(-3-\varphi) = -108 \\ \omega = -3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi^2 + 3\varphi - 108 = 0 \\ \omega = -3-\varphi \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi = \dfrac{-3 \pm \sqrt{441}}{2} \\ \omega = -3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi = \dfrac{-3 \pm 21}{2} \\ \omega = -3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varphi = 9 \text{ ή } \varphi = -12 \\ \omega = -3-\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\varphi,\omega) = (9,-12) \\ \text{ή} \\ (\varphi,\omega) = (-12,9) \end{array}\right\}.$$

Επειδή πρέπει $\omega = y^2 > 0$, δεκτή είναι μόνο η λύση $(\varphi,\omega) = (-12,9)$, οπότε οι τιμές των x, y θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} xy = -12 \\ y^2 = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} xy = -12 \\ y = 3 \text{ ή } y = -3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) = (-4,\,3) \text{ ή } (x,y) = (4,-3).$$

Πρόβλημα 4

Με κ διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς 2, 3, 4,…,1024 έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του. Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του κ.

Λύση

Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός της μορφής 2^{κ} είναι πολλαπλάσιο όλων των δυνάμεων του 2 με μικρότερο θετικό εκθέτη. Έτσι καθένας από τους αριθμούς

$$2,\ 4=2^2,\ 8=2^3,\ 16=2^4,\ 32=2^5,\ 64=2^6,\ 128=2^7, 256=2^8, 512=2^9, 1024=2^{10}$$

είναι πολλαπλάσιο όλων των προηγουμένων του, εκτός του πρώτου, οπότε όλοι πρέπει να έχουν διαφορετικά χρώματα. Επομένως ο αριθμός των χρωμάτων που θα χρειαστούμε είναι $\kappa \geq 10$.

Θα αποδείξουμε ότι με τα 10 χρώματα, έστω X_i, για τον αριθμό 2^i, $i=1,2,3,...,10$ μπορούμε να χρωματίσουμε όλους τους υπόλοιπους έτσι ώστε να μην υπάρχει το ίδιο χρώμα μεταξύ ενός αριθμού και κάποιου πολλαπλασίου του. Πράγματι, αρκεί να κάνουμε την αντιστοίχιση:

$$X_i \to \left\{2^i, 2^i+1, ..., 2^{i+1}-1\right\},\ i=1,2,...,9 \text{ και } X_{10} \to 2^{10}=1024.$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή είναι $\kappa_{\min}=10$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αδύνατο (άρτια – περιττά).

2. **Α)** 3 + 9 + 12 + 15 = 39,

   Β) 5 + 6 + 12 + 15 = 38,

   Γ) 6 + 6 + 9 + 15 = 36,

   Δ) 10 + 6 + 9 + 12 = 37.

3. Διαγραφή πρώτης σειράς (1 σφαιρίδιο), του μεσαίου της τρίτης σειράς και των δύο μεσαίων της τέταρτης σειράς.

4. Έστω

$$\Gamma = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \tfrac{1}{99}$$

Τότε

$$A = \Gamma/99,$$

$$B = \Gamma/100 + 1/10000$$

και

$$A - B = (\Gamma - 1)/9900 + 1/990000 > 0.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $x = 10$

2. Έστω $\alpha = 33333333334$ και $\beta = 22222222223$. Τότε $\kappa = 1 - 3/\alpha$ και $\lambda = 1 - 2/\beta$ και $\kappa - \lambda = 2/\beta - 3/\alpha = (2\alpha - 3\beta)/\alpha\beta = -1/\alpha\beta$. Άρα $\kappa < \lambda$.

3. $(\alpha + \beta)/\sqrt{2}$.

4. Αν ήταν δυνατόν, τότε ο αριθμός $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \varepsilon)(\varepsilon + \alpha)(\alpha + \gamma)(\gamma + \varepsilon)(\varepsilon + \beta)(\beta + \delta)(\delta + \alpha)$ θα ήταν τέλειο τετράγωνο.
   Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$, οπότε το γινόμενο αυτό παίρνει την τιμή $2^7 3^5 5^2 7^2$ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ένας από τους αριθμούς α, α +1, α + 2 διαιρείται με τον 3 και αυτός πρέπει να είναι ο α + 1. Άρα ο αριθμός α + 4 = α + 1 + 3 διαιρείται με τον 3.

2. Έχουμε

$$\frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} = \frac{3\lambda}{\alpha\beta+2\lambda^2}.$$

   Η πρώτη ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$4\alpha\beta \leq (\alpha+\beta)^2,$$

   και η δεύτερη με

$$3\alpha\beta > 0.$$

3. Το Δ πρέπει να είναι συμμετρικό κορυφής του τριγώνου ως προς τη μεσοκάθετο της απέναντι πλευράς. Άρα υπάρχουν 3 τέτοια σημεία.

4. Έστω ότι κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχει τη διαφορά δύο στοιχείων του. Τότε προφανώς το 2 δεν μπορεί να ανήκει στο ίδιο σύνολο με το 1 ούτε με το 4 γιατί 2 – 1 = 1 και 4 – 2 = 2. Έστω λοιπόν $2 \in A$, οπότε $1 \in B$ και $4 \in B$.
   Επειδή 4 – 1 = 3, έπεται ότι $3 \notin B$ και επομένως $3 \in A$. Επειδή 5 – 2 = 3, έπεται ότι $5 \notin A$ και επειδή 5 – 1 = 4, έπεται $5 \notin B$. Άτοπο επειδή $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. **Α)** Ναι, π.χ. $\nu = 2^{30}3^{30}5^{24}$.

   Β) Όχι., διότι, αν υπήρχε, τότε $2|\nu$. Έστω α ο μεγαλύτερος εκθέτης τέτοιος ώστε $2^{\alpha}|\nu$.

   Τότε $4|\alpha + 2$ (λόγω του ότι ο 4ν είναι τέλεια τετάρτη δύναμη) και $2|\alpha + 1$ (λόγω του ότι ο 6ν είναι τέλεια έκτη δύναμη) και άρα $2|1$, δηλ. άτοπο.

2. Η σχέση είναι ισοδύναμη με

$$(\sqrt{x-y}-1)^2 + (\sqrt{y-z}-1)^2 + (\sqrt{z-w}-1)^2 + (\sqrt{x+w}-1)^2 = 0$$

   και άρα $x = 2, y = 1, z = 0, w = -1.$

3. Προφανώς ΑΒ||ΓΔ και ΒΓ||ΔΕ και άρα ΑΓ = ΒΔ = ΕΓ. Επίσης έχουμε ΒΓ = ΑΔ, ΔΓ = ΒΕ και <ΑΒΕ = <ΑΔΕ = 90^0. Άρα

$$ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = ΑΕ^2 = ΑΔ^2 + ΔΕ^2 = ΒΓ^2 + ΔΕ^2.$$

4. 1) Αν f(a) = -1, τότε 2 = 0. 2) Αν f(β) = 0, τότε f(β + 1) = -1. Άτοπο λόγω 1).

   3) Έχουμε f(x + 1) = (f(x) – 1)/(f(x) + 1), f(x + 2) = -1/f(x) και επομένως

$$f(x + 4) = -1/f(x + 2) = f(x).$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισχύει $f(f(1)) = 1$ και επομένως $f(1) = f(f(f(1))) =(f(1))^3 - 2(f(1))^2 + 3f(1) - 1$. Λύνοντας ως προς $f(1)$ έχουμε $f(1) = 1$. Επίσης, $g(0) = g(1) = 3$.

2. Έχουμε

$$\sqrt{5} - \alpha / \beta = (\beta\sqrt{5} - a)/\beta = (5\beta^2 - a^2)/\beta(\beta\sqrt{5} + a) \geq 1/\beta(\beta\sqrt{5} + a) > 1/4\alpha\beta$$

αν $3\alpha > \beta\sqrt{5}$. Αν $3\alpha < \beta\sqrt{5}$, τότε

$$\sqrt{5} - \alpha/\beta > \sqrt{5} - \sqrt{5}/3 = 2\sqrt{5}/3 > 1 > 1/4\alpha\beta.$$

3. Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους K_1 και K_2 στα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ με διαφορετικά σημεία τομής Ο και Ρ λογω του ότι η πλευρά ΑΔ δεν είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Λόγω του ότι οι γωνίες ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσες ως κατά κορυφήν καθώς και οι πλευρές ΑΔ , ΒΓ από την υπόθεση, οι κύκλοι K_1 και K_2 είναι ίσοι και τα τρίγωνα ΡΒΔ, ΡΑΓ όμοια.

4. Οι αριθμοί $\lambda - \alpha_1$, $\lambda - \alpha_2$, …, $\lambda - \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ. Ο μέγιστος αριθμός αυτών των υπολοίπων είναι κ. Επειδή $2\nu > \kappa$, δύο από τους 2ν αριθμούς α_1, α_2, …, α_ν, $\lambda - \alpha_1$, $\lambda - \alpha_2$, …, $\lambda - \alpha_\nu$ θα αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν δια του κ και δεν μπορούν να ανήκουν στο ίδιο σύνολο $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \ldots, \lambda - \alpha_\nu\}$ ή $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$, δηλ. ο ένας θα είναι κάποιος α_i και ο άλλος κάποιος $\lambda - \alpha_j$. Η διαφορά τους διαιρείται με τον κ.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
67ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 20 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2007

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις είναι **ενδεικτικές** και όχι μοναδικές. Οποιαδήποτε μαθηματικώς σωστή λύση είναι αποδεκτή ανεξάρτητα από τα χρησιμοποιούμενα εργαλεία, π.χ. η Αναλυτική Γεωμετρία και ο Απειροστικός Λογισμός μπορούν να χρησιμοποιηθούν από μαθητές οποιασδήποτε τάξης.

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

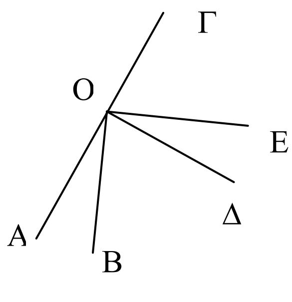
1. $\dfrac{42}{2\nu+1} \in \mathbb{Z}$ με $\nu \in \mathbb{N} \Rightarrow 2\nu+1 \in \Delta_{42} = \{1,2,3,6,7,14,21,42\}$.

Επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός έπεται ότι:

$$2\nu+1=1 \text{ ή } 2\nu+1=3 \text{ ή } 2\nu+1=7 \text{ ή } 2\nu+1=21$$
$$\Leftrightarrow \nu=0 \text{ ή } \nu=1 \text{ ή } \nu=3 \text{ ή } \nu=10.$$

2. Αν θέσουμε $\widehat{\mathrm{AOB}}=\omega$, τότε από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε:

$$4\omega+90^\circ+\omega=180^\circ \Leftrightarrow 5\omega=90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \omega=18^\circ$$



3. Από τις υποθέσεις έχουμε

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta} \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma-\delta}-\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$$
$$\Rightarrow \frac{2\beta}{\gamma+\delta}=\frac{2\beta}{\gamma-\delta} \Rightarrow 2\beta\left(\gamma-\delta-\gamma-\delta\right)=0$$
$$\Rightarrow -2\beta\delta=0 \Rightarrow \beta\delta=0 \Rightarrow \beta=0 \text{ ή } \delta=0.$$

4. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathrm{N} = \overline{xyzxyz} &= 100000x + 10000y + 1000z + 100x + 10y + z \\
&= 100100x + 10010y + 1001z \\
&= 1001 \cdot \left(100x + 10y + z\right) \\
&= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{xyz}.
\end{aligned}
$$

Άρα οι αριθμοί 7,11 και 13 διαιρούν τον αριθμό Ν.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Έχουμε

$$\mathrm{A} = \left(2 \cdot 5\right)^{90} \cdot 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = 10^{90} \cdot 4 \cdot 81 \cdot 49 = 15876 \cdot 10^{90}.$$

Άρα ο Α λήγει σε 90 μηδενικά και το τελευταίο μη μηδενικό ψηφίο του είναι το 6.

2. Έχουμε

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{z} \Leftrightarrow 4x = 3y \text{ και } xz = 18 \Leftrightarrow y = \frac{4x}{3} \text{ και } xz = 18.$$

Επειδή οι αριθμοί x, z είναι φυσικοί έχουμε

$$xz = 18 \Leftrightarrow \left(x, z\right) = \left(1,18\right) \text{ ή } \left(2,9\right) \text{ ή } \left(3,6\right) \text{ ή } \left(6,3\right) \text{ ή } \left(9,2\right) \text{ ή } \left(18,1\right),$$

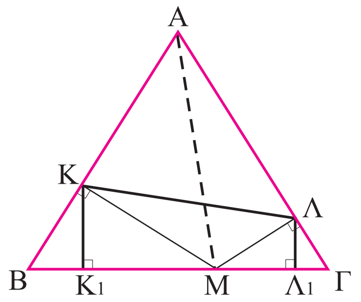
οπότε, από την ισότητα $y = \frac{4x}{3}$ προκύπτει ότι :

$$\left(x, y, z\right) = \left(3,4,6\right) \text{ ή } \left(6,8,3\right) \text{ ή } \left(9,12,2\right) \text{ ή } \left(18,24,1\right).$$

3. Έχουμε

$$\left(\mathrm{AB\Gamma}\right) = \left(\mathrm{ABM}\right) + \left(\mathrm{A\Gamma M}\right) \Leftrightarrow \frac{36\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \mathrm{MK} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda} = 3\sqrt{3} \quad (1)$$



Από τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{KK_1M}$ και $\mathrm{\Lambda\Lambda_1M}$ γεωμετρικά ή τριγωνομετρικά έχουμε

$$\mathrm{KK_1} = \frac{1}{2}\mathrm{MK}, \ \ \mathrm{\Lambda\Lambda_1} = \frac{1}{2}\mathrm{M\Lambda} \text{ και}$$

$$\mathrm{MK_1} = \mathrm{MK}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{M\Lambda_1} = \mathrm{M\Lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Οπότε } \mathrm{K_1\Lambda_1} = \mathrm{MK_1} + \mathrm{M\Lambda_1} = (\mathrm{MK} + \mathrm{M\Lambda})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}.$$

και $\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left(MK + M\Lambda\right) = \frac{1}{2}3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Άρα είναι $\left(\mathrm{KK}_1\Lambda\Lambda_1\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{KK}_1 + \Lambda\Lambda_1\right)\mathrm{K}_1\Lambda_1 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$.

4. Αν υποθέσουμε ότι όλοι οι μαθητές έχουν διαφορετικό αριθμό τετραδίων, τότε ο ελάχιστος αριθμός τετραδίων που μπορούν να έχουν όλοι μαζί είναι

$$1 + 2 + \cdots + 15 = 120 > 115.$$

Άρα δεν είναι δυνατόν να έχουν όλοι οι μαθητές διαφορετικό αριθμό τετραδίων, οπότε δύο τουλάχιστον θα έχουν τον ίδιο αριθμό τετραδίων.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. (i) Λαμβάνοντας υπόψη τις ανισότητες $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\mathrm{K} = \gamma$, οπότε $\beta < \mathrm{K} < \delta$.

(ii) Έχουμε

$$x - y = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) - (\alpha+\gamma)(\beta+\delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\beta - \gamma\delta$$
$$= \alpha(\gamma-\beta) + \delta(\beta-\gamma) = (\gamma-\beta)(\alpha-\delta) < 0.$$

Άρα είναι $x - y < 0$ δηλαδή $x < y$.

Ομοίως λαμβάνουμε $y - z = (\delta-\gamma)(\alpha-\beta) < 0$.

2. Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{MB\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma B}}$, το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΑΕ είναι ίσα γιατί έχουν:

ΑΜ κοινή πλευρά, ΑΔ = ΑΕ, $\widehat{\mathrm{MA\Delta}} = \widehat{\mathrm{MAE}}$.

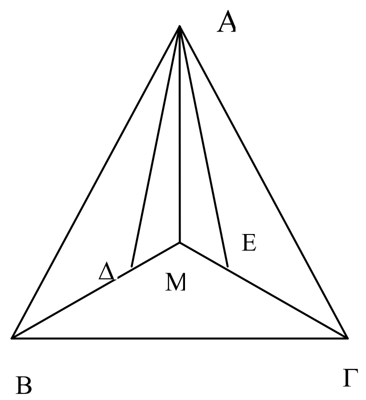
Άρα θα έχουν και

$$\widehat{\mathrm{AM\Delta}} = \widehat{\mathrm{AME}}. \qquad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΑΓ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma},$$

δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



3. Επειδή είναι $x, y > 0$ έχουμε

$$x^3 + y^2 \le 64 \Rightarrow x^3 < 64 \text{ και } y^2 < 64 \Rightarrow x < 4 \text{ και } y < 8 \Rightarrow x^4 < 4x^3 \text{ και } y^3 < 8y^2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^4 + y^3 < 4x^3 + 8y^2 < 8\left(x^3 + y^2\right) \le 8 \cdot 64 = 512.$$

4. Αν υποθέσουμε ότι παίρνουμε x κέρματα του ενός ευρώ, y χαρτονομίσματα των 10 ευρώ και z χαρτονομίσματα των 100 ευρώ, τότε θα έχουμε τις ισότητες

$$x + 10y + 100z = 50000 \quad \text{και} \quad x + y + z = 1000, \qquad (1)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$9y+99z=49000 \Rightarrow 9\cdot\left(y+11z\right)=49000 \Rightarrow 9\left|49000\right.,$$

που είναι άτοπο, γιατί το άθροισμα των ψηφίων του 49000 είναι ο αριθμός 13 που δεν διαιρείται με το 9.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

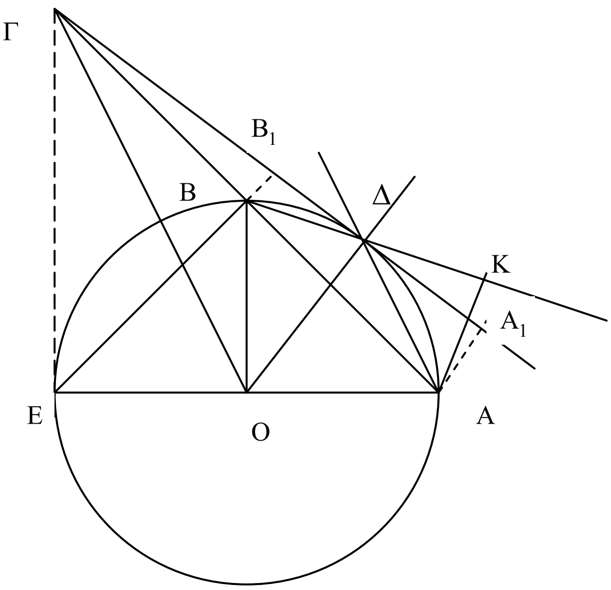
1. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right). \qquad (1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\left(x_1,x_2,x_3\right)&=\left(1-x_1\right)\left(1+x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1+x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_3\right)\\&=\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right)\left(1-x_3\right)\left(1+x_1\right)\left(1+x_2\right)\left(1+x_3\right)\\&=\mathrm{P}\left(1\right)\left[-\left(-1-x_1\right)\left(-1-x_2\right)\left(-1-x_3\right)\right]\\&=-\mathrm{P}\left(1\right)\mathrm{P}\left(-1\right)=-\left(1+\kappa+\lambda\right)\left(-1-\kappa+\lambda\right)=\left(1+\kappa\right)^2-\lambda^2.\end{aligned}$$

2.



1ος Τρόπος

Έχουμε: $\Gamma\Delta^2=\Gamma\mathrm{A}\cdot\Gamma\mathrm{B}=2\mathrm{R}\sqrt{2}\cdot\mathrm{R}\sqrt{2}=4\mathrm{R}^2 \Rightarrow \Gamma\Delta=2\mathrm{R}=2\cdot\mathrm{O}\Delta.$

Επειδή επιπλέον $\mathrm{O}\hat{\Delta}\Gamma=90^{\mathrm{o}}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{O}\Gamma\Delta}\approx\overset{\Delta}{\mathrm{AKB}}$ ή ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$.

Πράγματι αν Ε είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο Ο, τότε:

$$\begin{aligned}\mathrm{OB}\parallel\mathrm{E}\Gamma &\Rightarrow \mathrm{E}\Gamma\perp\mathrm{OE}\Rightarrow \mathrm{O}\Delta\Gamma\mathrm{E} \text{ εγγεγραμμένο τετράπλευρο}\\&\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\Delta\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A}\Rightarrow 2\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=2\cdot\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}\\&\Rightarrow \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{O}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}\end{aligned}$$

2ος Τρόπος

Έστω Ε το αντιδιαμετρικό σημείο του Α ως προς τον κύκλο κέντρου Ο

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΕ έπεται ότι $\widehat{\text{KΔA}} = \widehat{\text{AEB}} = 45^\circ$, οπότε και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Άρα είναι

$$\text{KA} = \text{KΔ} = \frac{\text{AΔ}\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$

Επιπλέον, αν είναι $\text{AA}_1 \perp \text{ΓΔ}$, $\text{BB}_1 \perp \text{ΓΔ}$ και $\text{OA} = R$, τότε με χρήση του τύπου της απόστασης σημείου κύκλου από εφαπτομένη του, λαμβάνουμε

$$\left(\frac{\text{ΔA}}{\text{ΔB}}\right)^2 = \frac{\text{ΔA}^2/2R}{\text{ΔB}^2/2R} = \frac{\text{AA}_1}{\text{BB}_1} = \frac{\text{ΓA}}{\text{ΓB}} = 2. \qquad (2)$$

Από τη (2) έπεται ότι $\text{ΔB} = \dfrac{\text{AΔ}\sqrt{2}}{2}$, οπότε από την (1) έπεται ότι ΔΒ = ΚΔ = ΚΑ και

$$\text{KB} = \text{KΔ} + \text{ΔB} = 2 \cdot \text{KA}.$$

3. Από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

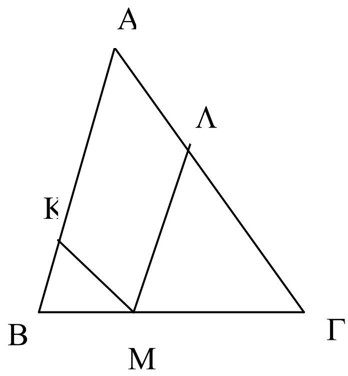
$$\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha+\beta} = \frac{\overbrace{\alpha^3+\alpha^3+\cdots+\alpha^3}^{\alpha-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} + \overbrace{\beta^3+\beta^3+\cdots\beta^3}^{\beta-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}}{\alpha+\beta} \geq \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^3\right)^{\alpha}\left(\beta^3\right)^{\beta}} = \sqrt[\alpha+\beta]{\left(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\right)^3},$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο.

4. Έστω ότι είναι $\text{MB} = \kappa$ και $\text{MΓ} = \lambda$, οπότε θα είναι $\kappa + \lambda = \alpha$.

Τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{\kappa} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ και } \frac{y}{\lambda} = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{\beta\kappa}{\alpha} \text{ και } y = \frac{\gamma\lambda}{\alpha}.$$



Άρα η παράσταση S γίνεται

$$S = x^2 + y^2 = \frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\beta^2\kappa^2 + \gamma^2(\alpha-\kappa)^2}{\alpha^2}$$

$$= \left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\kappa^2 - \frac{2\gamma^2}{\alpha}\kappa + \gamma^2 = f(\kappa).$$

Άρα η παράσταση S είναι τριώνυμο ως προς κ με συντελεστή του κ^2 τον

$\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} > 0$, οπότε η παράσταση έχει ελάχιστο για $\kappa = -\dfrac{-2\gamma^2/\alpha}{2\left(\beta^2+\gamma^2\right)/\alpha^2} = \dfrac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Τότε είναι $\lambda = \alpha - \kappa = \dfrac{\alpha\beta^2}{\beta^2+\gamma^2}$, οπότε το σημείο Μ στο οπο0ίο λαμβάνεται το ελάχιστο της παράστασης S χωρίζει την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\dfrac{\text{MB}}{\text{MΓ}} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Η τιμή του ελάχιστου είναι

$$f\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)^2-\frac{2\gamma^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}\right)+\gamma^2=\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}.$$

2ος τρόπος

Μέσω της σχέσης (1) θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε ως εξής:

$$S\cdot\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\right)=\left(\frac{\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}+\frac{\gamma^2\lambda^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\geq(\kappa+\lambda)^2=\alpha^2\Rightarrow S\geq\frac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$$

οπότε έχουμε: $\mathrm{S}\min=\dfrac{\beta^2\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2}$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\dfrac{\frac{\beta\kappa}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\frac{\gamma\lambda}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ή $\dfrac{\kappa}{\lambda}=\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$, δηλαδή όταν το σημείο Μ χωρίζει τη ΒΓ σε λόγο $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. $150^x=2,\ 150^y=3$

$$\mathrm{A}=\left(\frac{150}{3}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(\frac{150}{150^y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}$$

$$=\left(150^{1-y}\right)^{\frac{1-x-y}{2(1-y)}}=150^{\frac{1-x-y}{2}}=\sqrt{150^{1-x-y}}=\sqrt{\frac{150}{150^{x+y}}}=\sqrt{\frac{150}{150^x\cdot150^y}}=$$

$$=\sqrt{\frac{150}{2\cdot3}}=\sqrt{25}=5.$$

2ος τρόπος

$$\log_{150}\mathrm{A}=\frac{1-x-y}{2(1-y)}=\log_{150}50=\frac{\log_{150}\left(\frac{150}{6}\right)}{2\log_{150}\left(\frac{150}{3}\right)}\log_{150}50=\frac{1}{2}\log_{150}25=\log_{150}5.$$

Άρα Α=5.

2. Από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).\qquad(1)$$

Η παράσταση Κ γράφεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x_1,x_2,x_3)&=(i-x_1)(-i-x_1)(i-x_2)(-i-x_2)(i-x_3)(-i-x_3)\\&=(i-x_1)(i-x_2)(i-x_3)(-i-x_1)(-i-x_2)(-i-x_3)\\&=\mathrm{P}(1)\mathrm{P}(-1)=(-i+\kappa i+\lambda)(i-\kappa i+\lambda)=\lambda^2+(\kappa-1)^2.\end{aligned}$$

3. Η συνάρτηση $h(x)=\frac{2x^2+1}{3}$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα αντιστρέφεται και

$$h^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{\frac{3x-1}{2}}, & x\geq\frac{1}{3}\\ -\sqrt[3]{\frac{1-3x}{2}}, & x<\frac{1}{3}\end{cases}$$

Άρα $(1)\Leftrightarrow h^{-1}(x)=h(x)$ με $x\geq\frac{1}{3}$.

Αφού f γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των $G_{h^{-1}}, G_h$ θα βρίσκονται στη πρώτη διχοτόμο y=x.

Έχουμε: $\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x=\frac{2x^3+1}{3}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}2x^3-3x+1=0\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}\\ y=x\end{matrix}\right\}$ αφού $x\geq\frac{1}{3}$.

Άρα $(1)\Leftrightarrow x\in\left\{1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$.

2^{ος} τρόπος

$$\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ y=h^{-1}(x)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=h(x)\\ x=h(y)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3}\\ x=\frac{2y^3+1}{3}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=\frac{2x^3+1}{3} & (2)\\ x-y=\frac{2}{3}\left(y^3-x^3\right) & (3)\end{matrix}\right\}$$

$(3)\Leftrightarrow x=y$ ή $2x^2+2yx+2y^2+3=0$ $\qquad(4)\Leftrightarrow x=y$ αφού η (4) έχει $\Delta=-\left(12y^2+24\right)<0,\ \forall y\in\mathbb{R}$ κ.λπ.

4. Θεωρούμε τον περιγεγραμένο κύκλο $C_1(K,R)$ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ και τον συμμετρικό του $C_2(\Lambda,R)$ ως προς τη ΒΓ. Τότε το Λ θα είναι μέσο του μικρού τόξου ΒΓ.

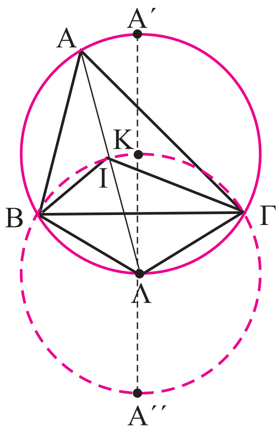
Έστω A' το αντιδιαμετρικό του Α στον C_1 και A'' το αντιδιαμετρικό του Κ στον C_2.

Το τρίγωνο $BA''\Gamma$ είναι ισόπλευρο οπότε $IA''=IB+I\Gamma$. Επίσης $B\hat{I}\Gamma=B\hat{K}\Gamma=120^\circ$.

Επομένως $IA+IB+I\Gamma=IA+IA''$.

Αλλά $IA''\leq KA''=2R$ (R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου) και $IA=A\Lambda-R<A'\Lambda-R=KA'=R$.

Άρα $IA+IB+I\Gamma\leq 3R=3\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$, αφού ΒΓ=2 $\Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



2^{ος} τρόπος
Έστω ΙΑ=x, ΙΒ=y, ΙΓ=ω

Τότε $\frac{\hat{A}}{2}=30^o \Rightarrow x=2\rho$

$B\hat{I}\Gamma=120^o \Rightarrow y^2+\omega^2+y\omega=4 \Rightarrow (y+\omega)^2-y\omega=4 \Rightarrow (y+\omega)^2=4+y\omega \Rightarrow$

$y+\omega=\sqrt{4+y\omega}=\sqrt{4+\lambda}$ με λ=yω.

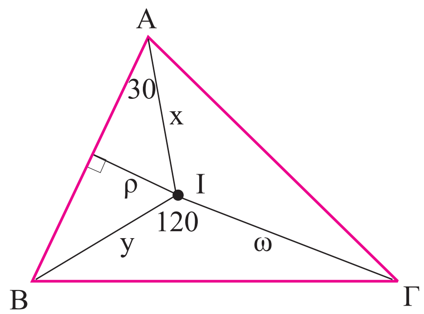
Εξάλλου $(\mathrm{I}\mathrm{B}\Gamma)=\frac{1}{2}\cdot\rho\cdot 2=\rho$

$(\mathrm{I}\mathrm{B}\Gamma)=\frac{1}{2}y\omega\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\lambda\sqrt{3}}{4}$, οπότε $\rho=\frac{\lambda\sqrt{3}}{4}$.

Αρκεί λοιπόν $\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4+\lambda}\le 2\sqrt{3}$, ή $\lambda\sqrt{3}+2\sqrt{4+\lambda}\le 4\sqrt{3}$.

Όμως $R\sqrt{3}=2 \Rightarrow R=\frac{2}{\sqrt{3}}$ και $R>\rho \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}>\frac{2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 8>3\lambda \Rightarrow \frac{8}{3}>\lambda \Rightarrow 4>\frac{8}{3}>\lambda$.

Οπότε αρκεί $2\sqrt{4+\lambda}\le\sqrt{3}(4-\lambda)$, ή $4(4+\lambda)\le 2(4-\lambda)^2$, ή $3\lambda^2-28\lambda+32\ge 0$
που ισχύει αφού Δ=–188.



ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2008
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=2008-4(4x+5y)-48x-60y.$$

Λύση (1ος τρόπος)

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4(4x+5y)-48x-60y\\&=2008-2\cdot 2\cdot(4x+5y)-6\cdot(8x+10y)\\&=2008-2\cdot(8x+10y)-6\cdot(8x+10y)=2008-2\cdot 1-6\cdot 1=2000.\end{aligned}$$

(2ος τρόπος)

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4(4x+5y)-48x-60y\\&=2008-16x-20y-48x-60y\\&=2008-64x-80y=2008-8(8x+10y)=2008-8\cdot 1=2000.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του αριθμού a;

Λύση
Αν π είναι το πηλίκο και υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, τότε σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος έχουμε $\pi=6\upsilon+5$ και

$$a=5(6\upsilon+5)+\upsilon,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}\Leftrightarrow a=31\upsilon+25,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}.$$

Η τιμή $\upsilon=0$ αποκλείεται γιατί η διαίρεση είναι ατελής.

- Για $\upsilon=1$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 1+25=56$.
- Για $\upsilon=2$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 2+25=87$.
- Για $\upsilon=3$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 3+25=118$
- Για $\upsilon=4$, λαμβάνουμε $a=31\cdot 4+25=149$.

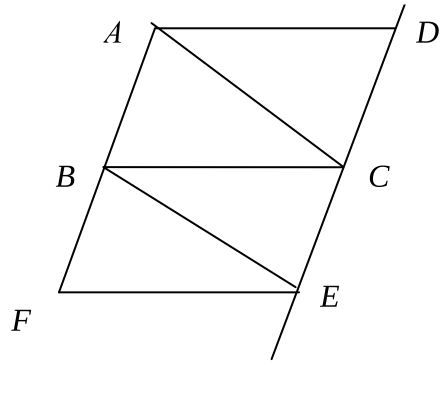
Άρα οι δυνατές τιμές του τριψήφιου αριθμού a είναι : $a=118$ ή $a=149$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται το τρίγωνο ABC και η ευθεία ε που περνάει από το C και είναι παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον δίνεται ότι

$$CD=CE=AB.$$

Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF=AB$.

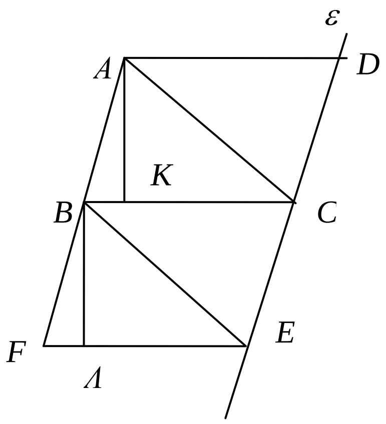
α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.



β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC;

Λύση

α) Τα τετράπλευρα $ABCD$ και $BFEC$ έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα. Άρα θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή είναι $AD = BC = FE$. Έτσι τα τρίγωνα $ABC, BFE,\ BEC$ και ACD έχουν ίσες βάσεις.



Τα τρίγωνα ABC και ACD έχουν προς τις ίσες βάσεις τους ύψη ίσα προς το ύψος του παραλληλογράμμου $ABCD$ ως προς τη βάση BC. Ομοίως τα ύψη των τριγώνων $BFE,\ BEC$ προς τις ίσες βάσεις τους είναι ίσα. Επιπλέον, αν $AK \perp BC$ και $B\Lambda \perp FE$, τότε τα τρίγωνα ABK και $BF\Lambda$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν ίσες υποτείνουσες και $A\hat{B}K = B\hat{F}\Lambda$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες BC, EF με τέμνουσα τη BF). Άρα θα έχουν και $AK = B\Lambda$ Επομένως τα τρίγωνα $ABC, BFE,\ BEC$ και ACD έχουν ίσα ύψη προς τις ίσες βάσεις τους, οπότε θα έχουν και ίσα εμβαδά.

(β) Επειδή $\mathrm{E}_{AFED} = \mathrm{E}_{ABC} + \mathrm{E}_{ACD} + \mathrm{E}_{BFE} + \mathrm{E}_{BEC} = 4\mathrm{E}_{ABC}$ έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{E}_{ABC}}{\mathrm{E}_{AFED}} = \frac{\mathrm{E}_{ABC}}{4\mathrm{E}_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a, b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $\mathrm{A} = ababab$, όπου a, b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

Λύση

(α) Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού Α είναι ο αριθμός

$$\Sigma(\mathrm{A}) = a + b + a + b + a + b = 3\cdot a + 3\cdot b = 3\cdot(a+b),$$

που είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

(β) Για να διαιρείται ο αριθμός Α με το 5, πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο του b να είναι 0 ή 5. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b=0$, τότε $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+0)=3\cdot a$. Επομένως ο αριθμός Α διαιρείται με το 9, όταν ο $3\cdot a$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Επειδή ο a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του 0, αυτό συμβαίνει όταν $a\in\{3,6,9\}$, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί $\mathrm{A}=303030$ ή Α=606060 ή 909090.
- Αν $b=5$, τότε το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+5)$ και είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν $a+5\in\{3,6,9,12\}$, οπότε αφού $1\le a\le 9$ έπεται ότι $a\in\{1,4,7\}$. Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί Α=151515 ή Α=454545 ή Α=757575.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}\\&=\frac{5}{12}-\left[2\cdot(12b+26a)\right]^{-2}-\left[6(12b+26a)\right]^{-1}\\&=\frac{5}{12}-(2\cdot 1)^{-2}-(6\cdot 1)^{-1}=\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.
Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα. Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Λύση

Το τρίτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο για $\frac{1}{2}\cdot 12+2=8$ ημέρες.

Αν x,y και z είναι το μηνιαίο κόστος για το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σχολείο, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{10}=\frac{z}{8}=\lambda,$$

οπότε λαμβάνουμε $x=12\lambda,\ y=10\lambda,\ z=8\lambda$ και έχουμε

$$x+y+z=3000\Leftrightarrow 12\lambda+10\lambda+8\lambda=3000\Rightarrow \lambda=100.$$

Άρα έχουμε:

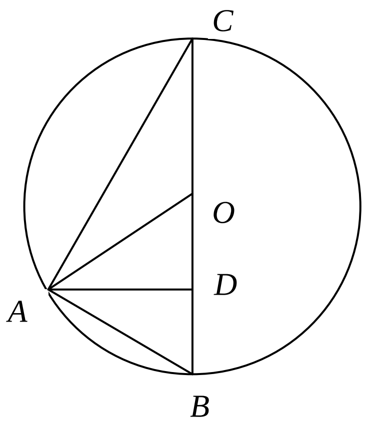
$\frac{x}{12} = 100 \Rightarrow x = 12 \cdot 100 = 1200$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το πρώτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3600 ευρώ.

$\frac{y}{10} = 100 \Rightarrow y = 12 \cdot 100 = 1000$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το δεύτερο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3000 ευρώ.

$\frac{z}{8} = 100 \Rightarrow z = 8 \cdot 100 = 800$ ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το τρίτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 2400 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και είναι ακόμα $AB = 2\sqrt{7}$ και $AC = 6$.



α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$

Λύση

α) Επειδή είναι $\hat{A} = 90^\circ$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 36 + 4 \cdot 7 = 64.$$

Άρα είναι $BC = 8$.

β) Η διάμεσος AO ισούται με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι $AO = \frac{8}{2} = 4$.

Για την εύρεση του ύψους AD χρησιμοποιούμε τους τύπους για το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ABC και έχουμε:

$$(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow 8 \cdot AD = 6 \cdot 2\sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

γ) Έχουμε $E = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi.$

Η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC έχει εμβαδόν $E_x = E - (ABC) = 16\pi - \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 16\pi - 6\sqrt{7}$, οπότε

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{16\pi - 6\sqrt{7}}{16\pi} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 48\pi - 18\sqrt{7} > 32\pi \Leftrightarrow 16\pi > 18\sqrt{7}.$$

$$\Leftrightarrow 8\pi > 9\sqrt{7} \Leftrightarrow 64\pi^2 > 81 \cdot 7 \Leftrightarrow \pi^2 > \frac{567}{64},$$

που ισχύει, γιατί είναι $\pi^2 = 3{,}14^2 > 3^2 = 9$, ενώ $\frac{567}{64} < 9.$

Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A} = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a \neq 0.$ Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρείτε τον αριθμό Α.

Λύση

Είναι $\mathrm{A} = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, οπότε μετά την εναλλαγή πρώτου και τρίτου ψηφίου προκύπτει ο αριθμός $\mathrm{B} = \overline{cba} = 100c + 10b + a$, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = 396 \Leftrightarrow 99(a - c) = 396 \Leftrightarrow a - c = 4$$
$$\Leftrightarrow c = a - 4. \qquad (1)$$

Επιπλέον δίνεται ότι

$$\mathrm{A} - 41 = 50(a + b + c) \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c$$
$$\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41,$$

οπότε, λόγω της (1), λαμβάνουμε

$$50a - 40b - 49(a - 4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \qquad (2)$$

Επειδή ο ακέραιος a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του μηδενός, έπεται ότι

$$1 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 40b - 155 \leq 9 \Leftrightarrow 156 \leq 40b \leq 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40},$$

οπότε λαμβάνουμε $b = 4$. Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει $a = 5$ και $c = 1$.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο Α=541.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{K} &= (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - \left(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3\right) - 6x^2y - y^3\\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2y - y^3\\ &= y^3.\end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= 200004^3 - 199996^3 - 24\cdot 200000^2 - 64\\ &= (200000+4)^3 - (200000-4)^3 - 6\cdot 200000^2\cdot 4 - 4^3,\end{aligned}$$

οπότε, αν θέσουμε $x = 200000$ και $y = 4$ στην προηγούμενη παράσταση, αυτή γίνεται $\mathrm{A} = y^3 = 4^3$.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, b ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3 - (x-b)^3 - x^3 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}a^2+b^2-2a = 2b+ab-4 &\Leftrightarrow a^2+b^2+2^2-ab-2a-2b=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-2)^2+(2-a)^2\right]=0\\ &\Leftrightarrow a-b=b-2=2-a=0 \Leftrightarrow a=b=2.\end{aligned}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned}(2x-a)^3-(x-b)^3-x^3=0 &\Leftrightarrow (2x-2)^3-(x-2)^3-x^3=0\\ &\Leftrightarrow (2x-2)^3+(2-x)^3+(-x)^3=0\\ &\Leftrightarrow 3(2x-2)(2-x)(-x)=0,\end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι $(2x-2)+(2-x)+(-x)=0,$ όπως προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα των κύβων. Η τελευταία παραγοντοποίηση μπορεί επίσης να προκύψει εύκολα , μετά από πράξεις.

Άρα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

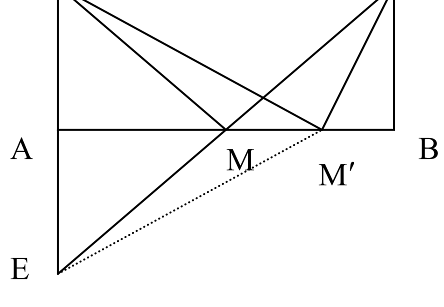
$$(2x-2)(2-x)(-x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \text{ ή } 2-x=0 \text{ ή } -x=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB} = 2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta} = \alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα :

το άθροισμα $\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Λύση



Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές (ΜΒ = ΒΓ = α), οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 45^\circ$.
Επειδή είναι

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 90^\circ + 180^\circ - \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 225^\circ > 180^\circ,$$

η προέκταση της ΓΜ τέμνει την προέκταση της ΔΑ προς το Α, έστω στο σημείο Ε.
Τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΜΑΕ είναι ίσα , γιατί είναι ορθογώνια και έχουν $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ (ως κατά κορυφή). Άρα θα έχουν και

$$\mathrm{AE} = \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{A}\Delta = \alpha.$$

Τότε όμως και τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια στο Α και έχουν την πλευρά ΑΜ κοινή και ΑΕ = ΑΔ. Άρα θα έχουν και ΔΜ = ΕΜ, οπότε

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{EM} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma. \qquad (1)$$

Έστω τώρα τυχόν σημείο M' της ευθείας ΑΒ διαφορετικό από το σημείο Μ. Τότε προφανώς τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AM}'\Delta$ και $\mathrm{AM}'\mathrm{E}$ είναι ίσα , οπότε θα έχουν $\mathrm{AM}' = \mathrm{EM}'$ και

$$\Delta\mathrm{M}' + \mathrm{M}'\Gamma = \mathrm{EM}' + \mathrm{M}'\Gamma. \qquad (2)$$

Επειδή η γραμμή $\mathrm{EM}'\Gamma$ είναι τεθλασμένη, ενώ η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία που έχει τα ίδια άκρα με την τεθλασμένη $\mathrm{EM}'\Gamma$, από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma < \mathrm{EM}' + \mathrm{M}'\Gamma = \Gamma\mathrm{M}' + \mathrm{M}'\Delta.$$

Πρόβλημα 4
Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

Λύση
Επειδή τα κλάσματα του πρώτου μέλους της ζητούμενης ανισότητας παρουσιάζουν στον αριθμητή το άθροισμα δύο θετικών αριθμών και στον παρανομαστή το γινόμενό τους, θεωρούμε τη γνωστή ανισότητα

$$(a+b)^2 \geq 4ab, \text{, για κάθε } a,b \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία αληθεύει, αφού είναι ισοδύναμη με την προφανή ανισότητα $(a-b)^2 \geq 0$. Η ισότητα αληθεύει όταν $a=b.$ Για a,b θετικούς, από την (1) λαμβάνουμε

$$\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}, \qquad (2)$$

ενώ η ισότητα αληθεύει όταν $a=b.$
Από την (2) για $a=x, b=y+1$ λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} \leq \frac{x+y+1}{4} \qquad (3)$$

και ομοίως προκύπτουν οι ανισότητες

$$\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} \leq \frac{y+z+3}{4}, \qquad (4)$$

$$\frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq \frac{x+z+2}{4}. \qquad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2(x+y+z)+6}{4}$$

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2\cdot 3+6}{4}=3.$$

Η ισότητα αληθεύει όταν $x=y+1=z+2$, οπότε από την σχέση $x+y+z=3$ προκύπτει ότι $x+x-1+x-2=3\Leftrightarrow 3x=6\Leftrightarrow x=2$ και $y=1, z=0.$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}.$$

Λύση (1^ος^ τρόπος)
Θα αναζητήσουμε λύσεις που ικανοποιούν την ανίσωση

$$3x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}.$$

Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\left(x^2+2\right)^2=9(3x-2)\Leftrightarrow x^4+4x^2-27x+22=0. \qquad (1)$$

Οι πιθανές ακέραιες λύσεις της (1) είναι οι : 1, -1, 2, -2, 11, -11, 22, -22.
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ο ακέραιος 1 είναι ρίζα της εξίσωσης και μέσω του σχήματος Horner καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)\left(x^3+x^2+5x-22\right)=0.$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι το σχήμα Horner για $x=2$, για το πολυώνυμο $x^3+x^2+5x-22$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)(x+2)\left(x^2+3x+11\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2+3x+11=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2,$$

αφού το τριώνυμο $x^2+3x+11=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-35<0$.

2^ος^ τρόπος

Ομοίως πρέπει $x\ge\frac{2}{3}$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$y=\sqrt{3x-2},\ \text{για}\ x\ge\frac{2}{3}.$$

Τότε λαμβάνουμε

$$y\ge 0\ \text{και}\ y^2=3x-2\ ,$$

ενώ η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$x^2+2=3y.$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\left.\begin{cases}x^2=3y-2\\ y^2=3x-2\end{cases}\right\}\ \text{με}\ x\ge\frac{2}{3}\ \text{και}\ y\ge 0.$$

Με αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^2 - y^2 = 3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \text{ ή } x+y+3=0 \Leftrightarrow x=y \text{ ή } x+y=-3.$$

Η εξίσωση $x+y=-3$ είναι αδύνατη λόγω των περιορισμών $x \geq \frac{2}{3}$ και $y \geq 0$.

Για $x=y$ έχουμε την εξίσωση

$$x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα "τουρνουά" ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμός. Αν στο τέλος του "τουρνουά" ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Λύση

Έστω ότι συμμετέχουν n ομάδες.

Η $1^η$ ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-1 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-1 αγώνες.

Η $2^η$ ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-2 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-2 αγώνες.

Η $3^η$ ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-3 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-3 αγώνες.

....

Η $(n\text{-}1)^η$ ομάδα παίζει με την τελευταία 1 ομάδα , οπότε διεξάγεται 1 αγώνας .

Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\Sigma = 1+2+3+\cdots+(n-1). \qquad (1)$$

Αν γράψουμε τις ισότητες

$$\Sigma = \ 1 \ + \ 2 \ + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$\Sigma = (n-1) + (n-2) + \ldots \ 2 \ + \ 1$$

και τις προσθέσουμε κατά μέλη, τότε λαμβάνουμε

$$2\Sigma = (n-1)\left[(n-1)+1\right] = (n-1)n \Rightarrow \Sigma = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Σε κάθε αγώνα ο συνολικός αριθμός των βαθμών που δίνονται στις δύο ομάδες που συμμετέχουν (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα) είναι 4. Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\frac{364}{4} = 91 \quad . \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{(n\text{-}1)n}{2} = 91 \Leftrightarrow \frac{(n\text{-}1)n}{2} = 7\cdot 13 \Leftrightarrow \frac{(n\text{-}1)n}{2} = \frac{13\cdot 14}{2} \Leftrightarrow n = 14.$$

Άρα συμμετείχαν 14 ομάδες.

Πρόβλημα 3.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0,$$

να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x+y+z+m \leq 0.$$

Λύση
Έχουμε

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2+6z+9=1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=1$$

και θέτοντας $a=x+1$, $\beta=y+2$ και $\gamma=z+3$, έχουμε τελικά

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Ισχύει όμως η ανισότητα

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

που είναι ισοδύναμη με τη γνωστή ανισότητα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.
Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.
Επομένως έχουμε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\leq 3\cdot 1 \Leftrightarrow |\alpha+\beta+\gamma|\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow |x+y+z+6|\leq\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\leq x+y+z+6\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}-\sqrt{3}\leq x+y+z+6-\sqrt{3}\leq 0 .$$

Επειδή η ισότητα ισχύει για $x+1=y+2=z+3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, έπεται ότι ο ζητούμενος μέγιστος θετικός αριθμός είναι ο $m=6-\sqrt{3}$.

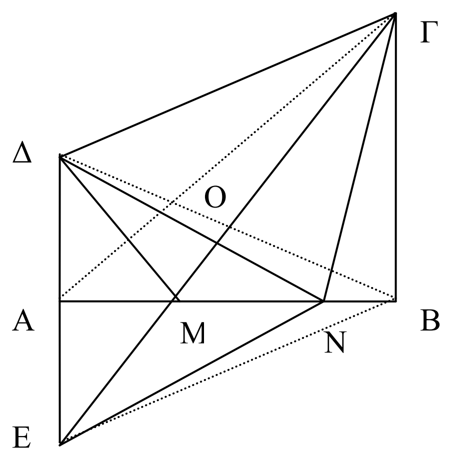
Πρόβλημα 4
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=2\alpha$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta A}+\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{\Delta B}+\mathrm{B\Gamma}$.

(ii) Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\mathrm{\Delta M}+\mathrm{M\Gamma}$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

Λύση



(i) Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε
$\mathrm{\Delta A}+\mathrm{A\Gamma}=\alpha+2\alpha\sqrt{2}=\alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $\mathrm{\Delta B}+\mathrm{B\Gamma}=\alpha\sqrt{5}+2\alpha=\alpha\left(2+\sqrt{5}\right)$, οπότε

$$\mathrm{\Delta A}+\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{\Delta B}+\mathrm{B\Gamma} \Leftrightarrow \alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)<\alpha\left(2+\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<1+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 8<6+2\sqrt{5} \Leftrightarrow 1<\sqrt{5},\ \text{που ισχύει.}$$

(ii) Αν Ε είναι το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΑΒ και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ, τότε $\Delta\mathrm{M} = \mathrm{ME}$ και

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{EM} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχόν σημείο Ν πάνω στην ευθεία ΑΒ, διαφορετικό από το Μ, οπότε θα ισχύει ΔΝ = ΝΕ και

$$\Delta\mathrm{N} + \mathrm{N}\Gamma = \mathrm{EN} + \mathrm{N}\Gamma\ . \qquad (2)$$

Επειδή η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία, ενώ η γραμμή ΕΝΓ έχει τα ίδια άκρα με την ΕΜΓ και είναι τεθλασμένη, έπεται ότι

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma < \mathrm{EN} + \mathrm{N}\Gamma = \Delta\mathrm{N} + \mathrm{N}\Gamma\,.$$

Άρα το σημείο Μ είναι τέτοιο ώστε το άθροισμα ΔΜ + ΜΓ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E} = 2\alpha = \mathrm{B}\Gamma$ και $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{AB},\ \mathrm{B}\Gamma \perp \mathrm{AB} \Rightarrow \Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{B}\Gamma$, το τετράπλευρο ΔΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν οι διαγώνιοι του ΔΕΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε το Ο είναι το μέσον της ΔΒ και η ΕΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ. Επίσης η ΑΒ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ, αφού ισχύει ΑΔ =ΑΕ $=\alpha$. Άρα το σημείο τομής Μ των δύο διαμέσων του τριγώνου ΔΕΒ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΕΒ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{AB}}{3} = \frac{2\alpha}{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$(\Delta\mathrm{M}\Gamma) = (\Delta\mathrm{E}\Gamma) - (\Delta\mathrm{EM}) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot 2\alpha - \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}.$$

Διαφορετικά έχουμε

$$\mathrm{MB} = 2\alpha - \frac{2\alpha}{3} = \frac{4\alpha}{3} \text{ και}$$

$$\begin{aligned}(\Delta\mathrm{M}\Gamma) &= (\mathrm{AB}\Gamma\Delta) - (\Delta\mathrm{AM}) - (\mathrm{MB}\Gamma)\\ &= \frac{(\alpha+2\alpha)\cdot 2\alpha}{2} - \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{2\alpha}{3} - \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\frac{4\alpha}{3}\\ &= 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{4\alpha^2}{3} = \frac{4\alpha^2}{3}.\end{aligned}$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 Εάν ο z είναι μιγαδικός με $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \neq 0$ και

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι $|z| = 1$.

Λύση (1ος τρόπος)

Αν θέσουμε

$$w = \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3},$$

τότε έχουμε

$$w = \overline{w} \Leftrightarrow \frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} = \frac{6\overline{z}^4 + 5\overline{z}^2 + 6}{3\overline{z}^4 + \overline{z}^2 + 3},$$

η οποία μετά από τις πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι $z\overline{z}=|z|^2$ καταλήγει στην ισότητα
$$\left(|z|^4-1\right)\left(z^2-\overline{z}^2\right)=0\Rightarrow |z|=1,$$
αφού λόγω της υπόθεσης $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq 0$ έπεται ότι $z^2-\overline{z}^2\neq 0$.

(2^{ος} τρόπος)
Εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε,
$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}=2+\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}$$
δηλαδή ισοδύναμα
$$\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{3z^4+z^2+3}{3z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}.$$
Άρα έχουμε
$$z^2+\frac{1}{z^2}=\overline{z}^2+\frac{1}{\overline{z}^2}\Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2-\left(\frac{1}{\overline{z}^2}-\frac{1}{z^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(z^2-\overline{z}^2\right)\left(1-\frac{1}{|z|^4}\right)=0.$$
Όμως, λόγω της υπόθεσης $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq 0$ έπεται ότι $z^2-\overline{z}^2\neq 0$, οπότε τελικά λαμβάνουμε $|z|^4=1\Rightarrow |z|=1.$

Πρόβλημα 2
Να λύσετε το σύστημα
$$\left\{\begin{array}{c} x^3+3xy+y^3=1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}\qquad(\Sigma)$$

Λύση
Η εξίσωση $x^3+3xy+y^3=1$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$$x^3+y^3+(-1)^3=3xy(-1),$$
η οποία από την ταυτότητα του Euler είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις
$$x+y-1=0 \text{ ή } x=y=-1.$$
Άρα έχουμε
$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}(\Sigma_1)\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x=y=-1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}(\Sigma_2).$$
Το σύστημα (Σ_2) έχει τη λύση $(x,y)=(-1,-1)$, ενώ
$$(\Sigma_1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x^3-y^3-\left(x^2-y^2\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y\right)=0\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x-y=0\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ x^2+xy+y^2-x-y=0\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή}\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ (x+y)^2-xy-(x+y)=0\end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή }\left\{\begin{array}{c} x+y=1\\ xy=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή }(x,y)=(1,0)\text{ ή }(x,y)=(0,1).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Λύση

Εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1$, για $\nu = 1, 2, \ldots, (\nu-1)$ έχουμε:

$$\text{Για } \nu = 1 \text{ έχουμε } \alpha_2 - \alpha_1 = 2\cdot 1 + 1$$
$$\text{Για } \nu = 2 \text{ έχουμε } \alpha_3 - \alpha_2 = 2\cdot 2 + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{Για } \nu - 1 \text{ έχουμε: } \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = 2(\nu-1) + 1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες λαμβάνουμε:

$$\alpha_\nu - \alpha_1 = 2\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (\nu-1)\big) + \nu - 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha_1 = 2\frac{\nu(\nu-1)}{2} + \nu - 1 \Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha_1 = \nu(\nu-1) + \nu - 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu^2 - 1 + \alpha_1. \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu^2 - \ell, \text{ όπου } \ell = 1 - a_1 . \quad (2)$$

Για το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας έχουμε:

$$\alpha_m \cdot \alpha_{m+1} = \left(m^2 - \ell\right)\left((m+1)^2 - \ell\right) = \left(m^2 - \ell\right)\left((m^2 + 2m + 1 - \ell\right) =$$
$$= m^4 + 2m^3 + m^2 - \ell m^2 - \ell m^2 - 2\ell m - \ell + \ell^2 =$$
$$= \underbrace{m^4 + m^2 + \ell^2 + 2m^3 - 2\ell m^2 - 2\ell m} - \ell = \left(m^2 + m - \ell\right)^2 - \ell = \alpha_{m^2+m-\ell} .$$

Πρόβλημα 4

Έστω Σ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Οι ευθείες $A\Sigma$, $B\Sigma$ και $\Gamma\Sigma$ τέμνουν τις πλευρές $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB στα σημεία A', B' και Γ' αντίστοιχα, ώστε $\Sigma A' \le A\Sigma$, $\Sigma B' \le B\Sigma$ και $\Sigma\Gamma' \le \Gamma\Sigma$.

Αν θέσουμε $x = (\Sigma AB)$, $y = (\Sigma B\Gamma)$ και $z = (\Sigma A\Gamma)$,να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^4 + z^4 \le 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 .$$

Λύση

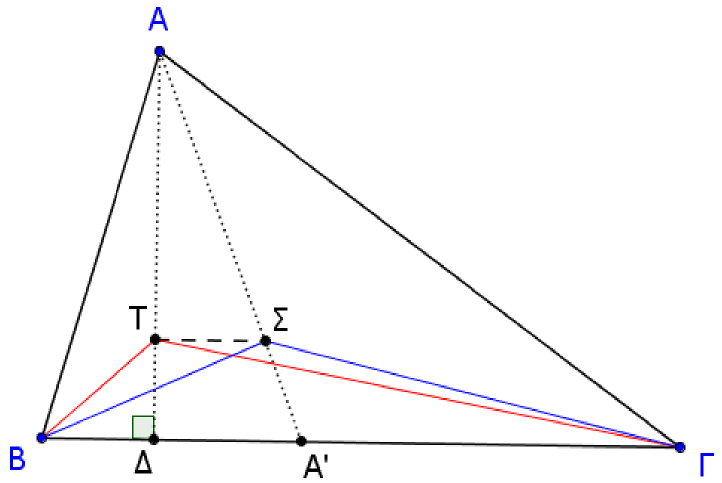
Από το δεδομένο σημείο Σ θεωρούμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει το ύψος $A\Delta$ στο σημείο T. Τότε προφανώς $(\Sigma B\Gamma) = (TB\Gamma)$.

Από τη σχέση $\Sigma A' \le A\Sigma$ προκύπτει προφανώς

$$T\Delta \le TA. \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$T\Delta \cdot \Delta B \le TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow \frac{1}{2} T\Delta \cdot \Delta B \le \frac{1}{2} TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (T\Delta B) \le (TAB). \quad (2)$$



Από τη σχέση (1) έχουμε επίσης:

$$T\Delta\cdot \Delta\Gamma \le TA\cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}T\Delta\cdot \Delta\Gamma \le \frac{1}{2}TA\cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{T\Delta\Gamma}) \le (\mathrm{TA\Gamma}) \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$(T\Delta B)+(T\Delta\Gamma)\le (TAB)+(TA\Gamma)\Leftrightarrow (TB\Gamma)\le (TAB)+(TA\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow (TB\Gamma)\le (AB\Gamma)-(TB\Gamma)$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση $(\Sigma B\Gamma)=(TB\Gamma)$, παίρνουμε τελικά :

$$(\Sigma B\Gamma)\le (AB\Gamma)-(\Sigma B\Gamma)\Leftrightarrow (\Sigma B\Gamma)\le (\Sigma AB)+(\Sigma A\Gamma).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι;

$$(\Sigma AB)\le (\Sigma B\Gamma)+(\Sigma A\Gamma) \text{ και } (\Sigma A\Gamma)\le (\Sigma AB)+(\Sigma B\Gamma).$$

Επειδή έχουμε θέσει $x=(\Sigma AB)$, $y=(\Sigma B\Gamma)$ και $z=(\Sigma A\Gamma)$, από τις τρεις τελευταίες ανισώσεις, έχουμε:

$$0<x\le y+z,\ 0<y\le x+z \text{ και } 0<z\le x+y. \qquad (4)$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$x^4+y^4+z^4\le 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2+2x^2z^2-(2xz)^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+z^2-y^2\right)^2-(2xz)^2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+z^2+2xz-y^2\right)\cdot\left(x^2+z^2-2xz-y^2\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+z)^2-y^2\right)\cdot\left((x-z)^2-y^2\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(x-y-z)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(y+z-x)\ge 0,$$

που ισχύει, λόγω των σχέσεων (4).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $4x-5y=10$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2.$$

Λύση
Η παράσταση γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(4x+5y\right)-36x+35y+\left(8:4-2\right)^2\\&=4x+5y-36x+35y+\left(2-2\right)^2\\&=-32x+40y+0^2=-8\left(4x-5y\right)+0=-8\cdot 10=-80.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\mathrm{AB}=3x-2$, $\mathrm{B\Gamma}=x+12$ και $\Gamma\mathrm{A}=2x+8$, $x\geq 2$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Υπάρχει τιμή του x για την οποία το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο;

Λύση
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αν ισχύει:

$$\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}\text{ ή }\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}\text{ ή }\mathrm{A\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}$$
$$\Leftrightarrow 3x-2=x+12\text{ ή }3x-2=2x+8\text{ ή }2x+8=x+12$$
$$\Leftrightarrow 2x=14\text{ ή }x=10\text{ ή }x=4\Leftrightarrow x=7\text{ ή }x=10\text{ ή }x=4.$$

Από τη λύση των παραπάνω εξισώσεων διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει τιμή του x που να επαληθεύει την ισότητα $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$ και $\mathrm{A}\Delta=\mathrm{B\Gamma}$ μήκους α και β, αντίστοιχα. Αν αυξήσουμε το μήκος α κατά 20% και το μήκος β κατά 30%, να βρεθεί πόσο επί τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Λύση
Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}=\alpha\beta$. Μετά την αύξηση του μήκους των πλευρών του τα μήκη των πλευρών του νέου ορθογωνίου είναι:

$$\alpha' = \alpha + \frac{20\alpha}{100} = \alpha + \frac{2\alpha}{10} = \frac{12\alpha}{10} \text{ και } \beta' = \beta + \frac{30\beta}{100} = \beta + \frac{3\beta}{10} = \frac{13\beta}{10}.$$

Έτσι το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\mathrm{E}' = \frac{12\alpha}{10} \cdot \frac{13\beta}{10} = \frac{156\alpha\beta}{100} = \alpha\beta + \frac{56\alpha\beta}{100} = \mathrm{E} + \frac{56\alpha\beta}{100}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}' - \mathrm{E} = \frac{56\mathrm{E}}{100} \Rightarrow \frac{\mathrm{E}' - \mathrm{E}}{\mathrm{E}} = \frac{56}{100}.$$

Άρα η αύξηση της τιμής του εμβαδού είναι 56% πάνω στην αρχική τιμή του.

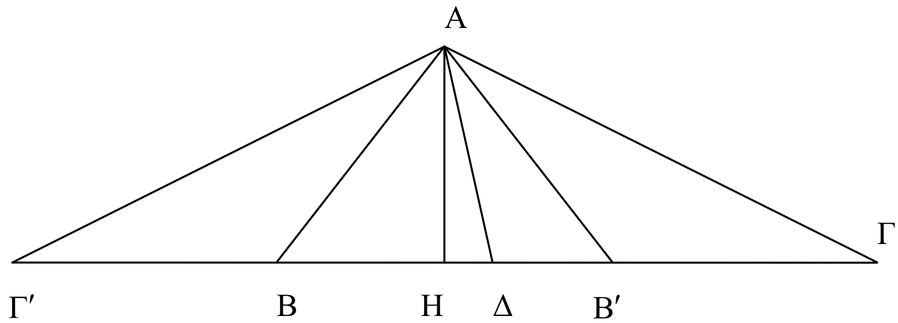
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\mathrm{A\Gamma} > \mathrm{AB}$) με τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ διπλάσια της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και τη γωνία $\hat{\mathrm{B}}$ μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{\Gamma}$ κατά είκοσι μοίρες. Δίνονται ακόμα το ύψος του ΑΗ και η διχοτόμος του ΑΔ.

(α) Αν $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \Gamma'$ είναι τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία του ύψους ΑΗ, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή και να βρείτε τις γωνίες τους.

(β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζεται από το ύψος ΑΗ και τη διχοτόμο ΑΔ.

Λύση



(α) Από την υπόθεση έχουμε $\hat{\mathrm{A}} = 2\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}} - 20^0$, οπότε από τη γνωστή ισότητα $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ λαμβάνουμε $2\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{B}} - 20^0 = 180^0 \Leftrightarrow 4\hat{\mathrm{B}} = 200^0 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{B}} = 50^0$.

Άρα έχουμε και $\hat{\mathrm{A}} = 100^0$ και $\hat{\Gamma} = 30^0$.

Λόγω συμμετρίας ως προς τον άξονα ΑΗ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και $\mathrm{AB}'\Gamma'$ είναι ίσα ($\mathrm{A}' \equiv \mathrm{A}$, αφού το σημείο Α ανήκει στον άξονα συμμετρίας), οπότε θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες, δηλαδή $\mathrm{AB} = \mathrm{AB}'$ και $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}'$. Άρα τα τρίγωνα ABB' και $\mathrm{A\Gamma\Gamma}'$ είναι ισοσκελή.

Επιπλέον έχουμε

$$\hat{\mathrm{B}}' = \mathrm{B} = 50^0 \ , \ \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma} = 30^0,$$

$$\mathrm{B\hat{A}B}' = 180^0 - 2 \cdot 50^0 = 80^0 \text{ και } \Gamma'\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 180^0 - 2 \cdot 30^0 = 120^0.$$

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΔ έχουμε την ισότητα:

$$\mathrm{H\hat{A}\Delta} = 90^\circ - \mathrm{A\hat{\Delta}H} \qquad (1)$$

Όμως από το τρίγωνο ΑΒΔ λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\mathrm{A\hat{\Delta}H} = \mathrm{A\hat{\Delta}B} = 180^0 - \hat{\mathrm{B}} - \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = 180^0 - 50^0 - 50^0 = 80^0. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{H\hat{A}\Delta} = 90^\circ - 80^0 = 10^0.$$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Αν ισχύει ότι $a+2b=\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3.$$

Λύση

Η παράσταση γίνεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\left(16a+32b\right)^{-2}-\left(32a+64b\right)^{-3}+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}:3^4\right]^3\\
&=\frac{1}{16^2\left(a+2b\right)^2}-\frac{1}{32^3\left(a+2b\right)^3}+\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\
&=\frac{1}{\left(2^4\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(2^5\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\left[\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{1}{3^4}\right]^3\\
&=\frac{1}{2^{8-2}}-\frac{1}{2^{15-3}}+\frac{1}{2^{4\cdot 3}}=\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{12}}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x,y ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2+4y^2=\frac{20}{3}xy,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{x+2y}{x-2y}.$$

Λύση

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\dfrac{20}{3}xy$ λαμβάνουμε:

$$x^2+4y^2+2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy+4xy\Rightarrow\left(x+2y\right)^2=\frac{32}{3}xy,$$

$$x^2+4y^2-2x\cdot 2y=\frac{20}{3}xy-4xy\Rightarrow\left(x-2y\right)^2=\frac{8}{3}xy>0,$$

οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}^2=\frac{\left(x+2y\right)^2}{\left(x-2y\right)^2}=\frac{\frac{32}{3}xy}{\frac{8}{3}xy}=4\Leftrightarrow\mathrm{A}=2\ \text{ή}\ \mathrm{A}=-2.$$

Δεύτερος τρόπος

Από τη σχέση $x^2+4y^2=\dfrac{20}{3}xy$ με διαίρεση των δύο μελών με y^2 και την αντικατάσταση $u=\dfrac{x}{y}$ λαμβάνουμε:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+4-\frac{20}{3}\left(\frac{x}{y}\right)=0 \Leftrightarrow u^2-\frac{20}{3}u+4=0 \Leftrightarrow \left(u-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{64}{9}=0$$

$$u-\frac{10}{3}=\frac{8}{3} \text{ ή } u-\frac{10}{3}=-\frac{8}{3} \Leftrightarrow u=6 \text{ ή } u=\frac{2}{3}.$$

Για $u=\frac{x}{y}=6$ λαμβάνουμε $x=6y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{6y+2y}{6y-2y}=2.$

Για $u=\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$ λαμβάνουμε $3x=2y$, οπότε : $\mathrm{A}=\frac{x+3x}{x-3x}=-2.$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε τους διψήφιους θετικούς ακέραιους $n=\overline{ab}=10a+b,$ όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$,που έχουν την ιδιότητα:

Το γινόμενο των ψηφίων τους αυξημένο κατά το τετραπλάσιο του αθροίσματος των ψηφίων τους, ισούται με τον αριθμό.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε την εξίσωση:

$$ab+4(a+b)=10a+b,$$

όπου a,b ψηφία, $a\neq 0$. Ισοδύναμα έχουμε:

$$ab+4a+4b=10a+b \Leftrightarrow ab-6a+3b=0$$

$$\Leftrightarrow a(b-6)+3(b-6)=-18 \Leftrightarrow (a+3)(b-6)=-18$$

$$\Leftrightarrow (a+3)(6-b)=18.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι $4\leq a+3\leq 12$, προκύπτει ότι:

$$(a+3,6-b)=(6,3) \text{ ή } (9,2)$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(3,3) \text{ ή } (6,4),$$

δηλαδή οι αριθμοί που ζητάμε είναι οι 33 και 64.

Πρόβλημα 4

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ που είναι κάθετες μεταξύ τους και δεν περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Οι δύο χορδές τέμνονται στο σημείο Κ, έτσι ώστε να είναι $\mathrm{AK}>\mathrm{KB}$. Έστω Μ το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Λύση

Έστω ότι η ευθεία ΓΜ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε. Η ΓΕ είναι ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, αν είναι $\Gamma\mathrm{E}\perp \mathrm{A}\Delta$ ή $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\Delta=90^\circ$. Αρκεί να ισχύει: $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta+\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=90^\circ$.
Όμως είναι

$$\mathrm{E}\hat{\Gamma}\Delta=\mathrm{K}\hat{\Gamma}\mathrm{B}, \qquad (1)$$

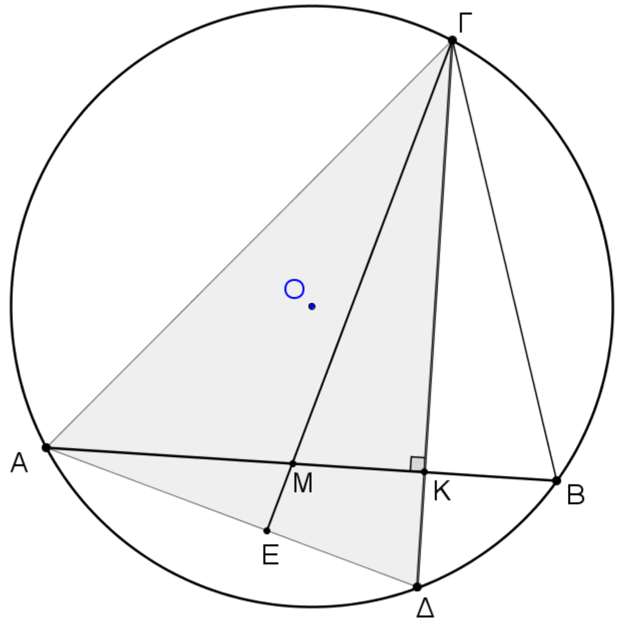
λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία ΓΔ.
Επίσης έχουμε

$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K},$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$, $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}=\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}, \qquad (2)$$

ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου.
Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:



$$E\hat{\Gamma}\Delta+\Delta\hat{\Gamma}E=K\hat{\Gamma}B+\Gamma\hat{B}K=180^0-\Gamma\hat{K}B=180^0-90^\circ=90^\circ,$$

αφού οι γωνίες $\Gamma\hat{B}K$ και $K\hat{\Gamma}B$ είναι οι δύο οξείες γωνίες του ορθογώνιου τριγώνου ΓΚΒ. Επειδή οι δύο χορδές είναι κάθετες θα είναι και $AK\perp\Gamma\Delta$, δηλαδή ΑΚ είναι επίσης ύψος του τριγώνου ΑΓΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΓΔ.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση

$$A=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}},$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0$, $xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

Λύση

$$A=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}=\frac{\left(\frac{x^2y^2-1}{y^2}\right)^m\left(\frac{xy+1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(\frac{x^2y^2-1}{x^2}\right)^n\left(\frac{xy-1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}$$

$$=\frac{\left(x^2y^2-1\right)^{m-n}\cdot x^{2n}}{y^{2m}}\cdot\frac{(xy+1)^{n-m}\cdot y^{m-n}}{(xy-1)^{m-n}\cdot x^{n-m}}\cdot\frac{y^{m+n}}{x^{m+n}}$$

$$=\frac{(xy+1)^{m-n}(xy-1)^{m-n}\cdot(xy+1)^{n-m}}{(xy-1)^{m-n}}\cdot x^{2n-2n}\cdot y^{2m-2m}=1.$$

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί α, β αν γνωρίζετε ότι ισχύουν:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \text{ και } \alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37.$$

Λύση

Από την ισότητα $|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta|\geq 0$ προκύπτει ότι:

$$|\alpha-\beta|=|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow |\alpha-\beta|^2=\left(|\alpha|+|\beta|\right)^2$$

$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2$$

$$-\alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow \left(\alpha\geq 0 \text{ και } \beta\leq 0\right) \text{ ή } \left(\alpha\leq 0 \text{ και } \beta\geq 0\right).$$

Από τη δεύτερη ισότητα λαμβάνουμε:

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+2\alpha^2\beta^2-\alpha-\beta=37 \Leftrightarrow \alpha^2\beta^2\left(\alpha+\beta+2\right)-\left(\alpha+\beta+2\right)=35$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha+\beta+2\right)\left(\alpha^2\beta^2-1\right)=35,$$

από την οποία έχουμε ότι ο $\alpha^2\beta^2-1$ είναι ένας από τους παράγοντες του 35, δηλαδή έχουμε:

$$\alpha^2\beta^2-1=\pm 1 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 5 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 7 \text{ ή } \alpha^2\beta^2-1=\pm 35$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2\beta^2=2 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=0 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-4 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=8$$

$$\text{ή } \alpha^2\beta^2=-6 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=36 \text{ ή } \alpha^2\beta^2=-34.$$

Οι αποδεκτές περιπτώσεις, αφού $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha^2\beta^2\geq 0$, είναι οι:

- $\alpha^2\beta^2=0$, η οποία οδηγεί στις λύσεις $\left(\alpha,\beta\right)=\left(0,-37\right)$ ή $\left(\alpha,\beta\right)=\left(-37,0\right)$.
- $\alpha^2\beta^2=36 \Leftrightarrow \alpha\beta=-6$ (αφού α,β ετερόσημοι), η οποία οδηγεί στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases}\alpha+\beta=-1\\ \alpha\beta=-6\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left(\alpha,\beta\right)=\left(-3,2\right) \text{ ή } \left(\alpha,\beta\right)=\left(2,-3\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 3α. Πάνω στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ λαμβάνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\text{ΕΓ}=\text{ΖΔ}=\alpha$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΖ και ΔΕ τέμνονται στο σημείο Κ. Αν η ευθεία ΑΚ τέμνει την ευθεία ΕΖ στο σημείο Λ, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}$

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΛ συναρτήσει του α.

Λύση

(α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΔΕΓ έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες (ΑΔ = ΔΓ=3α, ΔΖ = ΕΓ = α). Άρα είναι ίσα και έχουν $\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ζ}=\text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma$. Αν Μ είναι το σημείο τομής ΑΖ και ΔΕ, τότε έχουμε:

$$\text{Μ}\hat{\Delta}\text{Ζ}+\Delta\hat{\text{Ζ}}\text{Μ}=\Delta\hat{\text{Α}}\text{Ζ}+\Delta\hat{\text{Ζ}}\text{Α}$$

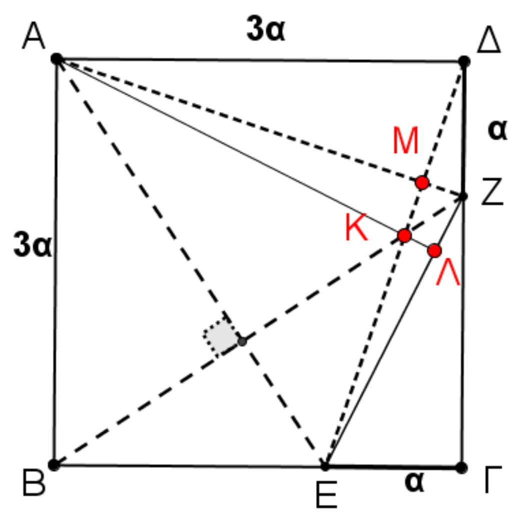
$$=180^0-\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ζ}=180^0-90^\circ=90^\circ.$$

Άρα είναι $\text{ΕΔ}\perp\text{ΑΖ}$ και ομοίως αποδεικνύουμε ότι είναι $\text{ΖΒ}\perp\text{ΑΕ}$, οπότε το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου ΑΕΖ.

Άρα θα είναι και

$$\text{ΑΚ}\perp\text{ΕΖ} \text{ ή } \text{ΑΛ}\perp\text{ΕΖ}.$$

Δ



(β) Έχουμε ότι

$$(\mathrm{AEZ})=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{EZ}\cdot \mathrm{A\Lambda}=\frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot \mathrm{A\Lambda} \text{ και}$$

$$(\mathrm{AEZ})=(\mathrm{AB\Gamma\Delta})-(\mathrm{ABE})-(\mathrm{E\Gamma Z})-(\mathrm{A\Delta Z})=9\alpha^2-3\alpha^2-\alpha^2-\frac{3\alpha^2}{2}=\frac{7\alpha^2}{2},$$

οπότε λαμβάνουμε: $\mathrm{A\Lambda}=\dfrac{7\sqrt{5}\alpha}{5}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $\overline{abc}=100a+10b+c$, όπου a,b,c ψηφία, $a>0$, ο οποίος ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2$$

Λύση

Από τη σχέση $100\le\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2<1000$ προκύπτει ότι:

$$10\le a+b^2+c^3 \le 31, \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), δεδομένου ότι $a\in\{1,2,\dots,9\}$ και $b,c\in\{0,1,2,\dots,9\}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$c\in\{0,1,2,3\} \text{ και } b\in\{0,1,2,3,4,5\}. \qquad (2)$$

Επιπλέον η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\overline{abc}=\left(a+b^2+c^3\right)^2 \Leftrightarrow 100a+10b+c=\left(a+b^2+c^3\right)^2. \qquad (3)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Για $c=0$ η εξίσωση (3) γίνεται:

  $$100a+10b=\left(a+b^2\right)^2, \qquad (4)$$

  από την οποία για $b\in\{0,1,2,3,4,5\}$ δεν προκύπτουν a,b που την επαληθεύουν.

  Πράγματι, τα ψηφία a,b που ικανοποιούν την εξίσωση (4) πρέπει να είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $a+b^2$ να λήγει σε 0. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα

  $$(a,b)=(9,1) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (5,5),$$

  από τα οποία κανένα δεν ικανοποιεί την εξίσωση (4).

- Για $c=1$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+1=\left(a+b^2+1\right)^2,$$
από την οποία προκύπτει ότι ο αριθμός $a+b^2+1$ πρέπει να λήγει σε 1 ή 9. Έτσι πιθανά ζεύγη είναι τα
$$(a,b)=(8,0) \text{ ή } (7,1) \text{ ή } (9,1) \text{ ή } (4,2) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (1,3)$$
$$\text{ή } (9,3) \text{ ή } (2,4) \text{ ή } (4,4) \text{ ή } (3,5) \text{ ή } (5,5),$$
από τα οποία προκύπτει μόνο η λύση $(a,b)=(4,4)$ και ο αριθμός $\overline{abc}=441$.
- Για $c=2$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+2=\left(a+b^2+2\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 2.
- Για $c=3$ η εξίσωση (3) γίνεται:
$$100a+10b+3=\left(a+b^2+3\right)^2,$$
η οποία είναι αδύνατη, αφού δεν είναι δυνατόν το τετράγωνο ενός ακεραίου να τελειώνει σε 3.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες το σύστημα
$$x^2+4y^2=4a^2$$
$$ax-y=2a$$
έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

Λύση

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα
$$\begin{Bmatrix} x^2+4y^2=4a^2 \\ ax-y=2a \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=ax-2a \\ x^2+4(ax-2a)^2=4a^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=ax-2a \\ \left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0 \end{Bmatrix}.$$
Το σύστημα έχει μία μόνο λύση, αν, και μόνον αν, η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ έχει μία διπλή ρίζα, δηλαδή, αν, και μόνον αν, ισχύει:
$$\Delta=16a^2\left(4a^2-3\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ή } a=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } a=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
- Για $a=0$, το σύστημα έχει τη λύση $(x,y)=(0,0)$.
- Για $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ η εξίσωση $\left(1+4a^2\right)x^2-16a^2x+12a^2=0$ γίνεται $4x^2-12x+9=0$ και έχει τη διπλή ρίζα $x=\frac{3}{2}$, οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,y)=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, αν $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x+y+z$ και $S_2 = xy+yz+zx$, όπου $x,y,z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1S_2 - 6$.

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x,y,z, αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x^2\left(y+z\right)+y^2\left(z+x\right)+z^2\left(x+y\right)=6 \Leftrightarrow x\left(xy+xz\right)+y\left(yz+yx\right)+z\left(zx+zy\right)=6$$

$$\Leftrightarrow x\left(S_2-yz\right)+y\left(S_2-zx\right)+z\left(S_2-xy\right)=6$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)S_2-3xyz=6 \Leftrightarrow 3xyz=S_1S_2-6.$$

(β) Για $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$ έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ xy+yz+zx=2 \\ x=0 \text{ ή } y=0 \text{ ή } z=0 \end{array}\right\},$$

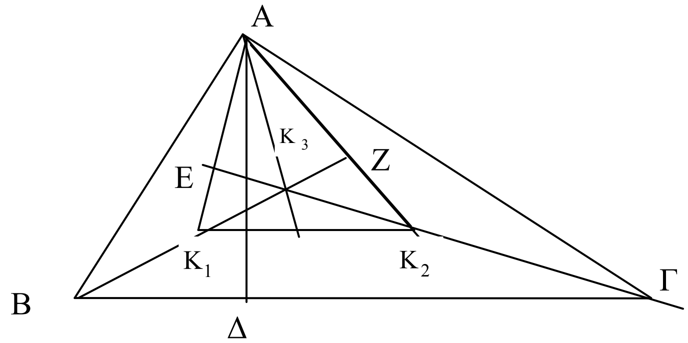
από το οποίο εύκολα προκύπτουν οι λύσεις

$$\left(x,y,z\right)=\left(2,1,0\right) \text{ ή } \left(1,2,0\right) \text{ ή } \left(2,0,1\right) \text{ ή } \left(1,0,2\right) \text{ ή } \left(0,2,1\right) \text{ ή } \left(0,1,2\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου και $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3$ είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΑΒΓ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\mathrm{AK}_3 = \mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$.

Λύση



Τα σημεία K_1 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, ενώ τα σημεία K_2 και K_3 βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$. Έτσι έχουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_3\Gamma = 180^0 - \left(\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}\right) = 180^0 - 45^\circ = 135^\circ$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}_1\mathrm{A} = 135^\circ \text{ και } \Gamma\hat{\mathrm{K}}_3\mathrm{A} = 135^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{K_1\hat{K}_3E = K_3\hat{K}_1E = K_3\hat{K}_2Z = Z\hat{K}_3K_2} = 45^0,$$

ως παραπληρώματα κάποιας γωνίας 135^0. Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{AEK_3}$, $\mathrm{K_3EK_1}$ και $\mathrm{K_3ZK_2}$ είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε το σημείο $\mathrm{K_3}$ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AK_1K_2}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AK_3E}$ και $\mathrm{K_2EK_1}$ είναι ίσα, γιατί έχουν $\mathrm{EK_3 = EK_1}$ και $\mathrm{K_1\hat{K}_2E = E\hat{A}K_3}$, αφού έχουν τις πλευρές τους κάθετες. Άρα είναι $\mathrm{AK_3 = K_1K_2}$

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k, $1<k<30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x)=k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0, n\geq 1$ το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = ka_n \Leftrightarrow k=3^n.$$

Επειδή είναι $1<k<30$ οι μόνες δυνατές τιμές του n είναι οι $n=1$ ή $n=2$ ή $n=3$.

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\left(x-3^n\right)P(3x)=3^n(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Για $n=1$ η (1) γίνεται $(x-3)P(3x)=3(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για $x=1$ προκύπτει $P(3)=0$. Άρα είναι $P(x)=a_1(x-3)$.

Για $n=2$ η (1) γίνεται $\left(x-3^2\right)P(3x)=3^2(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$ και $P(9)=0$. Άρα είναι $P(x)=a_2(x-3)(x-9)$.

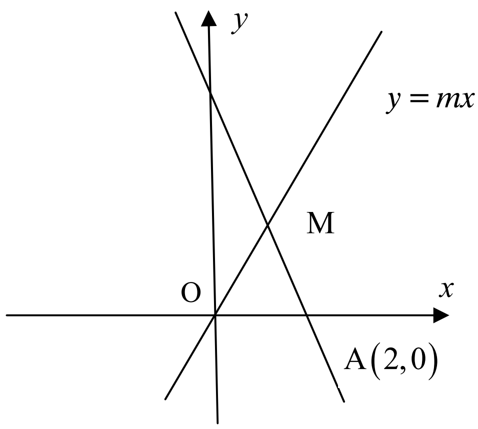
Για $n=3$ η (1) γίνεται $\left(x-3^3\right)P(3x)=3^3(x-1)P(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την οποία για προκύπτει $P(3)=0$, $P(9)=0$ και $P(27)=0$. Άρα είναι $P(x)=a_3(x-3)(x-9)(x-27)$.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου m για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-3x+6$, $g(x)=mx,\ m\in\mathbb{R}$ και τον άξονα των x ισούται με 3.

Λύση



Από το σύστημα $y=mx, y=-3x+6$ προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ είναι $\left(\frac{6}{m+3},\frac{6m}{m+3}\right)$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{E}(\mathrm{OAM})=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left|\frac{6m}{3+m}\right|=3\Leftrightarrow\frac{6m}{3+m}=3 \text{ ή } \frac{6m}{3+m}=-3\Leftrightarrow m=3 \text{ ή } m=-1.$$

Πρόβλημα 2

Έστω Η το ορθόκεντρο και Ο το περίκεντρο οξυγωνίου τριγώνουΑΒΓ. Έστω ακόμη Δ, Ε και Ζ τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ_1, E_1 και Z_1 έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OZ}_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$, με $\lambda>1$.. Ο κύκλος C_α που έχει κέντρο το σημείο Δ_1 και διέρχεται από το Η τέμνει την ευθεία ΒΓ στα σημεία A_1 και A_2. Όμοια, οι κύκλοι $C_\beta(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_1\mathrm{H})$ και $C_\gamma(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_1\mathrm{H})$ ορίζουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2 στις ευθείες ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, Γ_1 και Γ_2 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

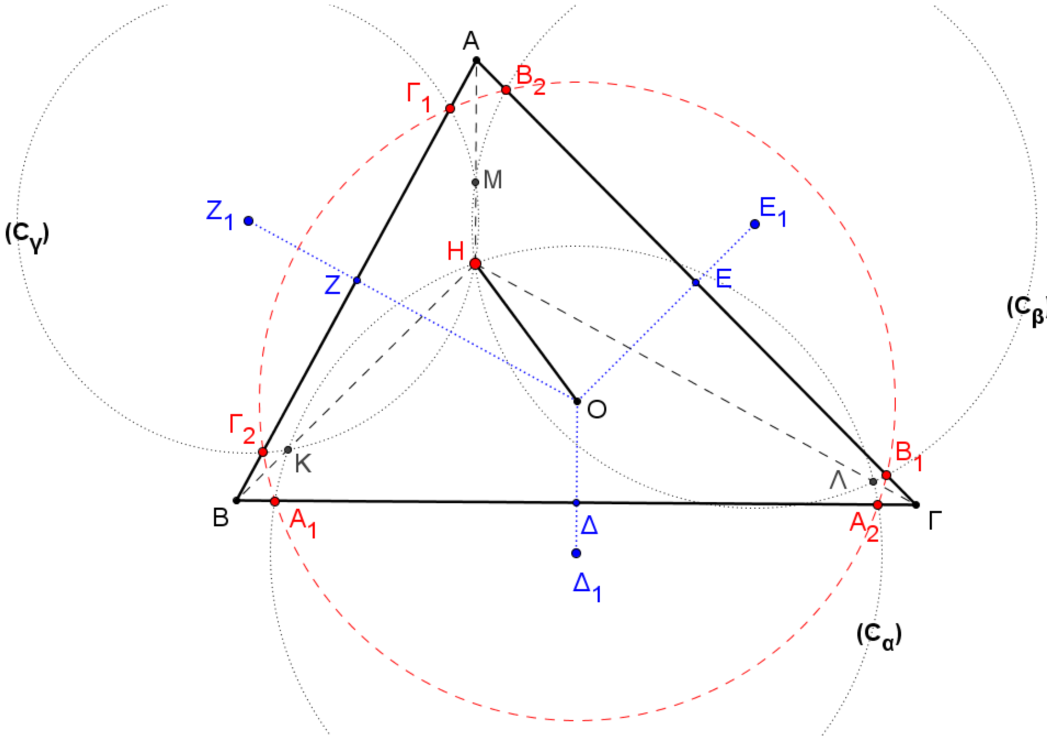
Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Επειδή τα σημεία $\Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}$ είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και $\Delta_1\mathrm{E}_1\mathrm{Z}_1$ έχουν επίσης τις πλευρές τους παράλληλες, γιατί

$$\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta},\ \overrightarrow{\mathrm{OE}_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \text{ και } \overrightarrow{\mathrm{OZ}_1}=\lambda\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}.$$

Η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής ΚΗ των κύκλων C_α και C_γ. Επειδή η $\Delta_1\mathrm{Z}_1$ είναι παράλληλη με την ΑΓ, έπεται ότι $\mathrm{KH}\perp\mathrm{A}\Gamma$.

Επειδή όμως ισχύει και ότι $\mathrm{BH}\perp\mathrm{A}\Gamma$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι τα σημεία Β, Κ, Η είναι συνευθειακά.

Με όμοιο τρόπο, αν ΜΗ, ΛΗ είναι η κοινή χορδή των κύκλων C_β, C_γ και C_α, C_β, αντίστοιχα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα σημεία $\mathrm{A, M, H}$ και τα σημεία $\Gamma, \Lambda, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.



Από τη δύναμη του σημείου Β ως προς τους κύκλους C_α και C_γ, έχουμε:

$$\mathrm{BK}\cdot\mathrm{B}\Gamma = \mathrm{BA_1}\cdot\mathrm{BA_2} = \mathrm{B}\Gamma_1\cdot\mathrm{B}\Gamma_2,$$

οπότε τα σημεία $\mathrm{A_1, A_2}, \Gamma_1, \Gamma_2$ είναι ομοκυκλικά στο κύκλο με κέντρο το O, που είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των τμημάτων $\mathrm{A_1A_2}$ και $\Gamma_1\Gamma_2$.

Όμοια εργαζόμαστε και με τα άλλα ζευγάρια σημείων, οπότε τα σημεία $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, Γ_1 και Γ_2 βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Ο.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου k και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$, n βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x-k)P(3x) = k(x-1)P(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0, n\geq 1$, το ζητούμενο πολυώνυμο. Τότε εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο μελών της δεδομένης ισότητας πολυωνύμων, λαμβάνουμε

$$3^n a_n = k a_n \Leftrightarrow k = 3^n.$$

Έτσι η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$(x-3^n)P(3x) = 3^n(x-1)P(x), n\geq 1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Από την (1) για $x=1$ προκύπτει ότι $P(3)=0$, οπότε στη συνέχεια για $x=3$ προκύπτει $P(3^2)=0$. Συνεχίζοντας έτσι λαμβάνουμε τις σχέσεις $P(3^k)=0$, για $k=3,\ldots n-1$.

Επίσης από την (1) για $x=3^n$ λαμβάνουμε:

$$0=3^n\left(3^n-1\right)P\left(3^n\right)=0 \Leftrightarrow P\left(3^n\right)=0.$$

Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο n βαθμού έχει τις n ρίζες 3^k, $k=1,2,...,n$, οπότε

$$P(x)=a_n\,(x-3)\left(x-3^2\right)\cdots\left(x-3^n\right),\ a_n\in\mathbb{R}.$$

. **Πρόβλημα 4**

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\left(f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\right)$. Αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει η σχέση:

$$f\left(f\left(f(x)\right)-f(y)\right)=f(x)-f\left(f(y)\right), \qquad (1)$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f , είναι περιττή.

Λύση

Θέτουμε στη δεδομένη σχέση όπου y το $f(x)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} f\big(f(f(x))-f(f(x))\big)&=f(x)-f\big(f(f(x))\big)\\ \Leftrightarrow f(0)&=f(x)-f\left(f\left(f(x)\right)\right)\\ \Leftrightarrow f\left(f\left(f(x)\right)\right)&=f(x)-f(0)\\ \Leftrightarrow \left(f\circ f\circ f\right)(x)&=f(x)-f(0) \qquad (2). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε τις ισότητες

$$\left.\begin{aligned}\left(f\circ f\circ f\circ f\right)(x)&=f\big(f(x)-f(0)\big)\\ \left(f\circ f\circ f\circ f\right)(x)&=f\big(f(x)\big)-f(0)\end{aligned}\right\},$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$f\big(f(x)-f(0)\big)=f\big(f(x)\big)-f(0). \qquad (3)$$

Από την (3) για $x=0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f\big(f(0)-f(0)\big)&=f\big(f(0)\big)-f(0)\\ \Leftrightarrow f(0)&=f\left(f(0)\right)-f(0)\\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right)&=2f(0) \qquad (4). \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) για $x=y=0$ και σε συνδυασμό με τη σχέση (4), έχουμε:

$$\begin{aligned} f\big(f(f(0))-f(0)\big)&=f(0)-f\big(f(0)\big)\\ \Leftrightarrow f\left(2f(0)-f(0)\right)&=f(0)-2f(0)\\ \Leftrightarrow f\left(f(0)\right)&=-f(0) \qquad (5). \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε: $f(0)=0$.

Αν τώρα στη σχέση (1) θέσουμε $x=0$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} f\big(f(f(0))-f(y)\big)&=f(0)-f\big(f(y)\big)\\ \Leftrightarrow f\left(-f(y)\right)&=-f\left(f(y)\right). \end{aligned}$$

Επειδή όμως σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$, έπεται ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $y\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(y)=x$.

Άρα έχουμε $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 .$$
(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς
$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \quad \text{και} \quad \Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9}\right)$$

Λύση
(α) Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα λαμβάνουμε:
$$\mathrm{A} = 2010 - 2009 \cdot 2008 + 2010 \cdot 2008 = 2010 + 2008 \cdot (2010 - 2009)$$
$$= 2010 + 2008 \cdot 1 = 2010 + 2008 = 4018.$$
(β) Έχουμε
$$\mathrm{B} = \frac{3}{8} \cdot \left(2^2 - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot \left(4 - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{48 - 9 - 8}{12}\right) = \frac{3 \cdot 31}{8 \cdot 12} = \frac{31}{32}$$
$$\Gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right) \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{20}{9}\right) = \frac{9}{22} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{20}{9}\right) = \frac{9}{22} \cdot \frac{21}{9} = \frac{21}{22} .$$
Επειδή ισχύει ότι:
$$\mathrm{B} - \Gamma = \frac{31}{32} - \frac{21}{22} = \frac{31 \cdot 22 - 32 \cdot 21}{32 \cdot 22} = \frac{682 - 672}{32 \cdot 22} = \frac{10}{32 \cdot 22} > 0 ,$$
έπεται ότι είναι $\mathrm{B} > \Gamma$.

Πρόβλημα 2
Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $x = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, έχει άθροισμα ψηφίων 10. Αν εναλλάξουμε το ψηφίο των εκατοντάδων με το ψηφίο των μονάδων του, τότε προκύπτει ακέραιος μικρότερος από τον x κατά 297. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x ;

Λύση
Ο ακέραιος που προκύπτει μετά την εναλλαγή των ψηφίων των εκατοντάδων και μονάδων είναι ο $y = 100\gamma + 10\beta + \alpha$ και, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος, ισχύει ότι:
$$x - y = 297 \Leftrightarrow (100\alpha + 10\beta + \gamma) - (100\gamma + 10\beta + \alpha) = 297$$
$$\Leftrightarrow 99(\alpha - \gamma) = 297 \Leftrightarrow \alpha - \gamma = 3.$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τα ψηφία α και γ είναι:

$\alpha=3,\gamma=0$ ή $\alpha=4,\gamma=1$ ή $\alpha=5,\gamma=2$ ή $\alpha=6,\gamma=3$ ή $\alpha=7,\gamma=4$ ή $\alpha=8,\gamma=5$ ή $\alpha=9,\gamma=6$.

Επειδή από την υπόθεση δίνεται ότι $\alpha+\beta+\gamma=10$, οι ζητούμενοι ακέραιοι $x=\overline{\alpha\beta\gamma}$ είναι οι:

370, 451, 532, 613.

Πρόβλημα 3

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει πλάτος $\text{ΑΒ}=x$ μέτρα και μήκος $\text{ΒΓ}=y$ μέτρα, το οποίο είναι διπλάσιο του πλάτους του. Αν αυξήσουμε το πλάτος του κατά 25%, να βρείτε πόσο επί τα εκατό πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του, ώστε το εμβαδόν του να μείνει αμετάβλητο.

Λύση

Μετά την αύξηση κατά 25% το πλάτος του ορθογωνίου γίνεται $x_1=x+\dfrac{25x}{100}=\dfrac{125x}{100}=\dfrac{5x}{4}$.

Έστω ότι πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά $\alpha\%$, έτσι ώστε να μείνει το εμβαδό του αμετάβλητο. Τότε το μήκος του θα γίνει:

$$y_1=y-\frac{\alpha y}{100}=\frac{(100-\alpha)y}{100}=\frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100},$$

ενώ θα ισχύει η ισότητα

$$xy=x_1y_1 \Leftrightarrow x\cdot 2x=\frac{5x}{4}\cdot\frac{(100-\alpha)\cdot 2x}{100}\Leftrightarrow 2x^2=\frac{100-\alpha}{80}\cdot 2x^2$$

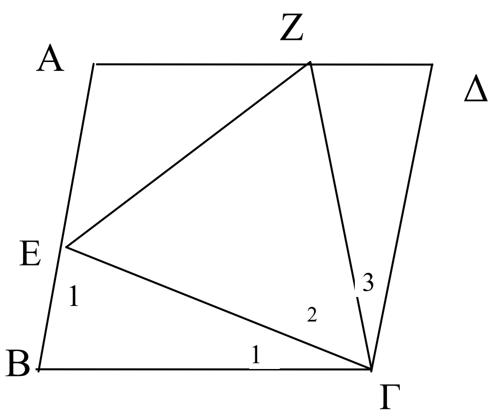
$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{100-\alpha}{80}\right)\cdot 2x^2=0\Leftrightarrow 1-\frac{100-\alpha}{80}=0 \quad (\text{αφού } x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 80-100+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=20.$$

Άρα πρέπει να ελαττώσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 20%.

Πρόβλημα 4.

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος πλευράς α και το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισόπλευρο πλευράς α. Τα σημεία Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΔ, αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου ΑΒΓΔ.



Σχήμα 1

Λύση

Επειδή είναι ΒΓ = ΓΕ = α, το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\hat{\text{Β}}=\hat{\text{Ε}}_1 \qquad (1)$$

Επειδή είναι $\text{ΑΒ}\parallel\text{ΓΔ}$ και η ΕΓ είναι τέμνουσα των ΑΒ και ΓΔ έχουμε ότι:

$$\hat{\text{Ε}}_1=\text{Ε}\hat{\Gamma}\Delta=\hat{\Gamma}_2+\hat{\Gamma}_3=60^\circ+\hat{\Gamma}_3, \qquad (2)$$

αφού κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60°.
Επίσης από τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΓΕ και ΓΖΔ με ίσες πλευρές ΒΓ = ΓΖ=α, ΓΕ = ΓΔ = α , προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^0 - 2\hat{B} = 180^0 - 2\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_3, \qquad (3)$$

αφού οι απέναντι γωνίες ρόμβου είναι ίσες,
Από την παραλληλία των πλευρών ΑΒ και ΓΔ έχουμε

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Leftrightarrow \hat{E}_1 + \hat{\Gamma}_1 + E\hat{\Gamma}\Delta = 180^0 \quad \text{(λόγω της (1))}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 + 2\cdot\left(60^\circ + \hat{\Gamma}_1\right) = 180^0 \quad \text{(λόγω της (2))}$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\hat{\Gamma}_1 + 120^0 = 180^0 \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 20^0.$$

Άρα είναι:

$$\hat{B} = \frac{180^0 - 20^0}{2} = 80^0, \ \hat{\Delta} = \hat{B} = 80^0 \ \text{ και } \ \hat{A} = \hat{\Gamma} = 180^0 - 80^0 = 100^0.$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Έστω ο ακέραιος

$$A = \left[\left(-1\right)^{\nu} + \left(-1\right)^{2\nu} + \left(-1\right)^{3\nu} + \left(-1\right)^{4\nu}\right]\cdot\nu, \text{ όπου } \nu \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Αν ο Α είναι διαιρέτης του 24, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

Λύση

Έχουμε

$$A = \left[\left(-1\right)^{\nu} + \left(-1\right)^{2\nu} + \left(-1\right)^{3\nu} + \left(-1\right)^{4\nu}\right]\cdot\nu = \left[\left(-1\right)^{\nu} + 1 + \left(\left(-1\right)^3\right)^{\nu} + 1\right]\cdot\nu$$

$$= \left[2 + 2\cdot\left(-1\right)^{\nu}\right]\cdot\nu = \begin{cases} 4\nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } \nu \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Επειδή ο ακέραιος Α είναι διαιρέτης του 24, έπεται ότι:

- $A \neq 0$, οπότε ο ν δεν μπορεί να είναι περιττός.
- Ο θετικός ακέραιος $A = 4\nu$, όπου ν άρτιος θετικός ακέραιος, ανήκει στο σύνολο των άρτιων θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή είναι:

$$4\nu \in \{2,4,6,8,12,24\}, \text{ όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6\right\}, \text{όπου } \nu \text{ άρτιος θετικός ακέραιος,}$$

$$\Leftrightarrow \nu = 2 \text{ ή } \nu = 6.$$

Άρα οι δυνατές τιμές του ν είναι το 2 και το 6.

Πρόβλημα 2

Υπάρχει διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b,$ όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, που ισούται με το γινόμενο των ψηφίων του ελαττωμένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του;

Λύση

Ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος $N = \overline{ab} = 10a + b,$ όπου a, b ψηφία με $a \neq 0$, ικανοποιεί την εξίσωση

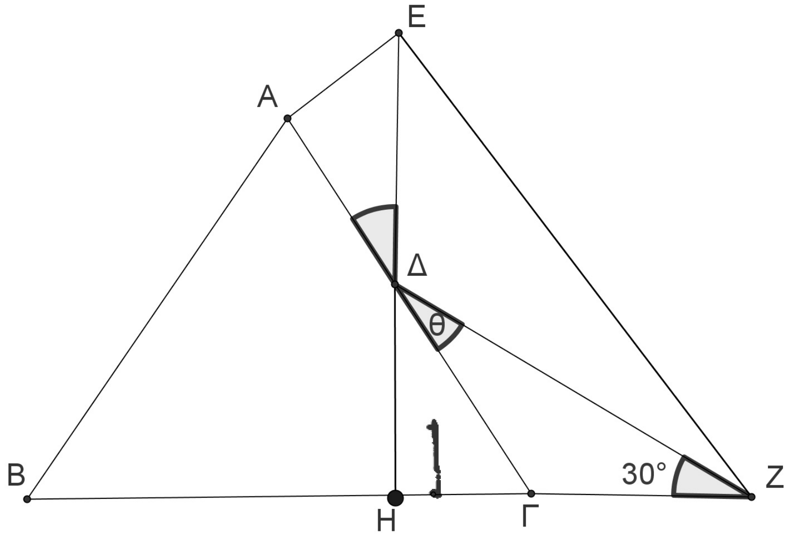
$$10a + b = ab - \left(a + b\right) \Leftrightarrow 11a = ab - 2b \Leftrightarrow \left(11 - b\right)a = -2b.$$

Η τελευταία εξίσωση δεν είναι δυνατόν να ισχύει, γιατί ο όρος $(11-b)a$ του πρώτου μέλους είναι θετικός, ενώ ο όρος του δευτέρου μέλους είναι μικρότερος ή ίσος με το μηδέν. Άρα δεν υπάρχει ο ζητούμενος διψήφιος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 3
Να υπολογίσετε το άθροισμα:
$$S = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \cdots + 997^2 - 998^2 - 999^2 + 1000^2 .$$

Λύση
Παρατηρούμε ότι το άθροισμα S είναι άθροισμα 250 αθροισμάτων της μορφής
$$S_k = (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2, \text{ για } k = 0,1,2,3,...,249 .$$
Όμως έχουμε
$$\begin{aligned} S_k &= (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 16k - 4 - 16k^2 - 24k - 9 + 16k^2 + 32k + 16 \\ &= 4, \text{ για κάθε } k = 0,1,2,3,...,249. \end{aligned}$$
Άρα έχουμε
$$S = S_0 + S_1 + ... + S_{249} = 4 + 4 + ...4 = 250 \cdot 4 = 1000$$

Πρόβλημα 4
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι: το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς $\mathrm{A\Gamma} = \beta$ του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, η ΔΕ είναι κάθετη προς τη ΒΓ, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \theta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 30^0$.
(i) Να βρείτε τη γωνία θ.
(ii) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ συναρτήσει του β.



Σχήμα 2

Λύση
(i) Έστω ότι η ευθεία ΔΕ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Η. Τότε θα είναι
$$\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta \text{ (ως κατά κορυφή) και } \mathrm{H}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma + \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 2\theta ,$$
οπότε από το τρίγωνο ΗΔΖ έχουμε:
$$90^\circ + 2\theta + 30^0 = 180^0 \Leftrightarrow \theta = 30^0$$

(ii) Το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΕΖ, οπότε για τον υπολογισμό της ΕΖ θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Πρέπει όμως να έχουμε υπολογίσει τις κάθετες πλευρές ΗΖ και ΗΕ συναρτήσει του β.

Από το τρίγωνο ΗΔΓ που είναι ορθογώνιο στο Η με $\Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και έχει $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{H}\Delta = \Delta\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} \text{ και } \mathrm{H}\Gamma = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^0 = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\beta}{4}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα μήκη των ΗΔ και ΗΓ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΔΓ με $\mathrm{H}\hat{\Delta}\Gamma = \theta = 30^0$, οπότε η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την οξεία γωνία των 30^0 θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας , δηλαδή είναι $\mathrm{H}\Gamma = \frac{\beta}{4}$ και στη συνέχεια από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε και την πλευρά $\mathrm{H}\Delta = \frac{\beta\sqrt{3}}{4}$.

Το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισοσκελές ($\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} = 30^0$), οπότε θα είναι $\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\Delta = \frac{\beta}{2}$ και

$$\mathrm{HZ} = \mathrm{H}\Gamma + \Gamma\mathrm{Z} = \frac{\beta}{4} + \frac{\beta}{2} = \frac{3\beta}{4}.$$

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ με $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 90^\circ$, $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{E} = 30^0$ και $\mathrm{A}\Delta = \frac{\beta}{2}$, έχουμε:

$$\Delta\mathrm{E} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\sigma\upsilon\nu 30^0} = \frac{\beta/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\beta\sqrt{3}}{3},$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{HE} = \mathrm{H}\Delta + \Delta\mathrm{E} = \frac{\beta\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta\sqrt{3}}{3} = \frac{7\beta\sqrt{3}}{12}.$$

Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΗΕΖ με $\hat{\mathrm{H}} = 90^\circ$ έχουμε:

$$\mathrm{EZ} = \sqrt{\mathrm{HE}^2 + \mathrm{HZ}^2} = \sqrt{\left(\frac{7\beta\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \left(\frac{3\beta}{4}\right)^2} = \frac{\beta\sqrt{57}}{6}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Για $\alpha = 0$ είναι $\mathrm{A} = 0$, ρητός. Έστω $\alpha \neq 0$. Αν ήταν ο $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ ρητός, τότε ο αριθμός $\frac{\mathrm{A}}{\alpha} = \sqrt{3}$**,** θα ήταν επίσης ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

Επομένως, ο αριθμός Α είναι ρητός μόνο για $\alpha = 0$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Αν ο αριθμός Β ήταν ρητός, τότε ο αριθμός $\mathrm{B} - 4 = 2\sqrt{3}$ θα ήταν επίσης ρητός, ως διαφορά δύο ρητών, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x+1-2|x|=\alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση
Επειδή στην εξίσωση εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του αγνώστου x διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x \geq 0$.
Τότε ισχύει $|x| = x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1-2x=\alpha x, x \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)x=1, x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha+1}, \text{ αν } \alpha>-1 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

(ii) Έστω $x<0$.
Τότε ισχύει $|x| = -x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x+1+2x=\alpha x, x<0 \Leftrightarrow (\alpha-3)x=1, x<0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\alpha-3}, \text{ αν } \alpha<3 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

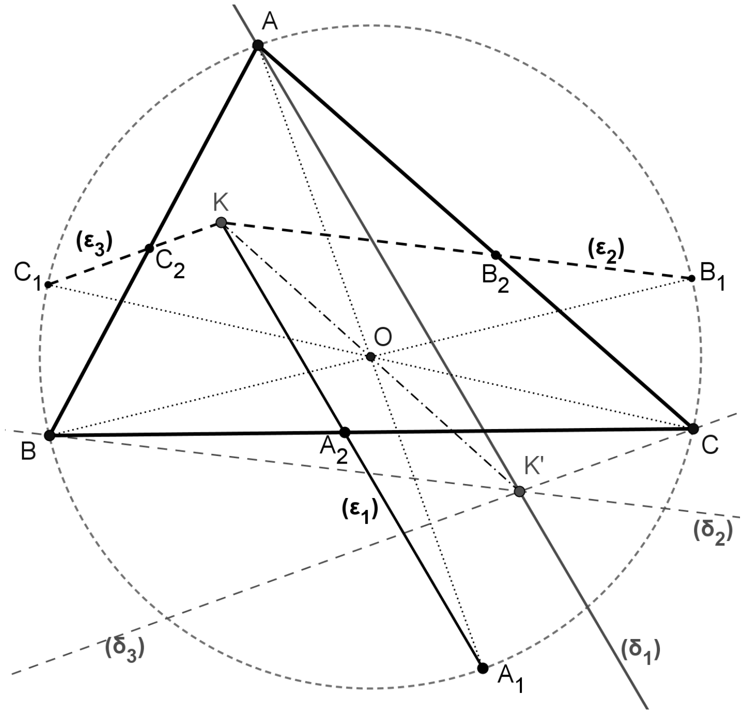
Επομένως, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση. Η εξίσωση έχει 2 πραγματικές λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους, αν ισχύει: $-1<\alpha<3$.
Πράγματι, για $-1<\alpha<3$ η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_1=\dfrac{1}{\alpha-3}<0$ και $x_2=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O,R)$ και έστω A_1, B_1, C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A, B, C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2 αντίστοιχα και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2.
Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν

Λύση
Οι ευθείες (ε_1) και (δ_1) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της AA_1.
Οι ευθείες (ε_2) και (δ_2) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της BB_1.

Οι ευθείες (ε_3) και (δ_3) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της CC_1.

Σύμφωνα με τη θεωρία, αν περιστρέψουμε μία ευθεία κατά 180^0 γύρω από το κέντρο συμμετρίας, τότε αυτή θα συμπέσει με τη συμμετρική της ευθεία , ως προς κέντρο το σημείο O. Επομένως, οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) συντρέχουν, έστω στο σημείο K, αν, και μόνο αν, οι ευθείες (δ_1), (δ_2) και (δ_3) συντρέχουν στο σημείο K', που είναι το συμμετρικό του σημείου K ως προς το σημείο O.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Το σημείο K ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, αν, και μόνο αν, τα σημεία A_2, B_2, C_2 είναι τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα.

Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή πρόταση:

"*Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τα μέσα των πλευρών τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο του κύκλο και είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του*"

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$

$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη ισότητα επί 3 και την αφαιρούμε από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε

$$(x-y)^3 = 8z^3 \Leftrightarrow x - y = 2z. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη ισότητα γίνεται:

$$2zxy = 6z^3, \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε η (2) είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$xy = 3z^2, \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η σχέση

$$x(x-2z) = 3z^2 \Leftrightarrow x^2 - 2zx - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3z \text{ ή } x = -z,$$

οπότε θα είναι

$$x = 3z, y = z \text{ ή } x = -z, y = -3z.$$

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \\ xy(x-y) = 0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x = y = 0,$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$x = y, \text{ ανεξάρτητα από το } z.$$

(β) Για $x = 3z, y = z$ η εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ γίνεται $8z = 8 \Leftrightarrow z = 1$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (3,1,1)$, ενώ για $x = -z, y = -3z$, η εξίσωση γίνεται $-4z = 8 \Leftrightarrow z = -2$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (2,6,-2)$.
Για $z = 0$, είναι $x = y$, οπότε από την εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ προκύπτει ότι

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right).$$

Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 65z^3 \\ x^2y + xy^2 &= 20z^3 \\ x - y + 2z &= 10. \end{aligned}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση επί 3 και την προσθέτουμε στην πρώτη, οπότε λαμβάνουμε την εξίσωση

$$(x+y)^3 = 125z^3 \Leftrightarrow x + y = 5z. \qquad (1)$$

Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$5zxy = 20z^3, \qquad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $z \neq 0$.
Τότε από την εξίσωση (2) λαμβάνουμε:

$$xy = 4z^2. \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η εξίσωση

$$x(5z - x) = 4z^2 \Leftrightarrow x^2 - 5zx + 4z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4z \text{ ή } x = z,$$

οπότε θα είναι

$$x = 4z, y = z \text{ ή } x = z, y = 4z.$$

Για $x=4z, y=z$ η τρίτη εξίσωση του συστήματος γίνεται $5z=10 \Leftrightarrow z=2$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z)=(8,2,2)$, ενώ για $x=z,\ y=4z$ η τρίτη εξίσωση γίνεται $-z=10 \Leftrightarrow z=-10$, οπότε το σύστημα έχει τη λύση $(x,y,z)=(-10,-40,-10)$.

(ii) Για $z=0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases}(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=0\\ xy(x+y)=0\end{cases}\right\} \Leftrightarrow x+y=0 \text{ ή } x=y=0 \Leftrightarrow x=-y,$$

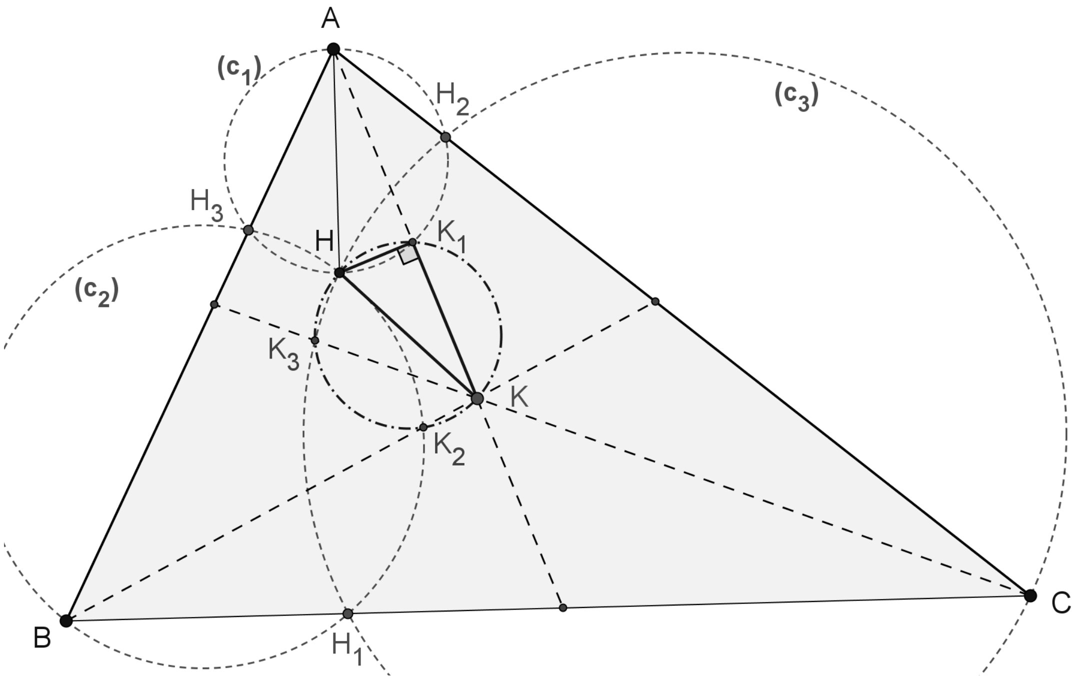
οπότε από την τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $(x,y,z)=(5,-5,0)$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC, K τυχόν σημείο στο εσωτερικό του και τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 τέμνει την ημιευθεία AK στο σημείο K_1, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 τέμνει την ημιευθεία BK στο σημείο K_2 και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2 τέμνει τη ημιευθεία CK στο σημείο K_3. Να αποδείξτε ότι τα σημεία K_1, K_2, K_3, H και K είναι ομοκυκλικά (δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο), όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BH_1H_3 και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CH_1H_2.



Σχήμα 4

Το τετράπλευρο AH_2HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_1) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο BH_1HH_3 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο H.
Το τετράπλευρο CH_1HH_2 είναι εγγράψιμο, οπότε ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο H.
Τελικά, οι τρεις κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) περνάνε από το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC.

Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την AH, οπότε $HK_1 \perp AK_1$, δηλαδή το σημείο K_1 ανήκει στο κύκλο διαμέτρου HK.
Όμοια αποδεικνύουμε ότι και τα σημεία K_2, K_3, ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 3
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x + 1 - 2|x| = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιες τιμές του α οι δύο ρίζες είναι ετερόσημες;

Λύση
Λόγω της ύπαρξης του $|x|$, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $x \geq 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 - 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha + 1)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha+1)^2 - 4 = (\alpha - 1)(\alpha + 3)$. Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, όταν είναι $\alpha \leq -3$ ή $\alpha \geq 1$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο θετικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (1) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές θετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (1) έχει τη διπλή θετική ρίζα $x = 1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (1) δεν έχει μη αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

(ii) Έστω $x < 0$.
Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + x + 1 + 2x = \alpha x,\ \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - (\alpha - 3)x + 1 = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta = (\alpha - 3)^2 - 4 = (\alpha - 5)(\alpha - 1)$. Άρα η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες όταν είναι $\alpha \leq 1$ ή $\alpha \geq 5$. Επειδή το γινόμενο των ριζών είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες είναι ομόσημες, οπότε για να είναι και οι δύο αρνητικές πρέπει και αρκεί $S = \alpha - 3 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 3$.
Επομένως έχουμε:

- Για $\alpha < 1$, η εξίσωση (2) έχει δύο ακριβώς διαφορετικές αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$
- Για $\alpha = 1$, η εξίσωση (2) έχει τη διπλή αρνητική ρίζα $x = -1$ στο $\mathbb{R}$.
- Για $\alpha > 1$, η εξίσωση (2) δεν έχει αρνητικές ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Από τις περιπτώσεις (1) και (2) προκύπτει ότι η δεδομένη εξίσωση έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους, οι οποίες είναι ετερόσημες για $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 4
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - 2\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$$

Λύση
Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι ισχύει: $2x^2 + 3x + 2 > 0$ και $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν θέσουμε $a = \sqrt{2x^2 + 3x + 2},\ b = \sqrt{x^2 + x + 1},\ x \in \mathbb{R}$, τότε λαμβάνουμε:

$$a^2 - b^2 = (2x^2 + 3x + 2) - (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2,$$

οπότε από τη δεδομένη εξίσωση προκύπτει η εξίσωση με αγνώστους a, b,

$$a^2-b^2=(a-2b)^2 \Leftrightarrow 4ab-5b^2=0 \Leftrightarrow b(4a-5b)=0 \Leftrightarrow 4a=5b,$$
αφού είναι $b\neq 0$. Έτσι έχουμε την εξίσωση
$$4\sqrt{2x^2+3x+2}=5\sqrt{x^2+x+1},$$
της οποίας τα δύο μέλη είναι θετικά, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε είναι ισοδύναμη με την εξίσωση
$$16\cdot\left(2x^2+3x+2\right)=25\cdot\left(x^2+x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 7x^2+23x+7=0 \Leftrightarrow x=\frac{-23\pm 3\sqrt{37}}{14}.$$
Με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι η τιμή $x=\dfrac{-23+3\sqrt{37}}{14}$ δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε η μοναδική ρίζα της είναι η $x=\dfrac{-23-3\sqrt{37}}{14}$. Αυτό θα μπορούσε να προκύψει και από τη σχέση $a-2b<0$ η οποία αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε πρέπει να είναι $x<-1$.

Γ΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία $a_n, n\in\mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις
$$a_{n+1}=a_n+kn,\ n\in\mathbb{N}^*,$$
όπου k θετικός ακέραιος και $a_1=1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας $a_n, n\in\mathbb{N}^*$.

Λύση

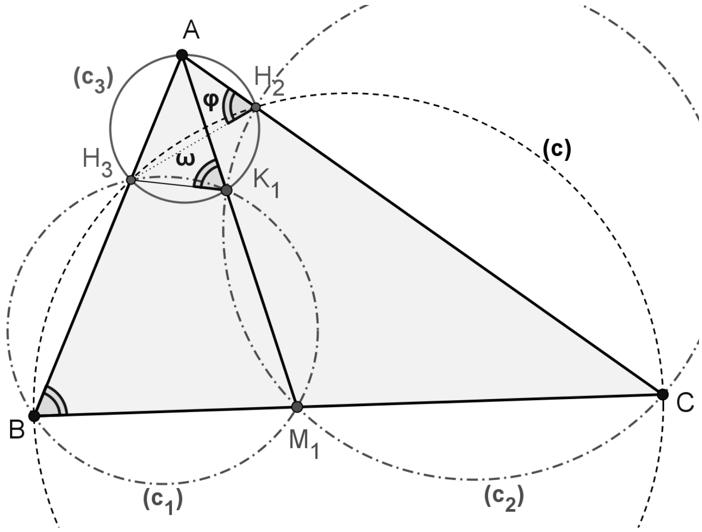
Από τη δεδομένη αναδρομική σχέση έχουμε
$$\begin{aligned}&a_1=1\\&a_2=a_1+k\\&a_3=a_2+2k\\&\dots\dots\dots\dots\\&a_{n-1}=a_{n-2}+(n-2)k\\&a_n=a_{n-1}+(n-1)k\end{aligned}$$
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε
$$a_n=1+k(1+2+\dots+n-1)=1+k(1+2+\dots+n-1)=1+\frac{k(n-1)n}{2}.$$
Επομένως, αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των k και n για τις οποίες ισχύει η ισότητα:
$$a_n=1+\frac{k(n-1)n}{2}=2011 \Leftrightarrow k(n-1)n=4020 \Leftrightarrow k(n-1)n=1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot67$$
$$\Leftrightarrow (n,k)=(2,2010) \text{ ή } (n,k)=(3,670) \text{ ή } (n,k)=(4,335) \text{ ή } (n,k)=(5,201) \text{ ή } (n,k)=(6,134)$$
Επομένως, για $k=2010$ είναι $a_2=2011$, για $k=670$ είναι $a_3=2011$, για $k=335$ είναι $a_4=2011$, για $k=201$ είναι $a_5=2011$ και για $k=134$ είναι $a_6=2011$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB, αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν , δηλαδή περνάνε από το ίδιο σημείο, αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Λύση

Έστω (c_1) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BM_1H_3, (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου CM_1H_2, (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AH_2H_3 και (c) ο περιγεγραμμένος κύκλος του εγγράψιμου τετραπλεύρου BH_3H_2C.



Σχήμα 5

Θεωρώντας τις τέμνουσες AB και AC του κύκλου (c), συμπεραίνουμε:

$$AB \cdot AH_3 = AC \cdot AH_2.$$

Το γινόμενο όμως $AB \cdot AH_3$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_1) ενώ το γινόμενο $AC \cdot AH_2$ εκφράζει τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c_2).

Άρα το σημείο A, ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων (c_1) και (c_2).

Έστω τώρα ότι οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνονται στο σημείο K_1 (εκτός βέβαια από το σημείο M_1). Τότε η ευθεία που ορίζουν τα σημεία αυτά (δηλαδή τα K_1 και M_1) είναι ο ριζικός άξονας των κύκλων (c_1) και (c_2).

Από τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτει ότι τα σημεία A, K_1 και M_1 είναι συνευθειακά.

Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_3) περνάει από το σημείο K_1, δηλαδή ότι το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο BH_3H_2C έχουμε: $\hat{\varphi}=\hat{B}$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BM_1K_1H_3$ έχουμε: $\hat{\omega}=\hat{B}$. Άρα είναι $\hat{\omega}=\hat{\varphi}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $AH_2K_1H_3$ είναι εγγράψιμο.
Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι δύο άλλες τριάδες κύκλων, περνάνε από το ίδιο σημείο.
Προφανώς τώρα οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν, αν, και μόνο αν, συντρέχουν οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 (δεδομένου ότι τα σημεία A, K_1, M_1, τα σημεία B, K_2, M_2 και τα σημεία C, K_3, M_3, είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

Αν $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ με $(a,b)\neq(0,0)$ και $(x,y)\neq(0,0)$ και ισχύουν

$$a\left(x^2-y^2\right)-2bxy=x\left(a^2-b^2\right)-2aby$$
$$b\left(x^2-y^2\right)+2axy=y\left(a^2-b^2\right)+2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x=a$ και $y=b$.

Λύση

Σύμφωνα με τον ορισμό της ισότητας μιγαδικών αριθμών, προκύπτει ότι το σύστημα των δύο δεδομένων εξισώσεων είναι ισοδύναμο με την εξίσωση:

$$\left[a\left(x^2-y^2\right)-2bxy\right]+\left[b\left(x^2-y^2\right)+2axy\right]i=\left[x\left(a^2-b^2\right)-2aby\right]+\left[y\left(a^2-b^2\right)+2abx\right]i$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot\left[\left(x^2-y^2\right)+2xyi\right]=\left[\left(a^2-b^2\right)+2abi\right]\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow (a+bi)\cdot(x+yi)^2=(a+bi)^2\cdot(x+yi)$$
$$\Leftrightarrow x+yi=a+bi \text{ (αφού } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \text{ και } (x,y)\neq(0,0))$$
$$\Leftrightarrow x=a,\ y=b.$$

Πρόβλημα 4

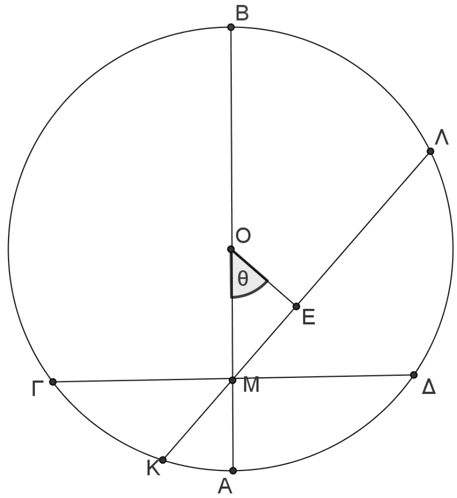
Σημείο Μ βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$, όπου $\mathrm{r}=15cm$, σε απόσταση $9cm$ από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση

Θεωρούμε τη χορδή ΑΒ που περνάει από το σημείο Μ και το κέντρο Ο του κύκλου, καθώς και την κάθετη προς αυτήν χορδή ΓΜΔ, οπότε το σημείο Μ είναι το μέσο της χορδής ΓΔ. Η χορδή ΑΒ έχει ακέραιο μήκος $30cm$. Από το θεώρημα τεμνομένων χορδών έχουμε ότι:

$$\mathrm{ΓΜ}\cdot\mathrm{ΜΔ}=\mathrm{ΑΜ}\cdot\mathrm{ΜΒ}\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=6\cdot(9+15)\Leftrightarrow\left(\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}\right)^2=144\Leftrightarrow\frac{\mathrm{ΓΔ}}{2}=12\Leftrightarrow\mathrm{ΓΔ}=24.$$

Έτσι μέχρι τώρα έχουμε βρει δύο χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το σημείο Μ και έχουν ακέραιο μήκος. Θεωρούμε τυχούσα χορδή ΚΛ του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάει από το Μ και έστω $\mathrm{ME}=x$, $\mathrm{M\hat{O}E}=\theta$, όπου Ε είναι το μέσο της ΚΛ, σχήμα 6. Αν υποθέσουμε ότι $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, τότε έχουμε θεωρήσει όλες τις χορδές του κύκλου $C(\mathrm{O},\mathrm{r})$ που περνάνε από το Μ και τα άκρα τους Κ και Λ βρίσκονται στα ελάσσονα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{ΑΓ}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{ΒΔ}}$, αντίστοιχα . Για κάθε μία από αυτές τις χορδές αντιστοιχεί και μία ακόμη που είναι η συμμετρική της ως προς τη διάμετρο ΑΒ.



Σχήμα 6

Για τη χορδή ΚΛ, αν συμβολίσουμε το μήκος της ως $\ell(\theta)$, έχουμε

$$\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Επειδή είναι $\ell'(\theta) = \dfrac{81\eta\mu 2\theta}{\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta}} > 0,\ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η συνάρτηση $\ell(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε η συνάρτηση $\ell(\theta)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\left[\ell(0), \ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = [24, 30]$. Άρα το μήκος της χορδής ΚΛ μπορεί να πάρει όλες τις ακέραιες τιμές του διαστήματος $[24, 30]$. Αν λάβουμε υπόψιν και τη συμμετρική χορδή της ΚΛ ως προς τη διάμετρο ΑΒ, τότε τα πέντε μήκη 25, 26, 27, 28, 29 λαμβάνονται δύο φορές το καθένα, ενώ τα μήκη 24 και 30 λαμβάνονται από μία φορά. Έτσι έχουμε συνολικά 12 χορδές που περνάνε από το Μ με ακέραιο μήκος.

Παρατήρηση 1

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το *θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής* για τη συνεχή συνάρτηση $\ell(\theta) = 2\sqrt{225 - 81\sigma\upsilon\nu^2\theta},\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, η οποία έχει ελάχιστη τιμή την $\ell(0) = 24$ και μέγιστη τιμή την $\ell\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 30$. Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι τα μήκη των χορδών είναι αντιστρόφως ανάλογα από τα αποστήματά τους και ότι το μέγιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = 0$, ενώ το ελάχιστο απόστημα λαμβάνεται για $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Παρατήρηση 2

Σημειώνουμε ακόμη ότι οι χορδές με ακέραια μήκη 25, 26, 27, 28, 29, μπορούν να κατασκευαστούν γεωμετρικά, αφού αν θέσουμε $\mathrm{KM} = x$ και $\mathrm{M\Lambda} = y$, τότε έχουμε

$$x + y = m,\ m \in \{25, 26, 27, 28, 29\} \text{ και } xy = 144 = 12^2.$$

Έτσι εξασφαλίζουμε την ύπαρξη αυτών των χορδών με ακέραιο μήκος, χωρίς τη χρήση του διαφορικού λογισμού.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)\quad\text{και}\quad \mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6},$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{1}{8^2}\cdot\left(2^3+1+\frac{1}{4}:\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(8+1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot\left(9+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{64}\cdot 9=\frac{9}{64},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}\cdot\frac{27}{4}\cdot\frac{9}{128}=\frac{9}{64}.$$

Άρα είναι $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Σημείωση. *Λόγω της μη ύπαρξης παρενθέσεων που να δίνουν προτεραιότητα στις πράξεις διαίρεσης και πολλαπλασιασμού θεωρούμε δεκτή και τη λύση της μορφής*

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{3^3}-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{3^2}{2^7}=\left(\frac{9}{27}-\frac{1}{27}\right):\left(\frac{10}{27}-\frac{6}{27}\right)\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{4}{27}\cdot\frac{9}{128}=\frac{8}{27}:\frac{1}{96}=\frac{768}{27}.$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $\mathrm{A}<1<\mathrm{B}$, δηλαδή $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Λόγω της υπόθεσης $\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}=\frac{1}{6}$, έχουμε ότι:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{4\alpha}+\frac{12-2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma-3}{12}=\frac{8}{4\alpha}-\frac{\alpha}{4\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{2\beta}{3\beta}+\frac{2\gamma}{12}-\frac{3}{12}$$

$$=\frac{2}{\alpha}-\frac{1}{4}+\frac{4}{\beta}-\frac{2}{3}+\frac{\gamma}{6}-\frac{1}{4}=\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{4}{\beta}+\frac{\gamma}{6}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=-1.$$

Πρόβλημα 2

Ένας έμπορος αυτοκινήτων είχε στο κατάστημά του την αρχή της περυσινής χρονιάς 20 αυτοκίνητα τύπου Α και 60 αυτοκίνητα τύπου Β. Η τιμή πώλησης για κάθε αυτοκίνητο τύπου Α είναι 10000 ευρώ, ενώ για κάθε αυτοκίνητο τύπου Β είναι 12000 ευρώ.

Στο τέλος της χρονιάς είχε πουλήσει το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α και το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β.

Να βρείτε ποιο θα είναι το κέρδος του από την πώληση των αυτοκινήτων, αν γνωρίζετε ότι από καθένα αυτοκίνητο τύπου Α κερδίζει το 5% της τιμής πώλησής του, ενώ από καθένα αυτοκίνητο τύπου Β κερδίζει το 10% της τιμής πώλησής του.

Λύση

Το 30% των αυτοκινήτων τύπου Α είναι $20 \cdot \frac{30}{100} = 6$ αυτοκίνητα, ενώ το 60% του συνόλου των αυτοκινήτων τύπου Α και Β είναι $(20+60) \cdot \frac{60}{100} = 80 \cdot \frac{60}{100} = 48$ αυτοκίνητα. Επομένως από τα αυτοκίνητα τύπου Β πουλήθηκαν $48 - 6 = 42$ αυτοκίνητα.

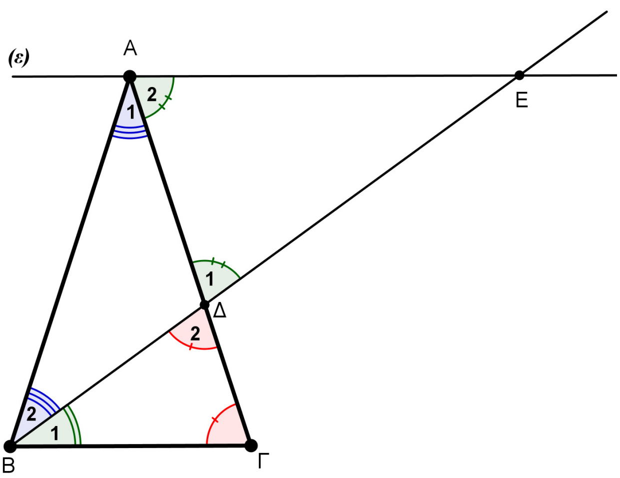
Από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Α κερδίζει $10000 \cdot \frac{5}{100} = 500$ ευρώ, ενώ από την πώληση καθενός αυτοκινήτου τύπου Β κερδίζει $12000 \cdot \frac{10}{100} = 1200$ ευρώ. Επομένως από την πώληση των αυτοκινήτων ο έμπορος κέρδισε

$$6 \cdot 500 + 42 \cdot 1200 = 3000 + 50400 = 53400 \text{ ευρώ.}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}} = 36^0$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ και την ευθεία ε στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, ΑΔΕ και ΑΒΕ είναι ισοσκελή.

Λύση



Σχήμα 1

Το άθροισμα των γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι 180^o Επειδή όμως ισχύει $\hat{\text{Α}} = 36^o$, θα έχουμε: $\hat{\text{Β}} = \hat{\Gamma} = 72^o$.

Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Β}}$, οπότε $\hat{\text{Β}}_1 = \hat{\text{Β}}_2 = \frac{\hat{\text{Β}}}{2} = \frac{72^o}{2} = 36^o$.

Επειδή τώρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 36^o$, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο ΒΓΔ ισχύει $\hat{B}_1 = 36^o$ και $\hat{\Gamma} = 72^o$. Άρα $\hat{\Delta}_2 = 72^o$.

Από την ισότητα των γωνιών $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}_2 = 72^o$, προκύπτει ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{A}_2$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ.

Από την ισότητα τέλος των γωνιών $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 72^o$ (ως κατά κορυφή), προκύπτει η ισότητα $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2 = 72^o$. Επομένως το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.

Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{E}$ είναι ίσες διότι είναι εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΕ. Επίσης $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} = 36^o$, οπότε θα είναι και $\hat{B}_2 = \hat{E}$. Επομένως και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $A = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $A - B = 27$, όπου $B = \overline{\alpha\gamma\beta} = 100\alpha + 10\gamma + \beta$.

(ii) Το άθροισμα των ψηφίων β, γ ισούται με το μικρότερο ακέραιο που είναι λύση της ανίσωσης: $3x + 12 < 5x - 1$.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$A - B = 27 \Leftrightarrow 9\beta - 9\gamma = 27 \Leftrightarrow 9\cdot(\beta - \gamma) = 27 \Leftrightarrow \beta - \gamma = 3. \quad (1)$$

Για την ανίσωση του ερωτήματος (ii) έχουμε:

$$3x + 12 < 5x - 1 \Leftrightarrow 3x - 5x < -12 - 1 \Leftrightarrow -2x < -13 \Leftrightarrow 2x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{2}.$$

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος που είναι λύση της είναι ο 7, οπότε έχουμε:

$$\beta + \gamma = 7. \quad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε

$$2\beta = 10,\ 2\gamma = 4 \Leftrightarrow \beta = 5,\ \gamma = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε ως εξής: Επειδή οι ακέραιοι β, γ είναι ψηφία με διαφορά $\beta - \gamma = 3$ θα είναι $\beta > \gamma$ και επειδή επιπλέον έχουν άθροισμα 7, οι δυνατές τιμές τους είναι

$$\beta = 7,\ \gamma = 0 \text{ ή } \beta = 6,\ \gamma = 1 \text{ ή } \beta = 5,\ \gamma = 2 \text{ ή } \beta = 4,\ \gamma = 3.$$

Επειδή πρέπει $\beta - \gamma = 3$ οι αποδεκτές τιμές είναι $\beta = 5,\ \gamma = 2$.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $A = \overline{\alpha 52}$ με άθροισμα ψηφίων $\alpha + 7$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 3, πρέπει και αρκεί ο ακέραιος $\alpha + 7$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε, αφού το α είναι ψηφίο, οι κατάλληλες τιμές του είναι: $\alpha = 2$ ή $\alpha = 5$ ή $\alpha = 8$.

Επομένως, έχουμε $A = 252$ ή $A = 552$ ή $A = 852$

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1.$$

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\beta}\right)^{-3}-9\beta^2-20,$$

για $\beta=-\frac{1}{3}$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\frac{2x+18}{4}-\frac{7-3x}{8}=1 \Leftrightarrow 2\cdot(2x+18)-(7-3x)=8 \Leftrightarrow 4x+36-7+3x=8$$

$$\Leftrightarrow 7x+29=8 \Leftrightarrow 7x=8-29 \Leftrightarrow 7x=-21 \Leftrightarrow x=-3.$$

(β) Για $\beta=-\frac{1}{3}$ η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right)^{-3}-9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-20=\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^{-3}-9\cdot\frac{1}{9}-20$$

$$=\left(9+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)^3-1-20=\left(\frac{81}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot(-1)-1-20=-\frac{82}{9}-1-20$$

$$=-\frac{82}{9}-\frac{9}{9}-\frac{180}{9}=-\frac{271}{9}.$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι α,β είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 0 και τέτοιοι ώστε

$$\alpha\le 10,\ \beta\ge 12 \text{ και } (\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0.$$

Να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=3\alpha-2\beta$.

Λύση

Είναι $\alpha\le 10$, οπότε $\alpha-12<0$. Άρα, για να αληθεύει η ανίσωση $(\alpha-12)\cdot(40-2\beta)\le 0$, αρκεί να ισχύει ότι: $40-2\beta\ge 0 \Leftrightarrow 40\ge 2\beta \Leftrightarrow \beta\le 20$. Έτσι έχουμε:

$$0\le\alpha\le 10 \text{ και } 12\le\beta\le 20 \Rightarrow 0\le 3\alpha\le 30 \text{ και } 24\le 2\beta\le 40$$

$$\Rightarrow 0\le 3\alpha\le 30 \text{ και } -40\le -2\beta\le -24,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$-40\le \mathrm{A}=3\alpha-2\beta\le 6,$$

οπότε η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Α είναι 6, ενώ η μικρότερη τιμή της είναι -40.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Δίνεται ακόμη ότι ο κύκλος C που περνάει από τα σημεία Γ, Δ και Ε έχει ακτίνα 4 cm.

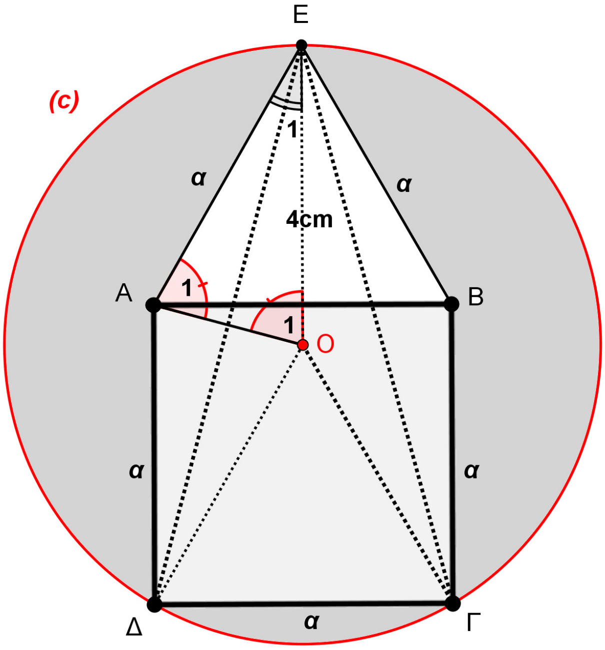
(i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $Ε\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(ii) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου.

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται εξωτερικά του σχήματος $ΕΑ\Delta\Gamma ΒΕ$ και εσωτερικά του κύκλου (c).

Λύση

(i) Στα τρίγωνα $ΑΕ\Delta$ και $ΒΕ\Gamma$ ισχύουν: $ΑΕ = ΒΕ = \alpha$, $Α\Delta = Β\Gamma = \alpha$ και $Ε\hat{Α}\Delta = Ε\hat{Β}\Gamma = 90^o + 60^o = 150^o$.



Σχήμα 2

Άρα τα τρίγωνα $ΑΕ\Delta$ και $ΒΕ\Gamma$ είναι ίσα και κατά συνέπεια $Ε\Delta = Ε\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $Ε\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(ii) Εφόσον $Ε\Delta = Ε\Gamma$, το σημείο $Ε$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος $\Delta\Gamma$ (που ταυτίζεται με τη μεσοκάθετη του τμήματος $ΑΒ$). Επίσης $ΕΑ = ΕΒ$, οπότε το σημείο $Ε$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος $ΑΒ$. Άρα η $ΟΕ$ είναι μεσοκάθετη της $ΑΒ$ και κατά συνέπεια διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Ε}Β$ του ισόπλευρου τριγώνου $ΑΕΒ$. Άρα είναι $\hat{Ε}_1 = 30^o$.

$$\left.\begin{array}{l} ΑΕ = Α\Delta = \alpha \\ ΟΕ = Ο\Delta = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow ΟΑ \text{ μεσοκάθετη της } Ε\Delta \Rightarrow ΟΑ \text{ διχοτόμος της } \Delta\hat{Α}Ε \Rightarrow \hat{Α}_1 = 75^o.$$

Στο τρίγωνο $ΑΟΕ$ έχουμε: $\hat{Α}_1 = 75^o$ και $\hat{Ε}_1 = 30^o$. Άρα $\hat{Ο}_1 = 75^o$, οπότε το τρίγωνο $ΑΟΕ$ είναι ισοσκελές με $ΕΑ = ΕΟ = \alpha = 4cm$.

(iii) Το εμβαδόν του κύκλου (c) είναι: $Ε_c = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$.

Το εμβαδόν του τετραγώνου $ΑΒ\Gamma\Delta$ είναι: $Ε_{τετ} = 4^2 = 16$, ενώ το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΕ$ είναι: $Ε_{τρ} = 4\sqrt{3}$. Άρα το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας είναι: $Ε = 16\pi - 16 - 4\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τριψήφιο θετικό ακέραιο $Α = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma$, αν ισχύουν και οι τρεις επόμενες προτάσεις:

(i) $Α - Β = 198$, όπου $Β = \overline{\gamma\beta\alpha} = 100\gamma + 10\beta + \alpha$,

(ii) Η εξίσωση $\dfrac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\dfrac{\alpha-2\gamma}{x}=1$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 4.

(iii) Ο αριθμός Α διαιρείται με το 9.

Λύση

Σύμφωνα με την πρόταση (i) έχουμε:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=198 \Leftrightarrow 99\cdot(\alpha-\gamma)=198 \Leftrightarrow \alpha-\gamma=2\,. \qquad (1)$$

Η εξίσωση της πρότασης (ii) , αν $\gamma \neq 2\alpha$ και $x \neq 0$, γράφεται:

$$\frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{\alpha-2\gamma}{x}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x+\alpha-2\gamma}{2\alpha-\gamma}-\frac{x+\alpha-2\gamma}{x}=0 \Leftrightarrow (x+\alpha-2\gamma)\left(\frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\alpha-2\gamma=0 \text{ ή } \frac{1}{2\alpha-\gamma}-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow x=2\gamma-\alpha \text{ ή } x=2\alpha-\gamma$$

Επειδή, λόγω της (ii) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι 4, έχουμε ότι

$$(2\gamma-\alpha)+(2\alpha-\gamma)=4 \Leftrightarrow \alpha+\gamma=4\,, \qquad (2)$$

με τους περιορισμούς για τις παραμέτρους $\gamma \neq 2\alpha$ και $\alpha \neq 2\gamma$.

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$2\alpha=6,\ 2\gamma=2 \Leftrightarrow \alpha=3,\ \gamma=1$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται οι περιορισμοί για την εξίσωση.

Άρα ο θετικός ακέραιος Α θα έχει τη μορφή $\mathrm{A}=\overline{3\beta 1}$ με άθροισμα ψηφίων $4+\beta$. Επειδή, σύμφωνα με την πρόταση (iii) ο Α διαιρείται με το 9, πρέπει και αρκεί $4+\beta=\pi o\lambda.(9)$, οπότε, αφού το β είναι ψηφίο, η μοναδική δυνατή τιμή του είναι $\beta=5$.

Επομένως, ο ζητούμενος θετικός ακέραιος Α είναι ο 351.

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α, β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta = 0$, ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10} = \alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α.

Έστω ότι, για $\beta \neq 0$, ο αριθμός $\rho = \alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho - \alpha = \left(\alpha + \beta\sqrt{10}\right) - \alpha = \beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\dfrac{\rho - \alpha}{\beta} = \sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta = 0$ και για κάθε ρητό αριθμό α.

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x = \sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2 = \left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5 + \frac{2}{4} + \sqrt{10} = \frac{11}{2} + \sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x| - 2\right)^2 = x^2 + 4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow x^2 - 4|x| + 4 = x^2 + 4\alpha \Leftrightarrow |x| = 1 - \alpha.$$

Επειδή είναι $|x| \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha < 1$, οπότε είναι $1 - \alpha > 0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
  $$x = 1 - \alpha \ \text{ ή } \ x = \alpha - 1.$$
- $\alpha = 1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x = 0$.
- $\alpha > 1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του Α και είναι παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω Ε το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή Α. Από το Α τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την ΕΒ η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΒΓ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι : ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΔΑ.

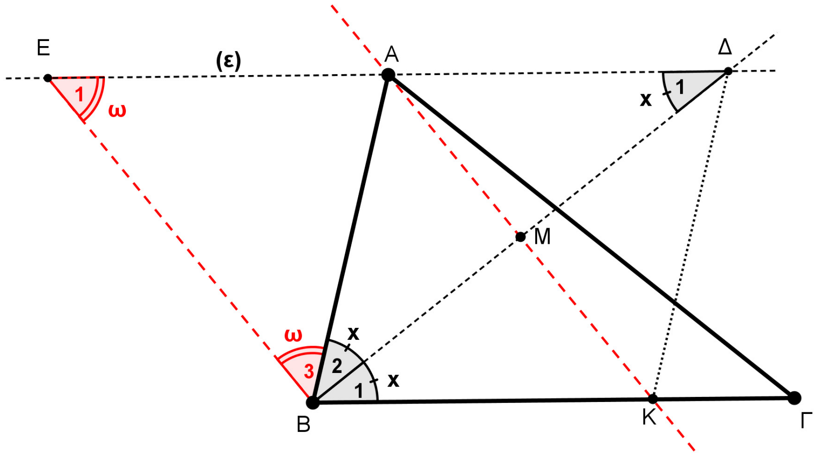
Λύση

Επειδή είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ θα ισχύει: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Επίσης η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \frac{\hat{B}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$AB = A\Delta. \tag{1}$$



Σχήμα 3

Επειδή E είναι το συμμετρικό του Δ ως προς το A, θα ισχύει:

$$A\Delta = AE. \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε $AE = AB$ και κατά συνέπεια $\hat{E}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα $BE\Delta$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{E}_1 = 180^o \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^o,$$

δηλαδή το τρίγωνο $BE\Delta$ είναι ορθογώνιο ($BE \perp B\Delta$) και εφόσον $AM \parallel BE$ καταλήγουμε:

$$AM \perp B\Delta.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $BA\Delta$ η AM είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς $B\Delta$.

Επειδή τώρα το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετη του $B\Delta$, το τρίγωνο $KB\Delta$ είναι ισοσκελές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$ (διότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2}$ και $B\Delta$ κοινή πλευρά). Άρα θα έχουν και $AB = A\Delta = BK = K\Delta$, οπότε το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2.$$

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 2010^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2010^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - 2(2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3} \cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3}.$$

Άρα έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)=\frac{2010^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot 2010^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\beta-\gamma-\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma,$$

γιατί, αν ήταν $\alpha-\beta\neq 0$ ή $\beta-\gamma\neq 0$ ή $\gamma-\alpha\neq 0,$ τότε θα είχαμε

$$\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2>0.$$

Επομένως, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=2010$ λαμβάνουμε $\alpha=\beta=\gamma=670$.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\left(|x|-1\right)^2 = 2x+\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-2|x|+1=2x+\alpha \Leftrightarrow x^2-2\left(|x|+x\right)+1-\alpha=0. \qquad (1)$$

Λόγω της παρουσίας της απόλυτης τιμής του x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $x \geq 0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2-4x+1-\alpha=0, \qquad (2)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 16-4(1-\alpha)=4(3+\alpha)$.

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν, $\alpha \geq -3$. Για να διαπιστώσουμε πόσες από αυτές είναι δεκτές θεωρούμε το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών που είναι

$$\mathrm{P}=1-\alpha \text{ και } \mathrm{S}=4>0.$$

Έτσι, για την εξίσωση (2) έχουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha \leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες** μη αρνητικές, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$. Ειδικότερα, αν $\alpha=1$, τότε η εξίσωση έχει τις ρίζες $x=4$ και $x=0$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **μία** μόνο ρίζα μη αρνητική, τη $x=2+\sqrt{3+\alpha}$

(ii) $x<0$. Τότε η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2+1-\alpha=0, \qquad (3)$$

η οποία έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, τη $x=-\sqrt{\alpha-1}$, αν $\alpha>1$.

Συνοπτικά, από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε για τη δεδομένη εξίσωση, τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν $\alpha<-3$, η εξίσωση **δεν έχει ρίζες** στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=-3$, τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή ρίζα**, $x=2$.
- Αν $-3<\alpha\leq 1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, $x=2\pm\sqrt{3+\alpha}$.
- Αν $\alpha>1$, τότε η εξίσωση έχει **δύο ρίζες**, τις $x=2+\sqrt{3+\alpha}$, $x=-\sqrt{\alpha-1}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 8 \\ x^2+y^2+z^2 &= 26 \\ xy+xz &= (yz+1)^2. \end{aligned}$$

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=26 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ xy+xz=(yz+1)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=8 \\ xy+yz+zx=19 \\ 19-yz=(yz+1)^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ (yz)^2+3(yz)-18=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \text{ ή } yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)+yz=19 \\ yz=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(y+z)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=16 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x(8-x)=25 \\ yz=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+16=0 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0 \\ yz=-6 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x=4 \\ yz=3 \end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c} x+(y+z)=8 \\ x^2-8x+25=0\,(\text{αδύνατη στο } \mathbb{R}) \\ yz=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=4 \\ y+z=4 \\ yz=3 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y(4-y)=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=4 \\ z=4-y \\ y^2-4y+3=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y,z)=(4,1,3) \text{ ή } (x,y,z)=(4,3,1).$$

Πρόβλημα 3

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \le \frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=(\alpha+\beta)\gamma, \qquad (1)$$

$$\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}\ge\frac{(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma. \qquad (2)$$

Η ισότητα στη (2) ισχύει, αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta$.

Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\gamma\le\frac{(\alpha^3+\beta^3)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}<(\alpha+\beta)\gamma. \qquad (3)$$

Ομοίως λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\alpha\le\frac{(\beta^3+\gamma^3)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}<(\beta+\gamma)\alpha, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\beta\le\frac{(\gamma^3+\alpha^3)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<(\gamma+\alpha)\beta. \qquad (5)$$

Οι ισότητα στις (4) και (5) ισχύει αν, και μόνον αν, $\beta=\gamma$ και $\gamma=\alpha$, αντίστοιχα.

Από τις (3), (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε :.

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \le \frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}<2\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right) \qquad (6)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \qquad (7)$$

οπότε από τις (6) και (7) προκύπτουν οι ζητούμενες ανισότητες.

Η ισότητα ισχύει αν, και μόνον αν, $\alpha=\beta=\gamma$, οπότε από τη σχέση $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Παρατήρηση. *Η δεύτερη ανισότητα είναι γνήσια από την κατασκευή της άσκησης με τους* α,β,γ *θετικούς πραγματικούς αριθμούς, λόγω της ισότητας* $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$. *Στην περίπτωση που επιτρέψουμε οι* α,β,γ *να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, δίνοντας στην παραπάνω ισότητα τη μορφή* $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, *τότε η δεύτερη ανισότητα γίνεται*

$$\frac{\left(\alpha^3+\beta^3\right)\gamma}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left(\beta^3+\gamma^3\right)\alpha}{\beta^2+\gamma^2}+\frac{\left(\gamma^3+\alpha^3\right)\beta}{\gamma^2+\alpha^2}\le 2,$$

όπου η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, ένας μόνον από τους α,β,γ *είναι μηδέν και οι άλλοι δύο αντίστροφοι.*

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ (με $AB<A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Από το σημείο Α φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1), που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r=OM$ (Μ είναι το μέσο της ΒΓ). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Τ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $BN<BM$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ, τέμνει την ΒΓ στο σημείο Κ και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\Gamma K<\Gamma M$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και ΑΜ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Οι χορδές AN_1, AK_1 και ΒΓ του κύκλου (c), είναι εφαπτόμενες του κύκλου (c_1) στα σημεία Τ,Σ και Μ αντίστοιχα. Άρα οι ακτίνες ΟΤ,ΟΣ και ΟΜ του κύκλου (c_1), είναι κάθετες προς τις χορδές AN_1, AK_1 και ΒΓ του κύκλου (c) αντίστοιχα. Δηλαδή οι ακτίνες ΟΤ,ΟΣ και ΟΜ του κύκλου (c_1), είναι τα αποστήματα που αντιστοιχούν στις χορδές AN_1, AK_1 και ΒΓ του κύκλου (c). Τα αποστήματα ΟΤ,ΟΣ και ΟΜ είναι ίσα μεταξύ τους , αφού είναι ακτίνες του κύκλου (c_1).

Άρα $AN_1 = AK_1 = B\Gamma$ (*) και τα σημεία Τ,Σ,Μ είναι τα μέσα των χορδών AN_1, AK_1 και ΒΓ, αντίστοιχα. Από τους προηγούμενους συλλογισμούς, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$MB=M\Gamma=TA=TN_1=\Sigma A=\Sigma K_1 \qquad (1)$$

Το σημείο Ν βρίσκεται εκτός του κύκλου (c_1) και ΝΜ, ΝΤ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα, οπότε

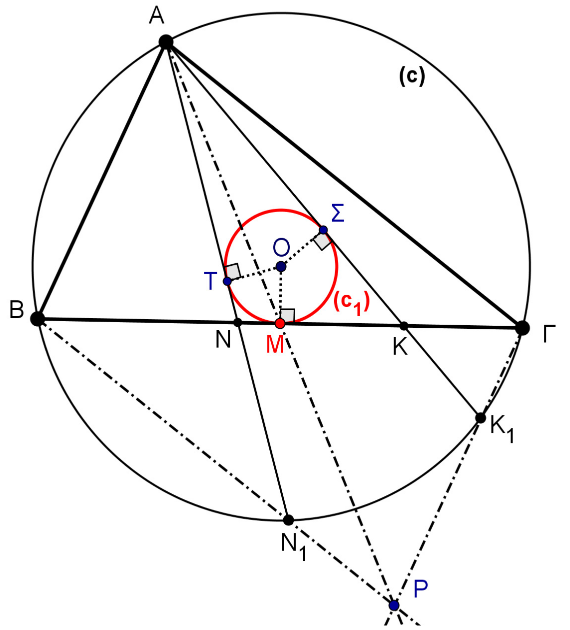
$$NM=NT \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}(1): & MB = TN_1 \\ (2): & NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{MB}{MN} = \frac{TN_1}{NT} \Rightarrow TM \, P BN_1 \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας και πάλι τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}(1): & M\Gamma = TA \\ (2): & NM = NT\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{M\Gamma}{NM} = \frac{TA}{NT} \Rightarrow TM \, / / A\Gamma \qquad (4)$$



Σχήμα 4

Από τις (3) και (4) έχουμε $BN_1 \, PA\Gamma$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\Gamma K_1 \, PAB$. Αν λοιπόν P είναι η τομή των ευθειών BN_1 και ΓK_1, τότε το τετράπλευρο $AB P\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM θα συντρέχουν στο P.

(*) "Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα."
(Θεώρημα ΙΙΙ, Σελ.46, του Σχολικού βιβλίου της ΕΜΕ)

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν οι α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12$$

Λύση

Από τις γνωστές ανισότητες

$$\alpha^2+4\beta^2\geq 4\alpha\beta,\ \beta^2+4\gamma^2\geq 4\beta\gamma,\ \gamma^2+4\alpha^2\geq 4\gamma\alpha, \tag{1}$$

λαμβάνουμε τις ανισότητες:

$$\frac{\alpha^2+4\beta^2}{4\alpha\beta}\geq\frac{4\alpha\beta}{4\alpha\beta}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \alpha=2\beta)\Rightarrow\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}\geq\gamma \tag{2}$$

$$\frac{\beta^2+4\gamma^2}{4\beta\gamma}\geq\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \beta=2\gamma)\Rightarrow\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}\geq\alpha \tag{3}$$

$$\frac{\gamma^2+4\alpha^2}{4\gamma\alpha}\geq\frac{4\gamma\alpha}{4\gamma\alpha}=1 \text{ (η ισότητα ισχύει για } \gamma=2\alpha)\Rightarrow\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\beta \tag{4}$$

Από τις (2), (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}\geq\alpha+\beta+\gamma=12\,. \tag{5}$$

Η ισότητα στη σχέση (5) ισχύει, αν, και μόνον αν, ισχύουν οι ισότητες και στις τρεις σχέσεις (2), (3) και (4) ή ισοδύναμα:

$$\alpha=2\beta,\ \beta=2\gamma,\ \gamma=2\alpha\,,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma=0$, που είναι άτοπο, αφού οι αριθμοί α,β,γ είναι θετικοί. Επομένως έχουμε αποδείξει ότι:

$$\frac{\left(\alpha^2+4\beta^2\right)\gamma}{4\alpha\beta}+\frac{\left(\beta^2+4\gamma^2\right)\alpha}{4\beta\gamma}+\frac{\left(\gamma^2+4\alpha^2\right)\beta}{4\gamma\alpha}>12\,.$$

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{aligned} x^2+2xy&=5\\ y^2-3xy&=-2\end{aligned}\right\}. \tag{Σ}$$

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση (x,y) του συστήματος (Σ), με $x=0$ ή $y=0$, τότε λαμβάνουμε 0 = 5 ή 0 = -2, άτοπο.

Για $xy\neq 0$, η μία εξίσωση του συστήματος μπορεί να αντικατασταθεί με αυτήν που προκύπτει από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, με διαίρεση κατά μέλη:

$$\frac{x^2+2xy}{y^2-3xy}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{1+2\cdot\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\cdot\frac{y}{x}}=-\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{1+2m}{m^2-3m}=-\frac{5}{2}\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}5m^2-11m+2=0\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}m=2 \text{ ή } m=\frac{1}{5}\\ \frac{y}{x}=m\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}m=2\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}m=\frac{1}{5}\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}.$$

Επομένως έχουμε:

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2+2xy=5\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}x^2+2xy=5\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}5x^2=5\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}\frac{7x^2}{5}=5\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=\pm1\\ y=2x\end{array}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{array}{c}x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{7}\\ y=\frac{x}{5}\end{array}\right\}$$

$$(x,y)=(1,2) \text{ ή } (x,y)=(-1,-2) \text{ ή } (x,y)=\left(\frac{5\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7}\right) \text{ ή } (x,y)=\left(-\frac{5\sqrt{7}}{7},-\frac{\sqrt{7}}{7}\right).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο Ο και ακτίνα R. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΟΒ (έστω (c_1)), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημείο Ν. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΚΝ και (c_3) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΓΚ. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι (c_1), (c_2) και (c_3) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Λύση

Έστω R_1, R_2, R_3 οι ακτίνες των κύκλων (c_1), (c_2) και (c_3) αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $R_1=R_2=R_3$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΚΟΒ έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{B}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΟΝΒ έχουμε: $\hat{A}_2=\hat{B}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ, έχουμε: $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΓ, έχουμε: $\hat{A}_1=\hat{\Gamma}_1$.

Από τις παραπάνω ισότητες των γωνιών, προκύπτει $N\hat{A}\Gamma=K\hat{B}\Gamma=\hat{\Gamma}$, δηλαδή τα τρίγωνα ΝΑΓ και ΚΒΓ είναι ισοσκελή, οπότε $NA=N\Gamma$ και $KB=K\Gamma$.

Τα τρίγωνα τώρα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $OB=O\Gamma$ (ακτίνες του κύκλου (c))

2. ΟΚ (κοινή)

3. $KB=K\Gamma$ (από το ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΓ).

Εφόσον λοιπόν τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα, θα έχουν ίσους τους περιγεγραμμένους κύκλους τους (c_1) και (c_3).

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) (1^ος^ τρόπος)

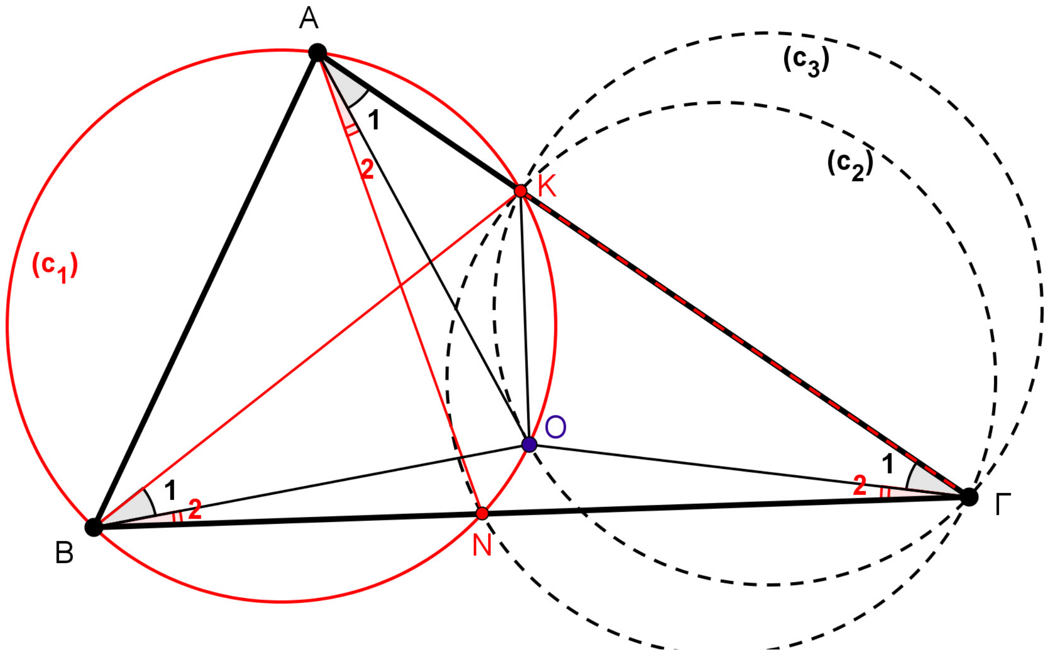
Θεωρούμε τώρα τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ που έχουν περιγεγραμμένους κύκλους (c_1) και (c_2) αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια τον τύπο $E=(\mathrm{AB\Gamma})=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ που εκφράζει το εμβαδό τριγώνου συναρτήσει του μήκους των πλευρών και της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Έστω λοιπόν $E_1=(\mathrm{KNB})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΒ και $E_2=(\mathrm{KN\Gamma})$ το εμβαδό του τριγώνου ΚΝΓ. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} E_1=(\mathrm{KNB})=\dfrac{\mathrm{NB\cdot NK\cdot BK}}{4R_1} \\ E_2=(\mathrm{KN\Gamma})=\dfrac{\mathrm{N\Gamma\cdot NK\cdot \Gamma K}}{4R_2} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}=\frac{4R_2\cdot\mathrm{NB\cdot NK\cdot BK}}{4R_1\cdot\mathrm{N\Gamma\cdot NK\cdot \Gamma K}}\Rightarrow\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}=\frac{R_2\cdot\mathrm{NB}}{R_1\cdot\mathrm{N\Gamma}}, \qquad (1)$$

(για τη τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $\mathrm{KB}=\mathrm{K\Gamma}$, που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{KB\Gamma}$).



Σχήμα 5

Τα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουν τις γωνίες τους $\mathrm{K\hat{N}B}$ και $\mathrm{K\hat{N}\Gamma}$ παραπληρωματικές. Άρα:

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{\mathrm{NB\cdot NK}}{\mathrm{N\Gamma\cdot NK}}\Rightarrow\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}_2}=\frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{N\Gamma}}\ . \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $R_1=R_2$.

Απόδειξη της Ισότητας των Κύκλων (c_1) και (c_2) ($2^{ος}$ τρόπος)

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο των ημιτόνων:

$$\frac{a}{\text{ημA}}=\frac{\beta}{\text{ημB}}=\frac{\gamma}{\text{ημΓ}}=2R\,.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΚΝΒ και ΚΝΓ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{KN}}{\text{ημ}(\mathrm{K\hat{B}N})}=2R_1 \text{ και } \frac{\mathrm{KN}}{\text{ημ}(\hat{\Gamma})}=2R_2\,.$$

Από την ισότητα τώρα των γωνιών $\mathrm{K\hat{B}N}=\hat{\Gamma}$, καταλήγουμε: $R_1=R_2$.

Πρόβλημα 4

Η ακολουθία $a_n, n\in ¥^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1}=a_n-\frac{k}{2^n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ \ a_1=1,$$

όπου k θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο a_n της ακολουθίας ως συνάρτηση των n και k.

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι $k,\ n$ τέτοιοι ώστε : $a_n=\dfrac{1}{2^{1000}}$.

Λύση

(i) Από τις υποθέσεις έχουμε

$$a_2=a_1-\frac{k}{2},\ a_3=a_2-\frac{k}{2^2},\ \dots\ ,\ a_n=a_{n-1}-\frac{k}{2^{n-1}},\ \ n=1,2,3,\dots$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$a_n=a_1-k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=1-k\left(-1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$a_n=1+k-2k\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\left(1-k\right)+\frac{k}{2^{n-1}},\ n=1,2,3,\dots$$

(ii) Έστω ότι:

$$a_n=\frac{1}{2^{1000}}\Leftrightarrow\left(1-k\right)+\frac{k}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{1000}}\Leftrightarrow\left(1-k\right)\cdot 2^{n-1+1000}+k\cdot 2^{1000}=2^{n-1},$$

όπου k θετικός ακέραιος και $n\in\mathbb{N}^*,\ n>1$. Τότε έχουμε

$$2^{n-1+1000}-2^{n-1}=k\left(2^{n-1+1000}-2^{1000}\right).$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{2^{n-1+1000}-2^{n-1}}{2^{n-1+1000}-2^{1000}}>0,\ k\in\mathbb{N}. \qquad (1)$$

- Αν υποθέσουμε ότι $n-1>1000\Leftrightarrow n>1001$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει, ότι $k\in\left(0,1\right)$, άτοπο.
- Αν υποθέσουμε ότι $n-1<1000\Leftrightarrow n<1001$, τότε έχουμε:

$$k-1=\frac{2^{n-1+1000}-2^{n-1}}{2^{n-1+1000}-2^{1000}}-1=\frac{2^{1000}-2^{n-1}}{2^{n-1+1000}-2^{1000}}=\frac{1-2^{n-1001}}{2^{n-1}-1},$$

  οπότε θα είναι $0<k-1<1$, που είναι άτοπο.

Άρα είναι $n-1=1000\Leftrightarrow n=1001$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $k=1$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right) \text{ και } \mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}.$$

(β) Αν ισχύει ότι:

$$6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma \text{ και } \alpha\beta\gamma\neq 0,$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}.$$

Λύση

(α) Έχουμε

$$\mathrm{A}=\frac{2^3}{31}\cdot\left(2^3+2^0+\frac{3}{8}:\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(8+1+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot\left(9+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{31}\cdot 9=\frac{72}{31},$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{3^4}-\frac{2}{9^2}\right)+\frac{3}{2^4}=\left(\frac{3}{12}-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{8}{81}-\frac{2}{81}\right)+\frac{3}{16}=\frac{1}{6}\cdot\frac{81}{6}+\frac{3}{16}=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}=\frac{39}{16}.$$

Επειδή είναι $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\frac{72}{31}-\frac{39}{16}=\frac{72\cdot 16-39\cdot 31}{31\cdot 16}=\frac{1152-1209}{496}<0$, έπεται ότι $\mathrm{A}<\mathrm{B}$.

(β) Έχουμε

$$\Gamma=\frac{8-\alpha}{2\alpha}+\frac{12-\beta}{3\beta}+\frac{16-\gamma}{4\gamma}=\frac{8}{2\alpha}-\frac{\alpha}{2\alpha}+\frac{12}{3\beta}-\frac{\beta}{3\beta}+\frac{16}{4\gamma}-\frac{\gamma}{4\gamma}$$

$$=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}.$$

Από την υπόθεση $6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=11\alpha\beta\gamma$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$ με διαίρεση και των δύο μελών της ισότητας με $6\alpha\beta\gamma\neq 0$ προκύπτει ότι:

$$\frac{6(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{6\alpha\beta\gamma}=\frac{11\alpha\beta\gamma}{6\alpha\beta\gamma}\Rightarrow\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{11}{6},$$

οπότε η παράσταση Γ έχει τιμή

$$\Gamma=4\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{13}{12}=4\cdot\frac{11}{6}-\frac{13}{12}=\frac{44}{6}-\frac{13}{12}=\frac{75}{12}=\frac{25}{4}.$$

Πρόβλημα 2

Ένας πελάτης αγόρασε από μία έκθεση αυτοκινήτων ένα αυτοκίνητο για το οποίο πλήρωσε με μετρητά το μισό της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου, ενώ για τα υπόλοιπα συμφωνήθηκε να πληρώσει με 24 μηνιαίες δόσεις των 500 ευρώ. Με αυτόν το διακανονισμό επιβαρύνθηκε με τόκους που συνολικά αντιστοιχούν στο 10% της τιμής πώλησης του αυτοκινήτου. Να βρείτε την τιμή πώλησης του αυτοκινήτου και πόσα συνολικά θα πληρώσει συνολικά ο πελάτης.

Λύση.

Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι x, τότε, σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος θα έχουμε την εξίσωση:

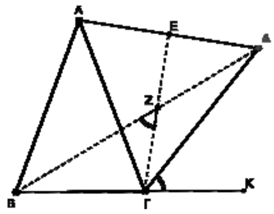
$$\frac{x}{2}+24\cdot 500=x+\frac{10x}{100}\Leftrightarrow\frac{x}{2}+12000=x+\frac{x}{10}\Leftrightarrow 5x+120000=10x+x$$

$$\Leftrightarrow 6x=120000\Leftrightarrow x=\frac{120000}{6}=20000.$$

Άρα η τιμή πώλησης του αυτοκινήτου είναι $x=20000$ ευρώ και ο πελάτης θα πληρώσει συνολικά $x+\frac{10x}{100}=\frac{11x}{10}=\frac{11\cdot 20000}{10}=22000$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

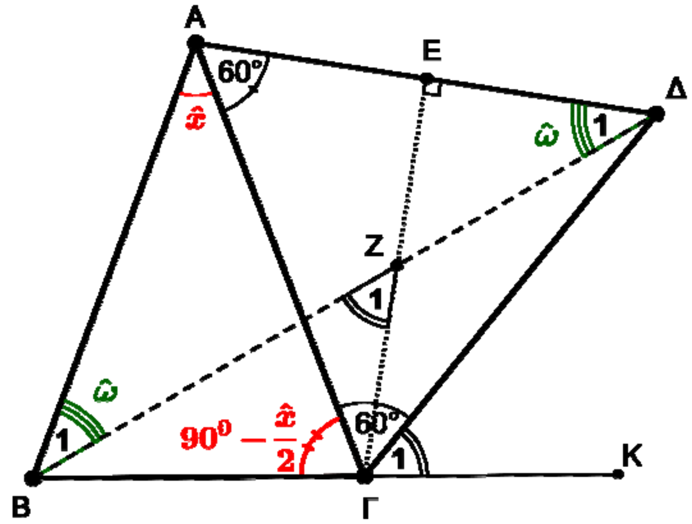
Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$), το τρίγωνο $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ είναι ισόπλευρο και E είναι το μέσο του $\mathrm{A\Delta}$. Αν το K βρίσκεται στη προέκταση της $\mathrm{B\Gamma}$ και οι $\mathrm{B\Delta},\mathrm{\Gamma E}$ τέμνονται στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\mathrm{B\hat{Z}\Gamma}$ και $\mathrm{K\hat{\Gamma}\Delta}$, είναι ίσες.



Λύση

Έστω $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}=\hat{x}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^o\Leftrightarrow\hat{x}+2\hat{\Gamma}=180^o\Leftrightarrow\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=90^o-\frac{\hat{x}}{2}. \qquad (1)$$



Σχήμα 1

Από το ισόπλευρο τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma\Delta}$, έχουμε: $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}=60^0$. Οι γωνίες τώρα $\hat{\Gamma},\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}$ και $\hat{\Gamma}_1$ είναι διαδοχικές με την πρώτη και την τελευταία πλευρά τους αντικείμενες ημιευθείες, έχουμε ότι $\hat{\Gamma}+\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta}+\hat{\Gamma}_1=180^o$, οπότε

$$\hat{\Gamma}_1 = 180^o - 60^o - \left(90^o - \frac{\hat{x}}{2}\right) \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (2)$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$, θέτουμε $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Delta}_1 = \hat{\omega}$ και παίρνουμε:

$$2\hat{\omega} + \hat{x} + 60^0 = 180 \Leftrightarrow \hat{\omega} = 60^o - \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο τέλος $\mathrm{E\Delta Z}$, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{Z}}_1 = \mathrm{E\hat{Z}\Delta} = 90^o - \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{\mathrm{Z}}_1 = 30^o + \frac{\hat{x}}{2}. \qquad (4)$$

Πρόβλημα 4

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 5 και στη συνέχεια, από τους ακέραιους που απέμειναν, διαγράφουμε αυτούς που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, ..., 2012\}$ έχει 2012 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 5κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 5\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le \frac{2012}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \le \kappa \le 402\frac{2}{5} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 402\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 5 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 402.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$1 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι 251.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 5 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\mathrm{EK\Pi}\{5, 8\} = 40$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$1 \le 40\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le \frac{2012}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{40} \le \kappa \le 50\frac{12}{40} \Leftrightarrow \kappa \in \{1, 2, ..., 50\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι 50.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $402 + 251 - 50 = 603$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $2012 - 603 = 1409$ στοιχεία.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + 237\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{4\beta^2}\right)^3 + \frac{9\alpha - 20\beta^2}{\beta^2},$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \beta = 2^{-3}$.

(β) Αν τα ποσά x, y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\frac{x}{y} = \alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $K = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ έχει τιμή ανεξάρτητη των τιμών των x, y και ισχύει ότι $K \le 1$.

Για ποια τιμή του α η παράσταση K παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Λύση

(α) Για $\alpha = \beta = 2^{-3}$ λαμβάνουμε $\dfrac{\alpha}{\beta^2} = \dfrac{2^{-3}}{\left(2^{-3}\right)^2} = \dfrac{2^{-3}}{2^{-6}} = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$.

Η παράσταση Α γράφεται:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\beta^2}+237\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^3 + 9\cdot\frac{\alpha}{\beta^2} - 20 = (8+237)\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 8\right)^3 + 9\cdot 8 - 20$$

$$= 245\cdot 2^3 + 72 - 20 = 245\cdot 8 + 52 = 2012.$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $x = \alpha y$, οπότε η παράσταση γράφεται

$$K = \frac{2ayy}{\alpha^2 y^2 + y^2} = \frac{2\alpha y^2}{\left(\alpha^2+1\right)y^2} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1},$$

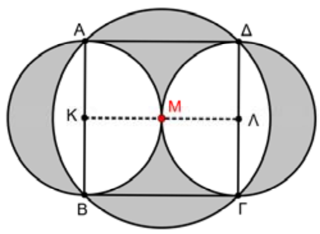
δηλαδή είναι ανεξάρτητη των x, y και εξαρτάται μόνο από το λόγο α. Επιπλέον, ισχύει

$$K = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \le 1 \Leftrightarrow \alpha^2+1 \ge 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 \ge 0,$$

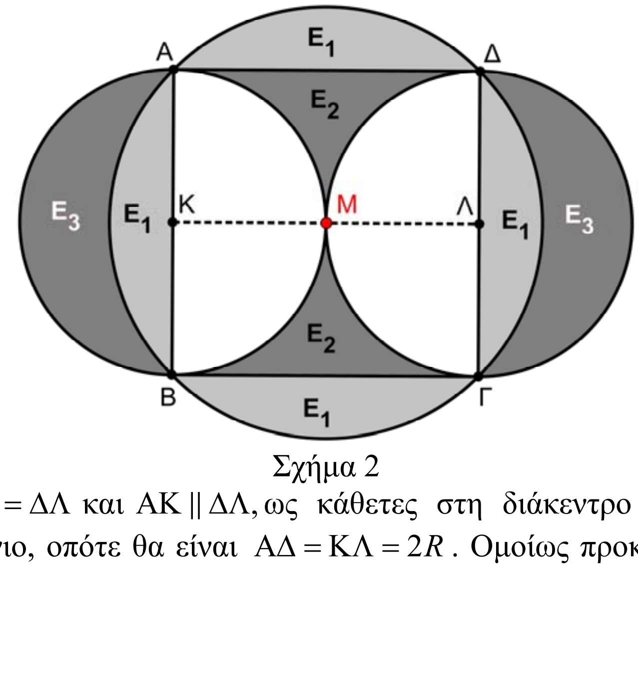
το οποίο είναι αληθές. Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι 1 και λαμβάνεται όταν $\alpha - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 1$.

Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K, Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



Λύση



Σχήμα 2

Επειδή είναι $AK = \Delta\Lambda$ και $AK \parallel \Delta\Lambda$, ως κάθετες στη διάκεντρο $K\Lambda$, το τετράπλευρο $AK\Lambda\Delta$ είναι ορθογώνιο, οπότε θα είναι $A\Delta = K\Lambda = 2R$. Ομοίως προκύπτει ότι και το τετράπλευρο ΚΒΓΛ είναι ορθογώνιο και ότι $\text{ΒΓ} = \text{ΚΛ} = 2R$ Επομένως, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό $(\text{ΑΒΓΔ}) = 4R^2$.

Το τρίγωνο ΑΚΜ είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $\text{ΚΑ} = \text{ΚΜ} = R$. Άρα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε: $\text{ΜΑ} = \text{ΜΒ} = \text{ΜΓ} = \text{ΜΔ} = R\sqrt{2}$, δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $\text{Ε} = \pi(R\sqrt{2})^2 = 2\pi R^2$.

Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων ΜΑΔ και ΜΒΓ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2\text{Ε}_2 = (\text{ΑΒΓΔ}) - \pi R^2 \Leftrightarrow 2\text{Ε}_2 = 4R^2 - \pi R^2 \Leftrightarrow \text{Ε}_2 = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων Ε_3 έχουμε: $\text{Ε}_3 = \dfrac{\pi R^2}{2} - \text{Ε}_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2\text{Ε}_1 + 2\text{Ε}_2 + 2\text{Ε}_3 = 2\text{Ε}_1 + (4-\pi)R^2 + \pi R^2 - 2\text{Ε}_1 = 4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$\text{Ε}_1 = \frac{\text{Ε} - (\text{ΑΒΓΔ})}{4} = \frac{2\pi R^2 - 4R^2}{4} = \frac{(\pi-2)R^2}{2}..$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος γιατί απλοποιείται με τις πράξεις.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο Α που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο Α όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο Α.

Λύση

Το σύνολο $\text{Α} = \{101, 102, 103, ..., 2012\}$ έχει 2012 - 100 =1912 στοιχεία. Τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 3κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 3\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{3} \le \kappa \le \frac{2012}{3} \Leftrightarrow 33\frac{2}{3} \le \kappa \le 670\frac{2}{3} \Leftrightarrow \kappa \in \{34, 35, ..., 670\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $670 - 33 = 637$.

Τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι της μορφής 8κ, όπου κ ακέραιος τέτοιος ώστε

$$101 \le 8\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{8} \le \kappa \le \frac{2012}{8} \Leftrightarrow 12\frac{5}{8} \le \kappa \le 251\frac{4}{8} \Leftrightarrow \kappa \in \{13, 14, ..., 251\},$$

δηλαδή τα πολλαπλάσια του 8 που ανήκουν στο σύνολο Α είναι $251 - 12 = 239$.

Όμως υπάρχουν πολλαπλάσια του 8 που είναι και πολλαπλάσια του 3 και έχουν ήδη διαγραφεί. Αυτά είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\text{ΕΚΠ}\{3,8\} = 24$ που ανήκουν στο σύνολο Α.

Εργαζόμενοι ομοίως, από τις ανισώσεις

$$101 \le 24\kappa \le 2012 \Leftrightarrow \frac{101}{24} \le \kappa \le \frac{2012}{24} \Leftrightarrow 4\frac{5}{24} \le \kappa \le 83\frac{20}{24} \Leftrightarrow \kappa \in \{5, 6, ..., 83\},$$

βρίσκουμε ότι τα κοινά πολλαπλάσια των 3 και 8 μέσα στο σύνολο Α είναι $83 - 4 = 79$.

Επομένως, διαγράψαμε από το σύνολο Α συνολικά $637 + 239 - 79 = 797$ στοιχεία, οπότε απέμειναν τελικά $1912 - 797 = 1115$ στοιχεία.

Πρόβλημα 4
Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \text{ και } Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4,$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση
Έχουμε $P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=x^4-5x^2+4$ και

$$Q(x)=\left(\alpha x^2+\beta x\right)\left(\gamma x^2+\delta\right)+4=\alpha\gamma x^4+\beta\gamma x^3+\alpha\delta x^2+\beta\delta x+4.$$

Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα, αν, και μόνον αν, ισχύουν

$$\alpha\gamma=1,\ \beta\gamma=0,\ \alpha\delta=-5,\ \beta\delta=0$$

$$\Leftrightarrow\{\beta=0 \text{ ή } \gamma=0\},\ \{\beta=0 \text{ ή } \delta=0\},\alpha\gamma=1,\alpha\delta=-5.$$

Οι τιμές $\gamma=0$ και $\delta=0$ αποκλείονται γιατί δεν επαληθεύουν τις δύο τελευταίες εξισώσεις, οπότε λαμβάνουμε $\beta=0,\ \gamma=\dfrac{1}{\alpha},\ \delta=-\dfrac{5}{\alpha},\ \alpha\neq 0.$ Από την εξίσωση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-3$, με αντικατάσταση των τιμών των β,γ και δ προκύπτει η εξίσωση

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{5}{\alpha}=-3\Leftrightarrow\alpha-\frac{4}{\alpha}=-3\Leftrightarrow\alpha^2+3\alpha-4=0\Leftrightarrow\alpha^2-1+3\alpha-3=0$$

$$(\alpha-1)(\alpha+1)+3(\alpha-1)=0\Leftrightarrow(\alpha-1)(\alpha+4)=0\Leftrightarrow\alpha-1=0 \text{ ή } \alpha+4=0\Leftrightarrow\alpha=1 \text{ ή } \alpha=-4$$

Επομένως οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$$\alpha=1,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=-5 \text{ ή } \alpha=-4,\ \beta=0,\ \gamma=-\frac{1}{4},\ \delta=\frac{5}{4}.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}.$$

Λύση
Έχουμε

$$\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4}\Leftrightarrow 3x^2+4\left(|x|-1\right)\le 3|x|+3x^2\Leftrightarrow|x|\le 4\Leftrightarrow -4\le x\le 4.$$

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}\Leftrightarrow 2x+2+x(x+1)>(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+2+x^2+x>x^2+4x+4\Leftrightarrow -x>2\Leftrightarrow x<-2.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα $[-4,-2)=\{x\in\mathbb{R}:-4\le x<-2\}$.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{x+x^2}{1-x^2}\cdot\frac{\left[(1+ax)^2-(a+x)^2\right]}{1-a^2}=\frac{ab}{(a-b)^2},$$

για τις διάφορες τιμές των πραγματικών αριθμών a,b με $ab(a-b)(1-a^2)\neq 0$.

Λύση

Για να ορίζονται οι δεδομένες παραστάσεις πρέπει να ισχύουν:

$$1-x^2\neq 0, 1-a^2\neq 0 \text{(υπόθεση) και } a\neq b \text{(υπόθεση)} \Leftrightarrow x\neq \pm 1.$$

Για $x\neq\pm1$, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1+a^2x^2-a^2-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}\cdot\frac{\left(1-a^2\right)\left(1-x^2\right)}{\left(1-a^2\right)}=\frac{ab}{(a-b)^2}$$

$$\Leftrightarrow x(1+x)=\frac{ab}{(a-b)^2}\Leftrightarrow (a-b)^2x^2+(a-b)^2x-ab=0$$

Επειδή είναι $a\neq b$ η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=(a-b)^4+4ab(a-b)^2=(a-b)^2\left[(a-b)^2+4ab\right]=(a-b)^2(a+b)^2=\left(a^2-b^2\right)^2\geq 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει τις ρίζες (ίσες, αν $a=-b$):

$$x_1=\frac{-(a-b)^2+\left(a^2-b^2\right)}{2(a-b)^2}=\frac{2ab-2b^2}{2(a-b)^2}=\frac{2b(a-b)}{2(a-b)^2}=\frac{b}{a-b} \text{ και}$$

$$x_2=\frac{-(a-b)^2-\left(a^2-b^2\right)}{2(a-b)^2}=\frac{2ab-2a^2}{2(a-b)^2}=\frac{-2a(a-b)}{2(a-b)^2}=\frac{-a}{a-b}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{b}{b-a}=1\Leftrightarrow b=b-a\Leftrightarrow a=0 \text{ και } \frac{b}{b-a}=-1\Leftrightarrow b=-b+a\Leftrightarrow a=2b,$$

$$\frac{-a}{a-b}=1\Leftrightarrow -a=a-b\Leftrightarrow 2a=b \text{ και } \frac{-a}{a-b}=-1\Leftrightarrow -a=b-a\Leftrightarrow b=0.$$

Επομένως, για τιμές των παραμέτρων a,b που ικανοποιούν τις υποθέσεις $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$ και $a\neq\pm1$, έχουμε:

- Αν $(a-2b)(2a-b)\neq 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες (ίσες με $\frac{1}{2}$, αν $a=-b$):

$$x_1=\frac{b}{a-b} \text{ και } x_2=\frac{-a}{a-b}.$$

- Αν $a=2b$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.
- Αν $a=\frac{b}{2}$, τότε η εξίσωση έχει μόνο τη ρίζα $x_2=-2$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\text{B}}=90^\circ$ και $\hat{\text{A}}<45^\circ$. Θεωρούμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα, και σημείο $\text{M}\neq\text{A}$ στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Αν η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ τέμνει την ευθεία ΔΕ στο Ζ και την ευθεία ΑΓ στο Θ, να αποδείξετε ότι:

(α) $\text{B}\hat{\text{M}}\text{Z}=\hat{\text{A}}$.

(β) Η ευθεία ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\text{B}}\text{E}$.

Λύση

(α) Επειδή το Ζ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ θα είναι ΖΒ = ΖΜ και

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \omega .$$

Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E} \parallel \mathrm{AB}$ και $\mathrm{AB} \perp \mathrm{B}\Gamma$ έπεται ότι $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{B}\Gamma$, δηλαδή η ευθεία ΔΕ είναι μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{B}\Gamma$. Αφού $\mathrm{Z} \in \mathrm{B}\Gamma$ θα είναι $\mathrm{ZB} = \mathrm{Z}\Gamma$ και

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = \varphi .$$

Επειδή $\mathrm{MZ} = \mathrm{BZ} = \Gamma\mathrm{Z}$ θα είναι και

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\mathrm{M} = \theta .$$

Από το τρίγωνο $\mathrm{BM}\Gamma$, λόγω των προηγούμενων ισοτήτων, έχουμε

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\Gamma + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{M} + \Gamma\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = 180^\circ \Rightarrow 2\omega + 2\varphi + 2\theta = 180^\circ$$

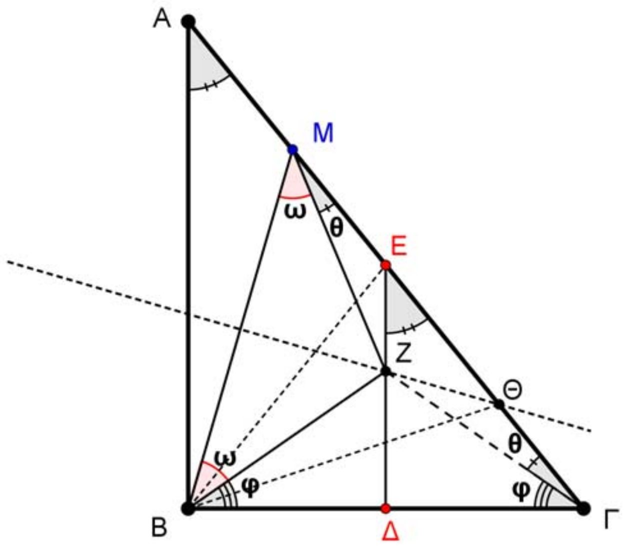
$$\omega + \varphi + \theta = 90^\circ . \qquad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB}\Gamma$ λαμβάνουμε

$$\varphi + \theta = \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \omega = \hat{\mathrm{A}} .$$



Σχήμα 3

(β) Επειδή το σημείο Θ ανήκει στη μεσοκάθετη του ΒΜ η ΘΖ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\Theta}\mathrm{E}$. Επίσης, επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος του ορθογώνιου τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$ προς την υποτείνουσα, θα είναι $\mathrm{BE} = \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{2} = \mathrm{E}\Gamma$, οπότε το τρίγωνο $\mathrm{BE}\Gamma$ είναι ισοσκελές με την ΕΔ ύψος και διχοτόμο της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$, άρα και της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Theta$. Επομένως στο τρίγωνο ΒΘΕ το Ζ είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του, οπότε και η ΒΖ διχοτομεί τη γωνία $\Theta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

Πρόβλημα 4

Αν υπάρχουν ακέραιοι x, y, a που επαληθεύουν την εξίσωση

$$yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0,$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός xy είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Έστω ότι οι ακέραιοι x, y, a επαληθεύουν την εξίσωση: $yx^2 + \left(y^2 - a^2\right)x + y\left(y - a\right)^2 = 0$.

Μετά τις πράξεις και αναδιάταξη των όρων η εξίσωση, ως προς άγνωστο το a, γράφεται:

$$(y-x)a^2-2y^2a+y\left(x^2+xy+y^2\right)=0.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η εξίσωση αυτή με άγνωστο το a έχει ακέραια λύση, αλλά και ακέραιους συντελεστές. Επομένως, η διακρίνουσα της είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδή υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε

$$\Delta=4y^4-4y(y-x)\left(x^2+xy+y^2\right)=4y\left[y^3-\left(y^3-x^3\right)\right]=4yx^3=xy(2x)^2=\kappa^2.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $xy=\left(\dfrac{\kappa}{2x}\right)^2$, όπου ο αριθμός $\dfrac{\kappa}{2x}$ είναι ρητός.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $a\neq 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{2a+ax}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{2a+6}{x^3-4x},$$

έχει δύο πραγματικές ρίζες με διαφορά 4.

Λύση

Μετά τις παραγοντοποιήσεις των όρων των κλασμάτων η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{a(x+2)}+\frac{1}{x(x-2)}=\frac{2(a+3)}{x(x-2)(x+2)}. \qquad (1)$$

Πρέπει να ισχύουν $x\neq 0,\pm 2$, δηλαδή η εξίσωση θα λυθεί στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$.

Η εξίσωση (1) στο σύνολο $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ είναι ισοδύναμη τελικά με την εξίσωση

$$x^2+(a-2)x-\left(2a^2+4a\right)=0,$$

η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=(3a+2)^2$ και ρίζες $x_1=a+2$ και $x_2=-2a$. Επειδή

$$a+2\in\{-2,0,2\}\Leftrightarrow a\in\{-4,-2,0\} \text{ και } -2a\in\{-2,0,2\}\Leftrightarrow a\in\{1,0,-1\}$$

και αφού από την υπόθεση είναι $a\neq 0$, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες δεκτές, τις $x_1=a-2$ και $x_2=-2a$, όταν είναι $a\neq -1,\,+1,-2,-4$.

Επειδή είναι

$$|a+2-(-2a)|=4\Leftrightarrow|3a+2|=4\Leftrightarrow 3a+2=4 \text{ ή } 3a+2=-4\Leftrightarrow a=\frac{2}{3} \text{ ή } a=-2,$$

η τιμή του a που ζητάμε είναι η $a=\dfrac{2}{3}$.

Πρόβλημα 2

Αν y ακέραιος και $x\in\mathbb{R}$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (x,y) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\left\{\begin{array}{c}1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0\\ y-2+|x-2|<0\end{array}\right\}. \qquad (\Sigma)$$

Να παραστήσετε γραφικά στο Καρτεσιανό επίπεδο Oxy, το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x,y)$, όπου (x,y) λύση του συστήματος (Σ).

Λύση

Έχουμε

$$\left\{\begin{array}{c}1+y-\left|x^2-3x+1\right|>0\\ y-2+\left|x-2\right|<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}1+y>\left|x^2-3x+1\right|\geq 0\\ y-2<-\left|x-2\right|\leq 0\end{array}\right\},$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$1+y>0 \text{ και } y-2<0\Leftrightarrow -1<y<2.$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του y είναι $y=0$ ή $y=1$.

- Για $y=0$, το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{c}\left|x^2-3x+1\right|<1\\ \left|x-2\right|<2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-1<x^2-3x+1<1\\ -2<x-2<2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2-3x+2>0 \text{ και } x^2-3x<0\\ -2<x-2<2\end{array}\right\}$$

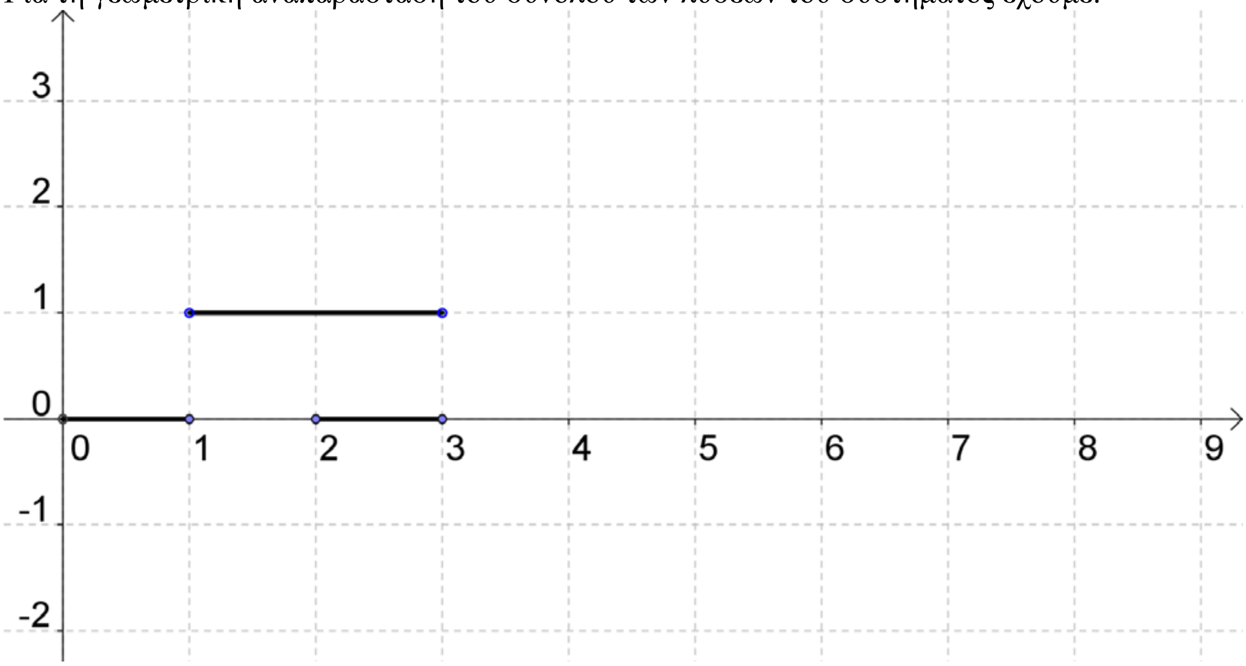
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\left(x<1 \text{ ή } x>2\right) \text{ και } \ 0<x<3\\ 0<x<4\end{array}\right\}\Leftrightarrow 0<x<1 \text{ ή } \ 2<x<3.$$

- Για $y=1$, το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{array}{c}\left|x^2-3x+1\right|<2\\ \left|x-2\right|<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-2<x^2-3x+1<2\\ -1<x-2<1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x^2-3x+3>0 \text{ και } x^2-3x-1<0\\ 1<x<3\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\\ 1<x<3\end{array}\right\}\Leftrightarrow 1<x<3.$$

Για τη γεωμετρική αναπαράσταση του συνόλου των λύσεων του συστήματος έχουμε:



Σχήμα 4

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ<ΑΓ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο $Μ$. Ο κύκλος $c_1(Μ,ΑΜ)$ τέμνει την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι $ΓΔ=ΑΒ$.

Λύση (1ος τρόπος)

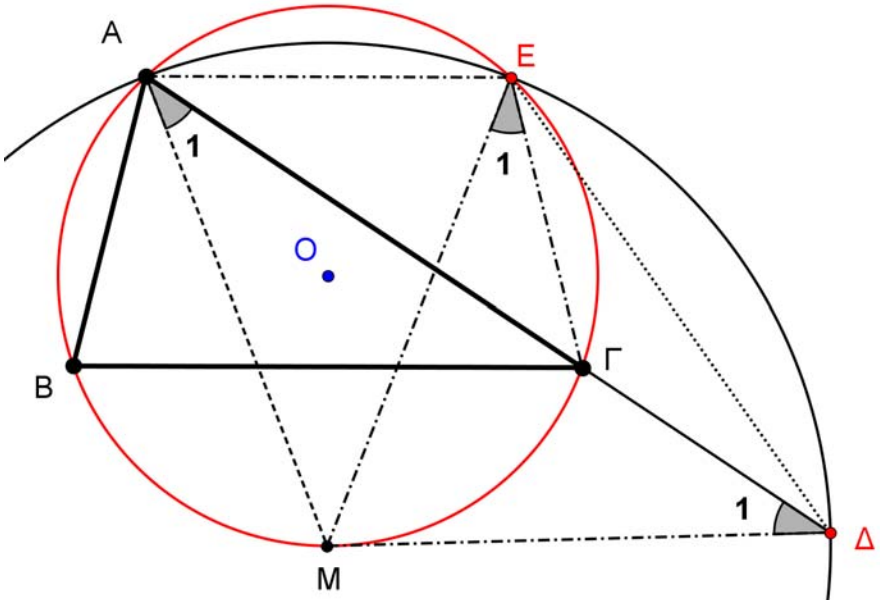
Έστω E το δεύτερο κοινό σημείο των περιφερειών (c) και (c_1). Τότε η AE είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων, άρα η OM είναι μεσοκάθετη της AE.

Το M είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$ (διότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$). Άρα η OM είναι μεσοκάθετη και της $B\Gamma$.

Επειδή οι χορδές $B\Gamma$ και AE έχουν την OM κοινή μεσοκάθετη, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε:

$$AB = E\Gamma. \qquad (1)$$

Το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισοσκελές, αφού $MA = M\Delta$ ως ακτίνες του κύκλου (c_1). Άρα είναι $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$. Ισχύει επίσης $\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ (εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{M\Gamma}$).



Σχήμα 5

Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ και σε συνδυασμό με την ισότητα $M\hat{\Delta}E = M\hat{E}\Delta$ (που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $M\Delta E$), καταλήγουμε στην ισότητα των γωνιών $\Gamma\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{E}\Delta$ και στην ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων:

$$E\Gamma = \Delta\Gamma. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

2^{ος} Τρόπος

Το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές ($MA = M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)). Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε έχουμε:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AM\Delta$, έχουμε:

$$\hat{M}_1 + \hat{\omega} = A\hat{M}\Delta = 180^o - \hat{A}_1 - \hat{\Delta}_1 = 180^o - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 + \hat{\omega} = 180^o - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^o - \hat{A} - \hat{\omega}. \qquad (4)$$

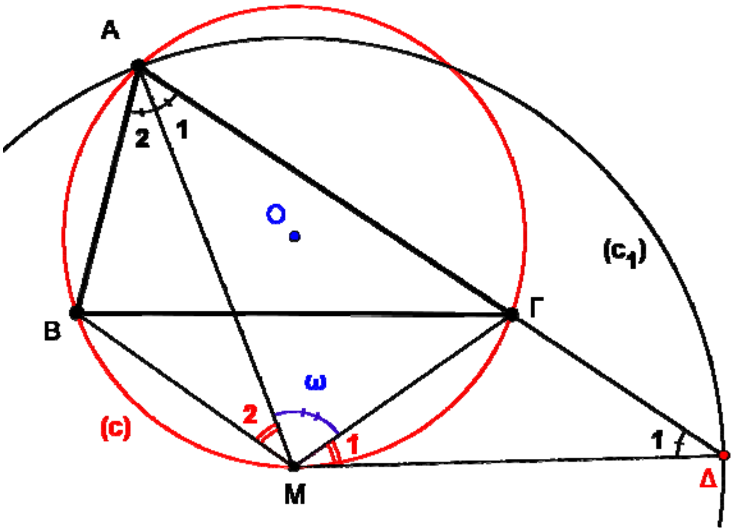
Επίσης, ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$\hat{B} = \hat{\omega}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\hat{\mathrm{M}}_2 = \hat{\Gamma}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Άρα έχουμε

$$\hat{\mathrm{M}}_1 = 180^o - \hat{\mathrm{A}} - \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{M}}_2 . \qquad (5)$$



Σχήμα 6

Από τις ισότητες: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_2$, $\mathrm{MB} = \mathrm{M\Gamma}$ (διότι το Μ είναι μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$) και $\mathrm{MA} = \mathrm{M\Delta}$ (διότι $\mathrm{MA}, \mathrm{M\Delta}$ ακτίνες του κύκλου (c_1)), συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ και ΜΔΓ (*) είναι ίσα, οπότε $\Gamma\Delta = \mathrm{AB}$.

(*) *Η ισότητα των τριγώνων, μπορεί να αποδειχθεί και με άλλους τρόπους.*

Παρατηρήσεις

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία M, Γ και το μέσο της ΔΕ είναι συνευθειακά.

Ο κύκλος (c_1) τέμνει και τη προέκταση της ΑΒ. Αν ονομάσουμε Λ το σημείο τομής, τότε θα ισχύει $\mathrm{B\Lambda} = \mathrm{A\Gamma}$. Έτσι δημιουργείτε το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΛ με $\mathrm{A\Delta} = \mathrm{A\Lambda} = \mathrm{AB} + \mathrm{A\Gamma}$ και στη συνέχεια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\mathrm{AM} \perp \Delta\Lambda$.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{x^2+ax+b}$, όπου a,b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 4b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 4b < 0$, έπεται ότι $x^2+ax+b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{x^2+ax+b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά τους $y - x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{x^2+ax+b} - x = r \Leftrightarrow \sqrt{x^2+ax+b} = x + r \Rightarrow x^2+ax+b = x^2+2rx+r^2 \Rightarrow x = \frac{r^2-b}{a-2r},$$

εφόσον $r \neq \dfrac{a}{2}$ και $x + r \geq 0$ ή ισοδύναμα, εφόσον $r > \dfrac{a}{2}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x = \dfrac{r^2-b}{a-2r}$, όπου r ρητός με $r > \dfrac{a}{2}$, τότε έχουμε

$$x^2+ax+b=\left(\frac{r^2-b}{a-2r}\right)^2+a\frac{r^2-b}{a-2r}+b=\frac{r^4-2ar^3+a^2r^2+2br^2-2abr+b^2}{(a-2r)^2}=\frac{(r^2-ar+b)^2}{(a-2r)^2},$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2-4b<0$, θα είναι

$$y=\sqrt{x^2+ax+b}=\frac{r^2-ar+b}{|a-2r|}=\frac{r^2-ar+b}{2r-a},\ r>\frac{a}{2},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_ν, $\nu=1,2,3,...$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1=\alpha\neq 0$, διαφορά $\omega\neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{\nu+1}+\cdots+\alpha_{3\nu}$ των επόμενων 2ν το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του ν.

Λύση

Από την υπόθεση δίνεται ότι:

$$\frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_{3\nu}-\Sigma_\nu}=\frac{\alpha_1+\cdots\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}+\cdots\alpha_{3\nu}}=c\,(\text{ανεξάρτητο του }\nu). \quad (1)$$

Επειδή είναι

$$\Sigma_\nu=\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu=\frac{\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]\cdot\nu}{2} \text{ και}$$

$$\Sigma_{3\nu}-\Sigma_\nu=\frac{\left[2\alpha+(3\nu-1)\omega\right]\cdot 3\nu}{2}-\frac{\left[2\alpha+(\nu-1)\omega\right]\cdot\nu}{2}=\frac{\left[4\alpha+(8\nu-2)\omega\right]\cdot\nu}{2},$$

η σχέση (1) γίνεται

$$\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{4\alpha+(8\nu-2)\omega}=c\Leftrightarrow(8c\omega-\omega)\nu+4\alpha c-2\alpha-2c\omega+\omega=0$$

$$\Leftrightarrow(8c-1)\omega\nu+(2c-1)(2\alpha-\omega)=0,\text{για κάθε }\nu=1,2,3,...$$

$$\Leftrightarrow(8c-1)\omega=0\text{ και }(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$$

$$\Leftrightarrow 8c-1=0\ \text{ και }\ 2c-1\text{ ή }2\alpha-\omega=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{8},\omega=2\alpha,$$

αφού $\omega\neq 0$. Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha,3\alpha,5\alpha,....,(2\nu-1)\alpha,...$.

Διαφορετικά, στην ισότητα $(8c-1)\omega\nu+(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$, που ισχύει για κάθε $\nu=1,2,3,...$ μπορούμε να θεωρήσουμε $\nu=1$ και $\nu=2$ και να αφαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν, οπότε λαμβάνουμε $(8c-1)\omega=0$ και από αυτή $(2c-1)(2\alpha-\omega)=0$, οπότε έχουμε πάλι το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix}(8c-1)\omega=0\\(2c-1)(2a-\omega)=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}c=\dfrac{1}{8}\\\omega=2\alpha\end{matrix}\right\},\text{ αφού }\omega\neq 0.$$

Επομένως η αριθμητική πρόοδος που ζητάμε είναι η: $\alpha,3\alpha,5\alpha,....,(2\nu-1)\alpha,...$.

Πρόβλημα 2
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4}, \quad y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4}, \quad z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Λύση
Παρατηρούμε ότι

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4} = z^2 \cdot \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \le z^2, \text{αφού ισχύει}: \frac{8z^2}{4^2+\left(z^2\right)^2} \le 1,$$

και ομοίως λαμβάνουμε ότι: $z^2 \le y^2$ και $y^2 \le x^2$. Επομένως, έχουμε: $x^2 = y^2 = z^2$.
Τότε από την πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε:

$$x^2 = \frac{8x^4}{16+x^4} \Leftrightarrow x^2\left(x^4 - 8x^2 + 16\right) = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-4\right)^2 = 0$$

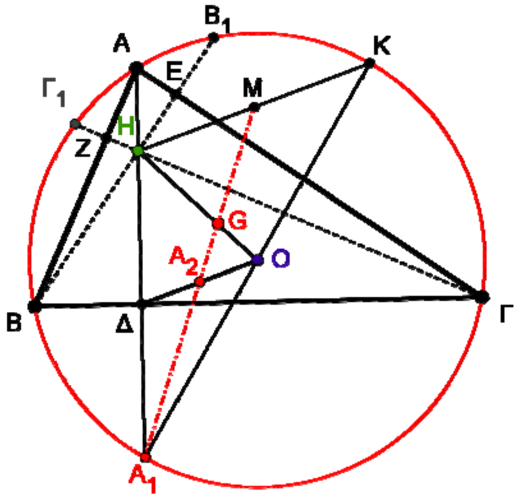
$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -2$ ή $x = 2$ (όλες με πολλαπλότητα 2).

- Για $x = 0$, προκύπτει η λύση $(0,0,0)$.
- Για $x = 2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(2,2,2)$, $(2,-2,2)$,$(2,2,-2)$ και $(2,-2,-2)$.
- Για $x = -2$, προκύπτουν οι λύσεις: $(-2,2,2)$, $(-2,-2,2)$,$(-2,2,-2)$ και $(-2,-2,-2)$.

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ αντίστοιχα. Αν $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Λύση
(1ος τρόπος)
Παρατηρούμε ότι το σημείο A_1 είναι συμμετρικό του ορθοκέντρου Η ως προς την πλευρά ΒΓ. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σημείο H_1 συμμετρικό του Η ως προς την πλευρά ΒΓ, τότε έχουμε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}_1\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\Gamma = 180^\circ - \hat{\mathrm{A}}$. Άρα το τετράπλευρο $\mathrm{ABH}_1\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε το σημείο H_1 συμπίπτει με το σημείο A_1.

Έστω Κ το αντιδιαμετρικό του σημείου A_1 και Μ το σημείο τομής της $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ με την ΗΚ. Τότε στο τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{HK}$ έχουμε ότι το σημείο Ο είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{K}$ και ότι το σημείο Δ είναι μέσο της πλευράς $\mathrm{A}_1\mathrm{H}$.**(*)** Άρα το τμήμα ΟΔ είναι ίσο και παράλληλο με το τμήμα $\frac{\mathrm{HK}}{2}$.

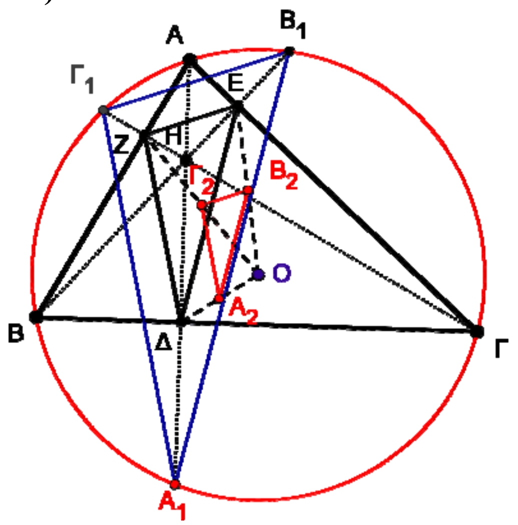


Σχήμα 7

Επειδή τώρα $ΟΔ = \frac{ΗΚ}{2}$ και η $Α_1Α_2$ είναι διάμεσος στο τρίγωνο $Α_1ΟΔ$, συμπεραίνουμε ότι η $Α_1Μ$ είναι διάμεσος του τριγώνου $Α_1ΗΚ$. Έστω ότι οι διάμεσες $Α_1Μ$ και $ΗΟ$ (του τριγώνου $Α_1ΗΚ$) τέμνονται στο σημείο G. Τότε θα ισχύει $GH = 2GO$, δηλαδή το σημείο G χωρίζει το τμήμα $ΗΟ$ σε δύο τμήματα με λόγο $2:1$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι $Β_1Β_2$, $Γ_1Γ_2$ διέρχονται από το σημείο G.

2^ος^ τρόπος (με ομοιοθεσία)



Σχήμα 8

Χρησιμοποιώντας τη πρόταση: "Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του", που αποδείξαμε στην αρχή της προηγούμενης λύσης, συμπεραίνουμε ότι το $Δ$ είναι μέσο του $Α_1Η$, το $Ε$ είναι μέσο του $Β_1Η$ και το $Δ$ είναι μέσο του $Γ_1Η$.

Άρα το τρίγωνο $Α_1Β_1Γ_1$ είναι ομοιόθετο του (ορθικού) τριγώνου $ΔΕΖ$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο $Η$ και λόγο 2, ($ΗΑ_1 = 2ΗΔ$).

Το A_2 είναι μέσο του $ΟΔ$, το B_2 είναι μέσο του $ΟΕ$ και το $Γ_2$ είναι μέσο του $ΟΖ$.

Άρα το ορθικό τρίγωνο ΔEZ, είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το O και λόγο 2, ($O\Delta = 2OA_2$)., δηλαδή το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Άρα οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ (που συνδέουν τις ομόλογες κορυφές) θα συντρέχουν στο κέντρο της ομοιοθεσίας (έστω K) το οποίο θα βρίσκεται επάνω στην OH.

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Λύση

Επειδή από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, έπεται ότι $4x^2 - ax + b > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί x, $\sqrt{4x^2 - ax + b} = y$ είναι και οι δύο ρητοί, τότε και η διαφορά $y - 2x = r$ θα είναι ρητός. Έτσι έχουμε

$$\sqrt{4x^2 - ax + b} - 2x = r \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - ax + b} = 2x + r \Rightarrow 4x^2 - ax + b = 4x^2 + 4rx + r^2 \Rightarrow x = \frac{b - r^2}{a + 4r},$$

εφόσον $r \neq -\frac{a}{4}$ και $2x + r \geq 0$, ή ισοδύναμα εφόσον $r > -\frac{a}{4}$.

Αντίστροφα, αν είναι $x = \frac{b - r^2}{a + 4r}$, όπου r ρητός με $r > -\frac{a}{4}$, τότε έχουμε

$$4x^2 - ax + b = 4\left(\frac{b - r^2}{a + 4r}\right)^2 - \frac{a\left(b - r^2\right)}{a + 4r} + b$$

$$= \frac{4r^4 + a^2r^2 + 4b^2 + 8br^2 + 4abr + 4ar^3}{\left(a + 4r\right)^2} = \frac{\left(2r^2 + ar + 2b\right)^2}{\left(a + 4r\right)^2},$$

οπότε, αφού από υπόθεση $a^2 - 16b < 0$, θα είναι

$$y = \sqrt{4x^2 - ax + b} = \frac{2r^2 + ar + 2b}{|a + 4r|} = \frac{2r^2 + ar + 2b}{4r + a}, \; r > -\frac{a}{4},$$

δηλαδή ο y είναι ρητός.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1
Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right) \quad \text{και} \quad B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}.$$

Λύση
Έχουμε

$$A=\frac{2^2}{31}\cdot\left(3^3+1000^0+\frac{2}{9}:\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(27+1+\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1}-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{31}\cdot\left(28+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{112}{31}$$

$$B=\left(1-\frac{40}{41}\right):\left(\frac{80}{3^4}-\frac{79}{9^2}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\left(\frac{80}{81}-\frac{79}{81}\right)+\frac{67}{41}=\frac{1}{41}:\frac{1}{81}+\frac{67}{41}=\frac{81}{41}+\frac{67}{41}=\frac{148}{41}$$

Επειδή $A-B=\frac{112}{31}-\frac{148}{41}=\frac{112\cdot 41-148\cdot 31}{31\cdot 41}=\frac{4592-4588}{1271}=\frac{4}{1271}>0$, έπεται ότι $A>B$.

Πρόβλημα 2
Ένας φορητός υπολογιστής έχει τιμή πώλησης 720 ευρώ σε μετρητά. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης. Όταν ο πελάτης τον πληρώσει σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης. Να βρείτε σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις πόση θα είναι η μηνιαία δόση.

Λύση.
Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 12 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 5% πάνω στην τιμή πώλησης., δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{5}{100}=36$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+36=756$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $756:12=63$ ευρώ.

Όταν ο πελάτης πληρώσει τον υπολογιστή σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις, τότε επιβαρύνεται συνολικά με τόκους 14% πάνω στην τιμή πώλησης, δηλαδή επιβαρύνεται με $720\cdot\frac{14}{100}=100,8$ ευρώ, οπότε θα πληρώσει συνολικά $720+100,8=820,8$ ευρώ. Επομένως η μηνιαία δόση θα είναι $820,8:24=34,2$ ευρώ.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ παράλληλο προς τη βάση ΒΓ και ίσο με την πλευρά ΑΒ. Η ευθεία ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΒΔ διχοτομεί τη γωνία $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$.

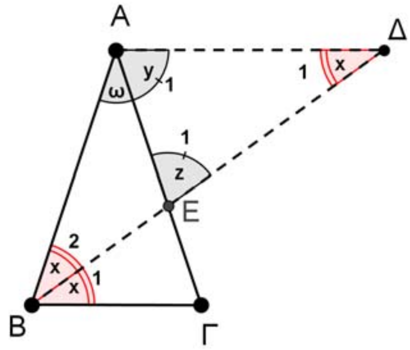
(β) Αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Α}}\text{Γ} = \omega$.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές ($\text{ΑΒ} = \text{ΑΔ}$), οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Β}}_2$.

Οι ΑΔ και ΒΓ είναι παράλληλες, οπότε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Β}}_1$, ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Β}}_1 = \hat{\text{Β}}_2 = \hat{x}$. Επομένως η ΒΔ διχοτομεί την γωνία $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ}$.



Σχήμα 1

(β) Από ο άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΔΕ, έχουμε :

$$\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = 180^o \qquad (1).$$

Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε:

$$2\hat{x} + \hat{y} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (2).$$

Από την παραλληλία τέλος των ΑΔ και ΒΓ (με τέμνουσα την ΑΓ), έχουμε:

$$\hat{y} = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = \text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma = 2\hat{x} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) (σε συνδυασμό με τη σχέση (3)), έχουμε:

$$3\hat{x} + \hat{z} = 180^o \qquad (\text{Α}) \quad \text{και} \quad 4\hat{x} + \hat{\omega} = 180^o \qquad (\text{Β}).$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\hat{y} = \hat{z}$, τότε $\hat{y} = \hat{z} = 2\hat{x}$ και από τις σχέσεις (Α) και (Β) λαμβάνουμε: $\hat{x} = 36^o$ και $\hat{\omega} = 36^o$.
- Αν $\hat{x} = \hat{z}$, τότε από τη σχέση (Α) παίρνουμε: $\hat{x} = \hat{z} = 45^o$, οπότε $\hat{\text{Β}} = 90^o$, άτοπο.
- Αν $\hat{x} = \hat{y}$, τότε από τη σχέση (3) παίρνουμε: $\hat{x} = 0^o$, άτοπο.

Άρα, αν το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, τότε $\text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma = \omega = 36^0$.

Πρόβλημα 4

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 60% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 15% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Αν υπάρχουν 24 μαθητές που δεν παίζουν κανένα από τα δύο αθλήματα, να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $(60+45)-15 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $24\cdot\frac{100}{10}=240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $240\cdot\frac{60}{100}=144$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $240\cdot\frac{45}{100}=108$.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\ \text{όταν } x=3^{-2},\, y=3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x=3^{-2}$, $y=3^{-3}$ έχουμε $\frac{x^3}{y^2}=\frac{\left(3^{-2}\right)^3}{\left(3^{-3}\right)^2}=\frac{3^{-6}}{3^{-6}}=1$, $\frac{x}{y}=\frac{3^{-2}}{3^{-3}}=\frac{3^3}{3^2}=3$ και

$$\frac{81x^2+27y}{y}=\frac{81\cdot\left(3^{-2}\right)^2+27\cdot 3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot 3^{-4}+27\cdot 3^{-3}}{3^{-3}}=\frac{81\cdot\frac{1}{81}+27\cdot\frac{1}{27}}{3^{-3}}=2\cdot 3^3.$$

Άρα έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y}=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot 3^3+2\cdot 3^3=\frac{4}{3}\cdot 27+2\cdot 27=36+54=90.$$

(β) Ο αριθμός Β γράφεται στη μορφή

$$\mathrm{B}=16^{23}\cdot 5^{89}=\left(2^4\right)^{23}\cdot 5^{89}=2^{92}\cdot 5^{89}=2^3\cdot\left(2^{89}\cdot 5^{89}\right)=2^3\cdot(2\cdot 5)^{89}=2^3\cdot 10^{89}=8\cdot 10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός Β έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $(65+45)-20=90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100-90=10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24+12=36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36\cdot\frac{100}{10}=360$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360\cdot\frac{65}{100}=234$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360\cdot\frac{45}{100}=162$.

Πρόβλημα 3

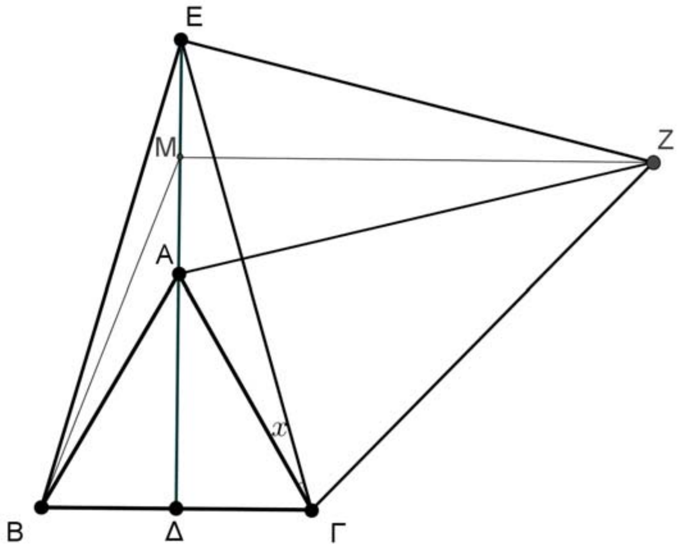
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\text{ΑΕ}=\text{ΑΔ}$. Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι: $\text{ΑΖ}=\text{ΕΓ}$.

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του α.

(iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του α.

Λύση



Σχήμα 2

(i) Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ έχουν:

1. $\text{ΒΓ}=\text{ΑΓ}$ (διότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο).

2. $\text{ΕΓ}=\text{ΖΓ}$ (διότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο).

3. $\text{Ε}\hat{\Gamma}\text{Β}=\text{Ζ}\hat{\Gamma}\text{Α}=60^o+\hat{x}$, όπου $\hat{x}=\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$.

Άρα τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΖΑΓ είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $\text{ΑΖ}=\text{ΕΓ}$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α, οπότε το ύψος του ΑΔ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $\text{ΑΕ}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $\text{ΕΔ}=\alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(\text{ΑΓΖΕ})=(\text{ΑΓΖ})+(\text{ΖΑΕ})=(\text{ΕΒΓ})+(\text{ΖΑΕ})$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων ΕΒΓ και ΑΓΖ έπεται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο ΕΒΓ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\text{ΒΓ}=\alpha$ με αντίστοιχο ύψος $\text{ΕΔ}=2\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}=\alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$(\text{ΕΒΓ})=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\alpha\sqrt{3}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ZAE θεωρούμε ως βάση το τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{A\Delta}=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ($\mathrm{AZ}=\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{ZE}$) και το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΕ έπεται ότι το ΖΜ είναι ύψος του τριγώνου ZAE που αντιστοιχεί στη βάση AE. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ZAM λαμβάνουμε

$$\mathrm{ZM}=\sqrt{\mathrm{ZA}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{\mathrm{E\Gamma}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{\mathrm{E\Delta}^2+\mathrm{\Delta\Gamma}^2-\mathrm{AM}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{3\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}-\frac{3\alpha^2}{16}}=\frac{7\alpha}{4}.$$

Άρα έχουμε $\left(\mathrm{ZAE}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{7\alpha}{4}=\dfrac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}$, οπότε

$$\left(\mathrm{A\Gamma ZE}\right)=\left(\mathrm{EB\Gamma}\right)+\left(\mathrm{ZAE}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}+\frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}=\frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο $\mathrm{B\Gamma ZM}$ είναι τραπέζιο ($\mathrm{ZM}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία $\mathrm{\Delta E}$. Βάσεις του τραπεζίου αυτού είναι οι $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$, $\mathrm{ZM}=\dfrac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα

$\mathrm{\Delta M}=\mathrm{\Delta A}+\mathrm{\Delta M}=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\alpha\sqrt{3}}{4}$, οπότε έχει εμβαδό

$$\left(\mathrm{B\Gamma ZM}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{ZM}\right)\cdot\mathrm{\Delta M}=\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha+\frac{7\alpha}{4}\right)\cdot\frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right) \text{ και } Q(x)=a^2x^3+4x^2+dx+e,$$

όπου οι συντελεστές a,b,c,d,e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1)=21$, να βρείτε τις τιμές των a,b,c,d,e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1)=21$ έχουμε ότι $P(1)=\left(a+b+c\right)\left(a+b\right)=21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a,b,c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a+b+c>a+b$, έπεται ότι

$$\left\{\begin{matrix} a+b+c=7 \\ a+b=3 \end{matrix}\right\} \quad (1) \qquad \text{ή} \qquad \left\{\begin{matrix} a+b+c=21 \\ a+b=1 \end{matrix}\right\}. \quad (2)$$

Επειδή οι a,b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a+b=1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a+b=3$ και $c=4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\left(ax+b\right)=a^2x^3+2abx^2+\left(b^2+ac\right)x+bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x)=Q(x)\Leftrightarrow\left\{a^2=a^2,\ 2ab=4,\ b^2+ac=d,\ bc=e\right\}.$$

Επειδή $c=4$ και $a+b=3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a+b=3,\ ab=2,\ c=4,\ b^2+4a=d,\ 4b=e,\ a,b,c,d,e \text{ θετικοί ακέραιοι},$$

$$\Leftrightarrow a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=8\ e=8 \quad \text{ή} \quad a=2,\ b=1,\ c=4,\ d=9\ e=4.$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\leq\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\,.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\leq\frac{|x|+3+x^2}{4}\Leftrightarrow(x-1)^2+2\left(|x|+x\right)\leq|x|+3+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2|x|+2x\leq|x|+3+x^2\Leftrightarrow|x|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2.$$

Επομένως η ανίσωση του συστήματος αληθεύει για $x\in[-2,2]$.

Επιπλέον, έχουμε

$$x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0\ \text{ ή }\ x^2+4=0\ \text{ ή }\ x^2-5x+4=0.$$

Η εξίσωση $x^2+4=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+4>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση $x^2-5x+4=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες $x=1$ ή $x=4$.

Επομένως η εξίσωση του συστήματος έχει τις ρίζες $x=0$ ή $x=1$ ή $x=4$

Επειδή $4\notin[-2,2]$, το σύστημα αληθεύει για $x=0$ ή $x=1$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\quad\text{και}\quad \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y).$$

Λύση

Λόγω των υποθέσεων $y\neq\pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές των δύο παραστάσεων, οπότε αυτές ορίζονται. Με πράξεις στον παρανομαστή και στον αριθμητή της παράστασης $\mathrm{A}(x,y)$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^6-y^6\right)}{x^6-y^6}=x^2+y^2.$$

Η απλοποίηση μπορεί επίσης να γίνει με χρήση της παραγοντοποίησης

$$x^6-y^6=\left(x^2\right)^3-\left(y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$$

ή των παραγοντοποιήσεων

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right),\qquad x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$
$$x^4+y^4+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right).$$

Έχουμε επίσης

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5}=\frac{(2x+4y)^2-5^2}{2x+4y+5}$$
$$=\frac{(2x+4y+5)(2x+4y-5)}{2x+4y+5}=2x+4y-5.$$

Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)$ γίνεται:

$$x^2+y^2=2x+4y-5 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$$

$\Leftrightarrow x-1=0$ και $y-2=0$ (διαφορετικά θα είχαμε $(x-1)^2+(y-2)^2>0$)

$\Leftrightarrow x=1,\ y=2.$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B},\mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ και Γ_1, Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

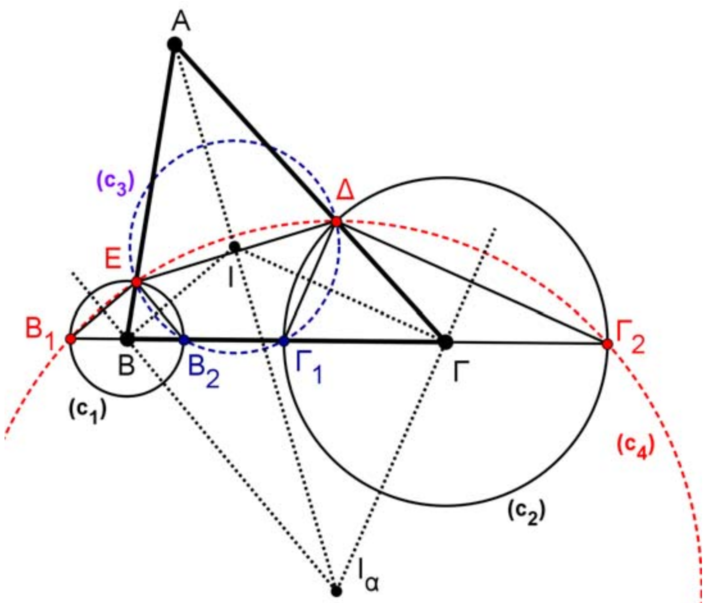
Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_2, \Gamma_1, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο BEB_2 είναι ισοσκελές (οι πλευρές ΒΕ και BB_2 είναι ακτίνες του κύκλου c_1), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς EB_2 είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{IE}=\mathrm{IB}_2 \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta\Gamma_1$ είναι ισοσκελές (οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Gamma_1$ είναι ακτίνες του κύκλου c_2), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς $\Delta\Gamma_1$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{I}\Gamma_1 \qquad (2).$$

Το τρίγωνο $\mathrm{AE}\Delta$ είναι ισοσκελές (διότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$), άρα η μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{E}\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} \qquad (3).$$

Επομένως, οι μεσοκάθετες των τμημάτων $\mathrm{B_2E}$, $\mathrm{E}\Delta$, $\Delta\Gamma_1$ περνάνε από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, οπότε (σε συνδυασμό με τις ισότητες (1), (2), (3)) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} = \mathrm{IB}_2 = \mathrm{I}\Gamma_1 := r,$$

δηλαδή τα σημεία E, B_2, Γ_1, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_3 με κέντρο το I και ακτίνα r.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_4 με κέντρο το παράκεντρο I_α του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και ακτίνα $r_\alpha := \mathrm{I}_\alpha\Delta = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{E} = \mathrm{I}_\alpha\Gamma_2 = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{B}_1$.

(γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων (c_3 και c_4) βρίσκονται επάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, οπότε θα είναι συνευθειακά με τη κορυφή A.

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Λύση

Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$ πρέπει να είναι $x \geq 2$.

Η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + 3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (1)$$

Για $a = 0$ έχουμε την εξίσωση

$$3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2, \text{ (αδύνατη, αφού } 3 - 2\sqrt{2} > 0 \text{).}$$

Για $a \neq 0$, το πρώτο μέλος της (1) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (2)$$

Επειδή είναι $\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 \geq 0$ και $-\sqrt{x-2} \leq 0,\ x \geq 2,$ έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει λύση, αν, και μόνον αν, $ax + \sqrt{2} - 1 = 0$ και $x - 2 = 0,\ x \geq 2 \Leftrightarrow x = 2,$ εφόσον $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει μόνο για $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ τη λύση $x = 2.$

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq 5 .$$

Να βρείτε τα ζεύγη (x, y) ακέραιων αριθμών με $x<0$ για τα οποία ισχύει ή ισότητα

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| = 5 .$$

Λύση

Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$|a| \geq a, \quad (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \geq 0) \text{ και}$$

$$|a| \geq -a, \ (\text{η ισότητα ισχύει όταν } a \leq 0).$$

Άρα έχουμε

$$|x+y-1| \geq -(x+y-1), \quad |x+2| \geq x+2 \quad \text{και} \quad |y+2| \geq y+2,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$|x+y-1|+|x+2|+|y+2| \geq -(x+y-1)+x+2+y+2=5 .$$

Η ισότητα ισχύει, αν, και μόνον αν, και οι τρεις σχέσεις αληθεύουν ως ισότητες, δηλαδή, αν, και μόνον αν,

$$x+y-1 \leq 0 \quad \text{και} \quad x+2 \geq 0 \quad \text{και} \quad y+2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y \leq 1 \quad \text{και} \quad x \geq -2 \quad \text{και} \quad y \geq -2 .$$

Επειδή ζητάμε όλα τα ζεύγη των ακέραιων αριθμών (x, y) με $x<0$, για τα οποία ισχύει η ισότητα, έχουμε $x \in \{-2,-1\}$, $y \in \{-2,-1,0,1,2,....\}$, οπότε για να ισχύει η συνθήκη $x+y \leq 1$, πρέπει και αρκεί:

$$(x, y) \in \{(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-2,3),(-1,-2),(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2)\}.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right),$$

να αποδείξετε ότι: $|2y-3|<1$.

Λύση

Έχουμε ότι

$$x^2\left(y^2-3y+2\right)<4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)\left(xy-2x+2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y(y-1)(y-2)x-4y(y-1)\left(2y-y^2\right)<0$$

$$\Rightarrow x^2\left(y^2-3y+2\right)-4y\left(y^2-3y+2\right)x+4y^2\left(y^2-3y+2\right)<0$$

$$\Rightarrow\left(y^2-3y+2\right)\left(x^2-4xy+4y^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow\left(y^2-3y+2\right)(x-2y)^2<0$$

$$\Rightarrow y^2-3y+2<0, \text{ αφού ισχύει} (x-2y)^2 \geq 0,$$

$$\Rightarrow(y-1)(y-2)<0 \Rightarrow 1<y<2.$$

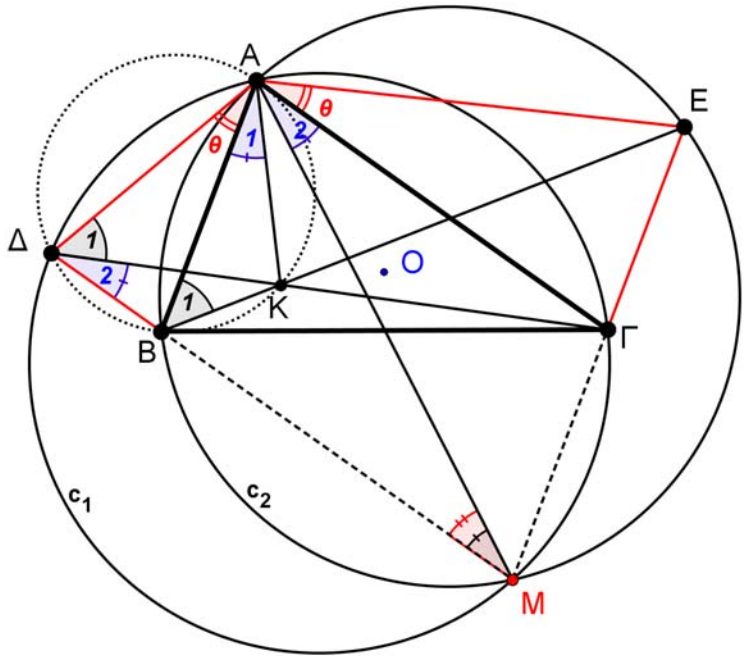
Από την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$1<y<2 \Rightarrow 1-\frac{3}{2}<y-\frac{3}{2}<2-\frac{3}{2} \Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{2y-3}{2}<\frac{1}{2} \Rightarrow-1<2y-3<1 \Rightarrow|2y-3|<1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε ισοσκελή τρίγωνα $ΑΒΔ$ ($ΑΒ = ΑΔ$) και $ΑΓΕ$ ($ΑΓ = ΑΕ$) με $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Ε = \hat{\theta} < 90^\circ$. Οι $ΒΕ$ και $ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Κ$. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$. Να αποδείξετε ότι $Β\hat{Α}Κ = Γ\hat{Α}Μ$.

Λύση



Σχήμα 4

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$:

1. $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές).

2. $ΑΓ = ΑΕ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές).

3. $Δ\hat{Α}Γ = Β\hat{Α}Ε = \hat{Α} + \hat{\theta}$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$, $ΑΒΕ$ είναι ίσα και κατά συνέπεια θα είναι ίσοι και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους c_1 και c_2.

Η γωνία $Α\hat{Μ}Δ$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΑΔ$. Η γωνία $Α\hat{Μ}Β$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_2 και βαίνει στο τόξο $ΑΒ$. Επειδή όμως $ΑΔ = ΑΒ$ (διότι το τρίγωνο $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελές) και οι κύκλοι c_1, c_2 είναι ίσοι, συμπεραίνουμε ότι: $Α\hat{Μ}Δ = Α\hat{Μ}Β$. Άρα τα σημεία $Δ, Β, Μ$ είναι συνευθειακά.

Από την ισότητα των τριγώνων $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1$.

Άρα το τετράπλευρο $ΑΚΒΔ$ είναι εγγράψιμο, επομένως : (1)

$$\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_2.$$

Η γωνία $\hat{Δ}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Η γωνία $\hat{Α}_2$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο $ΜΓ$. Άρα έχουμε:

$$\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε: $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι ακέραιος ο αριθμός
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x}.$$

Λύση
Ο αριθμός Α ορίζεται όταν $13-2x \geq 0$ και $13+2x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{13}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$.
Αν υποθέσουμε ότι $\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z}$, τότε θα είναι $\mathrm{A} = n > 0$ και ισχύει:
$$\mathrm{A} = \sqrt{13-2x} + \sqrt{13+2x} = n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{A}^2 == 26 + 2\sqrt{13^2-4x^2} = n^2$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{13^2-4x^2} = \frac{n^2}{2} - 13 \qquad (1)$$
Επειδή $0 \leq \sqrt{13^2-4x^2} \leq 13$, λόγω της (1) και της υπόθεσης ότι $n \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι:
$$0 \leq \frac{n^2}{2} - 13 \leq 13 \Leftrightarrow 13 \leq \frac{n^2}{2} \leq 13+13 \Leftrightarrow 26 \leq n^2 \leq 52 \Leftrightarrow n \in \{6,7\}.$$

- Για $n=6$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2-4x^2} = 5 \Leftrightarrow 169-4x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6.$$
- Για $n=7$ η εξίσωση (1) γίνεται
$$\sqrt{13^2-4x^2} = \frac{23}{2} \Leftrightarrow 169-4x^2 = \frac{23^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{147}{16} \Leftrightarrow x = \pm\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1
Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:
$$xy = z^2+2, \quad y^3 = x^3+2x^2+1.$$

Λύση
Επειδή είναι $2x^2+1>0$, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι
$$y^3 > x^3 \Rightarrow (y-x)(y^2+xy+x^2) > 0 \Rightarrow y-x>0 \Rightarrow y > x,$$
αφού $y^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ (η περίπτωση $x=y=0$ δεν επαληθεύει τις εξισώσεις του συστήματος).
Επειδή οι x, y είναι ακέραιοι, από τη σχέση $y > x$, έπεται ότι
$$y \geq x+1 \Leftrightarrow y^3 \geq (x+1)^3 \Leftrightarrow y^3 \geq x^3+3x^2+3x+1 \qquad (1)$$
Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος και την (1) λαμβάνουμε
$$x^3+2x^2+1 \geq x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow x^2+3x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \{-3,-2,-1,0\}. \qquad (2)$$

- Για $x=-3$, λαμβάνουμε $y^3=-8 \Leftrightarrow y=-2$.
- Για $x=-2$, λαμβάνουμε $y^3=1 \Leftrightarrow y=1$ (απορρίπτεται, αφού $xy=z^2+2>0$).
- Για $x=-1$, λαμβάνουμε $y^3=2$ (αδύνατη στο $\mathbb{Z}$).
- Η τιμή $x=0$, απορρίπτεται, αφού πρέπει $xy=z^2+2>0$.

Άρα η μοναδική αποδεκτή περίπτωση είναι $x=-3, y=-2$, οπότε προκύπτει $z^2=4 \Leftrightarrow z=\pm 2$, οπότε έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z) = (-3,-2,2) \text{ ή } (x,y,z) = (-3,-2,-2).$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f\left(x^2\right)-y^2=f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right),\text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}.$$

.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεδομένη σχέση για ειδικές τιμές των μεταβλητών.

Για $x=y=0$ λαμβάνουμε $f\left(0\right)=f\left(0\right)^2 \Leftrightarrow f\left(0\right)=0$ ή $f\left(0\right)=1$.

Για $x=y=2$ λαμβάνουμε $f\left(4\right)-4=f\left(4\right)f\left(0\right)$, οπότε, αν $f\left(0\right)=1$, τότε $-4=0$ (άτοπο), ενώ, αν $f\left(0\right)=0$, τότε $f\left(4\right)=4$. Άρα έχουμε $f\left(0\right)=0$ και $f\left(4\right)=4$.

Για $x=y=t\in\mathbb{R}$ έχουμε $f\left(t^2\right)-t^2=f\left(2t\right)f\left(0\right)=0\Rightarrow f\left(t^2\right)=t^2$, $t\in\mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x\geq 0$, υπάρχει $t\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $t^2=x$, έπεται ότι $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x\geq 0$.

Για $x=0$, $y>0$, λαμβάνουμε $f\left(0\right)-y^2=f\left(y\right)f\left(-y\right)\Rightarrow yf\left(-y\right)=-y^2\Rightarrow f\left(-y\right)=-y$, για κάθε $y>0$, δηλαδή $f\left(x\right)=x$, για κάθε $x<0$.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι $f\left(x\right)=x,\ x\in\mathbb{R},$ η οποία εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιεί τη δεδομένη σχέση.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},$$

όπου $a>1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x},a>1,$ ορίζεται για $x\in\left[-a,a\right]$ και παίρνει τιμές θετικές. Αν υποθέσουμε ότι $f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z},$ τότε θα έχουμε

$$f\left(a,x\right)=\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}=n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{a^2-x^2}=n^2\Leftrightarrow\sqrt{a^2-x^2}=\frac{n^2}{2}-a \qquad (1)$$

Επειδή $0\leq\sqrt{a^2-x^2}\leq a$, έχουμε $0\leq\dfrac{n^2}{2}-a\leq a\Leftrightarrow 2a\leq n^2\leq 4a\Leftrightarrow\sqrt{2a}\leq n\leq 2\sqrt{a}$.

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a},2\sqrt{a}\right]$ η εξίσωση (1) έχει λύση ως προς x. Πράγματι, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$a^2-x^2=\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=a^2-\left(\frac{n^2}{2}-a\right)^2,\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2}{2}\left(2a-\frac{n^2}{2}\right),\ x\in\left[-a,a\right]\Leftrightarrow x^2=\frac{n^2\left(4a-n^2\right)}{4},\ x\in\left[-a,a\right]$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}.$$

Οι τιμές του x που βρήκαμε ανήκουν στο διάστημα $[-a,\, a]$, οπότε είναι αποδεκτές, λόγω της σχέσης $x^2 = a^2 - \left(\frac{n^2}{2} - a\right)^2 \le a^2$.

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αριθμός $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε ακέραια τιμή n του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$, για $x = \pm\frac{n\sqrt{4a-n^2}}{2}$.

Επομένως, μπορούμε να βρούμε όσες θέλουμε δυνατές ακέραιες τιμές για το $n = \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$, εφόσον επιτύχουμε να κάνουμε το μήκος του διαστήματος $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ οσοδήποτε μεγάλο θέλουμε, δίνοντας κατάλληλη τιμή στην παράμετρο a. Για παράδειγμα, για να περιέχει το διάστημα $\left[\sqrt{2a}, 2\sqrt{a}\right]$ K ή περισσότερους ακέραιους, αρκεί να ισχύει ότι

$$\left|2\sqrt{a} - \sqrt{2a}\right| \ge K \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{a} \ge K \Leftrightarrow a \ge \left(\frac{K}{2-\sqrt{2}}\right)^2.$$

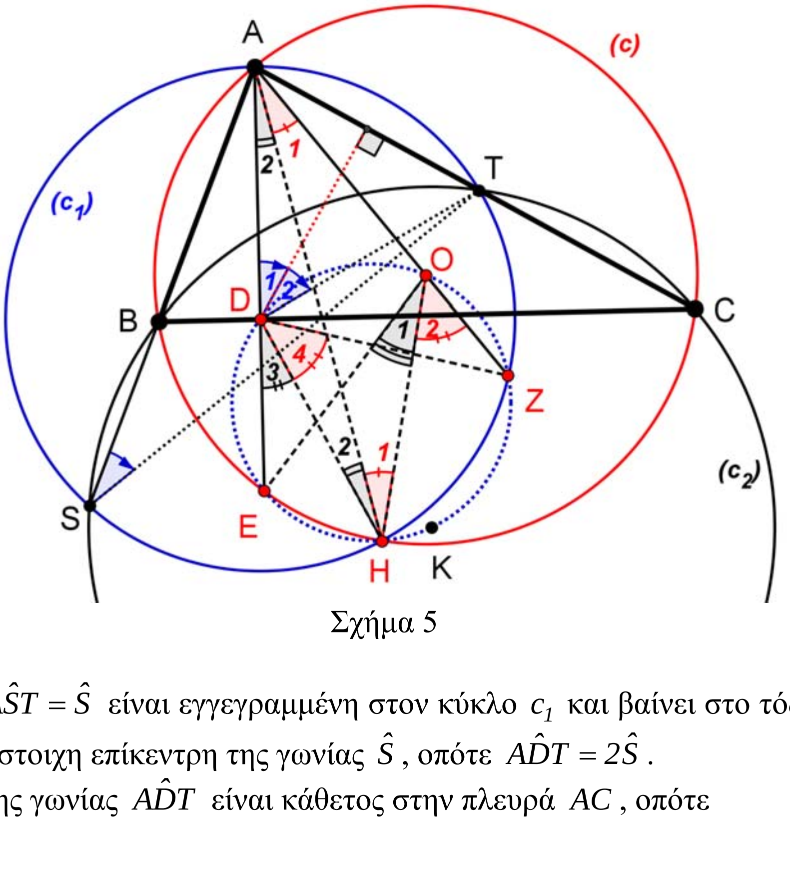
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Ο κύκλος $c_1(D,DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T, την ευθεία AB στο σημείο S, τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2.

(β) Τα σημεία O,D,E,Z,H και το κέντρο του κύκλου c_2, βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 5

(α) Η γωνία $A\hat{S}T = \hat{S}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c_1 και βαίνει στο τόξο AT. Η γωνία $A\hat{D}T$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\hat{S}$, οπότε $A\hat{D}T = 2\hat{S}$.

Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}T$ είναι κάθετος στην πλευρά AC, οπότε

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{C} = 90^o - D\hat{A}C .$$

Άρα $\hat{S} = \hat{C}$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο.

(β) Η γωνία $E\hat{D}H = \hat{D}_3$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου DAH ($DA = DH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε

$$\hat{D}_3 = 2\hat{A}_2 . \qquad (1)$$

Η γωνία $E\hat{A}H = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c και η γωνία $E\hat{O}H = \hat{O}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{O}_1 = 2\hat{A}_2 . \qquad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{D}_3$, οπότε τα σημεία O,D,E,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η γωνία $H\hat{O}Z = \hat{O}_2$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου OAH ($OA = OH$ και $\hat{A}_2 = \hat{H}_2$). Άρα έχουμε:

$$\hat{O}_2 = 2\hat{A}_1 . \qquad (3)$$

Η γωνία $Z\hat{A}H = \hat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο c_1 και η γωνία $H\hat{D}Z = \hat{D}_4$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη, οπότε:

$$\hat{D}_4 = 2\hat{A}_1 . \qquad (4)$$

Από τις ισότητες (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι $\hat{O}_2 = \hat{D}_4$, οπότε τα σημεία O,D,Z,H είναι ομοκυκλικά (ανήκουν στον ίδιο κύκλο).

Η μεσοκάθετη του τμήματος ST περνάει από το κέντρο D του κύκλου c_1. Η μεσοκάθετη του τμήματος BC περνάει από το κέντρο O του κύκλου c. Το σημείο τομής K των δύο μεσοκαθέτων, είναι το κέντρο του κύκλου c_2.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο K ανήκει στο κύκλο που ορίζουν τα σημεία O,D,Z,E,H, δηλαδή ότι: $D\hat{K}O = D\hat{H}O$.

Πράγματι, η γωνία $D\hat{K}O$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζουν οι ST και BC (διότι έχουν τις πλευρές κάθετες), δηλαδή είναι:

$$D\hat{K}O = 180^o - \hat{S} - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} - \hat{C} ,$$

ενώ ακόμη ισχύει ότι:

$$D\hat{H}O = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = E\hat{A}O = 90^o - \frac{A\hat{O}E}{2} = 90^o - A\hat{C}E = 90^o - (\hat{C} + 90^o - \hat{B}) = \hat{B} - \hat{C}.$$

.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left(3^2+2000^0-\frac{4}{9}:\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{3^4}=\frac{4}{9}:\left(9+1-\frac{4}{9}\cdot 3+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}$$
$$=\frac{4}{9}:\left(10-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{77}{81}=\frac{4}{9}:9+\frac{77}{81}=\frac{4}{81}+\frac{77}{81}=1.$$
$$\mathrm{B}=\left(4-\frac{16}{81}\right):\left(\frac{60}{3^3}-\frac{19}{3^2}\right)+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{(60-3\cdot 19)}{27}+\frac{7}{9}=\frac{308}{81}:\frac{3}{27}+\frac{7}{9}=$$
$$=\frac{308}{81}\cdot 9+\frac{7}{9}=\frac{308+7}{9}=\frac{315}{9}=35.$$

Πρόβλημα 2

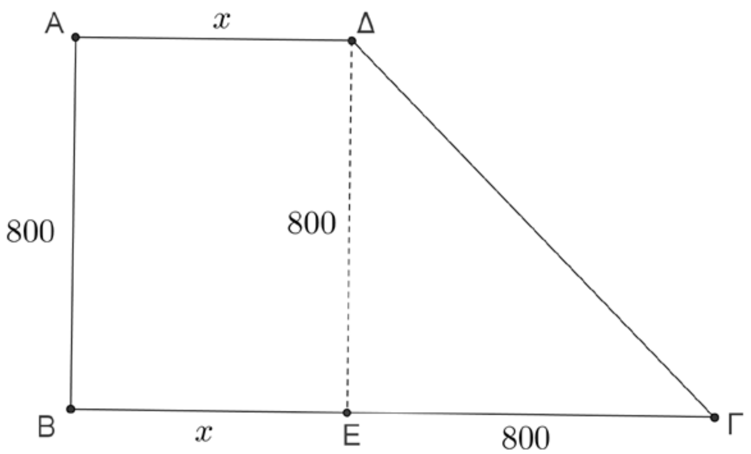
Αγρός έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$, ύψος $\mathrm{AB}=800$ μέτρα, μικρή βάση $\mathrm{A\Delta}$, μεγάλη βάση $\mathrm{B\Gamma}$ και διαφορά βάσεων $\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$ μέτρα. Δίνεται ακόμη ότι:

- Η περίμετρος του αγρού είναι μικρότερη από $2810+800\sqrt{2}$ μέτρα.
- Το εμβαδό του αγρού είναι μεγαλύτερο από 796 στρέμματα.
- Η μικρή βάση ΑΔ έχει μήκος x μέτρα, όπου x ακέραιος πολλαπλάσιος του 10.

Να βρείτε τα μήκη των βάσεων και το εμβαδόν του αγρού.
(*Δίνεται ότι 1 στρέμμα είναι ίσο με 1000 τετραγωνικά μέτρα*)

Λύση

Από τις υποθέσεις του προβλήματος είναι $\mathrm{A\Delta}=x$ μέτρα, $\mathrm{B\Gamma}=800+x$ μέτρα, $\mathrm{AB}=800$ μέτρα. Αν φέρουμε τη $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{B\Gamma}$, τότε είναι ΑΒΕΔ ορθογώνιο με $\mathrm{BE}=x$, $\Delta\mathrm{E}=800$, οπότε θα είναι $\mathrm{E\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{BE}=\mathrm{B\Gamma}-\mathrm{A\Delta}=800$. Έτσι το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι $\Gamma\Delta=800\sqrt{2}$ μέτρα.



Σχήμα 1

Επομένως, η περίμετρος και το εμβαδό του αγρού θα είναι:

$$\Pi(x) = x + 800 + x + 800 + 800\sqrt{2} = 2x + 1600 + 800\sqrt{2}$$

$$\mathrm{E}(x) = \frac{2x+800}{2}\cdot 800 = (x+400)\cdot 800 = 800x + 320000.$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτουν οι ανισώσεις:

$$2x + 1600 + 800\sqrt{2} < 2810 + 800\sqrt{2} \Leftrightarrow 2x < 1210 \Leftrightarrow x < 605$$

$$800x + 320000 > 796000 \Leftrightarrow 800x > 476000 \Leftrightarrow x > 595$$

Επομένως έχουμε $595 < x < 605$ και αφού ο αριθμός x είναι ακέραιος πολλαπλάσιος του 10, έπεται ότι $x = 600$ μέτρα.

Άρα τα μήκη των βάσεων είναι $\mathrm{A\Delta} = 600$ μέτρα, ΒΓ=1400 μέτρα και το εμβαδό του αγρού είναι $800 \cdot 600 + 320000 = 480000 + 320000 = 800000$ τετραγωνικά μέτρα, δηλαδή 800 στρέμματα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ με $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Έστω Ν το συμμετρικό του σημείου Λ ως προς την ευθεία ΑΓ. Να βρείτε:

(α) Τα μέτρα των γωνιών $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda$.

(β) Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΛΝ συναρτήσει του μήκους $\alpha = \mathrm{A\Delta}$.

Λύση

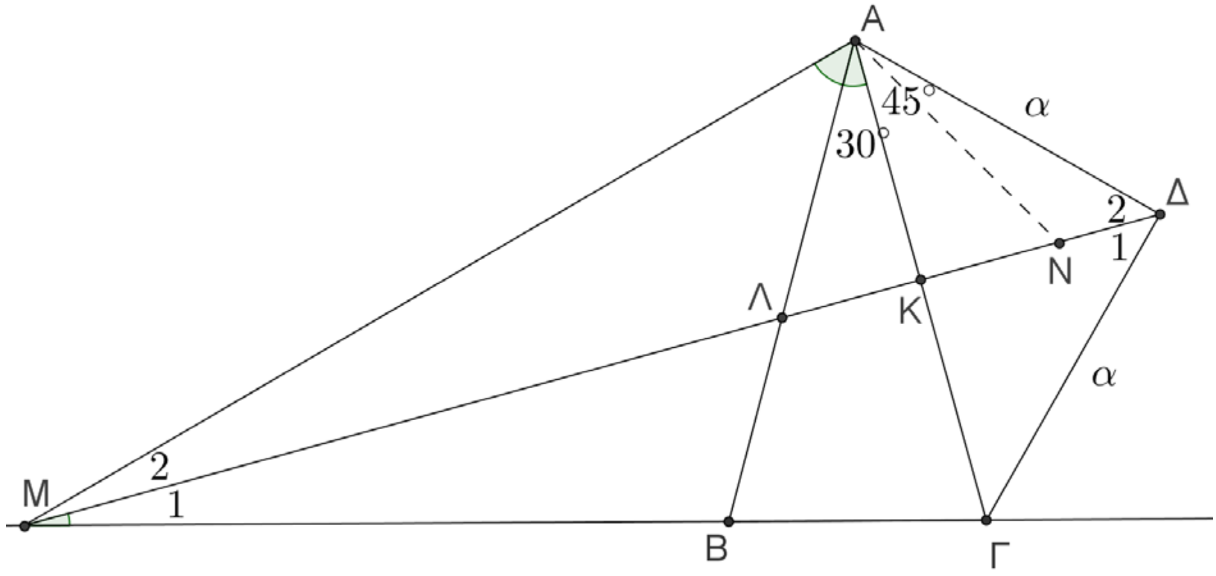
(α) Το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ορθογώνιο στο Κ και έχει τη γωνία

$$\hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$

Επομένως θα είναι και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 75^\circ$, οπότε έχουμε $\mathrm{K}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{B} = \mathrm{M}_1 = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda + \hat{\mathrm{A}} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \mathrm{M}\hat{\mathrm{A}}\Lambda = \hat{\Gamma} - \hat{\mathrm{A}} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\text{ΑΓ}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = \alpha\sqrt{2},$$

οπότε θα είναι:

$$\text{ΑΚ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

Επειδή τα σημεία Λ και Ν είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, έπεται ότι $\text{ΛΚ} = \text{ΚΝ}$. Όμως και τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΛ και ΑΝ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ, οπότε $\text{ΑΛ} = \text{ΑΝ}$ και ομοίως $\text{Λ}\hat{\text{Α}}\text{Κ} = \text{Ν}\hat{\text{Α}}\text{Κ} = 30^\circ$. Άρα είναι $\text{Λ}\hat{\text{Α}}\text{Ν} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΛΑΝ είναι ισόπλευρο και έχουμε $\text{ΛΝ} = \text{ΑΛ}$. Αν είναι $\text{ΑΛ} = \text{ΛΝ} = x$, τότε θα είναι $\text{ΛΚ} = \frac{\text{ΛΝ}}{2} = \frac{x}{2}$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΚ λαμβάνουμε:

$$\text{ΑΛ}^2 - \text{ΛΚ}^2 = \text{ΑΚ}^2 \Leftrightarrow = x^2 - \frac{x^2}{4} = \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} = \frac{2\alpha^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2\alpha^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}.$$

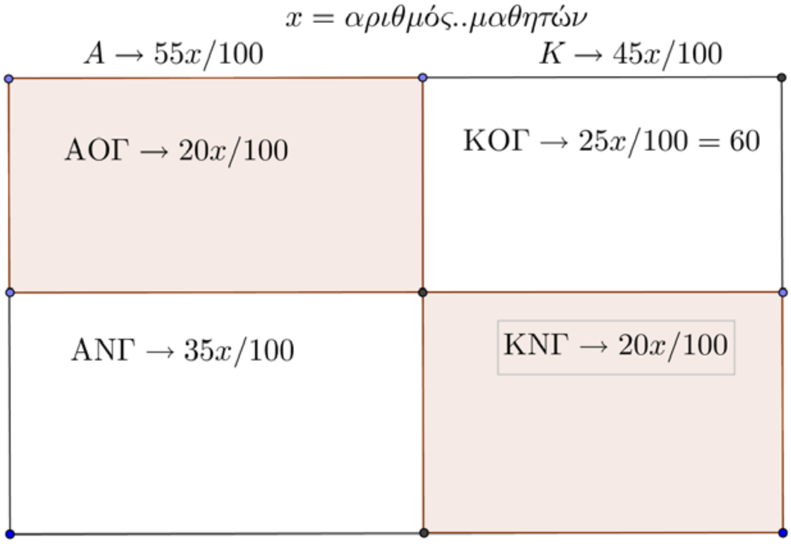
Πρόβλημα 4

Σε ένα σχολείο το 55% των μαθητών είναι αγόρια. Το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά, είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά. Τα κορίτσια που δεν μιλούν γαλλικά είναι 60. Βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση

Αφού το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά, έπεται ότι το πλήθος των μαθητών που μιλούν γαλλικά ισούται με το 55% του συνόλου των μαθητών. Επομένως το ποσοστό των αγοριών που μιλούν γαλλικά επί του συνόλου των μαθητών του σχολείου είναι $\frac{7}{11} \cdot \frac{55}{100} = \frac{35}{100}$, δηλαδή το 35% επί του συνόλου των μαθητών. Επομένως $(55 - 35) = 20\%$ είναι το ποσοστό επί του συνόλου των μαθητών των αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά, αλλά και των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά. Επομένως το ποσοστό των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά είναι $(100 - 55 - 20) = 25\%$, οπότε το 25% των κοριτσιών που δεν μιλούν γαλλικά αντιστοιχεί σε 60 μαθητές. Άρα το πλήθος των μαθητών του σχολείου είναι $60 \cdot \dfrac{100}{25} = 240$.

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να περιγραφεί με το σχήμα που ακολουθεί, ως εξής:



Σχήμα 3

Συμβολικά έχουμε:

$$\text{Α} = \text{σύνολο αγοριών σχολείου με } |\text{Α}| = \frac{55x}{100}.$$

$$\text{Κ} = \text{σύνολο κοριτσιών σχολείου με } |\text{Κ}| = \frac{45x}{100}.$$

ΑΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.
ΑΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.
ΚΟΓ = σύνολο αγοριών που δεν μιλούν γαλλικά.
ΚΝΓ = σύνολο αγοριών που μιλούν γαλλικά.

Από την υπόθεση έχουμε ότι το **πλήθος των στοιχείων των συνόλων** ΑΟΓ **και** ΚΝΓ **είναι το ίδιο**, δηλαδή:

$$|\text{ΑΟΓ}| = |\text{ΚΝΓ}|,$$

οπότε έχουμε τα λογικά βήματα:

$$(\text{αριθμός μαθητών που μιλούν γαλλικά})|\text{ΚΝΓ}| + |\text{ΑΝΓ}| = |\text{ΑΟΓ}| + |\text{ΑΝΓ}| = \frac{55x}{100}(\text{αριθμός αγοριών}),$$

$$|\text{ΑΝΓ}| = \frac{7}{11} \cdot \frac{55x}{100} = \frac{35x}{100},$$

$$|\text{ΑΟΓ}| = (55-35)\frac{x}{100} = \frac{20x}{100} = |\text{ΚΝΓ}|,$$

$$|\text{ΚΟΓ}| = (45-20)\frac{x}{100} = \frac{25x}{100} = 60 \Leftrightarrow x = 240$$

2^{ος} τρόπος

Έστω x το πλήθος των αγοριών και y το πλήθος των κοριτσιών.

Έστω ακόμη α το πλήθος των αγοριών που γνωρίζουν γαλλικά και κ το πλήθος των κοριτσιών που γνωρίζουν γαλλικά.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις.

Εφόσον το 55% των μαθητών είναι αγόρια, θα ισχύει:

$$x=\frac{55}{100}(x+y)\Leftrightarrow 100x=55x+55y\Leftrightarrow 9x=11y\Leftrightarrow y=\frac{9}{11}x \qquad (1).$$

Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν Γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν Γαλλικά, θα ισχύει:

$$x-a=\kappa\Leftrightarrow x=\kappa+a \qquad (2).$$

Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά.

Άρα:

$$\frac{7}{11}(\kappa+a)=a\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{7}{11}x=a \qquad (3).$$

Επειδή (τέλος) το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι *60*, θα ισχύει η ισότητα:

$$y=\kappa+60.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το a, έχουμε:

$$y=\kappa+60\Leftrightarrow y+a=\kappa+a+6\overset{(2)}{\Leftrightarrow} y+\alpha=x+60\overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow}\frac{9}{11}x+\frac{7}{11}x=x+60\Leftrightarrow\frac{5}{11}x=60\Leftrightarrow x=132.$$

Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y=\frac{9}{11}x=\frac{9}{11}\cdot 132=108$, οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\quad \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν } x=3^{-3}, y=3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\left(3^{-3}\right)^3}{\left(3^{-4}\right)^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}}\right)^3=\left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}}+\frac{1}{3}\right):\left(3^{-3+4}\right)^3=\left(3^{-9+12}+\frac{1}{3}\right):\left(3^1\right)^3$$

$$=\left(3^3+\frac{1}{3}\right):3^3=1+\frac{1}{3^4}=\frac{3^4+1}{3^4}=\frac{82}{81}.$$

$$\mathrm{B}=\frac{243\cdot\left(3^{-3}\right)^2 11+81\cdot\left(3^{-4}\right)^2}{3^{-4}}=\frac{3^5\cdot 3^{-6}+3^4\cdot 3^{-8}}{3^{-4}}=\frac{3^{-1}+3^{-4}}{3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=\frac{\frac{3^3+1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=3^3+1=28.$$

$$\Gamma=3^3+3^4=27+81=108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2+1)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$P(x) = 16x^6 - 16x^4 - x^2 + 1 = 16x^4(x^2-1) - (x^2-1) = (16x^4-1)(x^2-1) =$$
$$= (4x^2+1)(4x^2-1)(x^2-1) = (4x^2+1)(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$
$$Q(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 - 4x^2 - x^2 + 1 = 4x^2(x^2-1) - (x^2-1)$$
$$= (4x^2-1)(x^2-1) = (2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$

(β) Έχουμε

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5}{2}(x^2+1) \Leftrightarrow 4x^2+1 = \frac{5}{2}(x^2+1) \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

με τον περιορισμό $Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}$ και $x \neq \pm 1$.

Επομένως η δεδομένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι x, y με $x > y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $x = 2014 - y$ και

$$2014 - y = \omega y + 97, \text{ με } y > 97 \text{ και } \omega \geq 1$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y = 1917, \text{ με } y > 97 \text{ και } 1+\omega \geq 2$$
$$\Leftrightarrow (1+\omega)y = 3^3 \cdot 71, \text{ με } y > 97 \text{ και } 1+\omega \geq 2.$$

Επομένως ο y είναι διαιρέτης του $1917 = 3^3 \cdot 71$ μεγαλύτερος από το 97, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι

$$y = 3 \cdot 71 = 213 \text{ ή } y = 3^2 \cdot 71 = 639 \text{ ή } y = 3^3 \cdot 71 = 1917$$

- Για $y = 213$, είναι $x = 1801$ και $\omega = 8$.
- Για $y = 639$, είναι $x = 1375$ και $\omega = 2$.
- Για $y = 1917$, είναι $x = 97 < y = 1917$, άτοπο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}} = 30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\text{Α}\Delta = \alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\text{ΑΓ}^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 \Leftrightarrow \text{ΑΓ} = \alpha\sqrt{2},$$

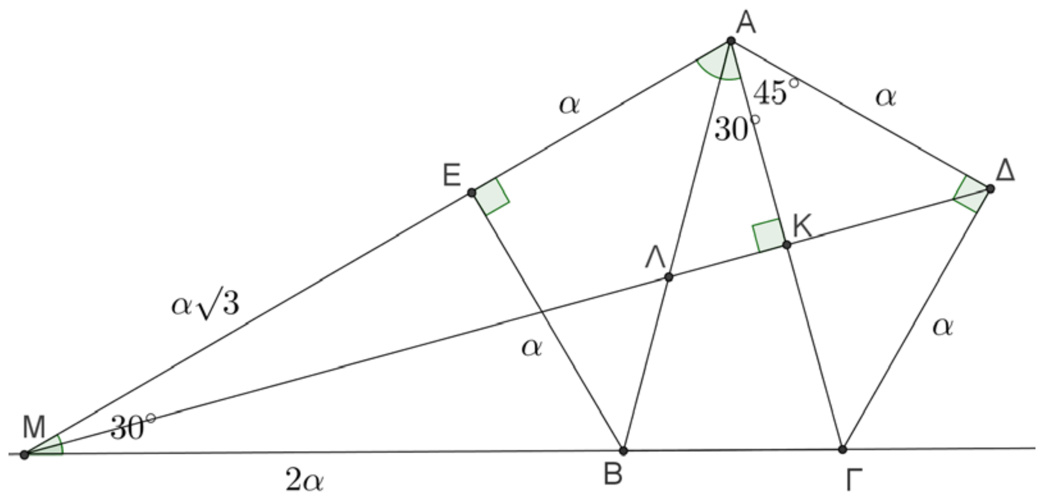
οπότε θα είναι: $\mathrm{AK}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{2}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ με $\mathrm{K\hat{A}\Lambda}=30^\circ$, αν $\mathrm{K\Lambda}=x$, έχουμε

$$x=\mathrm{K\Lambda}=\mathrm{A\Lambda}\cdot \eta\mu 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{A\Lambda}\Rightarrow \mathrm{A\Lambda}=2x,$$

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε:

$$\mathrm{AK}^2+x^2=(2x)^2\Leftrightarrow 3x^2=\mathrm{AK}^2\Leftrightarrow 3x^2=\frac{\alpha^2}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{\sqrt{6}}=\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$



Σχήμα 4

(β) Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές με

$$\mathrm{MA}=\mathrm{M\Gamma}\ \text{ και }\ \mathrm{M\hat{A}\Gamma}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ,$$

οπότε $\mathrm{M\hat{A}\Gamma}=75^\circ\Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}B}+30^\circ=75^\circ\Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}B}=45^\circ$.

Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία κάθετη προς την ευθεία ΜΑ που την τέμνει, έστω στο Ε, οπότε σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΕΜ.

Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο ΑΓΔ, γιατί έχουν ίσες υποτείνουσες $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Άρα είναι $\mathrm{AE}=\alpha$ και $\mathrm{BE}=\alpha$.

Το τρίγωνο ΒΜΕ έχει

$$\mathrm{M\hat{B}E}=\mathrm{B\hat{M}A}=180^\circ-2\cdot\hat{\Gamma}=180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BM}\cdot\eta\mu 30^\circ\Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BM}\Rightarrow \mathrm{BM}=2\alpha\ \text{ και}$$

$$\mathrm{ME}=\mathrm{BM}\cdot\sigma\upsilon\nu 30^\circ\Rightarrow \mathrm{ME}=2\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\alpha\sqrt{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{AM}=\mathrm{AE}+\mathrm{ME}=\alpha\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Τέλος από την ισότητα $\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{MA}$ λαμβάνουμε:

$$2\alpha+\mathrm{B\Gamma}=\alpha\sqrt{3}+\alpha\Leftrightarrow \mathrm{B\Gamma}=\alpha\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x = \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y = \sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή του κλάσματος επί $\sqrt[8]{3}-1$ και εκτελώντας διαδοχικά τις εμφανιζόμενες διαφορές τετραγώνων, λαμβάνουμε

$$x = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt[8]{3}-1.$$

Επομένως έχουμε

$$x+1 = \sqrt[8]{3} < \sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2} = y.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3} \geq 0 \qquad \text{και} \qquad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right) \leq 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$1-\frac{|x-1|}{3} \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση $\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right) \leq 0$ έχουμε:

$$\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(|x|-2 \geq 0 \text{ και } |x|-5 \leq 0\right) \text{ ή } \left(|x|-2 \leq 0 \text{ και } |x|-5 \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq |x \leq 5| \text{ ή } \left(|x| \leq 2 \text{ και } |x| \geq 5\right), \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 5.$$

Όμως $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$ και $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$, οπότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$-5 \leq x \leq -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 5 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το δεδομένο σύστημα ανισώσεων αληθεύει για

$$x = -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 4.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ($ΑΒ = ΑΓ > ΒΓ$). Ο κύκλος $c_1(Γ, ΒΓ)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα ΒΓ) τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(Α, ΑΔ)$ (με κέντρο Α και ακτίνα ΑΔ) τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και τον κύκλο $c_1(Γ, ΒΓ)$ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου ΑΔΖ τέμνει την ευθεία ΒΕ στο σημείο Μ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες τμημάτων:

$$\Gamma B = \Gamma\Delta = \Gamma Z \qquad (1) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_1(\Gamma, B\Gamma))$$

$$A\Delta = AE = AZ \qquad (2) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_2(A, A\Delta))$$

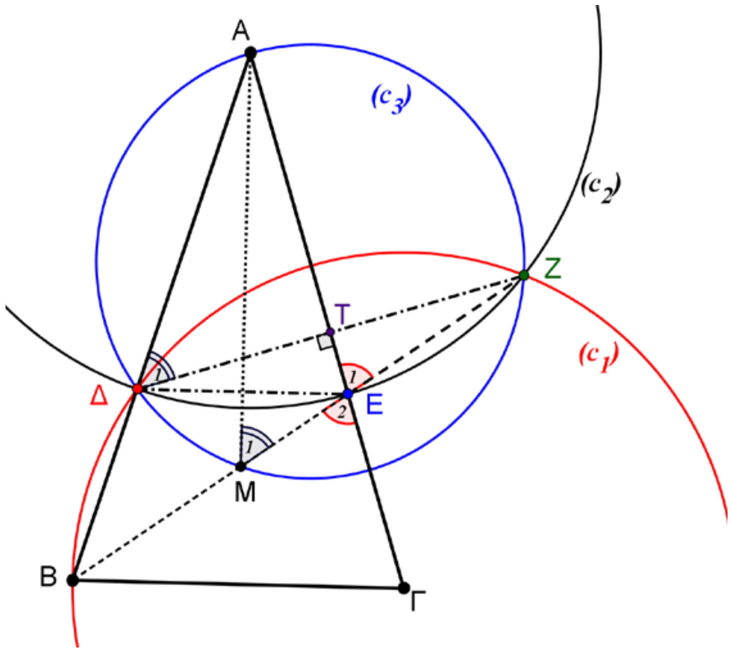
Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές θα ισχύει: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o - \dfrac{\hat{A}}{2}$ και ομοίως από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε: $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2}$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE. Αυτά έχουν:

(α) η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή, (β) $B\Delta = \Gamma E$, (γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B = 90^o - \dfrac{\hat{A}}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα, οπότε $BE = \Delta\Gamma \overset{(1)}{=} B\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια

$$\hat{E}_2 = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$



Σχήμα 5

Εφόσον $A\Delta = AZ$ και $\Gamma\Delta = \Gamma Z$, η $A\Gamma$ (διάκεντρος των δύο κύκλων) είναι μεσοκάθετη της ΔZ (κοινή χορδή των δύο κύκλων). Επομένως τα σημεία Δ και Ζ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ και ισχύει:

$$\hat{E}_1 = A\hat{E}Z = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι:

$$\hat{E}_2 = B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}Z = \hat{E}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}, \qquad (5)$$

οπότε, δεδομένου ότι τα σημεία Α, Ε, Γ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΑΓ, έπεται ότι οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ ή είναι αντικείμενες ημιευθείες με αρχή το Ε ή είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ΑΓ. Το τελευταίο αποκλείεται, γιατί τότε θα είχαμε τις ευθείες ΕΔ και ΕΒ να συμπίπτουν, ως συμμετρικές και οι δύο με την ΕΖ ως προς την ευθεία ΑΓ, άτοπο.

Επομένως οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ είναι αντικείμενες, δηλαδή τα σημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φθάσουμε θεωρώντας το άθροισμα

$$\mathrm{B\hat{E}\Delta + \Delta\hat{E}A + A\hat{E}Z = \hat{A} + \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 180^\circ},$$

οπότε η γωνία $\mathrm{B\hat{E}Z}$ είναι ευθεία γωνία και τα σημεία Β, Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A\hat{T}\Delta}$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Όμως οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c_3 = (\mathrm{A}, \Delta, \mathrm{Z})$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AZ}}$, οπότε έχουμε: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Επειδή η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$, είναι εξωτερική στο τρίγωνο AEM, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_1 + \mathrm{M\hat{A}E} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}E} = \hat{\mathrm{E}}_1 - \hat{\mathrm{M}}_1 = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \left(90^o - \hat{\mathrm{A}}\right) = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2},$$

οπότε η ευθεία ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι και μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή το αθροίσματος $a+b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Λύση

Θέτουμε $s = a+b$, οπότε η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$a^2 + 4(s-a)^2 = 2a + 12(s-a) - 5.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - (8s-10)a + 4s^2 - 12s + 5 = 0 \qquad (1)$$

Για να έχει η εξίσωση (1) λύση ως προς a στους πραγματικούς αριθμούς, πρέπει να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, δηλαδή πρέπει:

$$\Delta = (8s-10)^2 - 20(4s^2 - 12s + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 4\left[(4s-5)^2 - 5(4s^2 - 12s + 5)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -4s^2 + 20s \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-5) \leq 0 \Leftrightarrow (s \geq 0 \text{ και } s-5 \leq 0) \text{ ή } (s \leq 0 \text{ και } s-5 \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 5.$$

Επομένως η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $s = a+b$ είναι 5. Για $s = 5$ είναι $\Delta = 0$, οπότε από την εξίσωση προκύπτει η λύση $a = 3$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $b = 2$.

Β΄ τάξη Λυκείου

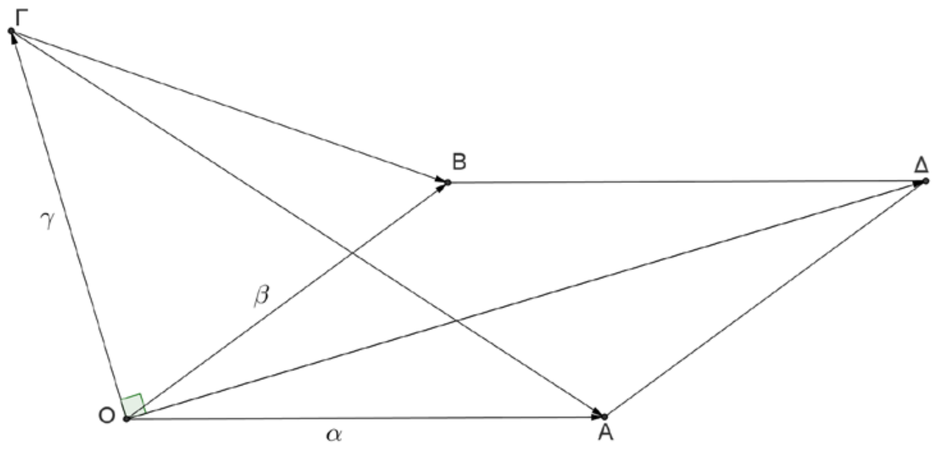
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O, A, B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}, \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει ή ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Λύση



Σχήμα 6

Από τις ισότητες $\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}$, έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2=\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right)\cdot\left(\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\gamma}^2-\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}=0\Rightarrow\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{0}\text{ ή }\vec{\gamma}\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}\,(\text{αδύνατο,αφού O, A, B μη συνευθειακά})\text{ ή }\vec{\gamma}\perp\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{O\Delta}$$

$\Rightarrow\vec{\gamma}$ κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου ΟΑΔΒ.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3-2x^2=4ax^2-11ax+6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3-2x^2=4ax^2-11ax+6a\Leftrightarrow x^3-2x^2=4ax^2-8ax-3ax+6a$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)=4ax\left(x-2\right)-3a\left(x-2\right)\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x^2-4ax+3a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0\text{ ή }x^2-4ax+3a=0\Leftrightarrow x=2\text{ ή }x^2-4ax+3a=0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x=2$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a\in\mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2-4ax+3a=0$ έχει όλες τις ρίζες της α-κέραιες.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=16a^2-12a=4a\left(4a-3\right)$ και πρέπει να είναι μη αρνητική, δηλαδή $4a\left(4a-3\right)\geq0\Leftrightarrow a\leq0$ ή $a\geq\frac{3}{4}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u,v\in\mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u+v=4a\text{ και }uv=3a\Rightarrow3\left(u+v\right)=4uv\Rightarrow3u+3v-4uv=0\Rightarrow u\left(3-4v\right)=-3v,$$

οπότε αφού $4u-3\neq0$ λαμβάνουμε:

$$u=\frac{3v}{4v-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{12v}{4v-3}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{12v-9+9}{4v-3}\right)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{9}{4v-3}\right)\Rightarrow4u-3=\frac{9}{4v-3}\in\mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει $4v-3\in\left\{9,-9,3,-3,1,-1\right\}$, οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$v = 3 \text{ ή } v = 0 \text{ ή } v = 1.$$

- Για $v = 3$ ή $v = 1$ προκύπτει $u = 1$ ή $u = 3$ και $a = 1$.
- Για $v = 0$ προκύπτει $u = 0$ και $a = 0$.

Επομένως για $a = 0$ ή $a = 1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 6a^2, \\ x + y &= 3a, \\ y + z &\geq 3a, \end{aligned}$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση

Θέτουμε $s = y + z$, οπότε θα είναι $z = s - y$. Επίσης έχουμε $x = 3a - y$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος λαμβάνουμε

$$(3a - y)^2 + y^2 + (s - y)^2 = 6a^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2(3a + s)y + s^2 + 3a^2 = 0 \qquad (1)$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως προς y λύση στο $\mathbb{R}$, αν, και μόνον αν,

$$\Delta = 4\left[(3a + s)^2 - 3(s^2 + 3a^2)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -2s^2 + 6as \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 3a.$$

Όμως από την ανίσωση του συστήματος έχουμε: $s \geq 3a$, οπότε λαμβάνουμε ότι: $s = 3a$. Τότε προκύπτει $\Delta = 0$ και η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση $y = \frac{3a + s}{3} = 2a$, οπότε θα είναι $x = 3a - y = a$ και $z = 3a - y = a$. Επομένως, μοναδική λύση του συστήματος είναι η

$$(x, y, z) = (a, 2a, a).$$

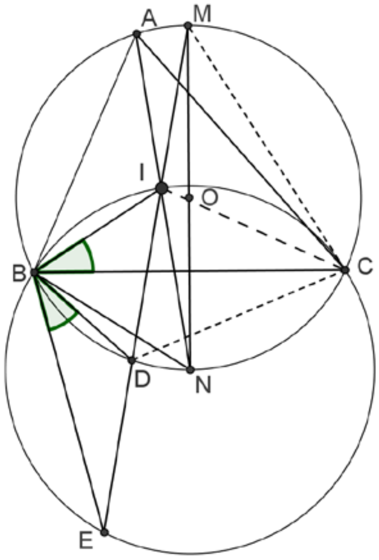
Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A. Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο D και τον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ για δεύτερη φορά στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{I\hat{B}C}$.

Λύση

Ο κύκλος $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ περνάει από τα σημεία B και C. Πράγματι, η γωνία $\mathrm{B\hat{I}N}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AIB, οπότε $\mathrm{B\hat{I}N} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$. Επίσης $\mathrm{N\hat{B}I} = \mathrm{N\hat{B}C} + \mathrm{C\hat{B}I} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, οπότε $\mathrm{B\hat{I}N} = \mathrm{N\hat{B}I}$, οπότε $\mathrm{NB} = \mathrm{NI}$.

Επιπλέον, επειδή η κάθετος από το κέντρο O του κύκλου προς την πλευρά BC περνάει από τα μέσα των αντίστοιχων τόξων, έπεται ότι η NM είναι διάμετρος του κύκλου (O, R), οπότε $\mathrm{N\hat{D}M} = 90^\circ$. Επομένως στον κύκλο $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$ το σημείο D είναι μέσο της χορδής IE.



Σχήμα 7

Από το τρίγωνο BED έχουμε $\mathrm{E\hat{B}D} = \mathrm{B\hat{D}M} - \mathrm{B\hat{E}I}$. Όμως $\mathrm{B\hat{D}M} = 90^\circ - \mathrm{B\hat{A}N} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}$ και $\mathrm{B\hat{E}I} = \frac{\hat{\mathrm{C}}}{2}$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο του κύκλου $(\mathrm{N}, \mathrm{NI})$). Επομένως έχουμε

$$\mathrm{E\hat{B}D} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\hat{\mathrm{C}}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \mathrm{I\hat{B}C}.$$

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Λύση

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 20ax - 6ax + 24a = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-4) = 5ax(x-4) - 6a(x-4) \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 5ax + 6a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ή } x^2 - 5ax + 6a = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5ax + 6a = 0.$$

Επομένως η δεδομένη εξίσωση έχει τη ρίζα $x = 4$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $x^2 - 5ax + 6a = 0$ έχει όλες τις ρίζες της α-κέραιες. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 25a^2 - 24a = a(25a - 24)$ και πρέπει να εί-ναι μη αρνητική, δηλαδή $a(25a - 24) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ ή $a \geq \frac{24}{25}$. Αν υποθέσουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $u, v \in \mathbb{Z}$, τότε από τους τύπους του Vieta θα έχουμε:

$$u + v = 5a \text{ και } uv = 6a \Rightarrow 6(u+v) = 5uv \Rightarrow 6u + 6v - 5uv = 0 \Rightarrow u(6 - 5v) = -6v,$$

οπότε αφού $6 - 5v \neq 0$ λαμβάνουμε:

$$u = \frac{6v}{5v-6} = \frac{1}{5}\left(\frac{30v}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{30v - 36 + 36}{5v-6}\right) = \frac{1}{5}\left(6 + \frac{36}{5v-6}\right) \Rightarrow 5u - 6 = \frac{36}{5v-6} \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως, πρέπει

$$5v-6 \in \{36, -36, 18, -18, 12, -12, 9, -9, 6, -6, 4, -4, 3, -3, 2, -2, 1, -1\},$$

οπότε προκύπτουν αποδεκτές τιμές οι:

$$v=-6 \text{ ή } v=3 \text{ ή } v=0 \text{ ή } v=1 \text{ ή } v=2.$$

- Για $v=-6$ ή $v=1$ προκύπτει $u=1$ ή $u=-6$, αντίστοιχα, και $a=-1$.
- Για $v=3$ ή $v=2$ προκύπτει $u=2$ ή $u=3$, αντίστοιχα, και $a=1$
- Για $v=0$ προκύπτει $u=0$ και $a=0$.

Επομένως για $a=0$ ή $a=\pm 1$ η δεδομένη εξίσωση έχει όλες τις ρίζες της ακέραιες.

Πρόβλημα 2

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D=\left\{(x,y):(x-1)^2+(y-2)^2 \le 8\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $x+y$, όταν $(x,y) \in D$, και τις τιμές των x, y για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του k, για την οποία η ευθεία ε με εξίσωση $x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου C: $(x-1)^2+(y-2)^2=8$, προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

Λύση

(α) Έστω $S=x+y$. Τότε η ανίσωση που ορίζει το χωρίο D γράφεται:

$$(x-1)^2+(S-x-2)^2 \le 8 \Leftrightarrow.$$

$$2x^2+2(1-S)x+S^2-4S-3 \le 0. \qquad (1)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = 4\left[(1-S)^2-2(S^2-4S-3)\right]=4(1-2S+S^2-2S^2+8S+6)$$

$$=-4(S^2-6S-7)=-4(S+1)(S-7).$$

Επομένως η ανίσωση (1) αληθεύει για τιμές του x μεταξύ των ριζών του τριωνύμου του πρώτου μέλους της (1), όταν: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le S \le 7$, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος S είναι η $S_{\max}=7$. Για $S=7$ η ανίσωση (1) γράφεται $x^2-6x+9 \le 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \le 0$ και αληθεύει μόνο για $x=3$, οπότε $y=S_{\max}-x=7-3=4$.

(β) Αρκεί να βρούμε την ελάχιστη τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η ευθεία $\varepsilon: x+y=k$ είναι εφαπτομένη του κύκλου με εξίσωση $C:(x-1)^2+(y-2)^2=8$. Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C για εκείνα τα k, για τα οποία το σύστημα

$$(x-1)^2+(y-2)^2=8,\ x+y=k,$$

έχει διπλή λύση, δηλαδή όταν η ευθεία ε έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο C.

Ισοδύναμα, αυτό ισχύει όταν η εξίσωση

$$2x^2+2(1-k)x+k^2-4k-3=0. \qquad (2)$$

έχει μοναδική λύση ως προς x, δηλαδή όταν έχει διακρίνουσα $\Delta=-4(k^2-6k-7)=0 \Leftrightarrow$ $k=-1$ ή $k=7$, οπότε η ελάχιστη τιμή του k είναι $k_{\min}=-1$. Το αντίστοιχο σημείο επαφής προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης (2) για $k=-1$. Επειδή είναι $\Delta=0$ η εξίσωση (2) έχει μοναδική λύση $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{k-1}{2}=-1$, οπότε $y=0$. Επομένως το ζητούμενο σημείο επαφής είναι το $(x,y)=(-1,\,0)$.

Πρόβλημα 3

Έστω $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, όπου $\mathbb{N}^*$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω k ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(2)-1\right)^2+\ldots+\left(f(k+1)-1\right)^2\right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $a\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ τέτοιο, ώστε $f(a)\geq k+2$.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $a=1,2,\ldots,k+1$, ισχύει ότι $f(a)<k+2$. Τότε $f(a)\leq k+1$ για κάθε $a=1,2,\ldots,k+1$. Αφού επιπλέον η f είναι 1-1, έπεται ότι οι αριθμοί

$$f(1)-1,\ f(2)-1,\ \ldots,\ f(k+1)-1,$$

είναι (με κάποια διαφορετική ενδεχομένως σειρά) οι αριθμοί $1-1,2-1,\ldots,k+1-1$.

Επομένως

$$3\left[\left(f(1)-1\right)^2+\left(f(2)-1\right)^2+\ldots+\left(f(k+1)-1\right)^2\right]=3\left[1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2\right]$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}=\frac{2k^3+3k^2+k}{2}=k^3+\frac{3}{2}k^2+k.$$

Όμως $k^3<k^3+\frac{3}{2}k^2+k<(k+1)^3$, οπότε ο παραπάνω αριθμός δεν μπορεί να είναι κύβος φυσικού αριθμού, (άτοπο). Επομένως υπάρχει $a\in\{1,2,\ldots,k+1\}$ τέτοιο ώστε $f(a)\geq k+2$.

Πρόβλημα 4

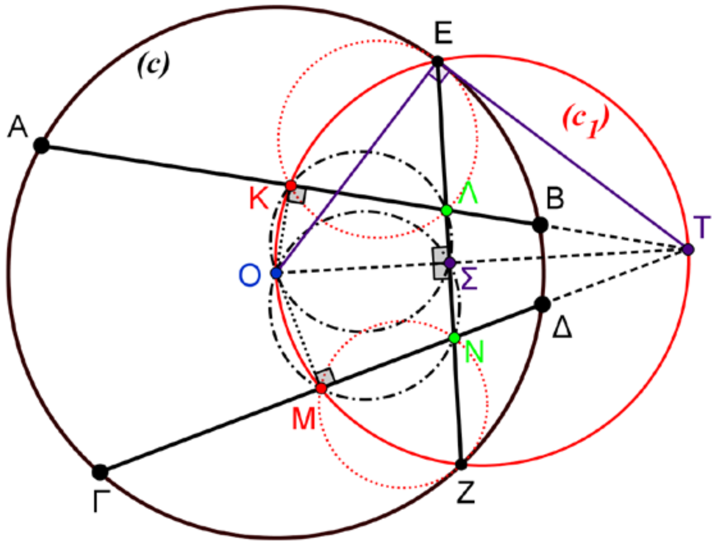
Δίνονται κύκλος $c(\mathrm{O},R)$, δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές AB, $\Gamma\Delta$ και τα μέσα τους K,M, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου OKM τέμνει το κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στα σημεία E,Z (το σημείο E ανήκει στο μικρό τόξο AB). Η EZ τέμνει τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ,N, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία $\mathrm{K},\Lambda,\mathrm{M}$ και N ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Οι περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{K}\Lambda\mathrm{E}$ εφάπτεται στον κύκλο $c(\mathrm{O},R)$.

Λύση

(i) Επειδή K,M είναι μέσα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$, αντίστοιχα, θα ισχύουν οι καθετότητες: $\mathrm{OK}\perp\mathrm{AB}$ και $\mathrm{OM}\perp\Gamma\Delta$.



Σχήμα 8

Έστω T το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής AB και του κύκλου c_1. Τότε το σημείο T είναι το αντιδιαμετρικό του O στο κύκλο c_1 (διότι $\hat{\mathrm{K}} = 90^o$) . Το σημείο T είναι επίσης το κοινό σημείο της προέκτασης της χορδής $\Gamma\Delta$ και του κύκλου c_1.

Άρα η OT είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής EZ.

Επειδή $\hat{\mathrm{K}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο $\mathrm{O\Sigma\Lambda K}$ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (1).$$

Επειδή $\hat{\mathrm{N}} = \hat{\Sigma} = 90^o$, το τετράπλευρο $\mathrm{O\Sigma NM}$ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$\mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM} = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε $\mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK} = \mathrm{TN} \cdot \mathrm{TM}$, οπότε το τετράπλευρο $\mathrm{K\Lambda NM}$ είναι εγγράψιμο.

(ii) Το τρίγωνο OET είναι ορθογώνιο στο E (διότι η OT είναι διάμετρος του κύκλου c_1), οπότε η TE είναι εφαπτόμενη του κύκλου $c(\mathrm{O}, R)$. Άρα έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Sigma} \cdot \mathrm{TO}. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (3) (σε συνδυασμό με την ισότητα (1)), έχουμε:

$$\mathrm{ET}^2 = \mathrm{T\Lambda} \cdot \mathrm{TK}. \qquad (4)$$

Άρα η ET εφάπτεται στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $\mathrm{K\Lambda E}$. Επομένως οι κύκλοι $c(\mathrm{O}, R)$ και $(\mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{E})$ έχουν στο σημείο τους E κοινή εφαπτομένη, οπότε εφάπτονται στο σημείο E.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
75^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
17 Ιανουαρίου 2015
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}.$$

Λύση. Έχουμε :

$$\mathrm{A}=\left(\frac{7}{3}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(2-\frac{11}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{21}{9}-\frac{49}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}$$

$$=\left(-\frac{28}{9}\right)\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{3}+\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}:\left(\frac{9}{10}\right)^{-2}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\left(\frac{10}{3}\right)^{2}:\left(\frac{10}{9}\right)^{2}=\frac{100}{9}\cdot\frac{81}{100}=\frac{81}{9}=9.$$

Πρόβλημα 2. Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση $11\frac{1}{9}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση $14\frac{2}{7}\%$ πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 350 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

Σημείωση: *Οι αριθμοί* $11\frac{1}{9}\%$ *και* $14\frac{2}{7}\%$ *είναι μεικτοί.*

Λύση

Έστω x ευρώ η τιμή πώλησης του ψυγείου, οπότε η τιμή πώλησης του πλυντηρίου θα είναι $3150-x$ ευρώ. Η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $11\frac{1}{9}\%=\frac{100}{9}\%$, οπότε η έκπτωση για το ψυγείο ήταν $x\cdot\frac{100/9}{100}=\frac{x}{9}$ ευρώ. Επίσης, η έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $14\frac{2}{7}\%=\frac{100}{7}\%$, οπότε η αντίστοιχη έκπτωση για το πλυντήριο ήταν $\left(3150-x\right)\cdot\frac{100/7}{100}=\frac{3150-x}{7}=450-\frac{x}{7}$. Άρα έχουμε

$$\frac{x}{9}+450-\frac{x}{7}=390\Leftrightarrow\frac{x}{9}-\frac{x}{7}=-60\Leftrightarrow\frac{2x}{63}=60\Leftrightarrow x=63\cdot 30\Leftrightarrow x=1890.$$

Επομένως, η τιμή πώλησης του ψυγείου ήταν 1890 ευρώ και η τιμή πώλησης του πλυντηρίου ήταν $3150-1890=1260$ ευρώ.

Πρόβλημα 3. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα $3/4$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα $2/3$ του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ είναι το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

Λύση

Έστω ότι τα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν τα ποσά $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$\beta=\frac{3\gamma}{4},\ \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \delta=\alpha+\gamma \Rightarrow \alpha=\frac{2\beta}{3},\ \gamma=\frac{4\beta}{3},\ \delta=\frac{6\beta}{3}=2\beta$$

$$\frac{3\alpha}{2}=\beta=\frac{3\gamma}{4}=\frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2/3}=\frac{\beta}{1}=\frac{\gamma}{4/3}=\frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}.$$

Σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος το ποσό των 9690 ευρώ πρέπει να διαμεριστεί σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ οποίοι, όπως διαπιστώνουμε από την τελευταία σχέση είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς $2,3,4$ και 6. Επομένως, αρκεί να διαμερίσουμε το ποσό των 9690 ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2,3,4 και 6. Έτσι, αν διαιρέσουμε τον αριθμό 9690 σε $2+3+4+6=15$ ίσα μέρη έχουμε μερίδιο το ποσό $9690:15=646$ ευρώ. Επομένως, το χωριό Α πλήρωσε $646\cdot 2=1292$ ευρώ, το χωριό Β πλήρωσε $646\cdot 3=1938$ ευρώ, το χωριό Γ πλήρωσε $646\cdot 4=2584$ ευρώ και το χωριό Δ πλήρωσε $646\cdot 6=3876$ ευρώ.

Διαφορετικά, από τις ισότητες

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}=\frac{\delta}{6}=\omega \Rightarrow \alpha=2\omega,\ \beta=3\omega,\ \gamma=4\omega,\ \delta=6\omega,$$

οπότε από την υπόθεση $\alpha+\beta+\gamma+\delta=9690$ με αντικατάσταση λαμβάνουμε:

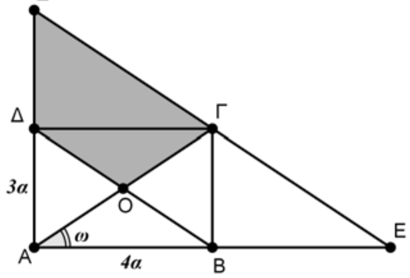
$$2\omega+3\omega+4\omega+6\omega=9690 \Leftrightarrow 15\omega=9690 \Leftrightarrow \omega=646.$$

Άρα είναι: $\alpha=2\omega=1292,\ \beta=3\omega=1938,\ \gamma=4\omega=2584,\ \delta=6\omega=3876$ ευρώ.

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B=\omega$ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$AB=4\alpha\ cm,\ A\Delta=3\alpha\ cm.$$



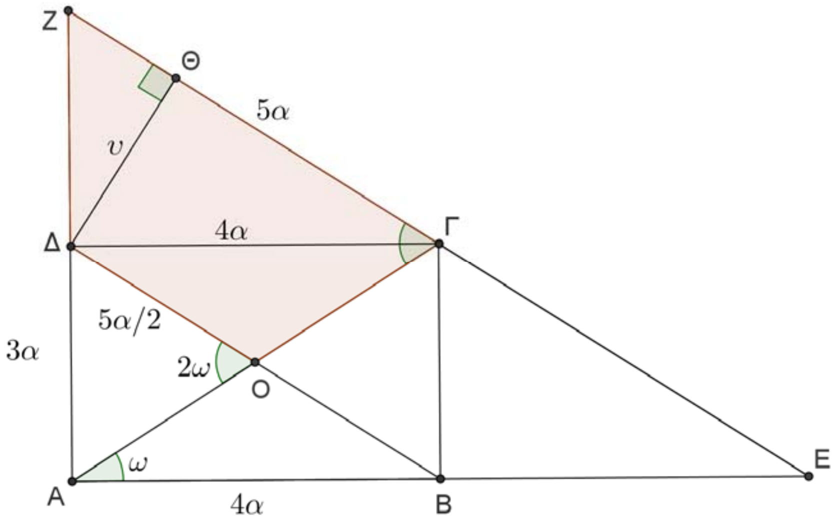
1. Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας ω.

2. Αποδείξετε ότι: $A\Gamma=\Gamma Z=\Gamma E$.

3. Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



Σχήμα 2

1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $O\hat{B}A = \omega = O\hat{A}B$. Η γωνία $A\hat{O}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AOB, οπότε θα είναι $A\hat{O}\Delta = O\hat{A}B + O\hat{B}A = 2\omega$. Από την παραλληλία $EZ \parallel B\Delta$, επειδή οι γωνίες $A\hat{\Gamma}Z$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $A\hat{\Gamma}Z = 2\omega$.

2. Επειδή $EZ \parallel B\Delta$ και $\Gamma\Delta \parallel AE$, $B\Gamma \parallel AZ$, τα τετράπλευρα ΔΒΕΓ και ΔΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες. Άρα είναι: $B\Delta = \Gamma Z = \Gamma E$ Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $A\Gamma = B\Delta$. Επομένως, θα είναι και $A\Gamma = \Gamma Z = \Gamma E$.

3. Το τρίγωνο ΑΓΖ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = \Gamma Z$, οπότε το ύψος του $\Gamma\Delta = AB = 4\alpha\ cm$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $AZ = 2 \cdot A\Delta = 6\alpha\ cm$ και $\Delta Z = 3\alpha\, cm$.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 \Rightarrow B\Delta^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow B\Delta = 5\alpha\ cm.$$

Άρα είναι: $O\Delta = \dfrac{B\Delta}{2} = \dfrac{5\alpha}{2}$ και $\Gamma Z = 5\alpha\, cm$.
Για το ύψος $\upsilon = \Delta\Theta$ έχουμε ότι:

$$E(\Gamma\Delta Z) = \frac{\Delta\Gamma \cdot \Delta Z}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \Delta\Theta}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

$$E(\Delta O\Gamma Z) = \frac{(\Delta O + \Gamma Z)}{2} \cdot \upsilon = \frac{\left(\dfrac{5\alpha}{2} + 5\alpha\right)}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2\ cm^2.$$

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, όπου a, b, c πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο: $Q(x) = \mathrm{P}(2x) - 19\mathrm{P}(-x)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$, αν ισχύει ότι: $Q(x) = 3x(3x+2)^2$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$Q(x) = \mathrm{P}(2x) - 19\mathrm{P}(-x) = (2x)^3 + a(2x)^2 + b\cdot 2x + c - 19\left((-x)^3 + a(-x)^2 + b(-x) + c\right)$$

$$= 8x^3 + 4ax^2 + 2bx + c + 19x^3 - 19ax^2 + 19bx - 19c = 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c.$$

(β) Από την ισότητα $Q(x) = 3x(3x+2)^2$ έχουμε:

$$27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c = 3x(3x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c = 3x\left(9x^2 + 12x + 4\right)$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 15ax^2 + 21bx - 18c = 27x^3 + 36x^2 + 12x$$

$$\Leftrightarrow \{-15a = 36,\ 21b = 12,\ -18c = 0\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{a = -\frac{12}{5},\ b = \frac{4}{7}, c = 0\right\}.$$

Άρα είναι: $\mathrm{P}(x) = x^3 - \dfrac{12}{5}x^2 + \dfrac{4}{7}x.$

Πρόβλημα 2. Οι πραγματικοί αριθμοί a, b είναι τέτοιοι ώστε $ab(a+b)(a-b) \neq 0$ και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab - b^2}{a^2 - b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου $\dfrac{a}{b}$.

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab - b^2}{a^2 - b^2} \Leftrightarrow b(a-b)^2 + b(a+b)^2 = a\left(3ab - b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow b\left[(a-b)^2 + (a+b)^2\right] - ab(3a-b) = 0 \Leftrightarrow b\left(2a^2 + 2b^2\right) - ab(3a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow b\left(2a^2 + 2b^2 - 3a^2 + ab\right) = 0 \overset{b\neq 0}{\Leftrightarrow} 2b^2 - a^2 + ab = 0 \Leftrightarrow a^2 = b(a+2b).$$

(β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$a^2 - ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0,\ x = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x - 1 = 0,\quad x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) - (x+1) = 0,\ x = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0,\ \ x=\frac{a}{b} \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=2,\ x=\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}=-1 \text{ (απορρίπτεται, γιατί } a\neq -b\text{) ή } \frac{a}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=2.$$

Πρόβλημα 3.

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyz}=100x+10y+z$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός $\overline{zyx}=100z+10y+x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyz}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyz}=100x+10y+z=43(x+y+z)+9 \qquad (1)$$

$$\overline{zyx}=100z+10y+x=30(x+y+z)+6, \qquad (2)$$

από τις οποίες για τη διαφορά των δύο αριθμών προκύπτει ότι:

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=99(x-z)=13(x+y+z)+3. \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $10\leq x+y+z\leq 23$, γιατί, αν ήταν $x+y+z\geq 24$, τότε θα είχαμε $\overline{xyz}>43\cdot 24+9=1041$, άτοπο. Επομένως για το δεύτερο μέλος της σχέσης (3) έχουμε:

$$10\cdot 13+3\leq 13(x+y+z)+3\leq 23\cdot 13+3$$

$$\Rightarrow 133\leq 13(x+y+z)+3\leq 302$$

$$\Rightarrow 133\leq 99(x-z)\leq 302,$$

οπότε οι δυνατές τιμές για τη διαφορά των δύο ακραίων ψηφίων είναι 2 ή 3.

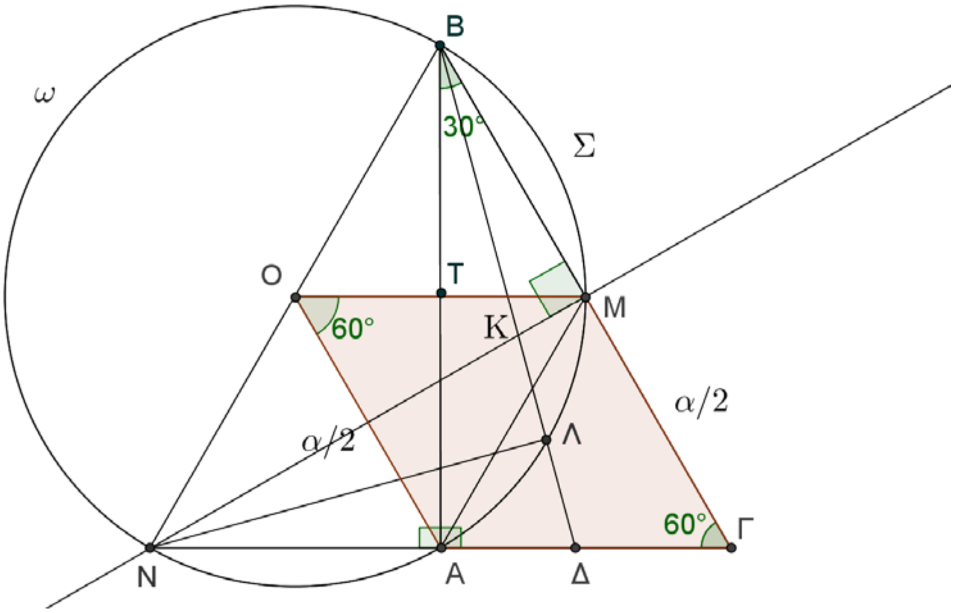
- Για $x-z=2$, από την (3) προκύπτει: $x+y+z=15$ οπότε από τις (1) και (2) λαμβάνουμε $\overline{xyz}=654$ και $\overline{zyx}=456$.
- Για $x-z=3$, από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα των ψηφίων $x+y+z$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ, \hat{\Gamma}=60^\circ$ και υποτείνουσα $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ (το Δ είναι σημείο της ΑΓ) στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{N\Lambda}\perp \mathrm{B\Delta}$.
2. Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω E το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου E συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Σημείωση: *Το χωρίο E είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.*



Σχήμα 2

Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες $\mathrm{KM}, \mathrm{A\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο N. Τότε

$$\mathrm{N\hat{K}\Delta} = \mathrm{B\hat{K}M} = 90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 75^\circ.$$

Επίσης η γωνία $\mathrm{N\hat{\Delta}K}$ ως εξωτερική του τριγώνου $\mathrm{\Delta\Gamma B}$ ισούται με

$$\mathrm{N\hat{\Delta}K} = \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = 60^\circ + \frac{30^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Συνεπώς το τρίγωνο $\mathrm{NK\Delta}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{NK} = \mathrm{N\Delta}$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης $\mathrm{K\Delta}$ του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{NK\Delta}$, έπεται ότι: $\mathrm{N\Lambda} \perp \mathrm{B\Delta}$.

2. Το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma N}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{N\Gamma} = \mathrm{NB}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Επομένως, το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma N}$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\mathrm{BN} = \alpha$. ΟΙ ΒΑ και ΝΜ είναι ύψη και διάμεσοι αυτού, οπότε $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{M\Gamma} = \dfrac{\alpha}{2}$ Ο κύκλος διαμέτρου BN έχει κέντρο, έστω Ο και περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Το τρίγωνο ΟΑΜ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{A\hat{O}M} = 2 \cdot \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = 2 \cdot \left(90^\circ - 60^\circ\right) = 60^\circ.$$

Επίσης $\mathrm{A\hat{O}B} = 2 \cdot \mathrm{\Gamma\hat{N}B} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $\mathrm{M\hat{O}B} = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\dfrac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΓΒΟ είναι ρόμβος που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\dfrac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος του ΑΤ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\dfrac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$\mathrm{AT} = \frac{\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου E δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{\Gamma}\overset{\frown}{\mathrm{AM}}\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right) - \mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{AM}}\right). \qquad (1)$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma MO}\right)=\left(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\right)\cdot\left(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma\right)=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

Επίσης

$$\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{AM}}\right)=\frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{\pi\alpha^2}{24} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\overset{\frown}{\mathrm{AM}}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right)-\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{AM}}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\alpha^2}{24}=\frac{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)\alpha^2}{24}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\frac{\alpha^2-1}{n^2+\alpha n}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{\alpha+n-\alpha n^3-n^4}{1-\alpha^2}$, με α πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n>1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A}=n^2+n+1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο Α να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2}{n-1}-n\right)\cdot\frac{(\alpha+n)-n^3(\alpha+n)}{-(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n^2-n^2+n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)\cdot\frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\\&=-\frac{n(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+n)(1-n^3)}{n(n+\alpha)(n-1)(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{n^3-1}{n-1}=n^2+n+1.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $n^2<\mathrm{A}=n^2+n+1<n^2+2n+1=(n+1)^2$, δηλαδή ο ακέραιος Α βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακέραιων, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακέραιου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 40n \qquad (1)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 46(n-1) \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 28(n-1) \qquad (3)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} = 32(n-2) \qquad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 46 - 6n, \qquad x_n = 12n + 28, \qquad x_1 + x_n = 8n + 64,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

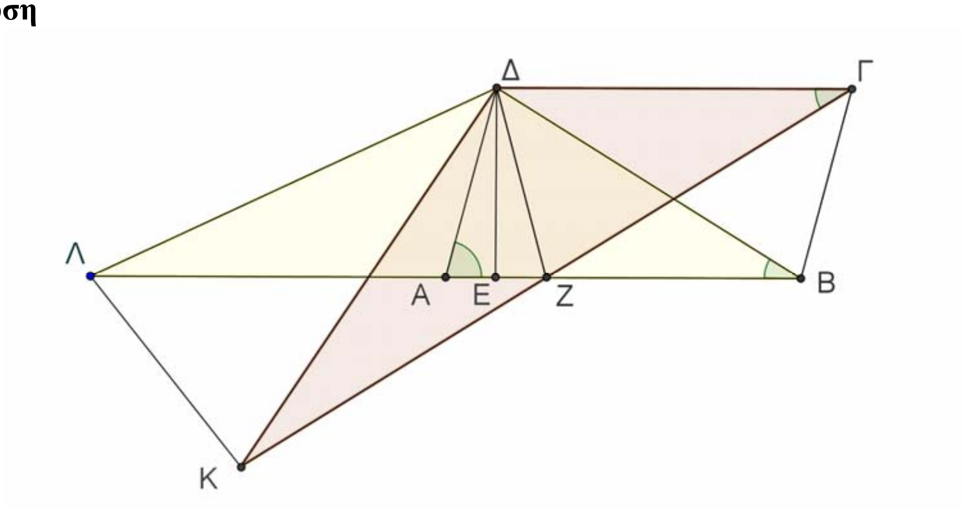
$$x_1 + x_n = (46 - 6n) + (12n + 28) = 8n + 64 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 16$ και $x_5 = 88$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε ΑΒ = ΓΔ = ΒΔ. Φέρουμε το ύψος του ΔΕ, όπου Ε σημείο της πλευράς ΑΒ. Έστω Ζ το συμμετρικό της κορυφής Α ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε ΔΖ = ΔΑ, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους ΔΕ. Επίσης είναι ΔΑ = ΒΓ, από το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επομένως θα είναι ΔΖ = ΒΓ. Επιπλέον

$$\Delta\hat{Z}B = 180^\circ - \Delta\hat{Z}A = 180^\circ - \Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔΖΒ και ΖΒΓ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΔΖ = ΒΓ και ΖΒ κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $\Delta B = Z\Gamma \Rightarrow AB = Z\Gamma \Rightarrow 2 \cdot AB = 2 \cdot Z\Gamma \Rightarrow B\Lambda = \Gamma K$

- $Z\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{Z}B \Rightarrow Z\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}Z$, αφού από $\Delta\Gamma \parallel ZB$ ισχύει ότι: $\Gamma\hat{Z}B = \Delta\hat{\Gamma}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα ΔΒΛ και ΔΓΚ έχουν: $\Delta B = \Delta\Gamma$, ΒΛ=ΓΚ και $\Delta\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{B}\Lambda$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους ΔΛ και ΔΚ ίσες.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός $\overline{xyzw}$.

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w = 327(x + y + z + w) + 14 \qquad (1)$$

$$\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x = 227(x + y + z + w) + 16, \qquad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\overline{xyzw} - \overline{wzyx} = 999(x - w) + 90(y - z) = 100(x + y + z + w) - 2. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $17 \leq x + y + z + w \leq 30$, οπότε

$$1698 \leq 100(x + y + z + w) - 2 \leq 2998$$

$$\Rightarrow 1698 \leq 999(x - w) + 90(y - z) \leq 2998.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x - w \in \{1, 2, 3\}$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x - w = 1$ πρέπει $y - z \in \{8, 9\}$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.
- Για $x - w = 2$, από την (3) λαμβάνουμε:

  $$9(y - z) = 10(x + y + z + w - 20) = \text{πολλαπλάσιο του} 10,$$

  οπότε πρέπει: $y - z = 0$ και $x + y + z + w = 20$. Τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

  $$\overline{xyzw} = 6554 \text{ και } \overline{wzyx} = 4556.$$

- Για $x - w = 3$ πρέπει $y - z = 0$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1} = 3.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Για $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ έχουμε:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-1}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-1+\frac{2}{x-2}-1+\frac{3}{x-1}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{4-x}{x-3}+\frac{4-x}{x-2}+\frac{4-x}{x-1}=0 \Leftrightarrow (4-x)\left(\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 4-x=0 \text{ ή } \frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0$$
$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6} \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

2^{ος} τρόπος

Για $x \in \mathbb{R}-\{1,2,3\}$ με απαλοιφή παρανομαστών έχουμε:

$$3(x-1)(x-2)(x-3)=(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-3)+3(x-2)(x-3)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=x^2-3x+2+2\left(x^2-4x+3\right)+3\left(x^2-5x+6\right)$$
$$\Leftrightarrow 3x^3-18x^2+33x-18=6x^2-26x+26 \Leftrightarrow 3x^3-24x^2+59x-44=0$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm11,\pm22,\pm44$, από τις οποίες μόνο το 4 ικανοποιεί την εξίσωση. Έτσι με το σχήμα Horner έχουμε

$$3x^3-24x^2+59x-44=(x-4)\left(3x^2-12x+11\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x-4=0 \text{ ή } 3x^2-12x+11=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7$ θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,$ είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου α_4.

Λύση

Έστω x ο τέταρτος στη σειρά αριθμός. Τότε οι δεδομένοι αριθμοί θα έχουν τη μορφή:

$$\alpha_1=x-3d,\alpha_2=x-2d,\alpha_3=x-d,\alpha_4=x,\alpha_5=x+d,\alpha_6=x+2d,\alpha_7=x+3d.$$

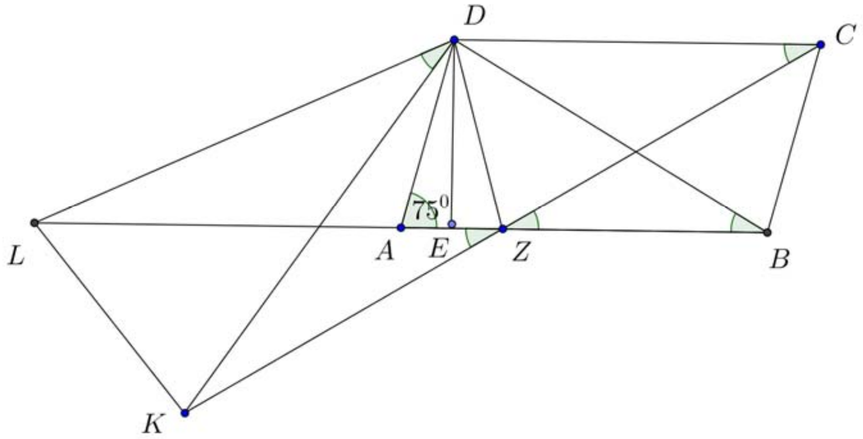
Επομένως το άθροισμά τους ισούται με $7x$ και το άθροισμα των 5 μεσαίων ισούται με $5x$. Επομένως, θα πρέπει να βρούμε το ελάχιστο φυσικό αριθμό x που είναι τέτοιος, ώστε ο $7x$ ναι είναι τέλειος κύβος και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Για να είναι ο $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 7^2, ενώ για να είναι και ο $5x$ να είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο x να είναι πολλαπλάσιο του 5. Για να παραμείνει όμως το $7x$ τέλειος κύβος, θα πρέπει το x να είναι πολλαπλάσιο του 5^3. Τελικά, το x πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5^3\cdot7^2$, οπότε η ελάχιστη τιμή του όρου α_4 είναι $5^3\cdot7^2$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $ABCD$ τέτοιο ώστε $AB=BD=CD$ και με τη γωνία $\hat{A}=75^\circ$. Φέρουμε το ύψος του DE, όπου E σημείο της πλευράς AB. Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E. Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής C ως προς κέντρο το σημείο Z και L το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $K\hat{D}L$.

Λύση



Σχήμα 4

Έχουμε $DZ = DA$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους DE. Επίσης είναι $DA = BC$, από το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Επομένως θα είναι $DZ = BC$. Επιπλέον

$$D\hat{Z}B = 180^\circ - D\hat{Z}A = 180^\circ - D\hat{A}B = A\hat{B}C.$$

Επομένως τα τρίγωνα DZB και ZBC έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($DZ = BC$ και τη ZB κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $DB = ZC \Rightarrow AB = ZC \Rightarrow 2\cdot AB = 2\cdot ZC \Rightarrow BL = CK$
- $Z\hat{B}D = CZB \Rightarrow Z\hat{B}D = D\hat{C}Z$, αφού από $DC \parallel ZB$ ισχύει ότι: $C\hat{Z}B = D\hat{C}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα DBL και DCK έχουν: $DB = DC$, $BL = CK$ και $D\hat{C}K = D\hat{B}L$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους DL και DK ίσες και επιπλέον $D\hat{L}B = D\hat{K}C$, οπότε το τετράπλευρο $DLKZ$ είναι εγγράψιμο. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} K\hat{D}L &= K\hat{Z}L = B\hat{Z}C \quad \text{(ως κατά κορυφή)} \\ &= Z\hat{B}D \quad \text{(από τα ίσα τρίγωνα } DZB \text{ και } ZBC\text{)} \\ &= 180^\circ - 2\cdot 75^\circ = 30^\circ \quad \text{(από το ισοσκελές τρίγωνο } ABD\text{).} \end{aligned}$$

Σημείωση. *Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι με το μετασχηματισμό στροφής με κέντρο το σημείο D κατά γωνία $B\hat{D}C = 30^\circ$, το τρίγωνο CDK θα συμπέσει με το τρίγωνο BDL, οπότε $K\hat{D}L = 30^\circ$.*

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 4x^2 + kx + m$ και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα $(0,1)$. Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους k, m δεν είναι ακέραιος.

Λύση

Έστω $0 < x_1 < x_2 < 1$ οι ρίζες του $f(x)$. Τότε:

$$f(x) = 4(x - x_1)(x - x_2) \qquad (1).$$

Υποθέτουμε ότι οι k, m είναι ακέραιοι. Τότε οι αριθμοί $f(0) = m$ και $f(1) = 4 + k + m$ είναι ακέραιοι . Αφού το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του 4 εκτός των ριζών και οι αριθμοί 0 και 1 είναι εκτός των ριζών, έπεται ότι $f(0) > 0$ και $f(1) > 0$, οπότε, αφού είναι ακέραιοι, θα είναι $f(0) \geq 1$ και $f(1) \geq 1$. Από την (1) για $x = 0$ και $x = 1$ παίρνουμε: $4x_1x_2 \geq 1$ και $4(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 1$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \geq 1 . \qquad (2)$$

Όμως ισχύουν:

$$4x_1(1 - x_1) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)^2 \geq 0 \text{ και } 4x_2(1 - x_2) \leq 1 \Leftrightarrow (2x_2 - 1)^2 \geq 0 \quad (3)$$

οπότε με πολλαπλασιασμό των δύο τελευταίων κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$16x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2) \leq 1 . \qquad (4)$$

Επομένως πρέπει να έχουμε ισότητα:

$$16x_1\left(1 - x_1\right)x_2\left(1 - x_2\right) = 1 , \qquad (5)$$

η οποία, λόγω των (3), ισχύει μόνον όταν $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς υποθέσαμε ότι οι ρίζες είναι διακεκριμένες.
Επομένως, δεν είναι δυνατόν να είναι και δύο αριθμοί k και m ακέραιοι.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 50n \qquad (1)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} + x_n = 56(n - 1) \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 40(n - 1) \qquad (3)$$

$$x_2 + ... + x_{n-1} = 45(n - 2) \qquad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 56 - 6n, \qquad x_n = 10n + 40, \qquad x_1 + x_n = 5n + 90 ,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

$$x_1 + x_n = (56 - 6n) + (10n + 40) = 5n + 90 \Leftrightarrow n = 6,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 20$ και $x_6 = 100$.

Πρόβλημα 2
Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι: $a = b$.

Λύση
Θέτουμε $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = x$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $x = 1$. Η δοσμένη σχέση τότε γίνεται:

$$\frac{1}{1+x^3} + x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 + 2x(x^3+1) = 3(x^3+1) \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 - x^3) - (x^3 - x) + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 - x^2 - x + 1) = 0$$

Όμως $2x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 + (x^3 - x^2) - (x-1) = x^3 + (x-1)^2(x+1) > 0$. Επομένως πρέπει $x = 1$ και άρα $a = b$.

Πρόβλημα 3
Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος k με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα k τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

Λύση
Ας υποθέσουμε ότι ο μεγαλύτερος τέτοιος k είναι ο n και $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους ακέραιοι ώστε $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 2018$. Τότε

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ οπότε } 2018 \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Παρατηρούμε ότι για $n = 18$ η τιμή της παράστασης στο δεξί μέλος ισούται με 2109 επομένως $n \leq 17$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το 2018 γράφεται ως άθροισμα 17 τετραγώνων, διαφορετικών ανά δύο ακεραίων.
Έχουμε ότι $1^2 + \ldots + 19^2 = 2470$, οπότε αν βρούμε δύο τετράγωνα με άθροισμα $2470 - 2018 = 452$, τότε το 2018 θα γράφεται ως το άθροισμα των υπόλοιπων 17 τετραγώνων. Γράφουμε:

$$452 = 2^2 \cdot 113 = 2^2 \cdot (8^2 + 7^2) = 16^2 + 14^2,$$

οπότε $2018 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 13^2 + 15^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2$, που είναι το ζητούμενο.

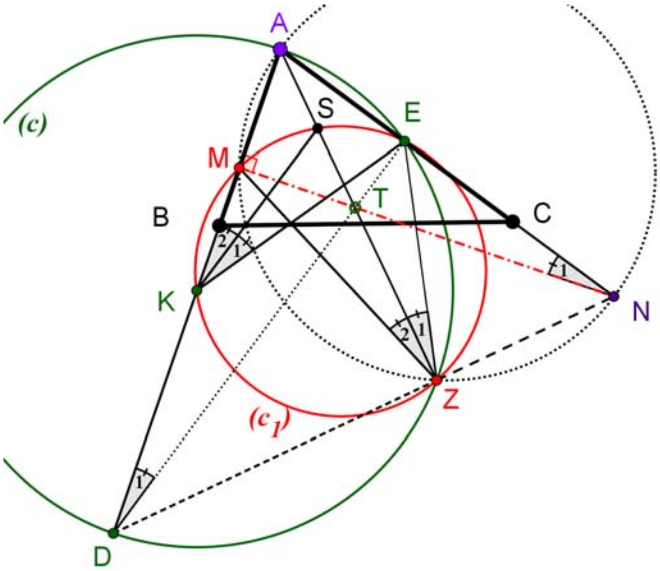
Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο ABC με $AB < \mathrm{A}C < BC$. Στη προέκταση της AB (προς το μέρος του B), θεωρούμε σημείο K και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο $c(K, KA)$ (με κέντρο το K και ακτίνα KA). Ο κύκλος (c) τέμνει την ευθεία AB στο σημείο D και την ευθεία AC στο σημείο E. Σε τυχόν σημείο M εσωτερικό της πλευράς AB θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία AB η οποία τέμνει την ευθεία AC στο σημείο

N. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KME (έστω (c_1)) τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Z, να αποδείξετε ότι οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Λύση

Έστω ότι η AZ, τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο S. Από τα ορθογώνια τρίγωνα AED και AMN έχουμε:

$$A\hat{D}E = \hat{D}_1 = \hat{N}_1 = 90^o - \hat{A}. \qquad (1)$$



Σχήμα 5

Οι γωνίες $\hat{D}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο AE, άρα:
$$\hat{D}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (2)$$
Οι γωνίες $\hat{K}_1$ και $\hat{Z}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SE, άρα:
$$\hat{K}_1 = \hat{Z}_1 \qquad (3)$$
Από τις ισότητες $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_1 = 90^o - \hat{A}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAE ($KA = KE$ ως ακτίνες του κύκλου (c)) έχουμε:
$$A\hat{K}E = \hat{K}_1 + \hat{K}_2 = 180 - 2\hat{A}.$$
Επειδή όμως $\hat{K}_1 = 90^\circ - A$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{K}_2 = 90^\circ - A$.

Οι γωνίες $\hat{K}_2$ και $\hat{Z}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο SM, άρα:
$$\hat{K}_2 = \hat{Z}_2. \qquad (4)$$
Τελικά συμπεραίνουμε ότι $\hat{Z}_2 = \hat{N}_1$, οπότε το τετράπλευρο $AMZN$ είναι εγγράψιμο και κατά συνέπεια $A\hat{Z}N = A\hat{M}N = 90^\circ$.

Η τελευταία ισότητα ($A\hat{Z}N = 90^\circ$) σε συνδυασμό με την ισότητα $A\hat{Z}D = 90^o$ (η γωνία $A\hat{Z}D$ βαίνει στη διάμετρο AD του κύκλου (c)), αποδεικνύει ότι τα σημεία D, Z, N είναι συνευθειακά.

Οι ευθείες MN, DE, AZ περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν), διότι είναι ύψη του τριγώνου ADN.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

16 Ιανουαρίου 2016

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ και $\beta = 0,\overline{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}.$$

Λύση

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{gathered} \alpha = 0{,}222\ldots \\ 10\alpha = 2{,}222\ldots \\ 10\alpha = 0{,}222\ldots + 2 \\ 10\alpha = \alpha + 2 \\ 9\alpha = 2 \end{gathered}$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9}$..

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3\cdot\frac{2}{9} - 5\cdot\frac{3}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^2\right)^{2016}$$

$$= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\frac{4}{81} + \frac{9}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

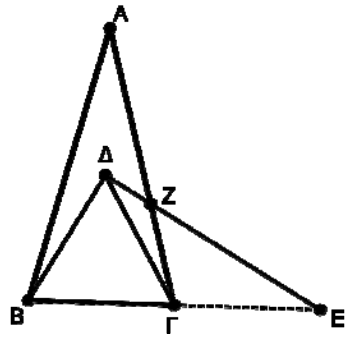
Λύση

Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2 \cdot 7 = 14$. Παρατηρούμε ότι και η

διαίρεση $2016:(2\cdot 7)$ δίνει πηλίκο ίσο με $2^4\cdot 3^2=\left(2^2\cdot 3\right)^2=12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο.
Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

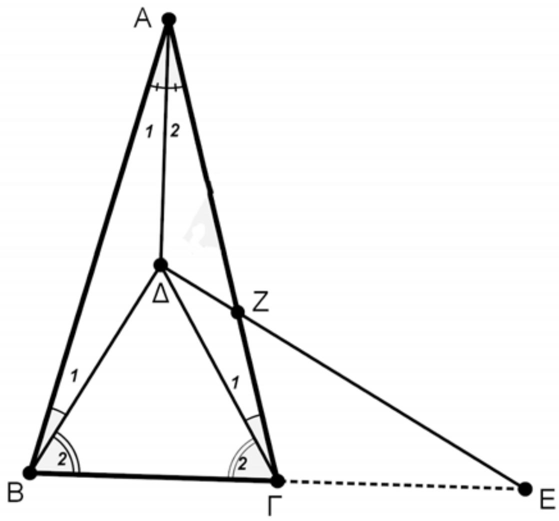
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές $(ΑΒ=ΑΓ)$ και $\hat{A}=30^0$. Το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισόπλευρο και το σημείο $Ε$ βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς $ΒΓ$ και είναι τέτοιο ώστε $ΒΓ=ΓΕ$. Αν η πλευρά $ΑΓ$ τέμνεται από τη $ΔΕ$ στο σημείο $Ζ$, τότε:



(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $Α\hat{Β}Δ$ και $Α\hat{Γ}Δ$.
(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ισοσκελή.
(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $ΒΔΕ$ είναι ορθογώνιο.

Λύση



Σχήμα 1

(α) Το τρίγωνο $ΒΓΔ$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2=\hat{Γ}_2=60^0$.
Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $\hat{A}=30^0$ άρα $\hat{B}=\hat{Γ}=75^0$.
Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B}-\hat{B}_2=\hat{Γ}-\hat{Γ}_2=75^0-60^0=15^0\Rightarrow\hat{B}_1=\hat{Γ}_1=15^0.$$

β) Επειδή $ΑΒ=ΑΓ$ και $ΔΒ=ΔΓ$ η $ΑΔ$ είναι μεσοκάθετη της $ΒΓ$, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2=15^0.$$

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΔΒ$ είναι ισοσκελή.
(γ) Το τρίγωνο $ΓΔΕ$ είναι ισοσκελές ($ΓΔ=ΓΕ$) με

$$Δ\hat{Ε}Γ=\hat{Γ}_1+Ζ\hat{Γ}Ε=15^0+(180^0-\hat{Γ})=$$

$$=15^0+180^0-75^0=120^0.$$

Άρα $\Gamma\hat{\Delta}E=\Delta\hat{E}\Gamma=30^0$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ είναι

$$E\hat{B}\Delta=\Gamma\hat{B}\Delta=60^o,$$

έπεται ότι:

$$B\hat{\Delta}E=180^\circ-\left(E\hat{B}\Delta+\Delta\hat{E}B\right)=180^\circ-\left(60^\circ+30^\circ\right)=90^\circ,$$

οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\frac{1}{4}$ του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.

(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Λύση

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλευαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t.

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500}=\frac{400}{500}=\frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλευαν όλοι. Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x.

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλευαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t+\frac{5}{4}t+\frac{5}{3}t+x=4t \Leftrightarrow x=t\left(3-\frac{5}{4}-\frac{5}{3}\right)=t\frac{(36-15-20)}{12}=\frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν $300+y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x=\frac{500}{300+y}t$,

οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t=\frac{1}{12}t \Rightarrow 6000=y+300 \Rightarrow 5700=y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48$ και να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}\ .$$

Λύση

(α) $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48=4\left[(x+4)^2-7(x+4)+12\right]$

$=4\left(x^2+8x+16-7x-28+12\right)=4\left(x^2+x\right)=4x(x+1).$

(β) $A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}=6\sqrt{-20(-5+1)}-4\sqrt{16(4+1)}=6\sqrt{80}-4\sqrt{80}=2\sqrt{80}=8\sqrt{5}$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256$ είναι κύβος ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

(α) $x(2x-1)(2x+1)+x=x\left(4x^2-1\right)+x=4x^3-x+x=4x^3.$

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1=4031,\ 2x+1=4033$, οπότε θα είναι $x=2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό Α στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\dfrac{32256}{2016}=16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1)+16x=64x^3$, οπότε θέτοντας $x=2016$, έχουμε:

$$\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256=64\cdot 2016^3=4^3\cdot 2016^3=(4\cdot 2016)^3=8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.

Πρόβλημα 3

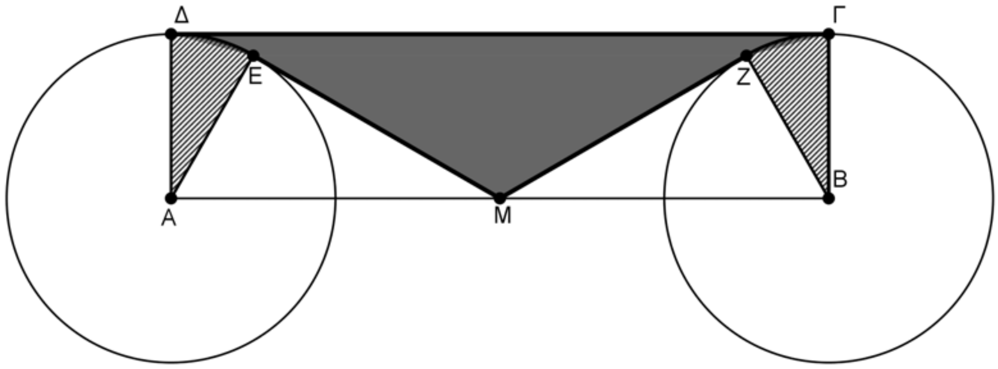
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{A\Delta}=\alpha$ και $\mathrm{AB}=4\alpha$. Με κέντρα τα σημεία Α , Β και ακτίνα α γράφουμε κύκλους Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου ΔΕΜΖΓ που περικλείεται από το τόξο ΔΕ , τα τμήματα ΕΜ, ΜΖ , το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ .

Λύση

(α) Επειδή το M είναι το μέσον του AB θα έχουμε ότι $\mathrm{MA} = 2\alpha$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο EAM έχουμε $\eta\mu(\mathrm{E\hat{M}A}) = \dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AM}} = \dfrac{\alpha}{2\alpha} = \dfrac{1}{2}$, οπότε $\mathrm{E\hat{M}A} = 30°$, $\mathrm{E\hat{A}M} = 90° - 30° = 60°$ και συνεπώς $\mathrm{E\hat{A}\Delta} = 90° - 60° = 30°$.



Σχήμα 2

(β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει, αν από το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ αφαιρέσουμε το εμβαδό των τριγώνων $\mathrm{EAM}, \mathrm{MZB}$ και αφαιρέσουμε και τους κυκλικούς τομείς $\mathrm{\Delta AE}, \mathrm{ZB\Gamma}$. Προφανώς $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \alpha \cdot 4\alpha = 4\alpha^2$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $\mathrm{EM}^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow \mathrm{EM} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε $(\mathrm{EAM}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EM} = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$, και όμοια $(\mathrm{BZM}) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$. Επιπλέον, ομοίως με το ερώτημα (α) υπολογίζουμε ότι $\mathrm{Z\hat{B}\Gamma} = 30^{\circ}$, οπότε έχουμε

$$\varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\Delta\mathrm{AE}) = \varepsilon\mu\beta\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha(\mathrm{ZB\Gamma}) = \frac{\pi\alpha^2}{12}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\varepsilon\mu\beta\gamma\rho\alpha\mu.\,\chi\omega\rho\acute{\iota}o\upsilon\left(\Delta\mathrm{EMZ\Gamma}\right) = 4\alpha^2 - 2\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\pi\alpha^2}{12} = \alpha^2\left(4 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right).$$

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\dfrac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\dfrac{1}{12}$ και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση.

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη $\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4}=\frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha=5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5\cdot 4=20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta=36$. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20+36=56$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

Α$=\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}}$, όπου $x>0$ και $x\neq 27$.

Λύση.

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=y>0,\ x>0 \Rightarrow x=y^3,\ x,y>0$, οπότε η Α γράφεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{25}{y^3+8}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right)\cdot\frac{y^4+8y}{9-y^2}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\left[\frac{25}{(y+2)(y^2-2y+4)}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right]\cdot\frac{y(y^3+8)}{(3-y)\cdot(3+y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{[5^2-(y+2)^2]}{(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}\cdot\frac{y\cdot(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}{(3+y)\cdot(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{(7+y)(3-y)y(y+2)(y^2-2\cdot y+4)}{(y+2)(y^2-2y+4)(3+y)(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{y(7+y)}{3+y}+\frac{21-y^2}{3+y}=\frac{7y+y^2+21-y^2}{3+y}=\frac{7(y+3)}{y+3}=7.$$

.

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0$ έχει ρητή ρίζα.

Λύση

Αν η εξίσωση έχει ρητή λύση, τότε η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού. Έχουμε ότι $\Delta = 16^{20} + 4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ και ας υποθέσουμε ότι:

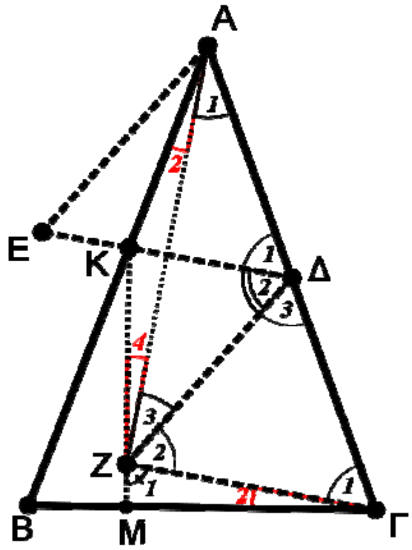
$$16^{20} + 4\cdot 64\cdot 2016^{2016} = \kappa^2 \text{, όπου } \kappa \text{ ρητός.}$$

Αφού όμως το αριστερό μέλος είναι ακέραιος, θα πρέπει και ο κ να είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 16^{20} είναι 6 και το ίδιο ισχύει για το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $4\cdot 64\cdot 2016^{2016} = 256\cdot 2016^{2016}$. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $16^{20} + 4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ είναι το 2, αφού $6+6=12$. Όμως, κάθε τέλειο τετράγωνο λήγει σε κάποιο από τα ψηφία $0,1,4,5,6,9$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 40^0$ και έστω Δ το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AE\Delta$, $\Delta\Gamma Z$ των οποίων οι κορυφές E, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την $A\Gamma$ και στο οποίο ανήκει η κορυφή B. Αν η $E\Delta$ τέμνει την AB στο K, να αποδείξετε ότι η KZ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι η KZ τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο M. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = 60^0$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) με $\hat{A} = 40^0$ (οπότε από $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$) έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^0$.

$$\text{Άρα } \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = 70^0 - 60^0 = 10^0 \qquad (1).$$

Ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^0$ και επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3 = 60^0$ (ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων), συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές (διότι $A\Delta = \Delta\Gamma = \Delta Z$) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Δηλαδή η ΔK είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}Z$, οπότε θα είναι και μεσοκάθετος της βάσης AZ του (ισοσκελούς) τριγώνου $A\Delta Z$.

Εφόσον η ΔK είναι μεσοκάθετη της AZ, το τρίγωνο AKZ είναι ισοσκελές.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta Z$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_3$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο AKZ έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{Z}_4$.

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 40^0$.

Από τη ισότητα $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = 180^0$ (με δεδομένο ότι $\hat{Z}_2 = 60^0$), καταλήγουμε:

$$\hat{Z}_1 = 80^0 \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$.

Πρόβλημα 4

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης και γ ο Βασίλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη και το Βασίλη $\frac{\alpha}{8}$.

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{4}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βασίλη $\frac{3\beta}{8}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το β να είναι πολλαπλάσιο του 8. (1)

Τέλος, ο Βασίλης κρατάει $\frac{\gamma}{6}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βαγγέλη από $\frac{5\gamma}{12}$.

Επομένως ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4} + \frac{3\beta}{8} + \frac{5\gamma}{12}$ καραμέλες, ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{5\gamma}{12}$ και ο Βασίλης έχει $\frac{\alpha}{8} + \frac{3\beta}{8} + \frac{\gamma}{6}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$3\left(\frac{\alpha}{8} + \frac{3\beta}{8} + \frac{\gamma}{6}\right) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{3\beta}{8} + \frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{3\beta}{4} + \frac{\gamma}{12} = \frac{3\alpha}{8} \Leftrightarrow 18\beta + 2\gamma = 9\alpha\,. \quad (2)$$

$$2\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{12}\Leftrightarrow 3\alpha+12\beta=2\gamma \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) κατά μέλη έχουμε ότι :

$$30\beta=6\alpha\Leftrightarrow 5\beta=\alpha$$

Οπότε από την (3) προκύπτει ότι:

$$27\beta=2\gamma\,.$$

Το β αφού είναι πολλαπλάσιο του 8 η ελάχιστη τιμή του είναι 8. Οπότε η ελάχιστη τιμή για το α είναι $\alpha=5\cdot 8=40$ και για το $\gamma=\frac{27\cdot 8}{2}=27\cdot 4=108$. Δηλαδή η ελάχιστη τιμή από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $8+40+108=156$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1=(2-x)^2$, $\alpha_2=2^2+x^2,\ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n,(n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=2^2+x^2-(2-x)^2=4x.$ Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n=\frac{\left[2(2-x)^2+4(n-1)x\right]n}{2}=\left(x^2+2(n-3)x+4\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4$$

και είναι τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4(n-3)^2-16=4\left(n^2-6n+5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta=0\Leftrightarrow n^2-6n+5=0\Leftrightarrow n=1$ ή $n=5$.

Η τιμή $n=1$ απορρίπτεται, γιατί $n>1$. Επομένως, για $n=5$ είναι

$$\frac{S_5}{5}=x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε

$\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4\geq 0$, για $x\in\mathbb{R}$, εφόσον $\Delta\leq 0\Leftrightarrow 1\leq n\leq 5$. Τότε, για

$n\in\{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n}=\left(\sqrt{x^2+2(n-3)x+4}\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$10x^3-6x^2-12x-8=0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^3-6x^2-12x-8=0 \Leftrightarrow 10x^3-\left(6x^2+12x+8\right)=0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$6x^2+12x+8=\left(x^3+6x^2+12x+8\right)-x^3=\left(x+2\right)^3-x^3,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

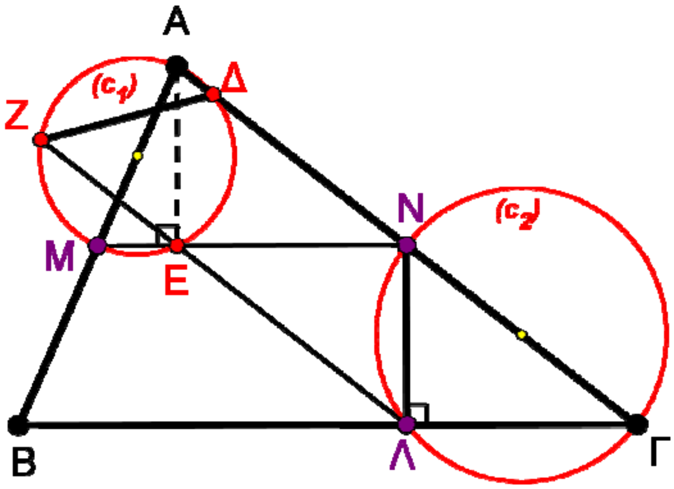
$$10x^3-\left(6x^2+12x+8\right)=0 \Leftrightarrow 10x^3-\left(x+2\right)^3+x^3=0 \Leftrightarrow 11x^3=\left(x+2\right)^3$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{11}=x+2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt[3]{11}-1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\text{ΑΒ}<\text{ΑΓ}<\text{ΒΓ}$) και τα μέσα $\text{Μ},\text{Ν}$ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_1) έχει διάμετρο την ΑΜ και τέμνει τις $\text{ΑΓ},\text{ΜΝ}$ στα σημεία $\text{Δ},\text{Ε}$, αντίστοιχα. Ο κύκλος (c_2) έχει διάμετρο την ΓΝ και τέμνει την ΒΓ στο σημείο Λ. Η ΕΛ τέμνει το κύκλο (c_1) στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΔΝΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



Σχήμα 4

Η γωνία $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Μ}$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_1)) και βαίνει στη διάμετρο ΑΜ του κύκλου (c_1), οπότε θα είναι:

$$\text{ΑΕ}\perp\text{ΜΝ} \qquad (1).$$

Η γωνία $\text{Ν}\hat{\text{Λ}}\text{Γ}$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_2)) και βαίνει στη διάμετρο ΝΓ του κύκλου (c_2), οπότε θα είναι

$$\text{ΝΛ}\perp\text{ΒΓ} \qquad (2).$$

Τα σημεία M,N είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα είναι:

$$\text{MN} = // \frac{\text{ΒΓ}}{2} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι: $\text{ΑΕ} = \text{ΛΝ} = \frac{\upsilon_\alpha}{2}$ και $\text{ΑΕ}//\text{ΛΝ}$.

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΛΝ είναι παραλληλόγραμμο.

Το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο , διότι είναι τραπέζιο $\text{ΕΖ}\parallel\text{ΑΔ}$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1). Άρα $\text{ΑΕ} = \text{ΔΖ}$ οπότε θα είναι και $\text{ΔΖ} = \text{ΝΛ}$.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΔΖΛΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}$ να είναι ακέραιος.

Λύση

Θέλουμε $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}=\kappa$, όπου κ είναι ένας ακέραιος. Θέτουμε $\frac{a}{b}=x$ και τότε η σχέση γράφεται ως $x+\frac{17}{36x}=\kappa \Leftrightarrow 36x^2-36\kappa x+17=0$ (1) και ουσιαστικά ψάχνουμε τις ρητές λύσεις της (1). Για να έχει ρητές λύσεις η (1) πρέπει η διακρίνουσα να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή θέλουμε $\Delta=(36\kappa)^2-4\cdot 36\cdot 17=(2\cdot 6)^2(9\kappa^2-17)$ να είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε θέλουμε $9\kappa^2-17=s^2$ για κάποιον θετικό ακέραιο s.

Τότε $(3\kappa)^2-s^2=17 \Leftrightarrow (3\kappa-s)(3\kappa+s)=17$ και αφού ο 17 είναι πρώτος και οι κ, s θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι $\begin{cases}3\kappa-s=1\\ 3\kappa+s=17\end{cases} \Leftrightarrow \kappa=3,\ s=8$.

Για $\kappa=3$ η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1=\frac{17}{6}$ και $x_2=\frac{1}{6}$, οπότε $\frac{a}{b}=\frac{17}{6}$ ή $\frac{a}{b}=\frac{1}{6}$, οπότε έχουμε για λύσεις τις $(a,b)=(17t,6t)$ ή $(a,b)=(t,6t)$ όπου t θετικός ακέραιος.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $b_1=(x-4)^2,\ b_2=x^2+16,\ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n, (n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=x^2+16-(x-4)^2=8x.$

Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n = \frac{\left[2(x-4)^2 + 8(n-1)x\right]n}{2} = \left(x^2 + 4(n-3)x + 16\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n} = x^2 + 4(n-3)x + 16$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 16(n-3)^2 - 64 = 16\left(n^2 - 6n + 5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ή $n = 5$.

Η τιμή $n = 1$ απορρίπτεται, γιατί $n > 1$. Επομένως, μόνον για $n = 5$ είναι

$$\frac{S_5}{5} = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε $\frac{S_n}{n} = x^2 + 4(n-3)x + 16 \geq 0$, για $x \in \mathbb{R}$, εφόσον $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 5$. Τότε για $n \in \{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n} = \left(\sqrt{x^2 + 4(n-3)x + 16}\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0 \Leftrightarrow 10x^4 - \left(8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\right) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = \left(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\right) - x^4 = (x+2)^4 - x^4,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$10x^4 - \left(8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\right) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 - (x+2)^4 + x^4 = 0 \Leftrightarrow 11x^4 = (x+2)^4$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[4]{11} = x + 2 \text{ ή } x\sqrt[4]{11} = -x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[4]{11} - 1} \text{ ή } x = -\frac{2}{\sqrt[4]{11} + 1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathrm{A} \to R$, όπου $\mathrm{A} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Αν για κάθε $x, y \in \mathrm{A}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f(g(x))}{y} \quad (1), \qquad g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g(f(x))}{y}, \qquad (2)$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) Οι συναρτήσεις f, g είναι ‘1-1’ (ένα προς ένα).

(β) $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Λύση

(α) Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_1 και όπου y το x_2, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right)=\frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2} \Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2} \Leftrightarrow f\left(g(x_1)\right)=f(1)\cdot x_2 \quad (\mathrm{A}).$$

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_2 και όπου y το x_1, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\right)=\frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1} \Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1} \Leftrightarrow f\left(g(x_2)\right)=f(1)\cdot x_1 \quad (\mathrm{B})$$

Από την ισότητα $g(x_1)=g(x_2)$ έχουμε: $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ (Γ).

Από τις σχέσεις $(\mathrm{A}),(\mathrm{B}),(\Gamma)$ συμπεραίνουμε ότι: $x_1=x_2$.

Ομοίως, μέσω της σχέσης (2), αποδεικνύουμε ότι και η συνάρτηση f είναι '1-1'.

(β) Στις σχέσεις (1)**,**(2) θέτουμε όπου y το x και έχουμε τις σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right)=\frac{f\left(g(x)\right)}{x} \Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x)\right)}{x} \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(1)\cdot x$$

$$g\left(\frac{f(x)}{f(x)}\right)=\frac{g\left(f(x)\right)}{x} \Leftrightarrow g(1)=\frac{g\left(f(x)\right)}{x} \Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=g(1)\cdot x$$

που για $x=1$, γίνονται: $f\left(g(1)\right)=f(1)$ και $g\left(f(1)\right)=g(1)$.

Επειδή όμως οι συναρτήσεις f,g είναι '1-1', θα ισχύει: $f(1)=g(1)=1$ που σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ισότητες έχουμε: $f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)=x$.

Άρα η ισότητα (1) γίνεται: $f\left(\dfrac{g(x)}{g(y)}\right)=\dfrac{x}{y}$.

Στην τελευταία ισότητα θέτουμε όπου x το $f(x)$ και όπου y το $f(y)$.

Άρα $f\left(\dfrac{g\left(f(x)\right)}{g\left(f(y)\right)}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$ και για $x=1$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{f(1)}{f(y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{f(y)} \Leftrightarrow f(y)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)=1.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $AB<AC<BC$) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Ο κύκλος $c_1(C,AB)$ (με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο (c) στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος $c_2(B,BD)$ (με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο (c_1) στο σημείο F. Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC.

Λύση

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABCD$, ισχύει $AB=CD$ (διότι CD ακτίνα του κύκλου (c_1)).

Άρα το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB=CD$, $AD \,//\, BC$ **(*)**.

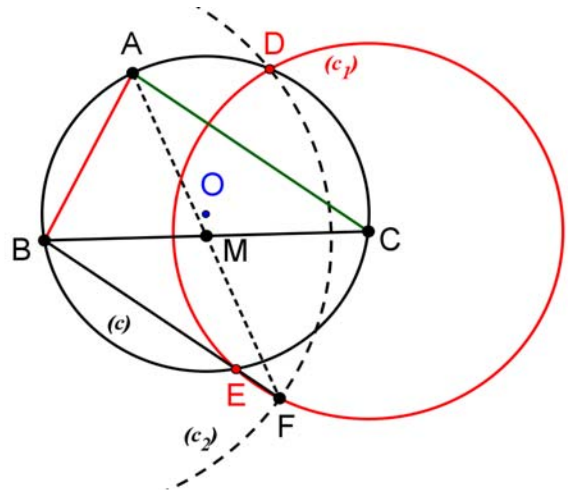
Από τις ίσες διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου $ABCD$ έχουμε:

$$AC=BD \qquad (1).$$

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$, ισχύει $AB = CD = CE$ (διότι $CD = CE$ ακτίνες του κύκλου (c_1)).

Άρα το τετράπλευρο $ABEC$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB = CE$ και

$$AC // BE \qquad (2).$$



Σχήμα 5

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία B, E, F είναι συνευθειακά (θα αποδείξουμε ότι $E\hat{B}C = F\hat{B}C$).

Από το ισοσκελές τραπέζιο $ABEC$ έχουμε: $E\hat{B}C = A\hat{C}B = \hat{C}$ (3).

Η διάκεντρος BC των κύκλων (c_1) και (c_2) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους DF.

Άρα, από το ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ έχουμε:

$$F\hat{B}C = C\hat{B}D = A\hat{C}B = \hat{C} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $E\hat{B}C = F\hat{B}C = \hat{C}$.

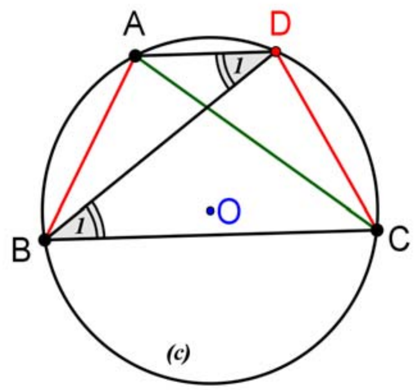
Από τη σχέση (2), έχουμε $AC // BE // BF$ και επειδή $AC = BF = BD$ (από τη σχέση (1)), καταλήγουμε ότι τα τμήματα AC, BF είναι ίσα και παράλληλα.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ABFC$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

(*)

Ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και βαίνουν σε ίσα τόξα).

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ στις AD και BC με τέμνουσα την BD. Άρα $AD // BC$, δηλαδή το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Σχήμα 6

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
77ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
28 Ιανουαρίου 2017

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να βρεθούν όλα τα μη μηδενικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, με α,β μη αρνητικούς ακέραιους και $\alpha+\beta=4$.

(β) Για το μικρότερο από τα κλάσματα του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)$.

Λύση

(α) Αφού το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μη μηδενικό πρέπει $\alpha\neq 0$ και αφού το β είναι παρονομαστής πρέπει $\beta\neq 0$. Αφού α,β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\alpha+\beta=4$ πρέπει να ισχύει $\alpha<4$ και $\beta<4$. Επομένως, έχουμε:

$$\alpha=3,\ \beta=1,\ \frac{\alpha}{\beta}=3\ ,\ \ \alpha=2,\ \beta=2,\ \frac{\alpha}{\beta}=1 \text{ και } \ \alpha=1,\ \beta=3,\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}.$$

(β) Το μικρότερο από τα κλάσματα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι το $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{3}$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot\alpha}{\beta}-\frac{9}{27}\right)=\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2\cdot 1}{3}-\frac{9}{27}\right)$$
$$=\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}-3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=2-1=1.$$

Πρόβλημα 2

Ο θετικός ακέραιος Α έχει το γινόμενο των ψηφίων του ίσο με 12, το άθροισμα των ψηφίων του ίσο με 9 και επιπλέον διαιρείται με το 4. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α.

Λύση

Επειδή είναι $12=2\cdot 2\cdot 3$ τα δυνατά ψηφία του Α, έτσι ώστε αυτά να έχουν άθροισμα 9 είναι τα εξής:
(α) 2,6,1 (τριψήφιος αριθμός)
(β) 3,4,1,1 (τετραψήφιος αριθμός)

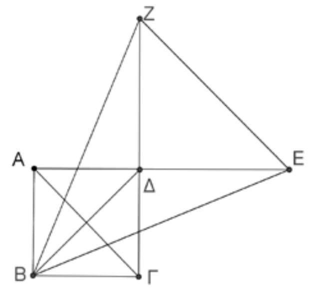
(γ) 2,2,3,1,1 (πενταψήφιος αριθμός)

Η μικρότερη δυνατή τιμή μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (α). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4. οι δυνατές τιμές του Α είναι οι 216 και 612. Επομένως η μικρότερη δυνατή τιμή του Α είναι **216.**

Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α μπορεί να προκύψει από την περίπτωση (γ). Δεδομένου ότι ένα αριθμός διαιρείται με το 4, όταν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4, οι δυνατές τιμές του Α πρέπει να έχουν τελευταίο διψήφιο τμήμα το 12 ή το 32. Όμως για τον προσδιορισμό της μεγαλύτερης δυνατής τιμής του Α πρέπει το πρώτο ψηφίο του να είναι το 3. Επομένως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Α είναι **32112**.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z} = \mathrm{B}\Delta$.

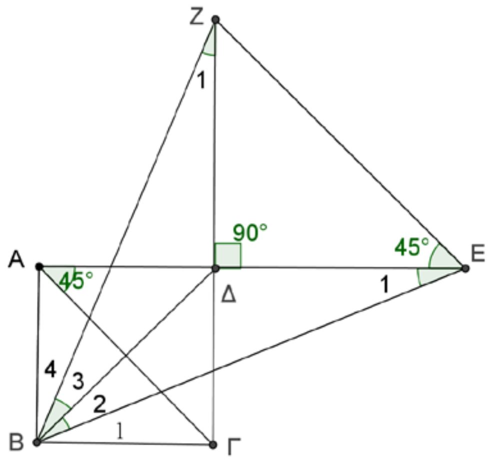


(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ και $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 1

(α) Επειδή $\mathrm{AE} \parallel \mathrm{B}\Gamma$ και τέμνονται από την ευθεία ΒΕ έχουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, δηλαδή

$$\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1 \tag{1}$$

Επειδή από υπόθεση $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{B}$, το τρίγωνο ΔΒΕ είναι ισοσκελές και έχει:

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{E}}_1 \tag{2}$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα:

$$\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}}_1 \tag{3}$$

Επειδή το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές ($\mathrm{B}\Gamma = \Gamma\Delta,\ \hat{\Gamma} = 90^\circ$) θα έχουμε:

$$\Gamma\hat{B}\Delta \equiv \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ \overset{(3)}{\Rightarrow} 2\cdot\Gamma\hat{B}\Delta = 45^\circ \Rightarrow \Delta\hat{B}E = 22,5^\circ$$

Με το ίδιο σκεπτικό όπως προηγουμένως έχουμε ότι $\hat{B}_3 = \hat{Z}_1$, αφού ΔΒ = ΓΖ, $\hat{B}_4 = \hat{Z}_1$, αφού $AB \parallel \Gamma Z$. Επίσης είναι $A\hat{B}\Delta = \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 45^\circ$, οπότε λαμβάνουμε τελικά $\Delta\hat{Z}B = \hat{Z}_1 = 22,5^\circ$.

(β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΓΑ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια ισοσκελή θα έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}Z = 45^\circ$, οπότε οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ τεμνόμενες από την ευθεία ΑΕ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Λύση

Έστω ότι η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β είναι x χιλιόμετρα. Με την ταχύτητα που έτρεχε ο πεζοπόρος θα κάλυπτε την απόσταση σε $\frac{x}{4}$ ώρες, οπότε η ώρα που ξεκινούσε από το χωριό Α και η ώρα αναχώρησης του τρένου διέφεραν κατά $\frac{x}{4}-1$ ώρες.

Μετά την πρώτη ώρα ο χρόνος που είχε ο πεζοπόρος για να φθάσει έγκαιρα στο σταθμό ήταν $\left(\frac{x}{4}-1\right)-1=\frac{x}{4}-2$ ώρες. Τα χιλιόμετρα που απέμεναν ήταν $x-4$ και για να τα καλύψει ο πεζοπόρος χρειάστηκε $\frac{x-4}{6}$ ώρες. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}-2-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{12}-\frac{2x-8}{12}=\frac{30}{12} \Leftrightarrow 3x-(2x-8)=30 \Leftrightarrow 3x-2x+8=30 \Leftrightarrow x=22.$$

Επομένως η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β ήταν 22 χιλιόμετρα.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}, \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}, \gamma=-\frac{27}{16}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=-\frac{27}{8},\ \gamma=-\frac{27}{16},$$

οπότε οι δύο όροι του Α γίνονται:

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3&=\left(\frac{81}{16}\right)^3+\left(-\frac{27}{8}\right)^3+\left(-\frac{27}{16}\right)^3=\left(\frac{3^4}{2^4}\right)^3+\left(-\frac{3^3}{2^3}\right)^3+\left(-\frac{3^3}{2^4}\right)^3\\&=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^9}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{2^3\cdot 3^9}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}-2^3\cdot 3^9-3^9}{2^{12}}\\&=\frac{3^9\cdot\left(3^3-2^3-1\right)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot(27-8-1)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 18}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 3^2\cdot 2}{2^{12}}=\frac{3^{11}}{2^{11}},\end{aligned}$$

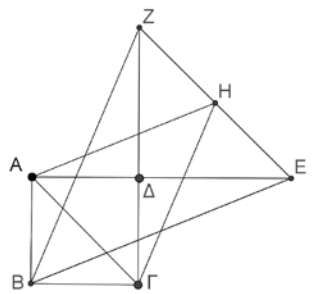
$$\alpha\beta\gamma=\frac{81}{16}\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)\cdot\left(-\frac{27}{16}\right)=\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{3^3}{2^4}=\frac{3^{10}}{2^{11}}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\frac{3^{11}}{2^{11}}}{\frac{3^{10}}{2^{11}}}=\frac{3^{11}\cdot 2^{11}}{3^{10}\cdot 2^{11}}=3$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{B}\Delta$. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:



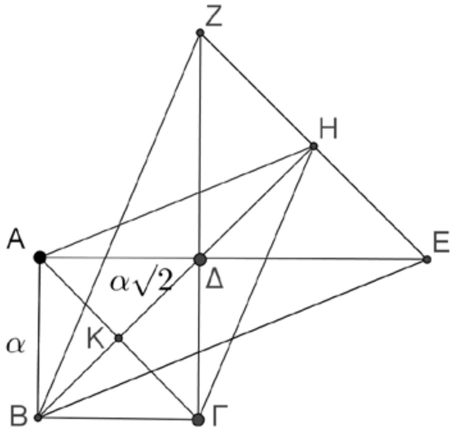
(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ

(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.

Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 1

(α) Από την υπόθεση έχουμε: $\mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}=\Gamma\Delta=\Delta\mathrm{A}=\alpha$ και $\mathrm{B}\Delta=\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}=\alpha\sqrt{2}$.
Τότε είναι $\mathrm{AE}=\alpha+\alpha\sqrt{2}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$\mathrm{BE}=\sqrt{\left(\alpha+\alpha\sqrt{2}\right)^2+\alpha^2}=\sqrt{\alpha^2\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\alpha\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

(β) Επειδή Η είναι το μέσο της βάσης ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ η ευθεία ΔΗ θα είναι μεσοκάθετη της βάσης Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\Delta\mathrm{E}=\Delta\mathrm{Z}=\alpha\sqrt{2}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι:

$$\mathrm{EZ}=\sqrt{\mathrm{E}\Delta^2+\Delta\mathrm{Z}^2}=\sqrt{2\alpha^2+2\alpha^2}=2\alpha.$$

Όμως και το τρίγωνο ΔΗΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, (ΔΗ κάθετη στη βάση ΕΖ και $\Delta\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H}=45^\circ$), οπότε ότι: $\Delta\mathrm{H}=\mathrm{HE}=\dfrac{\mathrm{EZ}}{2}=\alpha$. Έτσι έχουμε $\Delta\mathrm{H}=\alpha=\Delta\mathrm{A}=\Delta\Gamma$, οπότε το Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.

(γ) Η ευθεία ΒΗ είναι μεσοκάθετη της διαγωνίου ΑΓ και έστω ότι την τέμνει στο σημείο Κ. Ομοίως όπως στο ερώτημα (α), μπορούμε να βρούμε ότι:

$$\mathrm{BZ}=\alpha\sqrt{4+2\sqrt{2}}=\mathrm{BE}.$$

Επομένως και το σημείο Β ανήκει στη μεσοκάθετη του ΕΖ, οπότε τα σημεία Β, Δ και Η είναι συνευθειακά. Τότε είναι

$$\mathrm{KH}=\mathrm{K}\Delta+\Delta\mathrm{H}=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}+\alpha=\frac{\alpha\left(2+\sqrt{2}\right)}{2},\mathrm{BH}=\mathrm{B}\Delta+\Delta\mathrm{H}=\alpha\sqrt{2}+\alpha,\ \mathrm{A\Gamma}=\alpha\sqrt{2},$$

Επομένως, έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma H}\right)=\frac{1}{2}\cdot\alpha\sqrt{2}\cdot\frac{\alpha\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{\alpha^2\left(1+\sqrt{2}\right)}{2},$$

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{BEZ}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot\left(\alpha+\alpha\sqrt{2}\right)=\alpha^2\left(1+\sqrt{2}\right),$$

οπότε ο ζητούμενος λόγος εμβαδών είναι: $\dfrac{\mathrm{E}\left(\mathrm{BEZ}\right)}{\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma H}\right)}=2$.

Πρόβλημα 3

(α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.
(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

Λύση

(α) Τα πολλαπλάσια του 9 μεταξύ 1 και $10^5=100000$ είναι της μορφής $9x$, όπου x θετικός ακέραιος. Έχουμε

$$1<9x<100000\Leftrightarrow\frac{1}{9}<x<\frac{100000}{9}\Leftrightarrow\frac{1}{9}<x<11111+\frac{1}{9}\Leftrightarrow x\in\{1,2,...,11111\},$$

αφού ο x είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9.

(β) Βρήκαμε στο ερώτημα (α) ότι μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9. Ομοίως βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 16666 πολλαπλάσια του 6. Από τα παραπάνω πολλαπλάσια, μετριούνται δύο φορές αυτά που είναι κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Αυτά είναι τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ(6,9) = 18. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 5555 πολλαπλάσια του 18. Επομένως μεταξύ των αριθμών 1 και 100000 υπάρχουν

$$11111+16666-5555=27777-5555=22222$$

πολλαπλάσια του 6 είτε του 9.

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, βλέπει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Λύση (1ος τρόπος)

Έστω x τα χιλιόμετρα είναι η απόσταση από το σπίτι στο σχολείο.

Με τα πόδια ο Γιώργος κάνει τη διαδρομή σε $\frac{x}{6}$ ώρες. Αν συνεχίσει την αρχική πορεία του, αφού έχει διανύσει τα $\frac{\alpha}{100}$ θα χρειαστεί ακόμη

$$\frac{x}{6}-\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{x}{6}=\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{x}{6} \text{ ώρες}$$

για να φθάσει στο σχολείο.

Αν επιστρέψει να πάρει το ποδήλατο, θα χρειαστεί $\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{x}{6}$ ώρες να φθάσει στο σημείο που ξεκίνησε και στη συνέχεια θα χρειαστεί άλλες $\frac{x}{15}$ ώρες για να φθάσει στο σχολείο του. Άρα ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί θα είναι:

$$\frac{\alpha x}{600}+\frac{x}{15}=\left(\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\right)\cdot x \text{ ώρες.}$$

Για να τον συμφέρει η χρησιμοποίηση του ποδηλάτου πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\right)\cdot x\le\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{x}{6}\overset{x\neq0}{\Longleftrightarrow}\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\le\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\le\frac{100-\alpha}{600}\Leftrightarrow\alpha+40\le100-\alpha\Leftrightarrow2\alpha\le60\Leftrightarrow\alpha\le30.$$

2ος τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος αποφάσισε να επιστρέψει σπίτι όταν είχε καλύψει x χιλιόμετρα και ότι από εκείνο το σημείο ως το σχολείο η απόσταση είναι y χιλιόμετρα. Επομένως, αν συνέχιζε το περπάτημα, για να φτάσει στο σχολείο ήθελε ακόμη χρόνο $\frac{y}{6}$ (απόσταση προς ταχύτητα). Ενώ τελικά έκανε χρόνο $\frac{x}{6}$ μέχρι να γυρίσει ξανά στο σπίτι και επιπλέον $\frac{x+y}{15}$ μέχρι να φτάσει από το σπίτι στο σχολείο με το ποδήλατο, δηλαδή ο χρόνος που έκανε συνολικά είναι

$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}$. Για να τον συμφέρει αυτό, θα πρέπει αυτός ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο που χρειαζόταν αν συνέχιζε με τα πόδια, δηλαδή η επιλογή του ήταν καλή αν

$$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}\le\frac{y}{6}\Leftrightarrow 5x+2(x+y)\le 5y\Leftrightarrow 7x\le 3y\Leftrightarrow 10x\le 3x+3y\Leftrightarrow\frac{x}{x+y}\le\frac{3}{10},$$

δηλαδή αν το ποσοστό είναι μικρότερο ή ίσο του 30%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$x^2+4x-9=4|x|.$$

Λύση

Για $x\ge 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-3,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η λύση: $x=3$.

Για $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2+8x-9=0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta=64+36=100$. Επομένως, η εξίσωση αυτή έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$, τις

$$x=\frac{-8\pm 10}{2}\Leftrightarrow x=-9 \text{ ή } x=1,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η $x=-9$.

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x=3$ και $x=-9$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc}=100a+10b+c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση με αγνώστους τα ψηφία του αριθμού γράφεται:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c\Leftrightarrow 100a+10b+c=(a+b+c)^2+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2=99a+9b\Leftrightarrow (a+b+c)^2=9(11a+b).$$

Επειδή $1\le a\le 9, 0\le b\le 9$, από την τελευταία ισότητα μπορούμε να έχουμε έναν περιορισμό για τον αριθμό $(a+b+c)^2$. Πράγματι, έχουμε

$$9\cdot(11\cdot 1+0)=99\le 9(11a+b)\le 9(11\cdot 9+9)=972$$

$$\Rightarrow 99\le (a+b+c)^2\le 972\Rightarrow 10\le a+b+c\le 31$$

Όμως είναι $a+b+c\le 27,$ οπότε: $10\le a+b+c\le 27$.

Επίσης από την ισότητα $(a+b+c)^2=9(11a+b)$ προκύπτει ότι ο αριθμός $(a+b+c)^2$ είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε ο αριθμός $a+b+c$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν ήταν $a+b+c\ne 3k,$ όπου k θετικός ακέραιος, τότε θα είχαμε τις περιπτώσεις $a+b+c=3k+1$ ή $a+b+c=3k+2$, $k\in\mathbb{Z},$ από τις οποίες έπεται ότι $(a+b+c)^2 = πολ.3+1$, δηλαδή $(a+b+c)^2 \neq πολ.9$, δηλαδή ο αριθμός $(a+b+c)^2$ δεν θα ήταν πολλαπλάσιο του 9, άτοπο. Επομένως οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $a+b+c$ είναι οι: 12, 15, 18, 21, 24, 27.

- Αν $a+b+c=12$, τότε $11a+b=16 \Leftrightarrow a=1, b=5$, οπότε $c=6$ και $\overline{abc}=156$
- Αν $a+b+c=15$, τότε $11a+b=25 \Leftrightarrow a=2, b=3$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=18$, τότε $11a+b=36 \Leftrightarrow a=3, b=3$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=21$, τότε $11a+b=49 \Leftrightarrow a=4, b=5$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=24$, τότε $11a+b=64 \Leftrightarrow a=5, b=9$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=27$, τότε $11a+b=81 \Leftrightarrow a=7, b=4$, οπότε $c=16$, άτοπο.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο **156.**

Πρόβλημα 3

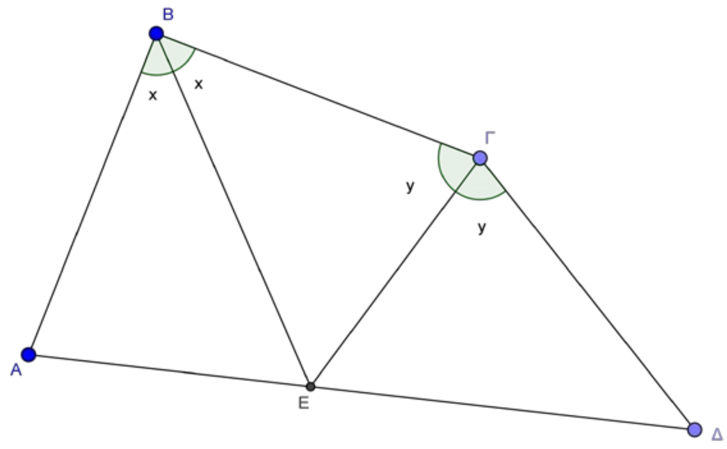
Θεωρούμε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ώστε $\hat{Β}+\hat{Γ}=240°$ και $ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}, \hat{Γ}$ τέμνονται πάνω στην πλευρά $ΑΔ$.

Λύση

Έστω οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}, \hat{Γ}$ τέμνονται στο $Ε$. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά, δηλαδή το Ε βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΑΔ. Έχουμε $Α\hat{Β}Ε = Ε\hat{Β}Γ = x$ και $Ε\hat{Γ}Β = Ε\hat{Γ}Δ = y$ με $x+y=120°$.Τα τρίγωνα $ΑΒΕ, ΒΓΕ$ είναι ίσα, αφού έχουν $ΑΒ=ΒΓ$, $ΒΕ$ κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση. Επομένως θα είναι $Β\hat{Α}Ε = y$ και από το τρίγωνο $ΒΑΕ$ έχουμε $Α\hat{Ε}Β = 180° - x - y = 60°$. Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $Β\hat{Ε}Γ = Β\hat{Ε}Α = 60°$.

Όμοια τα τρίγωνα $ΒΕΓ, ΓΔΕ$ είναι ίσα αφού έχουν $ΒΓ=ΓΔ$, $ΓΕ$ κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση λόγω διχοτόμου. Άρα θα είναι: $Γ\hat{Ε}Δ = Γ\hat{Ε}Β = 60°$.

Επομένως $Α\hat{Ε}Β + Β\hat{Ε}Γ + Γ\hat{Ε}Δ = 60° + 60° + 60° = 180°$ και άρα το $Ε$ ανήκει στην $ΑΔ$.



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4
Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\frac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από του δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του.

Λύση.
Έστω ότι για την αποπεράτωση του έργου, ο Α, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται x ώρες και ο Β, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται y ώρες. Τότε σε μία ώρα ο Α θα εκτελεί το $\frac{1}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα εκτελεί το $\frac{1}{y}$ του έργου. Έτσι 3 ώρες μετά την έναρξη εργασίας του Α αυτός θα έχει εκτελέσει τα $\frac{3}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα έχει εργαστεί 2 ώρες και θα έχει εκτελέσει τα $\frac{2}{y}$ του έργου. Σύμφωνα με την υπόθεση, σε 3 ώρες το μέρος του έργου που έχει εκτελεστεί είναι $1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$, οπότε θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20} \qquad (1)$$

Επειδή στο τελείωμα του έργου ο καθένας έχει εκτελέσει το μισό μέρος του έργου, θα έχουν εργαστεί ο Α $\frac{x}{2}$ ώρες και ο Β $\frac{y}{2}$ ώρες, αντίστοιχα. Επομένως, θα έχουμε

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1 \qquad (2)$$

Άρα έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20}\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20\left(2x+3y\right)=11xy\\ x-y=2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20\left(2x+3y\right)=11xy\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20\left(2x+3(x-2)\right)=11x(x-2)\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}100x-120=11x^2-22x\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}11x^2-122x+120=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x^2-\left(10+\frac{12}{11}\right)x+10\cdot\frac{12}{11}=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=10 \text{ ή } x=\frac{12}{11}\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow (x,y)=(10,8)$, αφού η λύση $x=\frac{12}{11}$ απορρίπτεται, γιατί σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει να είναι $x>3$. Άρα, ο Α τελειώνει μόνος του το έργο σε 10 ώρες και Β το τελειώνει μόνος του σε 8 ώρες.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες μεταξύ των παραμέτρων $a,b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$, έτσι ώστε η εξίσωση

$$x^2 + ax + b = a|x|$$

να έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$.
Είναι δυνατόν η εξίσωση να έχει τρεις διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $a \neq 0$ και $b \neq 0$.
Για $x \geq 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + b = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-b}, \text{ εφόσον } b < 0. \qquad (1)$$

Επομένως η εξίσωση έχει μία μόνο θετική ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x = \sqrt{-b}$, αν, και μόνον αν, $b < 0.$ Αν $b > 0$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση στους πραγματικούς αριθμούς.
Για $x < 0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2 + 2ax + b = 0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta = 4\left(a^2 - b\right)$. Επομένως, η εξίσωση (2) έχει 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$, αν και μόνον αν, $a^2 > b$. Όμως για να έχει δύο αρνητικές ρίζες $x_1 < x_2 < 0$ στο $\mathbb{R}$, πρέπει και αρκεί

$$\Delta = 4\left(a^2 - b\right) > 0,\ x_1 + x_2 = -2a < 0 \text{ και } x_1 x_2 = b > 0 \Leftrightarrow a^2 > b,\ a > 0, b > 0.$$

Η εξίσωση (2) έχει μία μόνο αρνητική ρίζα, αν και μόνον αν,

$$a^2 > b \text{ και } b < 0 \Leftrightarrow b < 0.$$

Η περίπτωση με $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 = b > 0$, δίνει μία αρνητική λύση, εφόσον $a > 0$, αλλά δεν δίνει μη αρνητική λύση αφού $b > 0.$
Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων έχουμε:

- Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,

$$a^2 > b, a > 0, b > 0 \quad \text{ή} \quad b < 0.$$

- Η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις, αν και μόνον αν,

$$a^2 > b, a > 0, b > 0 \text{ και } b < 0, \ \textbf{(αδύνατο).}$$

Άρα η εξίσωση **δεν είναι δυνατόν** να έχει τρεις διαφορετικές λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2017} + 2017 = 0 \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2017}^4 = \left(-x_1\right)^3 + \left(-x_2\right)^3 + \ldots + \left(-x_{2017}\right)^3 \end{array}\right\}.$$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται:

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \ldots + (x_{2017} + 1) = 0. \qquad (1)$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται:

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2017}^4 = -x_1^3 - x_2^3 + \ldots - x_{2017}^3$$

$$x_1^4 + x_1^3 + x_2^4 + x_2^3 + \ldots + x_{2017}^4 + x_{2017}^3 = 0$$

$$x_1^3(x_1+1)+x_2^3(x_2+1)+\ldots+x_{2017}^3(x_{2017}+1)=0 \qquad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$(x_1+1)(x_1^3+1)+(x_2+1)(x_2^3+1)+\ldots+(x_{2017}+1)(x_{2017}^3+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1)^2(x_1^2-x_1+1)+(x_2+1)^2(x_2^2-x_2+1)+\ldots+(x_{2017}+1)^2(x_{2017}^2-x_{2017}+1)=0$$

Επειδή ισχύει ότι: $x_i^2-x_i+1=\left(x_i-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, για κάθε $x_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,2017$,

η τελευταία εξίσωση αληθεύει, αν, και μόνον αν,

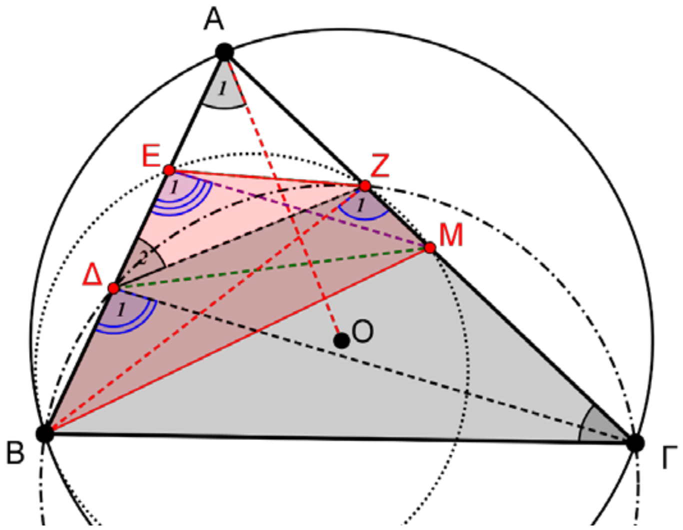
$$x_i+1=0,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_i=-1,\ i=1,2,\ldots,2017 \Leftrightarrow x_1=x_2=\ldots=x_{2017}=-1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

.

Λύση



Σχήμα 4

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε: $\widehat{A}_1=90°-\widehat{\Gamma}$. Από την καθετότητα των ΟΑ και ΔΖ έχουμε: $\widehat{\Delta}_2=90°-\widehat{A}_1$. Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών, συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\Delta}_2=\widehat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια, το τετράπλευρο ΒΔΖΓ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική).

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΓ, έχουμε: $\widehat{\Delta}_1=\widehat{Z}_1$. (η ΒΓ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές Δ, Ζ υπό ίσες γωνίες)

Στο τρίγωνο ΑΔΓ, η ΕΜ συνδέει τα μέσα των πλευρών του ΑΔ και ΑΓ, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΔΓ, δηλαδή $EM\parallel \Delta\Gamma$.

Από την παραλληλία $EM\parallel\Delta\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι : $\widehat{\Delta}_1=\widehat{E}_1$ (εντός εκτός επί τα αυτά γωνίες).

Άρα είναι: $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ και επομένως το τετράπλευρο ΒΕΖΜ είναι εγγράψιμο, οπότε τα σημεία Β, Ε, Ζ και Μ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4
Να βρεθούν όλα τα ζεύγη θετικών ρητών (a,b) που είναι τέτοια ώστε οι αριθμοί $\frac{ab+1}{a}$ και $\frac{ab+1}{b}$ να είναι και οι δύο ακέραιοι.

Λύση
Αφού οι αριθμοί

$$\frac{ab+1}{a} = p \text{ και } \frac{ab+1}{b} = q \qquad (1)$$

είναι θετικοί ακέραιοι, και το γινόμενό τους θα είναι θετικός ακέραιος. Δηλαδή, το κλάσμα $\frac{(ab+1)^2}{ab}$ είναι θετικός ακέραιος. Θέτουμε $ab = x$ και τότε

$$\frac{(x+1)^2}{x} = k,\ k>0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Η τελευταία γράφεται:

$$x^2 + 2x + 1 = kx \Leftrightarrow x^2 + (2-k)x + 1 = 0. \qquad (2)$$

Ζητάμε η (2) να έχει ρητές λύσεις, επομένως η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Επομένως $(2-k)^2 - 4 = s^2$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο s.
Τότε $(k-2-s)(k-2+s) = 4$, επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{cases} k-2-s=1 \\ k-2+s=4 \end{cases} \quad \acute{\eta} \quad \begin{cases} k-2-s=2 \\ k-2+s=2 \end{cases}$$

Η μόνη περίπτωση που δίνει λύσεις είναι η δεύτερη όπου $s=0$ και $k=4$.
Τότε η (2) γίνεται $(x-1)^2 = 0$, οπότε $x=1$, δηλαδή $ab=1$. (3)
Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $\frac{2}{a} = p,\ \ \frac{2}{b} = q$, οπότε η (3) γίνεται $pq = 4$, με p,q θετικούς ακεραίους. Έπεται ότι $(p,q) \in \{(1,4),(2,2),(4,1)\}$, οπότε έχουμε:

$$(a,b) \in \left\{ \left(2, \frac{1}{2}\right), (1,1), \left(\frac{1}{2}, 2\right) \right\}.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$x^4 - 32x^2 + 257 - \frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} = 0.$$

Λύση
Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4 - 32x^2 + 257 = \frac{4|x+2|}{x^2+4x+8} \qquad (1)$$

Το πρώτο μέλος της (1) γράφεται:

$$x^4-32x^2+257=\left(x^2-16\right)^2+1\geq 1.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=4$.

Το δεύτερο μέλος της (1) γράφεται:

$$\frac{4|x+2|}{x^2+4x+8}=\frac{4|x+2|}{\left(x+2\right)^2+2^2}=\frac{4|x+2|}{|x+2|^2+2^2}\leq\frac{4|x+2|}{2\cdot|x+2|\cdot 2}=1.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $|x+2|=2 \Leftrightarrow x+2=\pm 2 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-4$.

Επομένως η εξίσωση (1) έχει λύση, αν και μόνον αν, και τα δύο μέλη της είναι ίσα με 1, δηλαδή αν και μόνον αν $x=-4$.

Πρόβλημα 2.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\sqrt{n\left(n+182\right)}$ είναι ρητός.

Λύση

Για να είναι ο αριθμός Α ρητός, πρέπει και αρκεί να υπάρχει $k\in\mathbb{Q}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{A}=\sqrt{n\left(n+182\right)}=k \Leftrightarrow n\left(n+182\right)=k^2. \qquad (1)$$

Επειδή ο αριθμός $n\left(n+182\right)$ είναι θετικός ακέραιος, ο αριθμός k είναι ακέραιος.

Πράγματι, αν ήταν $k=\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu,\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\left(\mu,\nu\right)=1$, τότε θα είχαμε

$$\frac{\mu^2}{\nu^2}=n\left(n+182\right)\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \nu^2\,|\,\mu^2 \overset{(\mu,\nu)=1}{\Rightarrow} \nu\,|\,\mu \Rightarrow \nu=1.$$

Η εξίσωση (1) γίνεται:

$$n\left(n+182\right)=k^2 \Leftrightarrow n^2+182n=k^2 \Leftrightarrow \left(n+91\right)^2-k^2=91^2$$

$$\Leftrightarrow \left(n+91-k\right)\left(n+91+k\right)=91^2=7^2\cdot 13^2.$$

Επειδή $n+91-k<n+91+k$, η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με τα συστήματα

$$\left\{\begin{matrix} n+91-k=7 \\ n+91+k=7\cdot 13^2\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=13 \\ n+91+k=7^2\cdot 13\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=7^2 \\ n+91+k=13^2\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} n+91-k=1 \\ n+91+k=7^2\cdot 13^2\end{matrix}\right\}$$

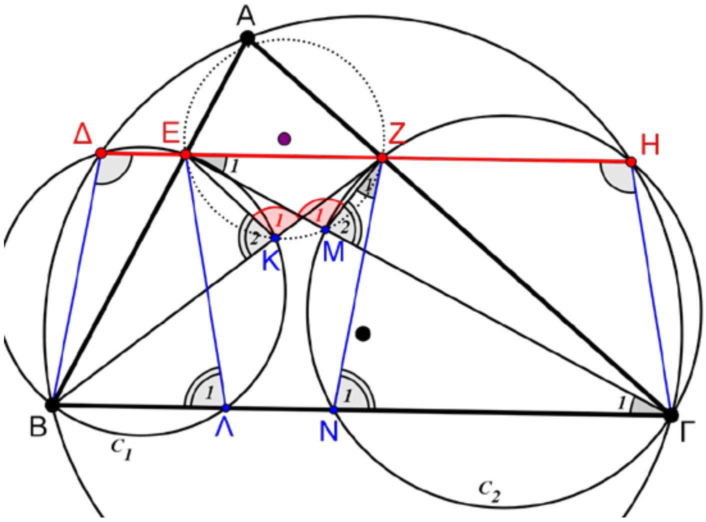
$$\Leftrightarrow \left(n,k\right)=\left(504,588\right) \text{ ή } \left(n,k\right)=\left(234,312\right) \text{ ή } \left(n,k\right)=\left(18,60\right) \text{ ή } \left(n,k\right)=\left(4050,4140\right)$$

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι 18, 234, 504 και 4050.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) και τυχόν σημείο Δ του μικρού τόξου ΑΒ. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, την ΑΓ στο Ζ και τον περιγεγραμμένο κύκλο c(O,R) (για δεύτερη φορά) στο Η. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_1 του τριγώνου ΒΔΕ τέμνει την ΒΖ στο Κ και την ΒΓ στο Λ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_2 του τριγώνου ΓΖΗ τέμνει την ΕΓ στο Μ και την ΒΓ στο Ν. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο, στον οποίο εφάπτεται η ευθεία ΝΖ.

Λύση



Σχήμα 5

Το τραπέζιο ΒΓΗΔ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ), οπότε ΔΒ=ΗΓ και $\widehat{\Delta}=\widehat{\mathrm{H}}$.

Το τραπέζιο ΒΔΕΛ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου C_1(ΒΔΕ), οπότε ΔΒ=ΕΛ και $\widehat{\Lambda}_1=180^\circ-\widehat{\Delta}$.

Το τραπέζιο ΖΗΓΝ είναι ισοσκελές (διότι είναι εγγεγραμμένο στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου C_2(ΖΗΓ), οπότε ΖΝ=ΗΓ και $\widehat{\mathrm{N}}_1=180^\circ-\widehat{\mathrm{H}}$. Άρα είναι: $\widehat{\Lambda}_1=\widehat{\mathrm{N}}_1$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΒΕΚΛ, έχουμε: $\widehat{\mathrm{K}}_2=\widehat{\Lambda}_1$. Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΖΜΝ, έχουμε: $\widehat{\mathrm{M}}_2=\widehat{\mathrm{N}}_1$. Από τις τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών, συμπεραίνουμε ότι:

$$\widehat{\mathrm{K}}_2=\widehat{\mathrm{M}}_2 \Leftrightarrow 180^\circ-\widehat{\mathrm{K}}_1=180^\circ-\widehat{\mathrm{M}}_1 \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{K}}_1=\widehat{\mathrm{M}}_1.$$

Άρα τα σημεία Κ,Μ,Ε,Ζ βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΓΖΜΝ, έχουμε: $\mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{N}=\hat{\mathrm{Z}}_1=\hat{\Gamma}_1=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}$. . Από την παραλληλία ΕΒ και ΗΓ έχουμε: $\hat{\mathrm{E}}_1=\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}=\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\hat{\Gamma}_1$. Επομένως έχουμε ότι: $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}=\mathrm{M}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{N}$, δηλαδή η εγγεγραμμένη γωνία $\mathrm{M}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ στον κύκλο c_1 ισούται με τη γωνία ΜΖΝ που έχει πλευρές τη χορδή ΜΖ του κύκλου c_1 και την ευθεία ΝΖ και επιπλέον περιέχει το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{MZ}}$. Άρα η ΖΝ εφάπτεται στον κύκλο που ανήκουν τα σημεία Κ, Μ, Ζ, Ε.

Πρόβλημα 4

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την ισότητα

$$f\left(2xf\left(y\right)+y\right)+f\left(2x\left(y+1\right)\right)=f\left(2x+y\right)+4xy\,, \qquad (1)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(a)=1$.

(ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

(i) Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τιμές των x, y τέτοιες ώστε $2x(y+1)=2x+y$. Πράγματι,

$$2x(y+1)=2x+y \Leftrightarrow 2xy+2x=2x+y \Leftrightarrow 2xy=y \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}, y\in\mathbb{R} \text{ ή } x\in\mathbb{R}, y=0.$$

Επειδή θέλουμε να βρούμε ζευγάρι (x,y) τέτοιο ώστε $4xy=1$, παίρνουμε τις τιμές $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$. Με αυτές τις τιμές η σχέση (1) γίνεται:

$$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)+1 \Leftrightarrow f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)=1,$$

δηλαδή για το $a=f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ ισχύει ότι: $f(a)=1$.

Διαφορετικά, αν θεωρήσουμε το ζευγάρι με $\left(\frac{1}{2}, y\right), y\in\mathbb{R}$ στη σχέση (1), τότε λαμβάνουμε την σχέση

$$f\big(f(y)+y\big)=2y, \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R},$$

από την οποία έπεται ότι η συνάρτηση είναι επί του $\mathbb{R}$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε παίρνει και την τιμή 1. Αυτό εύκολα προκύπτει από την παραπάνω σχέση για $y=\frac{1}{2}$.

(ii) Από τη σχέση (1) για $y=a$ και $x\in\mathbb{R}$, λαμβάνουμε:

$$f(2x+a)+f\big(2x(a+1)\big)=f(2x+a)+4xa \Leftrightarrow f\big(2x(a+1)\big)=4xa. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι είναι $a\neq-1$, αφού αν ήταν $a=-1$, τότε $f(0)=-2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άτοπο. Επομένως μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (2) $x=\frac{t}{2(a+1)}, t\in\mathbb{R}$, οπότε λαμβάνουμε:

$$f(t)=\left(\frac{2a}{a+1}\right)t=ct,\ t\in\mathbb{R},\ c=\frac{2a}{a+1}.$$

Επειδή η συνάρτηση f πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (1), έχουμε:

$$c(2xcy+y)+2cxy+2cx=2cx+cy+4xy, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(c^2+c-2\right)xy=0, \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \Leftrightarrow c=1 \text{ ή } c=-2.$$

Άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι οι: $f(x)=x, x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)=-2x, x\in\mathbb{R}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
20 Ιανουαρίου 2018

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha-11\beta}{\beta}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$.

Λύση

1ος Τρόπος

$$\mathrm{A}=\left(2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-11\right)=(2+10)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(10-11)$$
$$=12\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500-18\cdot(-1)=2000+18=2018.$$

2ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=10$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=10\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{2\beta+10\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{10\beta-11\beta}{\beta}\right)=\left(\frac{12\beta}{\beta}\right)\cdot\frac{500}{3}-18\cdot\left(\frac{-\beta}{\beta}\right)$$
$$=\frac{12}{1}\cdot\frac{500}{3}-18\cdot(-1)=4\cdot500+18=2000+18=2018.$$

Πρόβλημα 2.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων που πρέπει να αφαιρεθούν από το σύνολο $\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, έτσι ώστε το γινόμενο όλων των στοιχείων του που θα απομείνουν να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου;

Λύση

Το γινόμενο των στοιχείων του συνόλου Α γράφεται:

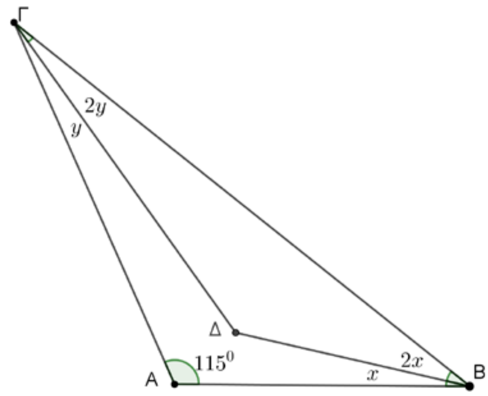
$$\Gamma=2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18\cdot20=2\cdot2^2\cdot2\cdot3\cdot2^3\cdot2\cdot5\cdot2^2\cdot3\cdot2\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot3^2\cdot2^2\cdot5=2^{18}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$$

Στο τελευταίο γινόμενο πρώτων παραγόντων πρέπει οι εκθέτες να είναι άρτιοι , οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πρέπει σίγουρα να αφαιρεθεί ο παράγοντας 7, ο οποίος υπάρχει μόνο στην ανάλυση του 14. Επομένως πρέπει να αφαιρεθεί ο αριθμός 14. Τότε το γινόμενο που προκύπτει είναι $\Gamma = 2^{17} \cdot 3^4 \cdot 5^2$ στο οποίο ο εκθέτης του 2 είναι περιττός. Για να γίνει άρτιος πρέπει να αφαιρεθεί περιττός αριθμός παραγόντων ίσων με 2. Για αυτό έχουμε δύο επιλογές. Η μία είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 και η άλλη είναι να αφαιρέσουμε τον αριθμό 8. Στην πρώτη περίπτωση το γινόμενο που θα προκύψει είναι το $\Gamma_1 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = \left(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5\right)^2$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση το γινόμενο είναι $\Gamma_2 = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = \left(2^7 \cdot 3^2 \cdot 5\right)^2$. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων του συνόλου Α που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι 2, δηλαδή τους αριθμούς 2 και 14 ή τους αριθμούς 8 και 14.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 115^\circ$ θεωρούμε στο εσωτερικό του σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A$ και $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 1

Αν θέσουμε $\Delta\hat{B}A = x$, τότε $\Delta\hat{B}\Gamma = 2 \cdot \Delta\hat{B}A = 2x$. Ομοίως, αν $\Delta\hat{\Gamma}A = y$. τότε $\Delta\hat{\Gamma}B = 2 \cdot \Delta\hat{\Gamma}A = 2y$.

Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$\hat{A} + 3x + 3y = 180^\circ \Rightarrow 3\left(x + y\right) = 180^\circ - 115^\circ \Rightarrow x + y = \frac{65^\circ}{3}.$$

Από το τρίγωνο ΔΒΓ έχουμε

$$B\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ - 2x - 2y = 180^\circ - 2\left(x + y\right) = 180^\circ - 2 \cdot \frac{65^\circ}{3} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{3} = \frac{410^\circ}{3}.$$

Πρόβλημα 4

Ο Γιάννης πήγε στην αγορά έχοντας μαζί του κέρματα των δύο ευρώ και του ενός ευρώ. Ο αριθμός των κερμάτων του ήταν 40. Για την αγορά που έκανε ξόδεψε ακριβώς το ένα τρίτο των κερμάτων των δύο ευρώ που είχε μαζί του. Την επόμενη μέρα ξόδεψε το 40% της αξίας των χρημάτων που του είχαν απομείνει. Αν και τις δύο μέρες ξόδεψε συνολικά 40 ευρώ, να βρεθεί πόσα κέρματα των δύο ευρώ είχε αρχικά μαζί του..

Λύση

Έστω x τα κέρματα των δύο ευρώ που είχε αρχικά. Αφού χρησιμοποίησε το ένα τρίτο αυτών, σημαίνει ότι το x είναι πολλαπλάσιο του 3 και ότι το ένα τρίτο αυτών ισούται με $\frac{x}{3}$ και αυτά έχουν αξία $\frac{2x}{3}$. Η αξία των χρημάτων που έδωσε την πρώτη μέρα είναι $\frac{2x}{3}$, επομένως τη δεύτερη μέρα του απέμειναν $\frac{2x}{3}\cdot 2+40-x=40+\frac{x}{3}$ ευρώ. Αφού ξόδεψε το 40% αυτών, τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\left(40+\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{4}{10}=16+\frac{2x}{15}$ ευρώ. Επομένως συνολικά, την πρώτη και τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $2\cdot\frac{x}{3}+16+\frac{2x}{15}=16+\frac{12x}{15}$ ευρώ.

Από την εκφώνηση ξέρουμε τώρα ότι ξόδεψε 40 ευρώ, οπότε

$$16+\frac{12x}{15}=40\Leftrightarrow\frac{12x}{15}=24\Leftrightarrow 12x=360\Leftrightarrow x=30.$$

Επομένως είχε αρχικά μαζί του 30 κέρματα των δύο ευρώ και 10 κέρματα του ενός ευρώ με συνολική αξία 70 ευρώ.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2,$$

αν δίνεται ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\gamma=-\frac{18}{2^3}$, $\delta=\frac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, $\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$, $\gamma=-\frac{18}{8}=-\frac{9}{4}$, $\delta=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64}\ ,\ \gamma^2+\delta^2=\left(-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{81}{16}+\frac{1}{64}=\frac{325}{64},$$

$$\alpha\gamma+\beta\delta=\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{8}=-\frac{81}{16}-\frac{1}{64}=-\frac{325}{64}\Rightarrow\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\left(-\frac{325}{64}\right)^2.$$

Άρα έχουμε: $\mathrm{A}=\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\gamma^2+\delta^2\right)-\left(\alpha\gamma+\beta\delta\right)^2=\frac{325}{64}\cdot\frac{325}{64}-\left(-\frac{325}{64}\right)^2=0$.

$2^{ος}$ Τρόπος

$$\mathrm{A}=(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)-(\alpha\gamma+\beta\delta)^2=$$

$$= \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 - \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta - \beta^2\delta^2 =$$
$$= \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Άρα είναι:

$$\mathrm{A} = \left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8} - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{8}\right)^2 = 0.$$

Πρόβλημα 2

Μία ομάδα α εργατών τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας. Πόσες τέτοιες ομάδες εργατών της ιδίας απόδοσης χρειάζονται για να τελειώσουν 15 ίδια έργα σε 5 ημέρες;

Λύση

Έχουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

Η μία ομάδα = α εργάτες τελειώνει το $\frac{1}{4}$ ενός έργου στο $\frac{1}{3}$ μιας ημέρας

Πόσοι εργάτες (έστω x) τελειώνουν 15 έργα σε 5 ημέρες;

Επειδή τα ποσά**: εργάτες – έργο, είναι ανάλογα**, ενώ τα ποσά : **εργάτες – ημέρες , είναι αντιστρόφως ανάλογα**, έχουμε ότι:

$$x = \alpha \cdot \frac{15}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{5} = \alpha \cdot 60 \cdot \frac{1}{15} = 4\alpha .$$

Επομένως θα χρειαστούν 4 τέτοιες ομάδες εργατών.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε πολυώνυμο $P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c$ όπου οι αριθμοί a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $x > y$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{P(x)-P(y)}{x-y}$ είναι θετικός ακέραιος.

(β) Αν ο αριθμός $P(8)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Λύση

(α) Έχουμε ότι

$$P(x) = a(x+2)^2 + b(x+3) + c = \alpha x^2 + (b+4a)x + 4a + 3b + c$$

Επομένως

$$P(x) - P(y) = a(x^2 - y^2) + (b+4a)(x-y) = (x-y)(a(x+y) + b + 4a),$$

οπότε

$$\frac{P(x)-P(y)}{x-y} = \frac{(x-y)\left(a\left(x+y\right)+b+4a\right)}{x-y} = a\left(x+y\right)+b+4a$$

που είναι θετικός ακέραιος, αφού οι αριθμοί a, b, c, x, y είναι θετικοί ακέραιοι.

(β) Από το πρώτο ερώτημα, για $x = 2018,\ y = 8$ έχουμε ότι

$$\frac{P(2018) - P(8)}{2010} = \kappa \ \text{ ακέραιος},$$

δηλαδή

$$P(2018) - P(8) = 2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος} \Rightarrow P(2018) = P(8) + 2010\kappa, \text{όπου } \kappa \text{ ακέραιος}$$

Όμως το $2010 = 3 \cdot 670$ είναι πολλαπλάσιο του 3, όπως και το $P(8)$ από την υπόθεση, οπότε και το $P(2018)$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{A}} = 72°$. Ονομάζουμε Δ το ίχνος του ύψους από την κορυφή Γ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΓΕ περνά από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

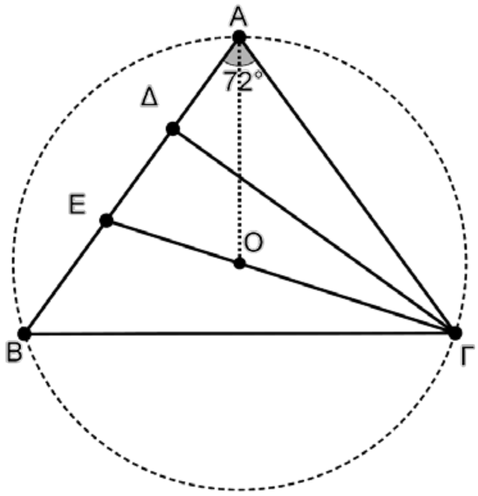
Σημείωση: *Ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου είναι ο κύκλος που περνάει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου.*

Λύση

Θεωρούμε το ύψος από την κορυφή Α που τέμνει τη ΓΕ στο σημείο Ο. Θα αποδείξουμε ότι το Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή ότι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

Το ύψος από την κορυφή Α είναι και μεσοκάθετος της ΒΓ, άρα το Ο ως σημείο της θα ισαπέχει από τα Β,Γ, δηλαδή ΟΒ=ΟΓ.

Επιπλέον το Ε το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΔ, το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, επομένως $\widehat{\mathrm{\Gamma EA}} = 72°$, οπότε $\widehat{\mathrm{E\Gamma A}} = 36°$ (1). Επειδή όμως η ΑΟ είναι ύψος και διχοτόμος, θα ισχύει ότι $\widehat{\mathrm{OA\Gamma}} = 36°$, οπότε λόγω της (1) θα ισχύει ΟΑ = ΟΓ.



Σχήμα 2

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \in \mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}$.
Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 2xy \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2 - a_4 = (x^2+y^2)^2 - (x^4+y^4) = 2x^2y^2 \in \mathbb{Z}, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι:

$$xy = \frac{a_1^2 - a_2}{2}\ .$$

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy = \frac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2 = 2\cdot\frac{(a_1^2 - a_2)^2}{4} = \frac{(a_1^2 - a_2)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}$.
Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x + y,\ xy \in \mathbb{Z}$. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = (x^2+y^2)(x+y) - xy(x+y) \in \mathbb{Z},\ \text{αφού}\ \ x^2+y^2,\ x+y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\mathrm{A} = \kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

(α) Να αποδείξετε ότι ο Α ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακέραιων.

(β) Είναι δυνατόν να είναι ο Α ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3) = \kappa(\kappa+3)(\kappa+1)(\kappa+2)\\ &= \kappa(\kappa+3)(\kappa^2+3\kappa+2) = \kappa(\kappa+3)(\kappa(\kappa+3)+2)\end{aligned}$$

Επομένως ο Α ισούται με το γινόμενο των ακεραίων $\kappa(\kappa+3)$, $\kappa(\kappa+3)+2$ οι οποίοι διαφέρουν κατά 2 και επιπλέον είναι άρτιοι, αφού στο γινόμενο $\kappa(\kappa+3)$ ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.

(β) Έστω $\kappa(\kappa+3) = 2\mu$, όπου μ θετικός ακέραιος. Τότε $\mathrm{A} = 2\mu(2\mu+2) = 4\mu(\mu+1)$

Αν ήταν ο Α τέλειο τετράγωνο ακεραίου, τότε θα είχαμε $\mathrm{A}=4\mu\left(\mu+1\right)=\left(2\lambda\right)^2=4\lambda^2$, όπου
λ ακέραιος. Θα είχαμε τότε $\mu\left(\mu+1\right)=\lambda^2$, όπου μ θετικός ακέραιος και λ ακέραιος, το οποίο είναι άτοπο, γιατί

$$\mu^2<\mu^2+\mu=\mu\left(\mu+1\right)<\left(\mu+1\right)^2,$$

δηλαδή ο $\mu\left(\mu+1\right)$ βρίσκεται μεταξύ δύο τετραγώνων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Πρόβλημα 3

Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, ύψος ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R .

Λύση

Ονομάζουμε Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και θέτουμε $\mathrm{AB}=\alpha,\ \Gamma\Delta=\beta$ και φέρουμε το ύψος $\mathrm{AE}=6$. Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, θα ισχύει ότι ΒΓ=ΑΔ. Όμως $\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Delta}=4\sqrt{10}$, οπότε $\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Delta}=2\sqrt{10}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΕ παίρνουμε

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{E\Delta}^2=\left(2\sqrt{10}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{E\Delta}^2=40-36\Leftrightarrow\mathrm{E\Delta}=2\qquad(1)$$

Επιπλέον από τον τύπο για το εμβαδό του τραπεζίου έχουμε:

$$\mathrm{E}=\frac{(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{A\Delta}}{2}\Rightarrow 72=\frac{(\alpha+\beta)\cdot 6}{2}\Rightarrow\alpha+\beta=24\qquad(2)$$

Αν τώρα φέρουμε την κάθετη από το Ο στις βάσεις που τις τέμνει στα μέσα τους Ν και Μ, τότε

$$\mathrm{E\Delta}=\mathrm{M\Delta}-\mathrm{ME}=\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}\overset{(1)}{\Rightarrow}\beta-\alpha=4\qquad(3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε $\alpha=10,\ \beta=14$.

Αν τέλος ονομάσουμε $\mathrm{OM}=x,\ \mathrm{ON}=y$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν το Ο είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=R^2\Rightarrow x^2+49=R^2\qquad(4)$$

και

$$y^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2\Rightarrow y^2+25=R^2\Rightarrow(6-x)^2+25=R^2\Rightarrow$$

$$x^2-12x+36+25=R^2\Rightarrow 61-12x=R^2-x^2\overset{(4)}{=}49$$

οπότε $12x=12\Rightarrow x=1$, οπότε από την (4) έχουμε ότι $R=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

(β) Αν το Ο δεν είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow x^2+49=R^2 \qquad (4)$$

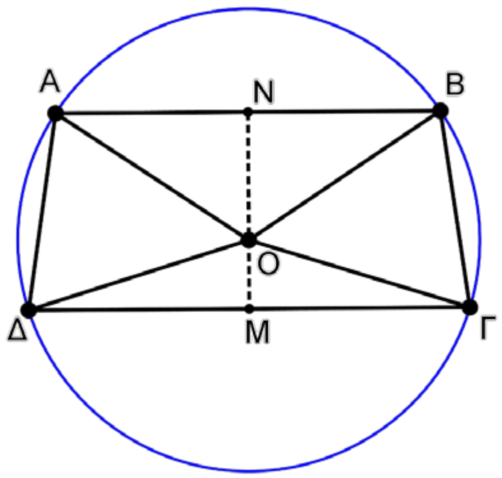
και

$$y^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow y^2+25=R^2 \Rightarrow (6+x)^2+25=R^2 \Rightarrow$$

$$x^2+12x+36+25=R^2 \Rightarrow 61+12x=R^2-x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x+12=0$, άτοπο.

Επομένως υπάρχει μόνο μία δυνατή περίπτωση στην οποία $R=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Λύση

Θα βρούμε πρώτα έναν τετραψήφιο x τέτοιον, ώστε ο $2007x$ να λήγει σε 2008. Γράφουμε $2007x=2000x+7x$ οπότε αφού ο $2000x$ λήγει σε 000, αναζητούμε x ώστε ο $7x$ να λήγει σε 008.

Για να λήγει ο $7x$ σε 008, πρέπει ο x να λήγει σε 4. Τότε έχουμε δύο κρατούμενα, οπότε το προτελευταίο ψηφίο του x πρέπει να είναι 4. Έχουμε τρία κρατούμενα, οπότε το τρίτο από το τέλος ψηφίο του x πρέπει να είναι 1. Επομένως ο x λήγει σε 144.

Αναζητούμε λοιπόν τετραψήφιο $\overline{a144}$ τέτοιον, ώστε να πολλαπλασιάζεται με τον 2007 και ο αριθμός που προκύπτει να λήγει σε 2008. Ο $2000\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος το τελευταίο ψηφίο του $2a$. Επιπλέον ο $7\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος ίσο με το τελευταίο ψηφίο του $7a+1$ (γιατί έχουμε και ένα κρατούμενο). Οπότε ο $2a+(7a+1)=9a+1$, πρέπει να λήγει σε 2, οπότε πρέπει $a=9$.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9144. Πράγματι, το γινόμενο $2007\cdot 9144$ ισούται με 18352008 που λήγει σε 2008.

Αν τώρα πάρουμε έναν οποιαδήποτε εξαψήφιο $\overline{\beta\gamma 9144}$ και τον πολλαπλασιάσουμε με τον 2007, τα τέσσερα τελευταία ψηφία του γινομένου δεν επηρεάζονται άρα λήγει και αυτός σε 2008. Για το διψήφιο τμήμα $\overline{\beta\gamma}$ έχουμε επιλογές από 10 έως 99. Επομένως έχουμε συνολικά 90 επιλογές, άρα έχουμε 90 εξαψήφιους με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_5 = x^5 + y^5$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή, έχουμε ότι:

$$x^5 + y^5 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - x^4 y - xy^4 = \left(x^4 + y^4\right)\left(x + y\right) - xy\left(x^3 + y^3\right),$$

και οι αριθμοί $a_1 = x + y,\ a_2 = x^2 + y^2$ και $a_4 = x^4 + y^4$ είναι ακέραιοι, αρκεί να αποδείξουμε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3 + y^3$ είναι ακέραιος.

Επειδή $x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z},$ αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy \in \mathbb{Z}.$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2 - a_2 = \left(x + y\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 2xy \in \mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2 - a_4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - \left(x^4 + y^4\right) = 2x^2 y^2 \in \mathbb{Z}\,, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{Z}.$ Από την (1) έπεται ότι: $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2}$.

Θα αποδείξουμε ότι $xy \in \mathbb{Z}.$ Πράγματι, αν $xy = \dfrac{a_1^2 - a_2}{2} \notin \mathbb{Z},$ τότε θα είχαμε $a_1^2 - a_2 = m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2 y^2 = 2 \cdot \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{4} = \frac{\left(a_1^2 - a_2\right)^2}{2} = \frac{m^2}{2} \notin \mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy \in \mathbb{Z}.$

Άρα έχουμε:

$$x^3 + y^3 = \left(x + y\right)^3 - 3xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z},$$

αφού $x + y,\ xy \in \mathbb{Z}.$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3 + y^3 = \left(x^2 + y^2\right)\left(x + y\right) - xy\left(x + y\right) \in \mathbb{Z}, \text{ αφού } x^2 + y^2,\ x + y,\ xy \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση:

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 3} > \frac{x + a}{x^2 + x + 1}.$$

Λύση

Επειδή $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0,\ x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,$ για κάθε $x\in\mathbb{R},$ η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$x\left(x^2+x+1\right)>\left(x^2+2x+3\right)(x+a)\Leftrightarrow x^3+x^2+x>x^3+2x^2+3x+ax^2+2ax+3a$$
$$\Leftrightarrow (a+1)x^2+2(a+1)x+3a<0. \qquad (1)$$

Για $a=-1$, η ανίσωση (1) γίνεται: $-3<0$ και αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για $a\neq-1$, το πρώτο μέλος της ανίσωσης είναι τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta=4(a+1)^2-12a(a+1)=4(a+1)(a+1-3a)=-4(a+1)(2a-1).$$

Η ανίσωση (1) αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όταν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$a+1<0 \text{ και } -4(a+1)(2a-1)<0\Leftrightarrow a+1<0 \text{ και } 4(a+1)(2a-1)>0$$
$$\Leftrightarrow a<-1 \text{ και } a<-1 \text{ ή } a>\frac{1}{2}\Leftrightarrow a<-1.$$

Επομένως το ζητούμενο αληθεύει για κάθε $a\leq-1.$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α,β ώστε $\beta=2\alpha$. Στο εσωτερικό του θεωρούμε N κύκλους (που πιθανόν τέμνονται), έτσι ώστε το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{N}\geq4$.

Λύση

Έστω $d_1,d_2,...,d_N$ οι διάμετροι των κύκλων. Τότε το μήκος του πρώτου κύκλου είναι $2\pi R_1=\pi d_1$, το μήκος του δεύτερου $2\pi R_2=\pi d_2$, το μήκος του N-οστού είναι $2\pi R_{\mathrm{N}}=\pi d_{\mathrm{N}}$. Αφού το άθροισμα των μηκών των περιφερειών τους να είναι διπλάσιο της περιμέτρου του ορθογωνίου, θα έχουμε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}=2(2\alpha+2\beta)=4(\alpha+\beta)=4(\alpha+2\alpha)=12\alpha \qquad (1).$$

Για να χωράει όμως κάθε κύκλος στο ορθογώνιο θα πρέπει η διάμετρός του να είναι το πολύ όσο η μικρότερη πλευρά του ορθογωνίου, δηλαδή $d_1\leq\alpha,d_2\leq\alpha,...,d_N\leq\alpha$, οπότε

$$\pi d_1+...+\pi d_{\mathrm{N}}\leq\alpha\pi+...+\alpha\pi=\mathrm{N}\alpha\pi \qquad (2)$$

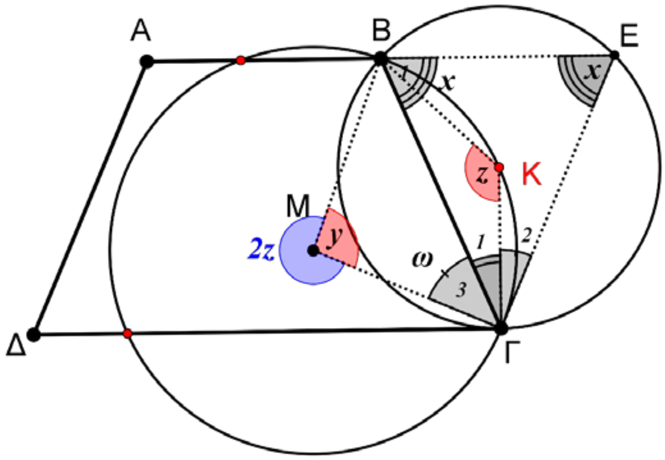
Από (1) και (2) έχουμε $\mathrm{N}\alpha\pi\geq12\alpha\Leftrightarrow\mathrm{N}\geq\dfrac{12}{\pi}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, $\mathrm{N}\geq4$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \parallel ΓΔ)$ για το οποίο ισχύει $ΓΔ=2ΑΒ$. Αν E είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς το B και K είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΒΓΕ$ να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου

$B\Gamma E$ εφάπτεται στην $\Gamma\Delta$ στο σημείο Γ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma K$ εφάπτεται στην ΓE στο σημείο Γ.

Λύση



Σχήμα 4

Έστω M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $B\Gamma K$.

Θα αποδείξουμε ότι $K\Gamma \perp \Gamma\Delta$ και $M\Gamma \perp \Gamma E$.

Εφόσον E είναι το συμμετρικό του σημείου A ως προς το B, θα ισχύει $AE = 2AB$.

Άρα $AE = \Delta\Gamma = 2AB$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο (έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες).

Άρα $\Gamma E = A\Delta = B\Gamma$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma E = B\Gamma$) οπότε το περίκεντρό του θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο της BE που είναι η ΓK (διότι Γ, K ισαπέχουν από τα άκρα του BE).

Άρα $K\Gamma \perp BE \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow K\Gamma \perp \Gamma\Delta$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $B\Gamma E$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 180° - 2\hat{x}$.

Η γωνία $B\widehat{K}\Gamma = \hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $B\hat{E}\Gamma = \hat{x}$ (στο περιγεγραμμένο κύκλο του ισοσκελούς τριγώνου $B\Gamma E$), άρα $\hat{z} = 2\hat{x}$ και κατά συνέπεια $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 = 180° - \hat{z}$.

Η γωνία $B\widehat{K}\Gamma = \hat{z}$ είναι εγγεγραμμένη στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $BK\Gamma$ και η μη κυρτή γωνία $B\widehat{M}\Gamma = 2\hat{z}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη.

Αν θέσουμε $\hat{\Gamma}_3 = \widehat{\omega}$, τότε από το ισοσκελές τρίγωνο $MB\Gamma$ έχουμε:

$2\widehat{\omega} + \hat{y} = 180° \Leftrightarrow 2\widehat{\omega} + 360° - 2\hat{z} = 180° \Leftrightarrow \widehat{\omega} = \hat{z} - 90°$.

Άρα $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2 + \hat{\Gamma}_3 = 180° - \hat{z} + \hat{z} - 90° = 90°$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^4+4\right),$$

για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου a.

Λύση

Επειδή $x^4+4=\left(x^2\right)^2+2^2+4x^2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(a-1)\left(x^2+2x+2\right)^2=(a+1)\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow (a-1)\left(x^2+2x+2\right)=(a+1)\left(x^2-2x+2\right)$$

(αφού $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2+2(a-1)x+2(a-1)=(a+1)x^2-2(a+1)x+2(a+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4ax+4=0 \Leftrightarrow x^2-2ax+2=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4a^2-8=4\left(a^2-2\right)\geq 0 \Leftrightarrow |a|\geq\sqrt{2} \Leftrightarrow a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right).$$

Επομένως, αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ η εξίσωση έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ και συγκεκριμένα:

- Αν $a\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $x=a\pm\sqrt{a^2-2}$.
- Αν $a=\pm\sqrt{2}$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα στο $\mathbb{R}$, την $x=a=\pm\sqrt{2}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x\sqrt{3}\right)$, $x\in\mathbb{R}$. Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε

$$f(x+T)=f(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Έστω υπάρχει πραγματικός αριθμός $T>0$ τέτοιος ώστε $f(x+T)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε για $x=0$ προκύπτει ότι

$$f(T)=f(0)\Rightarrow \sigma\upsilon\nu T+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=3 \qquad (1)$$

Η σχέση (1) μπορεί να αληθεύει μόνον όταν είναι:

$\sigma\upsilon\nu T=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{2}\right)=1,\ \sigma\upsilon\nu\left(T\sqrt{3}\right)=1 \Leftrightarrow T=2\kappa\pi,\ T\sqrt{2}=2\lambda\pi,\ T\sqrt{3}=2\mu\pi,\ \kappa,\lambda,\mu\in\mathbb{Z}.$

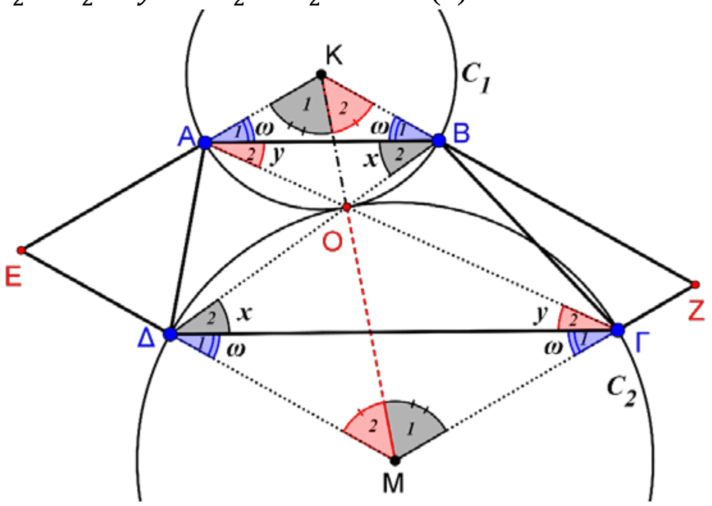
Από τις ισότητες $T=2\kappa\pi,\ T\sqrt{2}=2\lambda\pi$ λαμβάνουμε με διαίρεση κατά μέλη ότι $\dfrac{\lambda}{\kappa}=\sqrt{2}$, που είναι άτοπο γιατί ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, ενώ ο αριθμός $\dfrac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρητός.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ $(ΑΒ \mathbin{/\!/} ΓΔ \text{ και } ΑΒ < ΓΔ)$ και έστω O το σημείο τομής των διαγώνιων του $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Έστω ακόμη K το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_1 του τριγώνου OAB και M το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του τριγώνου $OΔΓ$. Αν E είναι το σημείο τομής των ευθειών KA και $MΔ$ και Z είναι το σημείο τομής των KB και $MΓ$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, O, M καθώς και το μέσο της EZ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Από την παραλληλία των βάσεων του τραπεζίου, προκύπτουν (ως εντός εναλλάξ) οι ισότητες γωνιών: $\hat{A}_2 = \hat{Γ}_2 = \hat{y}$ και $\hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{x}$ (1).



Σχήμα 5

Η γωνία $\widehat{K}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{B}_2$ (στο κύκλο C_1) οπότε:

$$\widehat{K}_1 = 2\hat{B}_2 = 2\hat{x}.$$

Η γωνία $\widehat{M}_1$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της $\hat{Δ}_2$ (στο κύκλο C_2) οπότε:

$$\widehat{M}_1 = 2\hat{Δ}_2 = 2\hat{x}.$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών έχουμε: $\widehat{K}_1 = \widehat{M}_1 = 2\hat{x}$ (2).

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι: $\widehat{K}_2 = \widehat{M}_2 = 2\hat{y}$ (3).

Από το ισοσκελές τρίγωνο KAB έχουμε:

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 + \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $MΓΔ$ έχουμε:

$$\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 + \hat{Γ}_1 + \hat{Δ}_1 = 180° \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 180°.$$

Άρα $\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 = \hat{\omega} = 90° - \hat{x} - \hat{y}$.

Από το τρίγωνο AOK έχουμε: $A\hat{O}K = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.

Από το τρίγωνο $ΓOM$ έχουμε: $Γ\hat{O}M = 180° - \hat{\omega} - \hat{y} - 2\hat{x}$.

Από τις τελευταίες ισότητες έχουμε: $A\hat{O}K = Γ\hat{O}M$. Άρα τα σημεία O, K, M είναι συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega} = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$ και την παραλληλία $AB \mathbin{/\!/} ΓΔ$ συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $KEMZ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

Πρόβλημα 4
Αν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p,q,r με $p>q>r$ είναι πρώτοι, να εξετάσετε, αν οι αριθμοί $\sqrt[3]{2018pq}, \sqrt[3]{2018qr}, \sqrt[3]{rp}$ μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο.

Λύση
Ας υποθέσουμε ότι μπορούν να ανήκουν στην ίδια αριθμητική πρόοδο. Τότε γράφουμε:

$$\sqrt[3]{rp}=a, \sqrt[3]{2018pq}=a+kd, \sqrt[3]{2018qr}=a+md\ ,\ m,k\in Z$$

Αντικαθιστώντας το a παίρνουμε τις σχέσεις

$$\sqrt[3]{2018pq}=\sqrt[3]{rp}+kd \text{ και } \sqrt[3]{2018qr}=\sqrt[3]{rp}+md\ ,$$

οπότε απαλείφοντας το d παίρνουμε:

$$m\sqrt[3]{2018pq}-k\sqrt[3]{2018qr}=(m-k)\sqrt[3]{rp}\ . \qquad (1)$$

Υψώνοντας στον κύβο την (1) παίρνουμε:

$$2018m^3pq-2018k^3qr+3mk\sqrt[3]{2018^2q^2pr}(m\sqrt[3]{2018pq}-k\sqrt[3]{2018qr})=(m-k)^3rp$$

Η τελευταία λόγω της (1) γράφεται:

$$2018m^3pq-2018k^3qr+3mk(m-k)\sqrt[3]{2018^2q^2p^2r^2}=(m-k)^3rp\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $(2018pqr)^2$ πρέπει να είναι τέλειος κύβος. Όμως στο $2018pqr=2\cdot 1009\cdot pqr$ κάθε πρώτος μπορεί να εμφανιστεί σε δύναμη το πολύ 2, αφού $p>q>r$, άρα δεν είναι τέλειος κύβος.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right),$$

αν δίνεται ότι: $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$.

Λύση
1ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha=3\beta$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(\frac{3\beta^2+9\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{9\beta^2-3\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{12\beta^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{6\beta^2}{9\beta^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(12-10\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot\frac{15}{3}=10.$$

2ος Τρόπος

Επειδή $\dfrac{\alpha}{\beta}=3$, συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{3}$. Επομένως έχουμε:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{3\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}-10\right)\cdot\left(\frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2}+\frac{13}{3}\right)=\left(3+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-10\right)\cdot\left(1-3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\frac{13}{3}\right)$$

$$=\left(3+3^2-10\right)\cdot\left(1-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{3}\right)=\left(3+9-10\right)\cdot\left(1-\frac{3}{9}+\frac{13}{3}\right)=2\cdot\left(+5\right)=10.$$

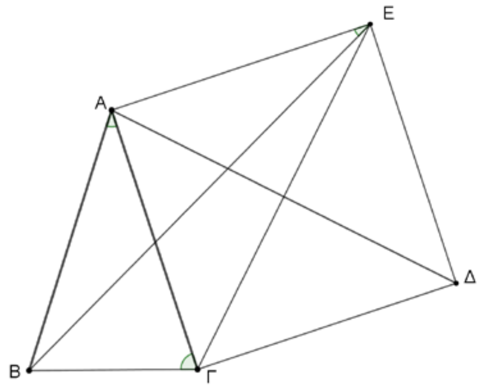
Πρόβλημα 2

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Γ} = 2 \cdot \hat{Α}$. Το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο.

(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $Α\hat{Ε}Β$.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $Β\hat{Α}Δ$ και $Β\hat{Ε}Γ$.

Σημείωση: Να κάνετε το δικό σας σχήμα στο φύλλο με τις απαντήσεις σας.



Λύση

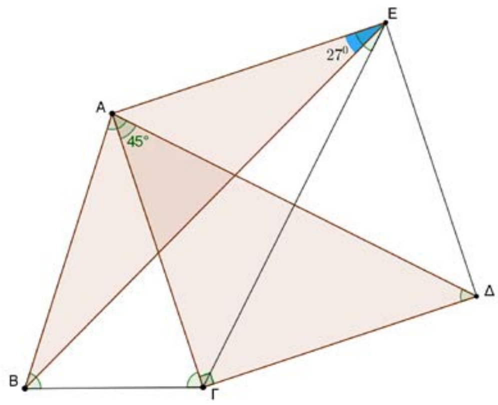
(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$ έπεται ότι $\hat{Γ} = \hat{Β} = 2 \cdot \hat{Α}$, οπότε από τη σχέση $\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^\circ$ έπεται ότι:

$$\hat{Α} + 2\hat{Α} + 2\hat{Α} = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{Α} = 180^\circ \Rightarrow \hat{Α} = 36^\circ.$$

Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές, αφού $ΑΒ = ΑΓ = ΑΕ$ και ισχύει ότι

$$Β\hat{Α}Ε = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Ε = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ,$$

οπότε θα είναι $Α\hat{Ε}Β = \dfrac{180^\circ - Β\hat{Α}Ε}{2} = \dfrac{180^\circ - 126^\circ}{2} = 27^\circ$.



Σχήμα 1

(β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ορθή γωνία $Α\hat{Γ}Δ = 90^\circ$, οπότε οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° η καθεμία, δηλαδή $Γ\hat{Α}Δ = 45^\circ$. Επομένως είναι

$$Β\hat{Α}Δ = Β\hat{Α}Γ + Γ\hat{Α}Δ = 36^\circ + 45^\circ = 81^\circ.$$

Ομοίως, από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΕ με $Γ\hat{Α}Ε = 90^\circ$ προκύπτει ότι: $Α\hat{Ε}Γ = 45^\circ$, οπότε $Β\hat{Ε}Γ = Α\hat{Ε}Γ - Α\hat{Ε}Β = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$.

Πρόβλημα 3

Για τη φωταγώγηση μιας πλατείας, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοποθετήθηκαν περιμετρικά 182 κολώνες φωτισμού. Τέσσερις από αυτές τοποθετήθηκαν στις γωνίες τις πλατείας. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν και οι υπόλοιπες 178 στην περίμετρο της πλατείας έτσι ώστε κάθε δύο διαδοχικές κολώνες απέχουν τέσσερα μέτρα. Επίσης διαπιστώθηκε ότι η μεγαλύτερη πλευρά της πλατείας είχε διπλάσιες κολώνες από τη μικρή πλευρά, όπου σε κάθε πλευρά μετράμε και τις κολώνες στις γωνίες. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών της πλατείας. **Σημείωση**: *Θεωρείστε τις κολώνες πάνω στις πλευρές της πλατείας ως σημεία.*

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η μικρή πλευρά του ορθογωνίου είναι α μέτρα και η μεγάλη β μέτρα.

Τότε αφού κάθε δύο κολώνες απέχουν 4 μέτρα, η μικρή πλευρά θα έχει $\frac{\alpha}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων των γωνιών.

Ομοίως η μεγάλη πλευρά θα έχει $\frac{\beta}{4}+1$ κολώνες, συμπεριλαμβανομένων και των γωνιών, οπότε, αφού η μεγάλη πλευρά έχει διπλάσιες κολώνες από τη μικρή, θα έχουμε ότι

$$\frac{\beta}{4}+1=2\left(\frac{\alpha}{4}+1\right)\Rightarrow \beta=2\alpha+4.$$

Όμως συνολικά οι κολώνες είναι 182 και απέχουν τέσσερα μέτρα μεταξύ τους, οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $182\cdot 4=728$, δηλαδή $2\alpha+2\beta=728\Rightarrow a+\beta=364$.

Επομένως, με αντικατάσταση της τιμής του β, έχουμε:

$$\alpha+2\alpha+b=364\Rightarrow 3\alpha+4=364\Rightarrow \alpha=120. \text{ και } \beta=244.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό εξαψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 12600.

Λύση

(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 12600 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $12600=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.

Προφανώς ο οκταψήφιος ακέραιος 22233557 έχει γινόμενο ψηφίων 126000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα εξετάσουμε τη δυνατότητα να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8=2\cdot 2\cdot 2$ και το $9=3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Έτσι λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο $\mathbf{A=55789}$ ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 12600. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία $2,\ 4=2\cdot 2,\ 9=3\cdot 3$ ή $2, 6=2\cdot 3,\ 6=2\cdot 3$. Τότε όμως προκύπτει εξαψήφιος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος από τον πενταψήφιο 55789.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 245599 ή 255669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 55789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **155789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A} = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma\,,$$

αν δίνεται ότι $\alpha = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$, $\beta = (-2)^{-2}$, $\gamma = -\dfrac{1}{2^3}$.

Λύση

Έχουμε ότι: $\alpha = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{1}{8}$, $\beta = (-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{1}{4}$, $\gamma = -\dfrac{1}{2^3} = -\dfrac{1}{8}$,

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta - \gamma \\
&= \left(-\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(-\frac{1}{8}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{8}\right) \\
&= -\frac{1}{8^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{8^3} - \frac{3}{4\cdot 8^2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{\left(2^3\right)^3} + \frac{1}{\left(2^2\right)^3} - \frac{1}{\left(2^2\right)^3} - \frac{3}{2^2\cdot\left(2^3\right)^2} + \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^9} - \frac{3}{2^2\cdot 2^6} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{2^9} + \frac{1}{2^6} - \frac{3}{2^8} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^6} - \frac{3}{2^8} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{-1+4-3}{2^8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
(α) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(β) Να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό επταψήφιο θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000.
(γ) Μπορούμε να βρούμε το μεγαλύτερο δυνατό θετικό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000;

Λύση
(α) Για να διαπιστώσουμε ποια ψηφία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αναλύουμε τον ακέραιο 63000 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε: $63000 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7$, οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα όλους τους ακέραιους: 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5, 7, χωρίς να αποκλείεται το ψηφίο 1, αφού δεν επηρεάζει το γινόμενο των ψηφίων.
Προφανώς ο ακέραιος 222335557 έχει γινόμενο ψηφίων 630000. Επειδή ζητάμε το μικρότερο δυνατό ακέραιο με την ιδιότητα αυτή, θα πρέπει να βρούμε τρόπους μείωσης του αριθμού των ψηφίων που θα χρησιμοποιήσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει, αν χρησιμοποιήσουμε ψηφία που προέρχονται από γινόμενα των παραπάνω αριθμών και ειδικότερα από γινόμενα των πέντε πρώτων στη σειρά ακέραιων. Αυτά είναι το $8 = 2\cdot 2\cdot 2$ και το $9 = 3\cdot 3$ που είναι και ο ελάχιστος δυνατός αριθμός τέτοιων ψηφίων. Άλλη δυνατότητα είναι να πάρουμε τρία ψηφία 2, $4 = 2\cdot 2$, $9 = 3\cdot 3$ ή 2, $6 = 2\cdot 3$, $6 = 2\cdot 3$. Έτσι

λαμβάνουμε τον πενταψήφιο ακέραιο **Α = 55**5**789** ως τον μικρότερο δυνατό ακέραιο του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο 63000.

(β) Σκεπτόμενοι ομοίως με το ερώτημα (α), για την εύρεση εξαψήφιου ακέραιου έχουμε τις δυνατότητες των ακέραιων 2455599 ή 2555669. Όμως υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης του ψηφίου 1 στην αρχή του ακέραιου 555789, οπότε προκύπτει ο ακέραιος **155**5**789** που είναι μικρότερος από τους δύο προηγούμενους.

(γ) Αν υποθέσουμε ότι βρήκαμε το μεγαλύτερο δυνατό ακέραιο Α του οποίου τα ψηφία έχουν γινόμενο τον αριθμό 63000, τότε διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ακέραιος μεγαλύτερος από τον Α που ικανοποιεί την ίδια ιδιότητα. Αυτός προκύπτει από τον Α με τοποθέτηση στο τέλος του ενός επιπλέον ψηφίου ίσου με το 1. Αυτό είναι άτοπο, από την υπόθεση για τον ακέραιο Α.

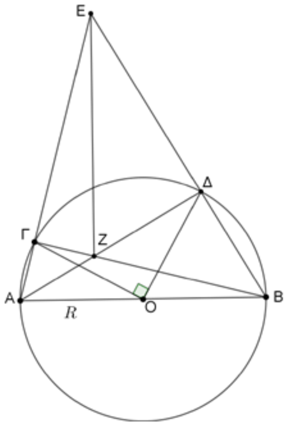
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος διαμέτρου $\mathrm{AB} = 2R$ και η γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ, ενώ οι ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ε.

(α) Βρείτε πόσες μοίρες είναι οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{EZ} = 2R$.

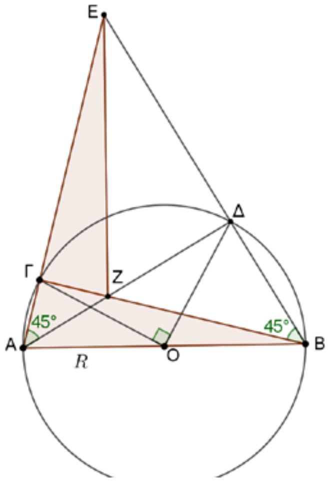
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση

(α) Οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R και βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ στο οποίο βαίνει και η επίκεντρη γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta = 90^\circ$. Άρα είναι

$$\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = \frac{\Gamma\hat{\mathrm{O}}\Delta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$



Σχήμα 2

(β) Επειδή $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 90^\circ$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{A\Gamma Z}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{A\Gamma} = \Gamma\mathrm{Z}$. Επειδή $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} = 180^\circ - \mathrm{A\Gamma B} = 90^\circ$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = 45^\circ$, το τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma E}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\mathrm{B\Gamma} = \Gamma\mathrm{E}$.
Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΕΖ έχουν τις δύο κάθετες πλευρές του ίσες μία προς μία, δηλαδή μία κάθετη πλευρά ίση $\mathrm{A\Gamma} = \Gamma\mathrm{Z}$ και $\mathrm{B\Gamma} = \Gamma\mathrm{E}$. Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $\mathrm{EZ} = \mathrm{AB} = 2R$.

Πρόβλημα 4
Έχουμε πέντε κάρτες Α, Β, Γ, Δ, Ε που πάνω σε καθεμία από αυτές είναι γραμμένος ένας θετικός ακέραιος. Με αυτές τις κάρτες σχηματίζονται συνολικά δέκα διαφορετικές τριάδες. Για καθεμία από αυτές τις τριάδες, καταγράφουμε το άθροισμα των τριών καρτών. Διαπιστώνουμε ότι προκύπτουν δύο μόνο διαφορετικά αθροίσματα, το 15 και το 13. Να προσδιορίσετε τους δυνατούς αριθμούς των πέντε καρτών.

Λύση
Επειδή τα δυνατά αθροίσματα των τριάδων είναι μόνο δύο, το 15 και το 13 συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν τρεις κάρτες με διαφορετικούς αριθμούς.
Πράγματι, αν υπήρχαν τρεις κάρτες με διαφορετικούς μεταξύ τους αριθμούς , έστω x, y, z και οι άλλες δύο κάρτες είχαν τους αριθμούς α και β, τότε θα είχαμε συνολικά τρία διαφορετικά αθροίσματα της μορφής $\alpha+\beta+x, \alpha+\beta+y, \alpha+\beta+z,$ το οποίο είναι αντίθετο στην υπόθεση.
Επίσης συμπεραίνουμε ότι δεν είναι δυνατόν όλες οι κάρτες να έχουν τον ίδιο αριθμό, γιατί τότε θα είχαμε ένα μόνο δυνατό άθροισμα τριάδων.
Επομένως πάνω στις κάρτες υπάρχουν δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι, έστω x, y , με $x > y$. Τότε τα δυνατά αθροίσματα τριάδων, διατεταγμένα από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο, είναι:

$$x+x+x = 3x > x+x+y = 2x+y > x+y+y = x+2y > y+y+y = 3y.$$

Επειδή τα δυνατά αθροίσματα είναι μόνο δύο, παρατηρούμε ότι ο αριθμός y πρέπει να υπάρχει μία μόνο φορά, γιατί:

- Αν το y υπάρχει σε τέσσερις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει μόνο σε μία κάρτα και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $x+2y = 15,\ 3y = 13$, που δεν δίνει ακέραιες τιμές για τα x, y.
- Αν το y υπάρχει σε τρεις κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε δύο κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $2x+y > x+2y > 3y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.
- Αν το y υπάρχει σε δύο κάρτες, τότε το x θα υπάρχει σε τρεις κάρτες και τα δυνατά αποτελέσματα τριάδων θα είναι $3x > 2x+y > x+2y$, δηλαδή τρία διαφορετικά.

Επομένως, τα δυνατά αθροίσματα είναι τα :

$$x+x+x = 3x,\ x+x+y = 2x+y, \text{ με } 3x > x+2y,$$

οπότε έχουμε:

$$3x = 15,\ 2x+y = 13 \Leftrightarrow x = 5,\ y = 3.$$

Επομένως, μία κάρτα έχει τον αριθμό 3 και οι υπόλοιπες τέσσερις έχουν τον αριθμό 5.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3=2\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)=2\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2\right)=0\overset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2=0$$

$$\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ ισούται με 1, έπεται ότι οι αριθμοί $\rho_1=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (ή με αντίστροφη σειρά) είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$ με άθροισμα $\rho_1+\rho_2=3$. Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2=3^2-2=7$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\dfrac{50}{3n-2}$ και $\dfrac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A=2(n+1)-3(m+2)+7.$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$B=\frac{162}{n^2}-\frac{m^2}{3721}.$$

Λύση

Οι θετικοί διαιρέτες του 50 είναι οι αριθμοί 1, 2, 5, 10, 25, 50, οπότε ο $3n-2$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $3n$ είναι κάποιος από τους 3, 4, 7, 12, 27, 52 οπότε οι πιθανές τιμές του n, αφού είναι θετικός ακέραιος, είναι 1, 4, 9.

Οι θετικοί διαιρέτες του $243=3^5$ είναι οι αριθμοί 1, 3, 9, 27, 81, 243 οπότε ο $4m-1$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $4m$ είναι κάποιος από τους 2, 4, 10, 28, 82, 244, οπότε οι πιθανές τιμές του m είναι 1, 7, 61.

(α) Η παράσταση $A=2(n+1)-3(m+2)+7=2n-3m+3$ παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει τη μικρότερη δυνατή τιμή του. Τότε είναι: $\max A=2\cdot 9-3\cdot 1+3=18$.

(β) Έχουμε ότι $B=\frac{162}{n^2}-\frac{m^2}{3721}$, οπότε η παράσταση B παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει επίσης τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του. Τότε έχουμε:

$$\min B=\frac{162}{9^2}-\frac{61^2}{3721}=\frac{162}{81}-\frac{3721}{3721}=2-1=1.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy}=\frac{3z+5y}{yz}=\frac{5x+z}{zx}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}.$$

Λύση

Οι δύο πρώτες εξισώσεις μπορούν να γραφούν:

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=\frac{5}{z}+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{5}{z},\ \frac{1}{x}=\frac{3}{y}\Leftrightarrow y=3x,\ z=5x.$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{3z+5y}{yz}=\frac{140}{x^2+y^2+z^2}\Leftrightarrow\frac{15x+15x}{15x^2}=\frac{140}{x^2+9x^2+25x^2}\Leftrightarrow\frac{30x}{15x^2}=\frac{140}{35x^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{140}{35x^2}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow 2x^2=4x\Leftrightarrow 2x(x-2)=0\overset{x\neq0}{\Longleftrightarrow}x=2.$$

Άρα έχουμε: $x=2,\ y=6,\ z=10$.

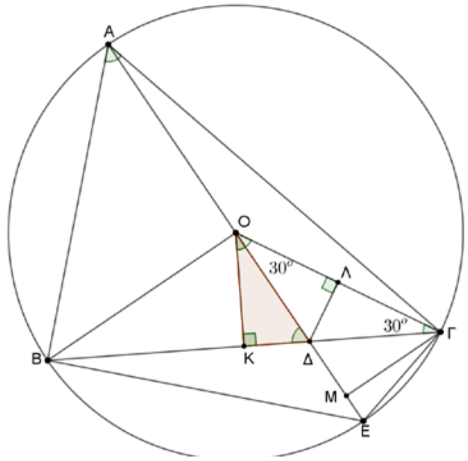
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=60^\circ$. Η διάμετρος ΑΕ του περιγεγραμμένου κύκλου $C(\mathrm{O},R)$ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, έτσι ώστε $\mathrm{B\Delta}=2\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{\Delta\hat{O}\Gamma}=30^\circ$

(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ συναρτήσει της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Φέρουμε την $\mathrm{OK} \perp \mathrm{B\Gamma}$, οπότε το Κ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και $\mathrm{K\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Επειδή $\frac{\mathrm{B\Delta}}{2} = \frac{\mathrm{\Delta\Gamma}}{1} = \frac{\mathrm{B\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma}}{2+1} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{3} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \mathrm{\Delta\Gamma} = \frac{\alpha}{3}$ και $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{K\Gamma} - \mathrm{\Delta\Gamma} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6}$.

Επίσης $\mathrm{O\hat{\Gamma}\Delta} = \mathrm{O\hat{\Gamma}K} = 90^\circ - \mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 90^\circ - \hat{\mathrm{A}} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε, αν φέρουμε $\mathrm{\Delta\Lambda} \perp \mathrm{O\Gamma}$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ με $\mathrm{\Delta\hat{\Gamma}\Lambda} = 30^\circ$ προκύπτει ότι η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή : $\mathrm{\Delta\Lambda} = \frac{\mathrm{\Delta\Gamma}}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ημίτονο τη γωνίας των 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΛ, οπότε έχουμε: $\mathrm{\Delta\Lambda} = \mathrm{\Delta\Gamma} \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΔ και ΟΛΔ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (ΟΔ κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{K\Delta} = \mathrm{\Lambda\Delta}$), οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν $\mathrm{K\hat{O}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{O}\Lambda}$ και αφού $\mathrm{K\hat{O}\Delta} + \mathrm{\Delta\hat{O}\Lambda} = \mathrm{K\hat{O}\Gamma} = 60^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{K\hat{O}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{O}\Lambda} = 30^\circ \Rightarrow \mathrm{\Delta\hat{O}\Gamma} = 30^\circ$.

(β) Επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{OA} = \mathrm{O\Gamma} = R$, και την εξωτερική του γωνία $\mathrm{\Delta\hat{O}\Gamma} = 30^\circ$, έπεται ότι $\mathrm{E\hat{A}\Gamma} = \mathrm{O\hat{A}\Gamma} = \frac{\mathrm{\Delta\hat{O}\Gamma}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Επομένως θα είναι

$$\mathrm{B\hat{A}E} = \mathrm{B\hat{A}\Gamma} - \mathrm{E\hat{A}\Gamma} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ύψος την ακτίνα ΒΟ. Από το τρίγωνο ΟΚΓ προκύπτει η σχέση της ακτίνας R με την πλευρά α, αφού είναι $\mathrm{OK} = \frac{R}{2}$ και

$$\mathrm{O\Gamma}^2 - \mathrm{OK}^2 = \mathrm{K\Gamma}^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3R^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \alpha = R\sqrt{3}.$$

Το ύψος ΓΜ του τριγώνου ΑΓΕ παρατηρούμε προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΜ με $\mathrm{M\hat{O}\Gamma} = 30^\circ$ ότι είναι $\mathrm{\Gamma M} = \frac{\mathrm{O\Gamma}}{2} = \frac{R}{2}$.

Για το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΕΓ έχουμε:

$$\mathrm{E}_{(\mathrm{ABE\Gamma})} = \mathrm{E}_{(\mathrm{ABE})} + \mathrm{E}_{(\mathrm{AE\Gamma})} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{BO} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{\Gamma M} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R + \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{R}{2} = \frac{3R^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $\left||x+8| - 3x\right| = \frac{x+7}{6}$**.**

Λύση

Λόγω της ύπαρξης των απόλυτων τιμών θα εργαστούμε σε κατάλληλα διαστήματα που θα μας επιτρέπουν να αποφύγουμε τις απόλυτες τιμές. Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω της απόλυτης τιμής στο πρώτο μέλος, πρέπει: $\frac{x+7}{6} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\left|x+8-3x\right|=\frac{x+7}{6}\Leftrightarrow\left|8-2x\right|=\frac{x+7}{6} \qquad (1).$$

Επειδή το πρόσημο του όρου $8-2x$ αλλάζει εκατέρωθεν του 4, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $-7\le x<4$. Τότε

$$(1)\Leftrightarrow 8-2x=\frac{x+7}{6}\Leftrightarrow 48-12x=x+7\Leftrightarrow 13x=41\Leftrightarrow x=\frac{41}{13}<4,$$

η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο διάστημα $\left[-7,4\right)$.

(β) $x\ge 4$. Τότε

$$(1)\Leftrightarrow 2x-8=\frac{x+7}{6}\Leftrightarrow 12x-48=x+7\Leftrightarrow 11x=55\Leftrightarrow x=5>4, \text{ δεκτή.}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x,y,z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y=y+3z=z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των $x,\ y,\ z$ για τις οποίες η παράσταση $x^2+y^2+z^2-2y-144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Αν θέσουμε $x+2y=y+3z=z+5x=t$, τότε έχουμε:

$$\left.\begin{cases}x+2y=t\\ y+3z=t\\ z+5x=t\end{cases}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases}x+2y=t\\ -2y-6z=-2t\\ 6z+30x=6t\end{cases}\right\}\Rightarrow 31x=5t\Rightarrow x=\frac{5t}{31}.$$

Τότε λαμβάνουμε:

$$x+2y=t\Rightarrow\frac{5t}{31}+2y=t\Rightarrow 2y=\frac{26t}{31}\Rightarrow y=\frac{13t}{31},$$

$$z+5x=t\Rightarrow z+\frac{25t}{31}=t\Rightarrow z=\frac{6t}{31}.$$

Επομένως έχουμε: $\frac{x}{y}=\frac{5}{13},\ \frac{z}{y}=\frac{6}{13}$.

(β) Εκφράζουμε την παράσταση συναρτήσει της μεταβλητής y, οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{5}{13}y\right)^2+y^2+\left(\frac{6}{13}y\right)^2-2y-144=\frac{230}{169}y^2-2y-144=f\left(y\right),$$

Επειδή ο συντελεστής του y^2 είναι θετικός, η παράσταση παίρνει την ελάχιστη τιμή της για $y=-\frac{-2}{2\cdot\frac{230}{169}}=\frac{169}{230}$. Τότε είναι $x=\frac{5}{13}y=\frac{5}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{13}{46},\quad z=\frac{6}{13}\cdot\frac{169}{230}=\frac{78}{230}=\frac{39}{115}$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη $\left(x,y\right)$ που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0$$

και ανήκουν στο ορθογώνιο $D=\left\{(x,y):-\pi\le x\le\pi,-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ του Καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9=0\Leftrightarrow x^2+6x\cdot\sigma\upsilon\nu(xy)+9\left[\sigma\upsilon\nu^2(xy)+\eta\mu^2(xy)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[x+3\sigma\upsilon\nu(xy)\right]^2+\left[3\eta\mu(xy)\right]^2=0\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0\\3\eta\mu(xy)=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0\\xy=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\ \acute{\eta}\ \left\{\begin{matrix}x+3\sigma\upsilon\nu(xy)=0\\xy=(2\kappa+1)\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=-3\\y=\frac{2\kappa\pi}{-3},\kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}\ \text{ή}\ \left\{\begin{matrix}x=3\\y=\frac{(2\kappa+1)\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}.$$

Για να ανήκουν τα παραπάνω ζεύγη στο ορθογώνιο D πρέπει

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{2\kappa\pi}{-3}\le\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{3}{4}\le\kappa\le\frac{3}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\kappa=0 \qquad \text{ή}$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{(2\kappa+1)\pi}{3}\le\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\le2\kappa+1\le\frac{3}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}\le\kappa\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\kappa\in\{-1,0\},$$

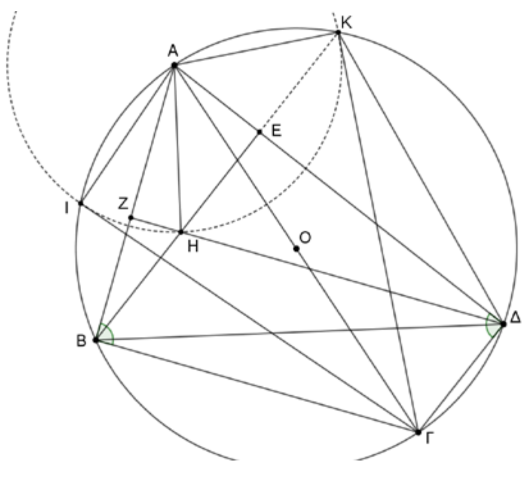
οπότε προκύπτουν τα ζεύγη:

$$\left(3,-\frac{\pi}{3}\right),(-3,\ 0),\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right).$$

Πρόβλημα 4

Έστω ΑΒΓΔ τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}=90^\circ$. Έστω Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ. Ο κύκλος $C_2(\mathrm{A},\mathrm{AH})$ κέντρου Α και ακτίνας ΑΗ τέμνει τον κύκλο $C_1(\mathrm{O},R)$ στα σημεία Ι και Κ. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\mathrm{I}=\Gamma\mathrm{K}=\mathrm{B}\Delta$.

Λύση



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα ΓΙΚ και ΓΚΑ είναι ορθογώνια, αφού η ΑΓ είναι διάμετρος και έχουν κοινή υποτείνουσα και $\mathrm{AI}=\mathrm{AK}$, ως ακτίνες του κύκλου $C_2\left(\mathrm{A},\mathrm{AH}\right)$. Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα και θα έχουν και $\Gamma\mathrm{I}=\Gamma\mathrm{K}$.

Επειδή η ΒΚ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΔ, έχουμε ότι: $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=90^\circ-\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$.

Έχουμε επιπλέον ότι:

$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}=\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{K}=\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z}=90^\circ-\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ (γιατί ΓΖ ύψος του τριγώνου ΑΒΔ).

Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=90^\circ-\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, οπότε τα σημεία Α, Η, Ε, Κ είναι συνευθειακά. Επειδή επιπλέον οι ευθείες ΒΚ και ΓΔ είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ευθεία ΑΔ, έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΚ είναι τραπέζιο εγγεγραμμένο στον κύκλο $C_1\left(\mathrm{O},R\right)$ και άρα ισοσκελές. Επομένως οι διαγώνιοι του ΓΚ και ΒΔ είναι ίσες.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε πόσοι θετικοί ακέραιοι της μορφής

$$\mathrm{A}=\overline{xxxabc}=x\cdot10^5+x\cdot10^4+x\cdot10^3+a\cdot10^2+b\cdot10+c,$$

όπου x,a,b,c ψηφία με $x\neq0$, διαιρούνται με το 37.

Λύση

Ο ακέραιος Α μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathrm{A}=\overline{xxxabc}=x\cdot10^3\cdot111+a\cdot10^2+b\cdot10+c=x\cdot10^3\cdot3\cdot37+\overline{abc}=\pi o\lambda.37+\overline{abc},$$

για κάθε $x\in\{1,2,....,9\}$. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η ισοδυναμία

$$37\,\big|\,\mathrm{A}\Leftrightarrow37\,\big|\,\overline{abc}.$$

Όμως όλοι οι το πολύ τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι που διαιρούνται με το 37 είναι της μορφής $37\kappa,\kappa\in\mathbb{Z},$ που ικανοποιούν τη σχέσεις $0\leq37\kappa\leq999$. Έχουμε

$$0\leq37\kappa\leq999,\kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow0\leq\kappa\leq27,\kappa\in\mathbb{Z}.$$

Επομένως υπάρχουν 28 θετικοί ακέραιοι με τρία το πολύ ψηφία που διαιρούνται με το 37 και επειδή για το σχηματισμό των πρώτων τριών ψηφίων του Α υπάρχουν 9 δυνατές περιπτώσεις, προκύπτει ότι συνολικά υπάρχουν $9\cdot28=252$ θετικοί ακέραιοι της δεδομένης μορφής που διαιρούνται με το 37.

Πρόβλημα 2

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=|mx+4|+|mx-4|,m>0$ και $y=12$ ορίζουν κυρτό επίπεδο σχήμα του οποίου το εμβαδό ισούται με 20 τ. μ. Να προσδιορίσετε την τιμή της πραγματικής παραμέτρου $m>0$.

Λύση

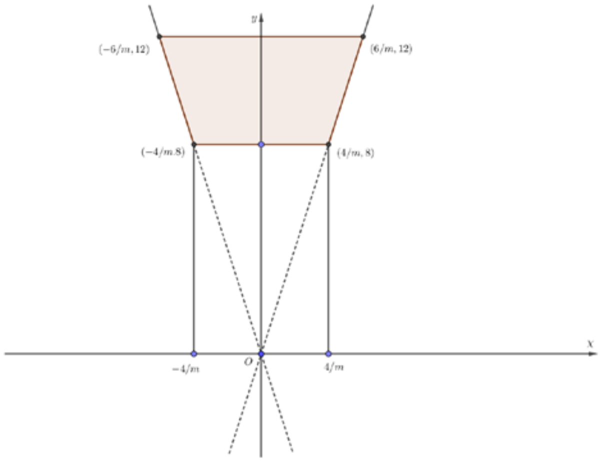
Η εξίσωση $y=|mx+4|+|mx-4|$, $m\in\mathbb{R}$, παίρνει τη μορφή

$$y=m\cdot\left|x+\frac{4}{m}\right|+m\cdot\left|x-\frac{4}{m}\right|=m\cdot\left(\left|x+\frac{4}{m}\right|+\left|x-\frac{4}{m}\right|\right),m>0,$$

οπότε θεωρώντας την τιμή του x στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{4}{m}\right)$, $\left[-\frac{4}{m},\frac{4}{m}\right]$ και $\left[\frac{4}{m},+\infty\right)$ έχουμε:

$$y=|mx+4|+|mx-4|=\begin{cases}-2mx, & \alpha\nu\ x<-\frac{4}{m}\\ 8, & \alpha\nu\ -\frac{4}{m}\le x\le\frac{4}{m}\\ 2mx, & \alpha\nu\ x>\frac{4}{m}\end{cases},\quad m>0.$$

Επομένως η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης είναι μία τεθλασμένη γραμμή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με σημεία αλλαγής κατεύθυνσης τα $\mathrm{A}\left(-\frac{4}{m},8\right)$ και $\mathrm{B}\left(\frac{4}{a},8\right)$. Η εξίσωση $y=12$ ορίζει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,12)$. Οι δύο γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία $\Gamma\left(\frac{6}{m},12\right)$ και $\Delta\left(-\frac{6}{m},12\right)$, οπότε ορίζουν το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις μήκους $\frac{8}{m}$ και $\frac{12}{m}$, ενώ το ύψος τους έχει μήκος 4. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι $\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\frac{40}{m}$. Από την εξίσωση $\frac{40}{m}=20\Leftrightarrow m=2.$



Σχήμα 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}$

Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\sqrt{3\left|4-x^2\right|^2-2x^4+16x^2-32}=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^4+8x^2-16\right)}=$$
$$=\sqrt{3\left(4-x^2\right)^2-2\left(x^2-4\right)^2}=\sqrt{\left(x^2-4\right)^2}=\left|x^2-4\right|$$

Άρα είναι

$$\mathrm{A}=\left|x^2-4\right|=\begin{cases} x^2-4, & \text{αν } |x|\geq 2 \\ 4-x^2, & \text{αν } |x|<2 \end{cases}$$

Για την επίλυση της εξίσωσης $\mathrm{A}=\alpha x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $x\leq -2$ ή $x\geq 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$\mathrm{A}=\alpha x+4 \Leftrightarrow x^2-4=\alpha x+4 \Leftrightarrow x^2-\alpha x-8=0$, η οποία έχει διακρίνουσα $\Delta=\alpha^2+32>0$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις, $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2},\ x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, για κάθε τιμή $\alpha\in\mathbb{R}$.

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_1\geq 2 \Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\geq 4-\alpha \Leftrightarrow \alpha\geq -2,$$

γιατί η ανίσωση αληθεύει για κάθε $\alpha\geq 4$, ενώ για $\alpha<4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\geq\left(4-\alpha\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\geq\alpha^2-8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\geq -16 \Leftrightarrow \alpha\geq -2.$$

Για τη λύση $x_1=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_1\leq -2 \Leftrightarrow \alpha+\sqrt{\alpha^2+32}\leq -4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\leq -(4+\alpha)\ \text{(αδύνατη)},$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha\geq -4$, ενώ για $\alpha<-4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\leq\left(4+\alpha\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\leq\alpha^2+8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\geq 16 \Leftrightarrow \alpha\geq 2,\ \text{άτοπο.}$$

Επομένως η λύση x_1 είναι δεκτή για $\alpha\geq -2$ και ανήκει στο διάστημα $\left[+2,+\infty\right)$.

Για τη λύση $x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2\geq 2 \Leftrightarrow \alpha-\sqrt{\alpha^2+32}\geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\leq\alpha-4\ \text{(αδύνατη)},$$

αφού η ανίσωση είναι αδύνατη για κάθε $\alpha\leq 4$, ενώ για $\alpha>4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\leq\left(\alpha-4\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\leq\alpha^2-8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\leq -16 \Leftrightarrow \alpha\leq -2,\ \text{άτοπο.}$$

Για τη λύση $x_2=\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+32}}{2}$, ισχύει ότι:

$$x_2\leq -2 \Leftrightarrow \alpha-\sqrt{\alpha^2+32}\leq -4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+32}\geq\alpha+4,$$

η οποία αληθεύει για κάθε $\alpha\leq -4$, ενώ για $\alpha>-4$ είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\alpha^2+32\geq\left(\alpha+4\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+32\geq\alpha^2+8\alpha+16 \Leftrightarrow 8\alpha\leq 16 \Leftrightarrow \alpha\leq 2.$$

Επομένως η λύση x_2 είναι δεκτή για $\alpha\leq 2$ και ανήκει στο διάστημα $\left(-\infty,-2\right]$.

Άρα η εξίσωση $\mathrm{A}=\alpha x+4,\ \alpha\in\mathbb{R}$ έχει:

- δύο λύσεις στο σύνολο $\left(-\infty,2\right]\cup\left[2,+\infty\right)$, όταν $-2\leq\alpha\leq 2$

- μία λύση στο σύνολο $(-\infty, 2] \cup [2, +\infty)$, όταν $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Περίπτωση 2. $-2 < x < 2$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\mathrm{A} = \alpha x + 4 \Leftrightarrow 4 - x^2 = \alpha x + 4 \Leftrightarrow x^2 + \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (δεκτή) ή } x = -\alpha.$$

Η λύση $x = -\alpha$ είναι δεκτή, εφόσον $-2 < -\alpha < 2 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 2$.

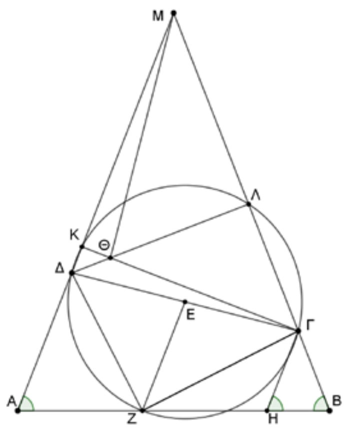
Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A} = \alpha x + 4,\ \alpha \in \mathbb{R}$ έχει:

- τέσσερις πραγματικές λύσεις για $-2 < \alpha < 2,\ \alpha \neq 0$
- τρεις πραγματικές λύσεις για $\alpha = 0$
- δύο πραγματικές λύσεις για $\alpha = -2$ ή $\alpha = 2$.
- μία πραγματική λύση για $\alpha < -2$ ή $\alpha > 2$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} < 90^\circ$ και $\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma} = \Delta\Gamma$. Η παράλληλη ευθεία προς την πλευρά ΑΔ από το μέσο Ε της πλευράς ΓΔ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΔΖ τέμνει τις ευθείες ΑΔ και ΒΓ στα σημεία Κ και Λ, αντίστοιχα. Αν οι ευθείες ΓΚ και ΔΛ τέμνονται στο σημείο Θ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΘ είναι κάθετη προς την ευθεία ΓΔ.

Λύση



Σχήμα 6

Φέρουμε τη ΓΗ παράλληλη προς τη ΑΔ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Η. Τότε

$\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{A}}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά στις παράλληλες ΓΗ και ΑΔ)

$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}$ (από υπόθεση).

Επομένως είναι:

$$\Gamma\hat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{B}} \Rightarrow \Gamma\mathrm{H} = \Gamma\mathrm{B} . \qquad (1)$$

Επειδή το Ε είναι μέσο της πλευράς ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ και η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις, θα έχουμε

$$\mathrm{EZ} = \frac{\mathrm{A\Delta} + \Gamma\mathrm{H}}{2} \overset{(1)}{=} \frac{\mathrm{A\Delta} + \mathrm{B\Gamma}}{2} \overset{\upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta}{=} \frac{\Gamma\Delta}{2}.$$

Επομένως στο τρίγωνο ΓΔΖ η διάμεσος ΖΕ ισούται με το μισό της πλευρά στην οποία αντιστοιχεί, οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Ζ, δηλαδή $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\Delta = 90^\circ$.

Επιπλέον, η ΓΖ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΓΔΖ, οπότε

$$\Gamma\mathrm{K}\Delta = 90^\circ = \Delta\hat{\Lambda}\Gamma .$$

Επομένως οι ΓΚ και ΔΛ είναι ύψη στο τρίγωνο ΜΔΓ, οπότε το σημείο τομής τους Θ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΜΔΓ. Άρα θα είναι $\mathrm{M\Theta} \perp \Gamma\Delta$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

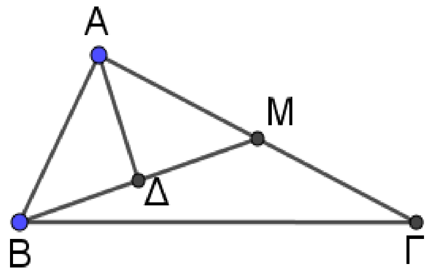
ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής
$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta,$$
όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Πρόβλημα 2
Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Πρόβλημα 3
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\text{ΑΒ} = \alpha\ cm$ και $\text{ΑΓ} = 2\alpha\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.
(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.
(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.



Πρόβλημα 4
Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + 9 = (\beta - 3)^2 \qquad \text{και} \qquad \beta + 9 = (\alpha - 3)^2 ,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + \beta^2$.

Πρόβλημα 2

Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Πρόβλημα 3.

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:

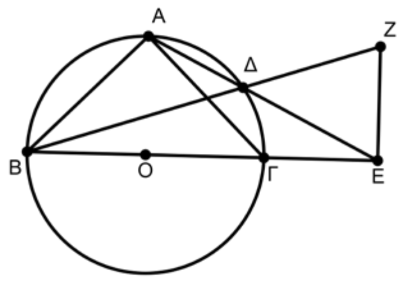
(i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β,

(ii) ο $\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ,

(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z = 90^0$.



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$

(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = EZ$.

Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2,$ να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

Πρόβλημα 2
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω με $x-2y+\omega>0$, $2x-y+\omega>0$ ισχύουν:

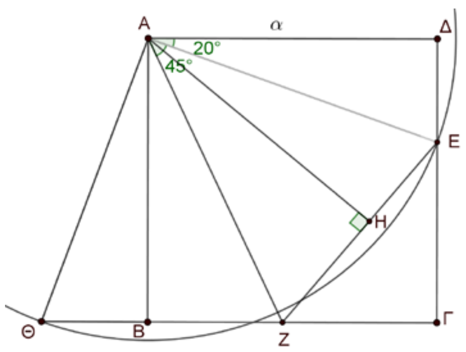
$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1.$

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $2\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E=20^0$ και $E\hat{A}Z=45^0$. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta=ZE$ και να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του α. ***Σημείωση:*** *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1 - x_2| = 7$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x,y) = x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7,\ x,y \in \mathbb{R}.$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x,y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy = 1,\ x,y > 0$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x,y)$ και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

Πρόβλημα 3

Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσον όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.
- Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma, A\Gamma)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\Delta, \Gamma\Delta)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Αν η $\Gamma\Delta$ τέμνει την AB στο Z, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, O, E είναι συνευθειακά και ότι η OZ είναι παράλληλη στην ΔE.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Η ακολουθία πραγματικών αριθμών a_n, $n=1,2,3,....$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των μέσων όρων $M_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, $n=1,2,3,...$ να ικανοποιεί την ισότητα

$$M_{n+1}=\frac{M_n+M_{n+2}}{2},\ \text{για κάθε } n=1,2,3,...$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία a_n, $n=1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Πρόβλημα 2
Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.
- Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P\left(x^2\right)=\left(P(x)\right)^2-2P(x)+2,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $AB<AΓ<BΓ$ και έστω c_1 ο κύκλος που το κέντρο του $Δ$ βρίσκεται επάνω στην $BΓ$ και περνά από τα σημεία B,O. Ο κύκλος c_1 τέμνει την AB στο σημείο E και τον κύκλο c στο σημείο Z . Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος $c_2(O,Δ,E)$ του τριγώνου $OΔE$, τέμνει την AB στο σημείο K , να αποδείξετε ότι τα σημεία $Γ,Δ,Z,O$ βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOK.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2+31}{n^2+7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία $\mathrm{A}x$ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην $\mathrm{A}x$ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BA}=\mathrm{BE}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

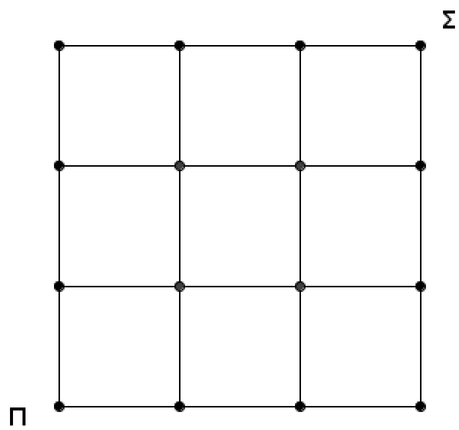
$$\mathrm{A} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600} \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{A} < \mathrm{B}$, **(β)** $\mathrm{A} < \dfrac{1}{5990}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80\kappa + 3\lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με πλευρές $\mathrm{AB} = \alpha$ και $\mathrm{B\Gamma} = \beta$. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE} = \mathrm{AO}$ και την διαγώνιο ΔΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $\mathrm{BZ} = \mathrm{BO}$. Αν το τρίγωνο $\mathrm{EZ\Gamma}$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\beta = \alpha\sqrt{3}$, **(ii)** $\mathrm{AZ} = \mathrm{EO}$, **(iii)** $\mathrm{EO} \perp \mathrm{Z\Delta}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq 27.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να έχει την ίδια απόσταση α από τις ε_1 και ε_3. Τοποθετούμε 5 σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 \in \varepsilon_2$, $\mathrm{M}_4 \in \varepsilon_1$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_3$.

(β) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in \varepsilon_1$, $\mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4 \in \varepsilon_3$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_2$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = 120^\circ$, στο οποίο η διάμεσος ΑΔ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Ε. Οι ευθείες ΒΑ και ΕΓ τέμνονται στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{Z}\Delta \perp \mathrm{BE}$, **(β)** $\mathrm{Z}\Delta = \mathrm{B}\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τους οποίους λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu + 1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m, $m > 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3 \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία***

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB) τέμνει την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι η πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\left\| x-4 \right| - 2x + 8 \right| = ax + 4 .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι θετικοί ακέραιοι m, n, με $m > n$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\mathrm{EK\Pi}\{m,n\} + \mathrm{MK\Delta}\{m,n\} = m + n . \qquad (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι ο n είναι διαιρέτης του m.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $m - n = 10$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (m,n) που είναι λύσεις της εξίσωσης (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία A_1, A_2, διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$:

(α) όταν τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε,

(β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $A = k^4 + 4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. ***Μονάδες 2***

(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

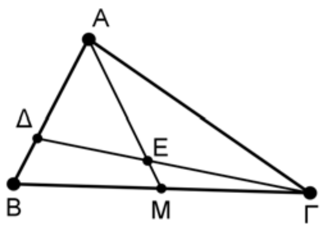
$$K = \frac{\left(2^4 + \frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4 + \frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4 + \frac{1}{4}\right)\cdot \cdots \cdot\left((2n)^4 + \frac{1}{4}\right)}{\left(1^4 + \frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4 + \frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4 + \frac{1}{4}\right)\cdot \cdots \cdot\left((2n-1)^4 + \frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Μονάδες 3

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$. Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο E, τότε ισχύει ότι $A\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma E$. ***Μονάδες 5***



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $A = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $B = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $A + B$ έχει όλα τα ψηφία του περιττά, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Μονάδες 5

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = 1.$$

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Καλή επιτυχία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \parallel AM$ και $BE = \dfrac{AM}{2}$ Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Πρόβλημα 2
Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Πρόβλημα 4.
Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
$32^{η}$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 + (\alpha - 2)x - (\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Πρόβλημα 2
Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m, n) με $m \geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A} = (m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B} = 2n(3m^2 + n^2) + 8$.

Πρόβλημα 3.
Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB} \leq \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(\mathrm{O}, R)$. Η κάθετη από την κορυφή A προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους p, q κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, με $x \neq z$, είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$(x+y)^2+(2-xy)=9,$$
$$(y+z)^2-(3+yz)=4.$$

Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}\right).$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ΑΔ < ΒΓ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

Πρόβλημα 4.

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\Delta E = \frac{\alpha}{3}$ και $AZ = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

Πρόβλημα 2

Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα:

$$\{x(6-y)=9,\ y(6-z)=9,\ z(6-x)=9\}..$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους a, b, p, όπου p πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

Πρόβλημα 4.

Μία παρέα που αποτελείται από n άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες.

(α) Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα
(β) Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από n γύρους
(γ) Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε τουλάχιστον ένα γύρο.

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν ο αριθμός

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2+31}{n^2+7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n.

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{K} = \frac{9n^2+31}{n^2+7} = \frac{9(n^2+7)-32}{n^2+7} = 9 - \frac{32}{n^2+7}.$$

Επειδή ο αριθμός Κ είναι ακέραιος, έπεται ότι ο n^2+7 είναι διαιρέτης του 32 και αφού είναι $n^2+7 \geq 8$, έπεται ότι:

$$n^2+7 \in \{8,16,32\} \Leftrightarrow n^2 \in \{1,9,25\} \Leftrightarrow n \in \{-1,1,-3,3,-5,5\}.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσε κάποιος να λύσει τη δεδομένη ισότητα ως προς n^2 και στη συνέχεια να προσδιορίσει τις κατάλληλες τιμές του Κ για τις οποίες ο n^2 προκύπτει μη αρνητικός ακέραιος.

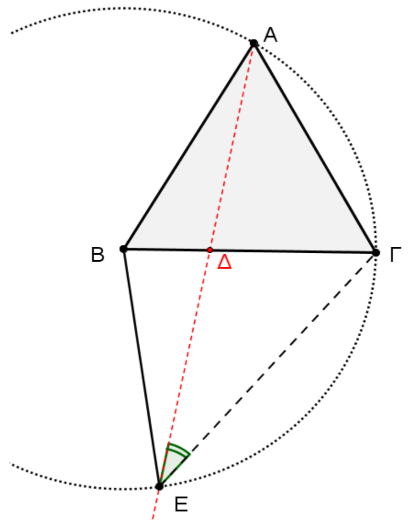
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Από την κορυφή Α ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ημιευθεία $\mathrm{A}x$ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ. Πάνω στην $\mathrm{A}x$ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\mathrm{BA} = \mathrm{BE}$.
Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$.

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{BA} = \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{BE}$, οπότε το σημείο Β είναι κέντρο κύκλου που περνάει από τα σημεία Α, Γ και Ε. Η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $C(\mathrm{B},\mathrm{BA})$ με αντίστοιχη επίκεντρη τη γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 60^\circ$. Άρα είναι:

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 30^0.$$



2ος τρόπος

Από την υπόθεση έχουμε $\mathrm{BA} = \mathrm{BE}$ και ΒΑ = ΒΓ, οπότε θα είναι ΒΓ = ΒΕ, οπότε το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές.

Αν φέρουμε το ύψος του από την κορυφή Β, έστω ΒΖ, $Z \in \Gamma E$, τότε η ΒΖ είναι διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΓΕ. Έστω Κ το σημείο τομής της ΒΖ με την ΑΕ. Τότε τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΒΚΕ είναι ίσα, γιατί έχουν:

ΒΓ = ΒΕ, ΒΚ κοινή πλευρά και $K\hat{B}\Gamma = K\hat{B}E$.

Άρα έχουμε:

$$B\hat{\Gamma}K = B\hat{E}K$$

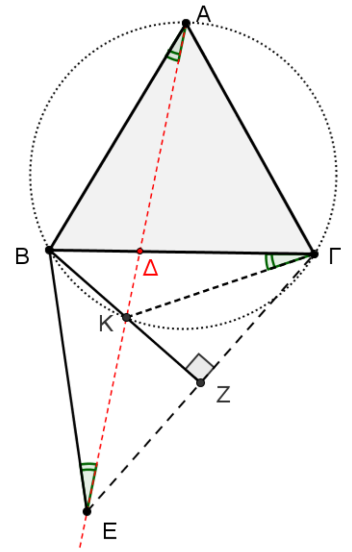
και αφού $B\hat{E}K = B\hat{A}K$ έπεται ότι $B\hat{\Gamma}K = B\hat{A}K$. Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΚΓ είναι εγγράψιμο, οπότε:

$$Z\hat{K}E = B\hat{K}A \text{ (ως κατά κορυφή)}$$

$B\hat{K}A = B\hat{\Gamma}A = 60^\circ$ (από το εγγράψιμο ΑΒΚΓ).

Άρα είναι

$A\hat{E}\Gamma = K\hat{E}Z = 90^\circ - E\hat{K}Z = 90^\circ - 60^\circ = 30^0$.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Θεωρούμε τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{595}{598}\cdot\frac{597}{600} \quad \text{και} \quad B = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{596}{599}\cdot\frac{598}{601}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $A < B$, **(β)** $A < \frac{1}{5990}$.

Λύση

(α) Σε κάθε κλασματικό παράγοντα του Α της μορφής $\frac{2\nu-1}{2\nu+2}$, $\nu = 1,2,\ldots,299$, αντιστοιχεί ένας κλασματικός παράγοντας του Β της μορφής $\frac{2\nu}{2\nu+3}$, $\nu = 1,2,\ldots,299$.

Επειδή ισχύει:

$$\frac{2\nu-1}{2\nu+2} < \frac{2\nu}{2\nu+3} \Leftrightarrow 4\nu^2 + 4\nu - 3 < 4\nu^2 + 4\nu \Leftrightarrow -3 < 0,$$

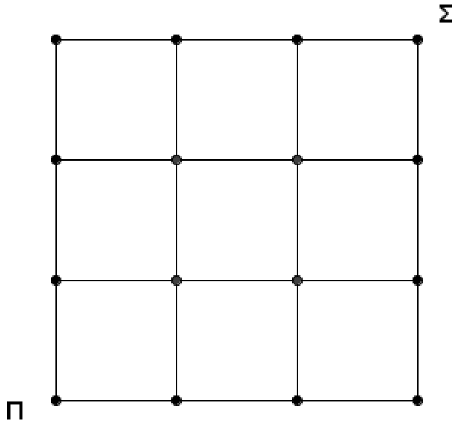
για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, άρα και για $\nu = 1,2,\ldots,299$, με πολλαπλασιασμό των παραπάνω 299 ανισοτήτων με θετικούς όρους κατά μέλη, προκύπτει η ανισότητα $A < B$.

(β) Επειδή είναι $A > 0$, από την ανισότητα $A < B$ με πολλαπλασιασμό των δύο μελών της επί Α, λαμβάνουμε:

$$A^2 < A\cdot B = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{599\cdot 600\cdot 601} < \frac{1}{100\cdot 599^2} = \frac{1}{5990^2} \Rightarrow A < \frac{1}{5990}.$$

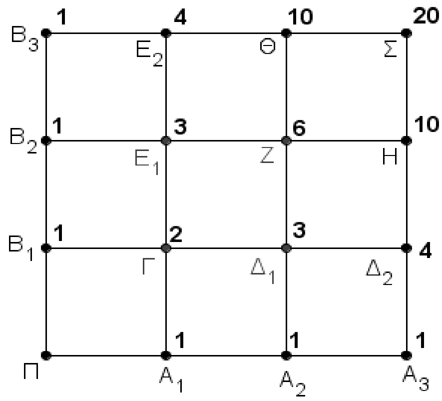
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζει τους δρόμους που συνδέουν τη πλατεία μιας πόλης (σημείο Π) με το σχολείο (σημείο Σ). Στη πλατεία βρίσκονται k μαθητές και ξεκινούν με προορισμό το σχολείο έχοντας τη δυνατότητα να κινούνται (στο σχεδιάγραμμα) μόνο προς τα δεξιά και προς τα άνω. Αν οι μαθητές είναι ελεύθεροι να επιλέξουν οποιαδήποτε διαδρομή (με σκοπό να φτάσουν στο σχολείο), να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του k έτσι, ώστε οπωσδήποτε δύο τουλάχιστον μαθητές να ακολουθήσουν την ίδια διαδρομή.



Λύση

Στο διπλανό σχεδιάγραμμα παρουσιάζονται όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να προσεγγίσει κάποιος μαθητής όλες τις διασταυρώσεις μέχρι να φτάσει στο σχολείο. Προφανώς στις διασταυρώσεις A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2, B_3, μπορεί κάποιος μαθητής να μετακινηθεί με ένα μόνο τρόπο, διότι μπορεί να κινηθεί μόνο προς τα δεξιά ή προς τα άνω.
Στις υπόλοιπες διασταυρώσεις, μπορεί να μετακινηθεί με το άθροισμα των τρόπων που μπορεί να μετακινηθεί προς τις πλησιέστερες διασταυρώσεις που βρίσκονται αριστερά και προς τα κάτω.
Έτσι όλες οι δυνατές διαδρομές από τις οποίες μπορεί να φτάσει κάποιος στο σχολείο, είναι συνολικά 20. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή της περιστεροφωλιάς, δύο τουλάχιστον μαθητές θα ακολουθήσουν οπωσδήποτε την ίδια διαδρομή, εφόσον ο αριθμός των μαθητών είναι $k \geq 21$. Άρα η ελάχιστη τιμή του k είναι 21.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Ενδεικτικές λύσεις
θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80\kappa+3\lambda$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$.

Λύση

Θεωρούμε τους αριθμούς της μορφής $80\kappa+3\lambda$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$, σταθεροποιώντας την τιμή του κ.

Για $\kappa=0$ λαμβάνουμε όλα τα πολλαπλάσια του 3 αρχίζοντας από το 0.

Για $\kappa=1$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=80+3\lambda=3(26+\lambda)+2=3\rho+2,\rho\geq 26,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 26 συνολικά αριθμούς της μορφής $3\rho+2$, για $\rho=0,1,2,...25$.

Για $\kappa=2$ λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=160+3\lambda=3(53+\lambda)+1=3\rho+1,\rho\geq 53,$$

δηλαδή όλους τους αριθμούς που διαιρούμενοι με το 3 δίνουν υπόλοιπο 2, εκτός από τους 53 συνολικά αριθμούς της μορφής $3\rho+1$, για $\rho=0,1,2,...52$.

Για $\kappa\geq 3$ προκύπτουν αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του 240 που έχουμε ήδη εκφράσει στη μορφή $80\kappa+3\lambda$, με $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$. Έτσι συνολικά δεν μπορούμε να εκφράσουμε στη ζητούμενη μορφή τους 79 αριθμούς 2,5,8, ... ,77 και 1,4,7,... , 157, που περιγράψαμε παραπάνω.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=\alpha$ και $\mathrm{B\Gamma}=\beta$. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $\mathrm{AE}=\mathrm{AO}$ και την διαγώνιο ΔΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $\mathrm{BZ}=\mathrm{BO}$. Αν το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\beta=\alpha\sqrt{3}$, **(ii)** $\mathrm{AZ}=\mathrm{EO}$, **(iii)** $\mathrm{EO}\perp\mathrm{Z\Delta}$.

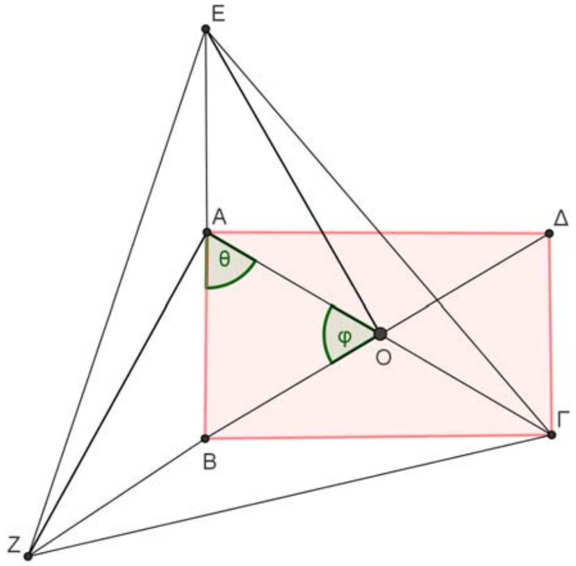
Λύση

Τα τρίγωνα ΕΑΓ και ΖΟΓ έχουν, λόγω των υποθέσεων τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία,

$$\mathrm{AE}=\mathrm{O\Gamma},\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{OZ}\ \text{και}\ \mathrm{E\Gamma}=\mathrm{Z\Gamma},$$

οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. Έτσι προκύπτει η ισότητα

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\Gamma \Leftrightarrow 180^0 - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = 180^0 - \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{O} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B},$$



Σχήμα 1

οπότε το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{BO}$. Όμως ισχύει $\mathrm{AO} = \mathrm{OB}$, ως μισά των ίσων διαγωνίων του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. Άρα το τρίγωνο ABO είναι ισόπλευρο πλευράς $\mathrm{AB} = \alpha$. Το ύψος του τριγώνου ABO έχει μήκος $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, αλλά ισούται και με το μισό της πλευράς $\mathrm{B}\Gamma = \beta$. Επομένως έχουμε

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \beta = \alpha\sqrt{3}.$$

(ii) Τα τρίγωνα AZO και OEB είναι ίσα, αφού έχουν

$$\mathrm{AO} = \mathrm{OB},\ \mathrm{OZ} = \mathrm{EB} \text{ και } \mathrm{Z}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{A} = 60^\circ = \mathrm{E}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{O}\ .$$

Άρα θα έχουν και $\mathrm{AZ} = \mathrm{ZO}$.

(iii) Επειδή είναι $\mathrm{AO} = \mathrm{AE} = \mathrm{AB}$ η διάμεσος του τριγώνου BOE ισούται με το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί. Άρα είναι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{E} = 90^\circ$ και $\mathrm{EO} \perp \mathrm{Z}\Delta$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq 27\,.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3xyz + a^2b(xy+yz+zx) + ab^2(x+y+z) + b^3 \geq 27\,. \qquad (1)$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι οι αριθμοί x, y και z είναι θετικοί με γινόμενο $xyz = 1$, οπότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου λαμβάνουμε

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\,, \qquad (2)$$

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xyyzzx} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3 \qquad (3)$$

Λόγω των (2), (3) και των υποθέσεων $a, b > 0$ και $xyz = 1$, έχουμε

$$a^3xyz + a^2b(xy + yz + zx) + ab^2(x + y + z) + b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

οπότε, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, αρκεί, αντί της (1), να αποδείξουμε την ανισότητα

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq 27 \text{ ή } (a+b)^3 \geq 27,$$

που ισχύει, αφού δίνεται ότι $a + b = 3$.

Η ισότητα αληθεύει για x, y και z για τα οποία οι δύο ανισότητες (2) και (3) ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή για $x = y = z = 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ε_2 να έχει την ίδια απόσταση α από τις ε_1 και ε_3. Τοποθετούμε 5 σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4$ και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

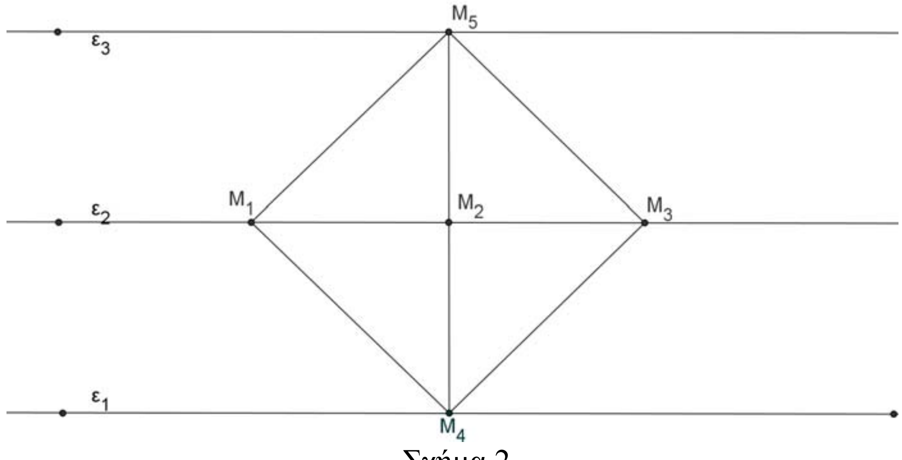
(α) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3 \in \varepsilon_2$, $\mathrm{M}_4 \in \varepsilon_1$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_3$.

(β) $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2 \in \varepsilon_1$, $\mathrm{M}_3, \mathrm{M}_4 \in \varepsilon_3$ και $\mathrm{M}_5 \in \varepsilon_2$.

Λύση

Πρώτα από όλα σημειώνουμε ότι από 5 σημεία στα οποία δεν υπάρχουν τρία που να είναι συνευθειακά, σχηματίζονται ακριβώς $\binom{5}{3} = 10$ τρίγωνα. Στη συνέχεια για κάθε τριάδα συνευθειακών σημείων χάνεται και ένα τρίγωνο.

(α). Τρία από τα δεδομένα σημεία, έστω τα $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$, ανήκουν στην ευθεία ε_2.



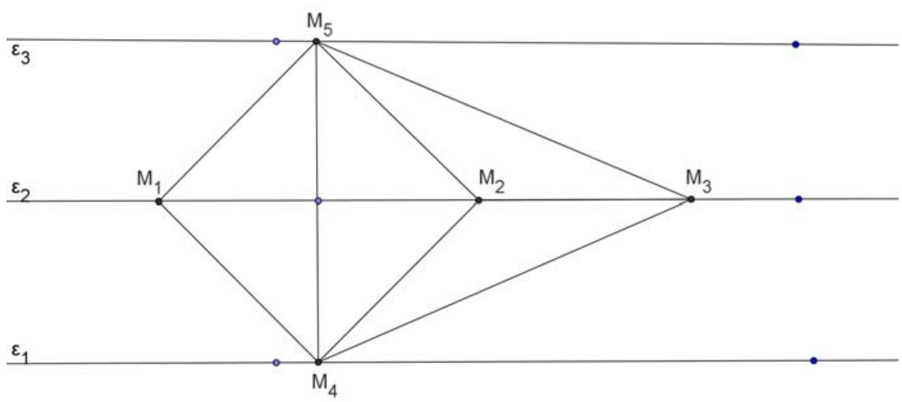
Σχήμα 2

Τότε αυτά δεν σχηματίζουν τρίγωνο, ενώ τα άλλα δύο σημεία πρέπει να τοποθετηθούν από ένα σε καθεμία από τις άλλες δύο ευθείες. Για το σχηματισμό ισοσκελών τριγώνων πρέπει τα σημεία αυτά να ανήκουν σε κάποια από τις μεσοκάθετες των ευθύγραμμων τμημάτων M_1M_2, M_2M_3, M_1M_3. Αν το σημείο M_2 είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και τα M_4, M_5 ανήκουν στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_3 και είναι $M_1M_2 \neq M_2M_4 = \alpha$, τότε σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα $M_1M_3M_4$ και $M_1M_3M_5$.

Παρατηρούμε όμως ότι, αν θεωρήσουμε στη προηγούμενη περίπτωση $M_1M_2 = M_2M_4 = M_2M_5 = \alpha$, που είναι δυνατόν, αφού οι παράλληλες ευθείες ισαπέχουν, τότε και τα τρίγωνα $M_1M_2M_4$ και $M_2M_3M_4$ καθώς και τα τρίγωνα $M_1M_2M_5$ και $M_2M_3M_5$ είναι ισοσκελή, οπότε έχουμε άλλα 4 ισοσκελή τρίγωνα. Επειδή και η ευθεία ε_2 είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος M_4M_5 και τα τρίγωνα $M_1M_4M_5$ και $M_3M_4M_5$ είναι ισοσκελή. Άρα έχουμε συνολικά κατασκευάσει **8 ισοσκελή τρίγωνα** με κορυφές από τα πέντε σημεία που είναι και ο μέγιστος δυνατός αριθμός στη περίπτωση αυτή, δηλαδή όλα τα σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι ισοσκελή.

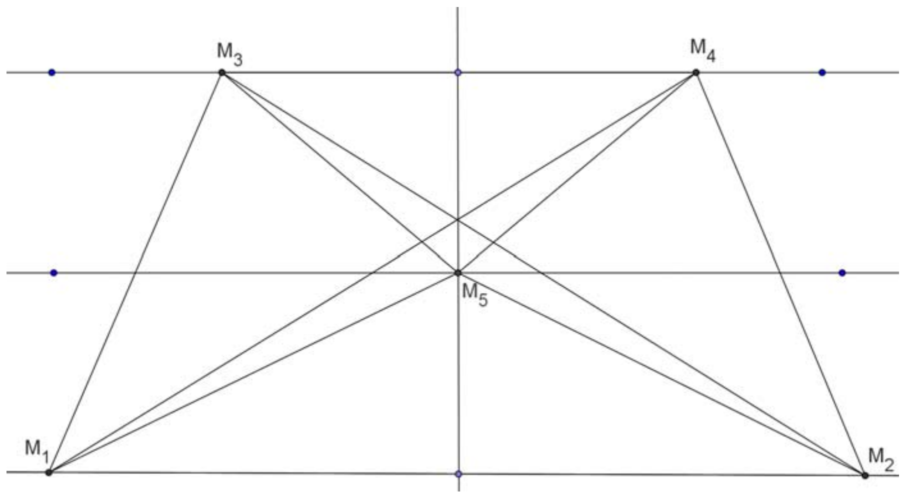
Στην περίπτωση που θεωρήσουμε τα $M_4 \in \varepsilon_1$, $M_5 \in \varepsilon_3$, έτσι ώστε η M_4M_5 να είναι μεσοκάθετη του M_1M_2, τότε το τετράπλευρο $M_1M_4M_2M_5$ είναι ρόμβος (τετράγωνο, αν $M_1M_2 = 2\alpha$) και από τα τέσσερα σημεία προκύπτουν 4 ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_1M_2M_4, M_1M_2M_5$, $M_1M_4M_5$ και $M_2M_4M_5$. Το σημείο M_3 μπορεί να επιλεγεί πάνω στην ευθεία ε_2 έτσι ώστε $M_2M_3 = M_3M_4 = M_2M_5$, οπότε πλέον σχηματίζονται άλλα τρία ισοσκελή τρίγωνα, τα $M_2M_3M_4, M_2M_3M_5$ και $M_3M_4M_5$. Έτσι έχουμε συνολικά κατασκευάσει **7 ισοσκελή τρίγωνα**. Αν είναι $M_2M_3 \neq M_2M_4 = M_2M_5$, τότε θα έχουμε συνολικά **5 ισοσκελή τρίγωνα**.

Άρα ο μέγιστος αριθμός ισοσκελών τριγώνων στη περίπτωση αυτή είναι 8.



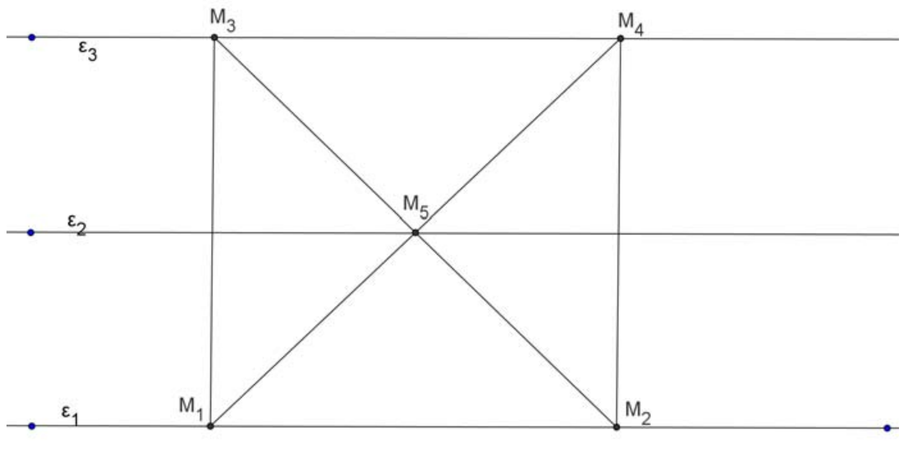
Σχήμα 3

(β). Σε τυχαία τοποθέτηση των σημείων M_1, M_2 πάνω στην ευθεία ε_1 και των M_3, M_4 πάνω στην ευθεία ε_3 το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι τραπέζιο, οπότε από τα 4 αυτά σημεία σχηματίζονται ένα ή δύο ισοσκελή τρίγωνα, μόνο στην περίπτωση που μία από τις βάσεις ισούται με τη μία ή με τις δύο μη παράλληλες πλευρές, αντίστοιχα.



Σχήμα 4

Το σημείο M_5 πρέπει να τοποθετηθεί πάνω στην ευθεία ε_2, αλλά και στη μεσοκάθετη κάποιου από τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία M_1, M_2, M_3 και M_4. Στην περίπτωση ισοσκελούς τραπεζίου $M_1M_2M_4M_3$ οι δύο βάσεις M_1M_2 και M_3M_4 έχουν κοινή μεσοκάθετη δ, οπότε για $M_5 = \delta \cap \varepsilon_2$ προκύπτουν δύο ισοσκελή τρίγωνα. Συνολικά στην τοποθέτηση αυτή σχηματίζονται το **πολύ 4 ισοσκελή τρίγωνα**.



Σχήμα 5

Στην ίδια περίπτωση, αν πάρουμε τα τέσσερα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4, πάνω στις δύο ευθείες ε_1 και ε_3, έτσι ώστε να σχηματίζουν τετράγωνο, τότε αυτά σχηματίζουν 4 ισοσκελή τρίγωνα. Στη συνέχεια, αν πάρουμε το σημείο M_5 πάνω στην ευθεία ε_2, έτσι ώστε να συμπίπτει με το κέντρο του τετραγώνου που ορίζουν τα τέσσερα πρώτα σημεία, τότε με μία κορυφή το σημείο M_5 σχηματίζονται άλλα τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα Έτσι έχουμε συνολικά **8 ισοσκελή τρίγωνα**.

Στην περίπτωση που τα 4 πρώτα σημεία σχηματίζουν παραλληλόγραμμο, τότε δεν προκύπτουν ισοσκελή τρίγωνα, εκτός εάν το τετράπλευρο $M_1M_2M_4M_3$ είναι ρόμβος, οπότε έχουμε συνολικά **4 ή 5 το πολύ ισοσκελή τρίγωνα**, ανάλογα με τη θέση του σημείου M_5 πάνω στην ευθεία ε_2.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

$28^{η}$ Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

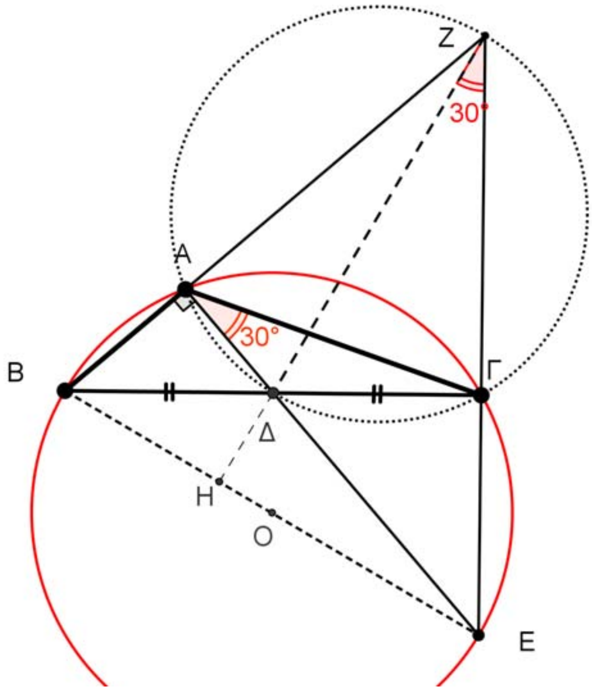
Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $Β\hat{Α}Γ = 120^\circ$. Αν $Δ$ είναι το μέσον της πλευράς $ΒΓ$, δίνεται ότι η ευθεία $ΑΔ$ είναι κάθετη προς την πλευρά $ΑΒ$ και τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$ στο σημείο $Ε$. Οι ευθείες $ΒΑ$ και $ΕΓ$ τέμνονται στο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $ΖΔ \perp ΒΕ$, **(β)** $ΖΔ = ΒΓ$.

Λύση

(α) Επειδή είναι $Β\hat{Α}Ε = 90^\circ$ η ΒΕ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Επομένως θα είναι και $Β\hat{Γ}Ε = 90^\circ$. Έτσι στο τρίγωνο ΖΒΕ τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΑ και ΒΓ είναι ύψη του τριγώνου που τέμνονται στο σημείο Δ.

Επομένως η ευθεία ΖΔ είναι η ευθεία του τρίτου ύψους του τριγώνου ΖΒΕ, δηλαδή είναι $ΖΔ \perp ΒΕ$.



Σχήμα 1

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι: $Ζ\hat{Β}Η = 90^\circ$. Πράγματι, έχουμε

$$Ζ\hat{Β}Η = 180^\circ - \left(Η\hat{Β}Ζ + Β\hat{Ζ}Η\right) \qquad (1)$$

Όμως έχουμε

$$Η\hat{Β}Ζ = Ε\hat{Β}Γ + Γ\hat{Β}Α = Ε\hat{Α}Γ + Γ\hat{Β}Α = 120^\circ - 90^\circ + Γ\hat{Β}Α = 30^\circ + \hat{Β}. \qquad (2)$$

Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΔΓΖ (γιατί $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ$) έχουμε ότι:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Delta = \hat{\Gamma} \tag{3}$$

Λόγω των (2) και (3) η σχέση (1) γίνεται:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = 180^\circ - \left(30^\circ + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma}\right) = 150^\circ - \left(180^\circ - 120^\circ\right) = 90^\circ .$$

(β) Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι εγγράψιμο, αφού $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} + \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Άρα θα έχουμε $\Delta\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma - \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Επομένως στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma\mathrm{Z}$ η υποτείνουσα ΖΔ θα είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΔΓ, δηλαδή $\mathrm{Z}\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma = \mathrm{B}\Gamma$, αφού Δ μέσο της πλευράς ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τις οποίες λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Λύση

Θεωρούμε τη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών :

$$\begin{aligned} x - y &= 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta - 1000\delta - 100\gamma - 10\beta - \alpha \\ &= 1000(\alpha - \delta) + 100(\beta - \gamma) + 10(\gamma - \beta) + \delta - \alpha \\ &= 999(\alpha - \delta) + 90(\beta - \gamma) \\ &= 9\left(111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma)\right). \end{aligned}$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A} = 111(\alpha - \delta) + 10(\beta - \gamma).$$

Οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί μονοψήφιοι ακέραιοι (διαφορετικοί μεταξύ τους). Εφόσον $x > y$, θα ισχύει $\alpha > \delta$.

Η παράσταση Α γίνεται μέγιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν μέγιστοι και επί πλέον $\alpha - \delta > \beta - \gamma$. Η διαφορά $\alpha - \delta$ γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 9$ και $\delta = 1$. Η διαφορά $\beta - \gamma$ γίνεται μέγιστη όταν $\beta = 8$ και $\gamma = 2$.

Άρα $x = 9821$ και $y = 1289$ είναι οι ζητούμενοι ακέραιοι οι οποίοι δημιουργούν τη μεγαλύτερη διαφορά $x - y = 9821 - 1289 = 8532$.

Η παράσταση Α γίνεται ελάχιστη, όταν οι αριθμοί $\alpha - \delta$ και $\beta - \gamma$ γίνουν ελάχιστοι.

Η ελάχιστη τιμή της διαφοράς $\alpha - \delta$ είναι το 1. Άρα οι δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ) είναι:

$$(9,8), (8,7), (7,6)\ (6,5)\ (5,4)\ (4,3)\ (3,2) \text{ και } (2,1).$$

Για όλες τις παραπάνω δυνατές τιμές του ζεύγους (α, δ), η τιμή της παράστασης A γίνεται:

$$\mathrm{A} = 111 + 10(\beta - \gamma).$$

Η ελάχιστη τιμή τώρα της διαφοράς $\beta - \gamma$ είναι το -8 που δημιουργείται για $\beta = 1$ και $\gamma = 9$.

Απορρίπτοντας τέλος τα ζεύγη (9,8) και (2,1) (διότι τα ψηφία του τετραψήφιου αριθμού είναι διαφορετικά μεταξύ τους), καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα δυνατών τιμών των αριθμών x, y καθώς και την ελάχιστη διαφορά.

3192	2913	279
4193	3914	279
5194	4915	279
6195	5916	279
7196	6917	279
8197	7918	279

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν ο αριθμός $3\nu+1$, όπου ν ακέραιος, είναι πολλαπλάσιο του 7, να βρείτε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης:

(α) του ν με το 7,

(β) του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m.

Λύση

(α) Έστω $3\nu+1=7\kappa$, όπου ν,κ ακέραιοι. Ο ακέραιος ν έχει τη μορφή $\nu=7\rho+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$ και ρ ακέραιος. Τότε έχουμε:

$$3(7\rho+\upsilon)+1=7\kappa \Leftrightarrow 21\rho+3\upsilon+1=7\kappa \Leftrightarrow 3\upsilon+1=\text{πολλαπλάσιο του } 7,$$

οπότε η μόνη δυνατή τιμή για το υ είναι το 2. Έτσι έχουμε $\nu=7\rho+2$, όπου ρ ακέραιος, οπότε το μοναδικό δυνατό υπόλοιπο της διαίρεσης του ν με το 7 είναι το 2.

(β) Έχουμε

$$\nu^m=(7\rho+2)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(7\rho)^{m-i}2^i=\pi o\lambda.7+2^m.$$

Επομένως, αρκεί να βρούμε τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του 2^m με το 7.

Αν υποθέσουμε ότι $m=3\sigma+\upsilon$, όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$, τότε λαμβάνουμε:

$$2^m=2^{3\sigma+\upsilon}=8^\sigma\cdot 2^\upsilon=(7+1)^\sigma\cdot 2^\upsilon=(\pi o\lambda.7+1)\cdot 2^\upsilon=\pi o\lambda.7+2^\upsilon,$$

όπου $\upsilon\in\{0,1,2\}$. Άρα τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του ν^m με το 7, για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου m είναι τα $2^0=1$, $2^1=2$ και $2^2=4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Αν x, y, z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+3\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z έχουν άθροισμα 12, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x+y+z}{4}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}. \qquad (1)$$

Επειδή οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z είναι θετικοί, από την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{4}}=\sqrt{x}\,, \tag{2}$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{4}}=\sqrt{y}\,, \tag{3}$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{4}}=\sqrt{z}\ . \tag{4}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3) και (4) προκύπτει η ανισότητα (1).

Η ισότητα ισχύει, όταν οι ανισότητες (2), (3) και (4) αληθεύουν και οι τρεις ως ισότητες., δηλαδή όταν

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{4},\ \frac{y}{z}=\frac{z}{4},\ \frac{z}{x}=\frac{x}{4} \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}\right)^2=\frac{y^4}{4^3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^3}\left(\frac{z^2}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z=\frac{1}{4^7}z^8$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{y^2}{4},\ y=\frac{z^2}{4},\ z^7=4^7 \Leftrightarrow x=y=z=4.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB} < \mathrm{A\Gamma} < \mathrm{B\Gamma}$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα AB) τέμνει την πλευρά $\mathrm{B\Gamma}$ στο σημείο Δ και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ στο σημείο E. Να αποδείξετε ότι η πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

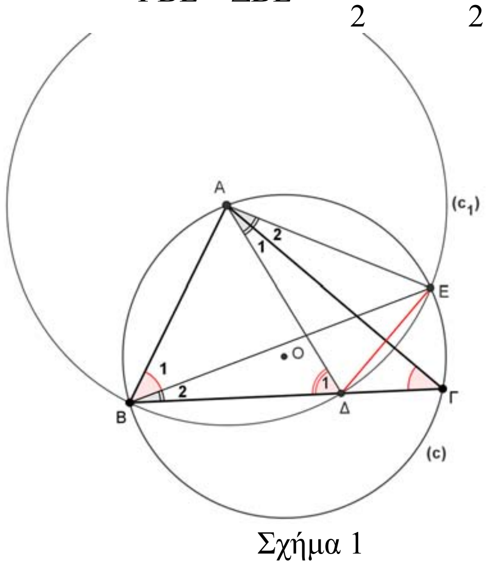
Λύση (1ος τρόπος)

Οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(\mathrm{O}, R)$ (σχήμα 1) και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{E}}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή έχουμε

$$\hat{\mathrm{A}}_2 = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}. \qquad (1)$$

Επίσης, η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ που είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $c_1(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ και βάνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta\mathrm{E}}$, ενώ η γωνία $\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη της γωνίας $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$. Επομένως έχουμε

$$\Gamma\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \frac{\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}}{2} = \frac{\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{A}}_2}{2}. \qquad (2)$$



Σχήμα 1

Από τις σχέσεις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\hat{A}_2 = \frac{\hat{A}_1 + \hat{A}_2}{2}, \qquad (3)$$

από την οποία προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, δηλαδή η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}E$.

2^{ος} τρόπος

Οι χορδές ΑΒ και ΑΕ του κύκλου *(c)* είναι ίσες μεταξύ τους, ως ακτίνες του κύκλου *(c_1)*, οπότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = A\hat{E}B. \qquad (3)$$

Όμως οι γωνίες $A\hat{E}B$ και $\hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε θα είναι ίσες, δηλαδή

$$A\hat{E}B = \hat{\Gamma}. \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4), έχουμε

$$\hat{B}_1 = A\hat{B}E = \hat{\Gamma} \qquad (5)$$

και επομένως προκύπτει ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \qquad (6)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Delta$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = A\hat{\Delta}B = \hat{B}$ και επειδή η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου $A\Delta\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι:

$$\hat{B} = \hat{\Delta}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B} - \hat{\Gamma}. \qquad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_2. \qquad (8)$$

Επιπλέον, οι γωνίες $\hat{B}_2$ και $\Gamma\hat{A}E = \hat{A}_2$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma E}$, οπότε είναι ίσες, δηλαδή

$$\hat{A}_2 = \Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{B}E = \hat{B}_2. \qquad (9)$$

Από τις σχέσεις (7), (8) και (9) λαμβάνουμε την ισότητα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B} - \hat{\Gamma}$, από την οποία προκύπτει ότι η πλευρά ΑΓ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{A}E$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\left||x-4| - 2x + 8\right| = ax + 4.$$

Λύση

Με σκοπό την απαλλαγή από την απόλυτη τιμή του $x-4$, θεωρούμε τις περιπτώσεις:

Ι. $x \geq 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = x-4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$|x-4-2x+8| = ax+4 \Leftrightarrow |-(x-4)| = ax+4 \Leftrightarrow |x-4| = ax+4$$

$$\Leftrightarrow x-4 = ax+4 \Leftrightarrow (1-a)x = 8,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a = 1$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.

- Για $a \neq 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{8}{1-a}$, μόνον όταν
  $$\frac{8}{1-a} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2}{1-a} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1+a}{1-a} \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1) \leq 0, a \neq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a < 1.$$
  Για $a < -1$ ή $a \geq 1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μεγαλύτερη ή ίση του 4.

II. $x < 4$. Τότε έχουμε $|x-4| = -x+4$ και η εξίσωση γίνεται:

$$|-x+4-2x+8| = ax+4 \Leftrightarrow |-3(x-4)| = ax+4 \Leftrightarrow |3(x-4)| = ax+4$$
$$\Leftrightarrow -3x+12 = ax+4 \Leftrightarrow (a+3)x = 8,$$

οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $a = -3$ η εξίσωση γίνεται: $0 \cdot x = 8$ και είναι αδύνατη.
- Για $a \neq -3$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x = \dfrac{8}{a+3}$, μόνον όταν
  $$\frac{8}{a+3} < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{a+3} < 1 \Leftrightarrow \frac{-a-1}{a+3} < 0$$
  $$\Leftrightarrow (a+3)(a+1) > 0,\ a \neq -3 \Leftrightarrow a < -3 \text{ ή } a > -1.$$
  Για $-3 < a \leq -1$ η εξίσωση δεν έχει λύση μικρότερη του 4.

Συνοψίζοντας, όλα τα παραπάνω έχουμε ότι:

- Για $a < -3$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \dfrac{8}{a+3}$.
- Για $-3 \leq a < -1$, η εξίσωση δεν έχει λύση.
- Για $a = -1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \dfrac{8}{1-a}$.
- Για $-1 < a < 1$, η εξίσωση έχει δύο λύσεις $x = \dfrac{8}{1-a}$ και $x = \dfrac{8}{a+3}$.
- Για $a \geq 1$, η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \dfrac{8}{a+3}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Οι θετικοί ακέραιοι m, n, με $m > n$, ικανοποιούν την εξίσωση

$$\text{ΕΚΠ}\{m,n\} + \text{ΜΚΔ}\{m,n\} = m+n. \qquad (*)$$

(α) Να αποδείξετε ότι ο n είναι διαιρέτης του m.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $m - n = 10$, να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (m,n) που είναι λύσεις της εξίσωσης (*).

Λύση

(α) Έστω ότι $\text{ΜΚΔ}\{m,n\} = d$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a,b τέτοιοι ώστε:

$$m = ad,\ n = bd \text{ και } \text{ΜΚΔ}\{a,b\} = 1.$$

Τότε θα ισχύει ότι $\text{ΕΚΠ}\{m,n\} = \dfrac{mn}{d} = \dfrac{adbd}{d} = abd$ και η εξίσωση (*) γίνεται:

$$abd + d = ad + bd \Leftrightarrow d(ab+1-a-b) = 0,$$

από την οποία, αφού $d \geq 1$, προκύπτει ότι:

$$ab+1-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ ή } b=1.$$

- Αν είναι $a=1$, τότε $m=d$ και $n=bd \geq d=m$, άτοπο.
- Αν είναι $b=1$, τότε $n=d$ και $m=ad$, οπότε προκύπτει ότι $n \mid m$.

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α), έχουμε $n=d$ και $m=ad$, με $a>1$, αφού $m>n$, οπότε

$$m-n=10 \Leftrightarrow ad-d=10 \Leftrightarrow (a-1)d=10.$$

Επειδή οι αριθμοί $a-1, d$ είναι θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι

$$(a-1,d) \in \{(1,10),(2,5),(5,2),(10,1)\} \Leftrightarrow (a,d) \in \{(2,10),(3,5),(6,2),(11,1)\},$$

οπότε λαμβάνουμε τα ζευγάρια

$$(m,n)=(20,10) \text{ ή } (15,5) \text{ ή } (12,2) \text{ ή } (11,1).$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Πάνω σε επίπεδο Π δίνεται ευθεία ε και πάνω στην ε δίνονται δύο σημεία A_1, A_2, διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε ακόμη και δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ του επιπέδου Π που δεν ανήκουν στην ευθεία ε. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, ώστε να σχηματίζεται ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$:

(α) όταν τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε,

(β) όταν τα σημεία A_3, A_4 ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

Να δώσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις και σε κάθε περίπτωση να εξηγήσετε πως μπορούν να προσδιοριστούν γεωμετρικά τα σημεία A_3 και A_4.

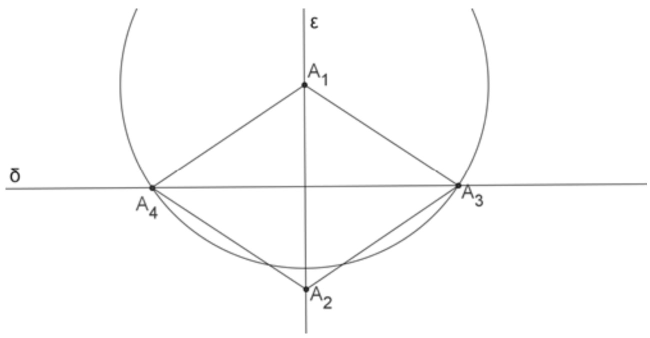
Λύση

Πρώτα παρατηρούμε ότι από τέσσερα σημεία που ανά τρία είναι μη συνευθειακά, ορίζονται συνολικά $\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!\cdot 1!}=4$ διαφορετικά τρίγωνα. Επομένως, ο μέγιστος δυνατός αριθμός ισοσκελών τριγώνων που μπορεί να οριστούν με κορυφές τρία από τα από τα τέσσερα σημεία είναι 4. Στη συνέχεια, για τις περιπτώσεις (α) και (β), θα προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε τα σημεία A_3 και A_4 σε τέτοιες θέσεις, έτσι ώστε να ορίζονται τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα από τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4. Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις σε σχέση με τη βάση και τις ίσες πλευρές. Στη πρώτη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι βάση, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ είναι μία από τις ίσες πλευρές. Έχοντας στο νου μας αυτές τις δύο δυνατότητες, προσπαθούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε ισοσκελή τρίγωνα με κορυφές τρία από τα τέσσερα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ και A_4.

(α) *Τα σημεία $\mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε.*

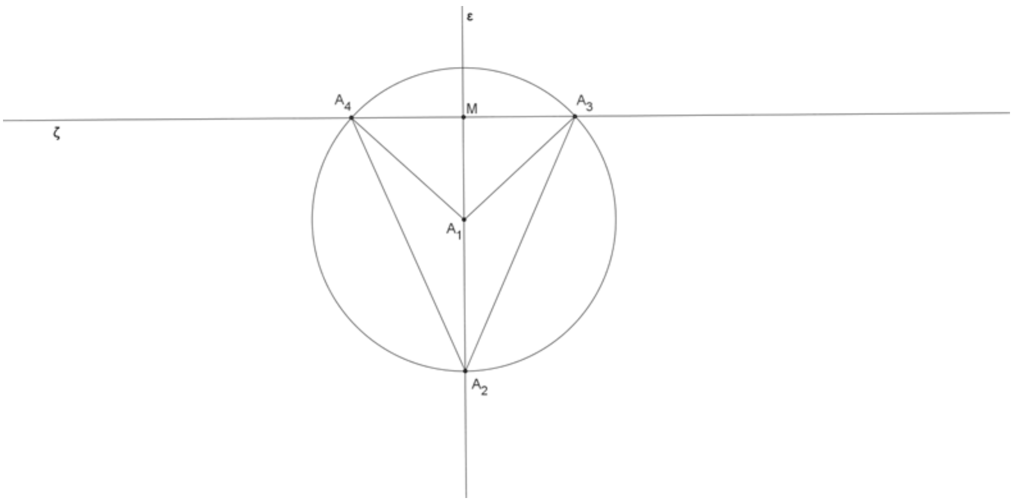
Για τον ορισμό ισοσκελούς τριγώνου με δύο κορυφές A_1 και A_2 υπάρχουν οι παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Η πρώτη περίπτωση είναι τα σημεία A_3 και A_4 να ανήκουν στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος A_1A_2 και σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ε. Τότε ορίζονται τα ισοσκελή τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $A_1A_2A_4$. Αν επιπλέον το σημείο A_4 είναι η τομή της μεσοκάθετης δ με τον κύκλο $c(A_1, A_1A_3)$, τότε θα είναι $A_1A_3 = A_1A_4$, αλλά και $A_2A_3 = A_2A_4$ (λόγω συμμετρίας), οπότε και τα τρίγωνα $A_1A_3A_4$ και $A_2A_3A_4$ είναι ισοσκελή, σχήμα 2.



Σχήμα 2

- Η δεύτερη περίπτωση είναι γενίκευση της πρώτης. Τα σημεία A_3 και A_4 λαμβάνονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, πάνω σε τυχούσα ευθεία ζ κάθετη προς την ευθεία ε, όχι στα σημεία A_1, A_2, αλλά και πάνω στον κύκλο $c(A_1, A_1A_2)$, ώστε να εξασφαλίζονται οι ισότητες $A_1A_2 = A_1A_3 = A_1A_4$ και $A_1A_4 = A_1A_3$, $A_2A_4 = A_2A_3$, αφού η ευθεία ε είναι μεσοκάθετη της χορδής A_3A_4, σχήμα 3.



Σχήμα 3

- Στη περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι η A_1A_2 είναι βάση στο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ και μία από τις ίσες πλευρές στο τρίγωνο $A_1A_2A_4$, σχήμα 4. Τα ισοσκελή τρίγωνα $A_1A_2A_3$ και $A_1A_4A_3$, αλλά και τα $A_1A_2A_4$ και $A_2A_4A_3$ είναι ίσα, γιατί έχουν τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, $A_4A_1 = A_1A_2 = A_3A_2$ και $A_4A_3 = A_4A_2 = A_1A_2$. Άρα έχουμε και τις ισότητες των γωνιών:

$$\theta = \omega \text{ και } \varphi = x . \qquad (1)$$

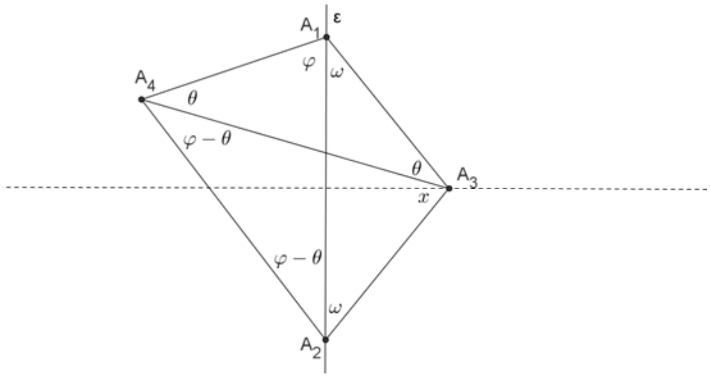
Από το τρίγωνο $A_1A_3A_4$ προκύπτει η ισότητα:

$$\varphi+\omega+2\theta=180^0 \text{ ή } \varphi+3\theta=180^0, \qquad (2)$$

ενώ από το τρίγωνο $A_2A_3A_4$ προκύπτει η ισότητα

$$2(\varphi-\theta)+x+\omega=180^0 \Rightarrow 3\varphi-\theta=180^0 . \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) λαμβάνουμε: $\varphi=72^0$ και $\theta=36^0$.

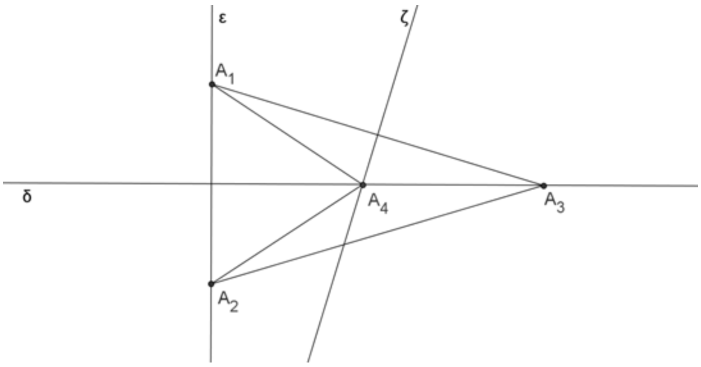


Σχήμα 4

(β) *Τα σημεία* A_3, A_4 *ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία* ε.

Έχουμε τρεις δυνατές περιπτώσεις:

- Το σημείο A_3 ανήκει στη μεσοκάθετη δ του ευθύγραμμου τμήματος A_1A_2 και το σημείο A_4 λαμβάνεται ως η τομή των μεσοκάθετων δ και ζ των ευθύγραμμων τμημάτων A_1A_2 και A_1A_3, αντίστοιχα. Τότε και τα τέσσερα τρίγωνα που ορίζονται από τα σημεία A_1, A_2, A_3 και A_4 είναι ισοσκελή.



Σχήμα 5

Για να ανήκει το σημείο A_4 στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο A_3 θα πρέπει το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ να είναι οξυγώνιο, σχήμα 5.

- Τα σημεία A_3 και A_4 λαμβάνονται έτσι ώστε το τετράπλευρο $A_1A_2A_3A_4$ να είναι ρόμβος (ή τετράγωνο), δηλαδή πρέπει για το τετράγωνο να ισχύουν

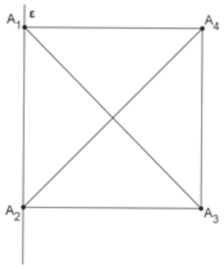
$$A_1A_2=A_1A_4=A_2A_3 \text{ και } A_1A_2\perp A_1A_4,\ A_1A_2\perp A_2A_3, \text{ σχήμα 6,}$$

ενώ για το ρόμβο πρέπει να ισχύουν

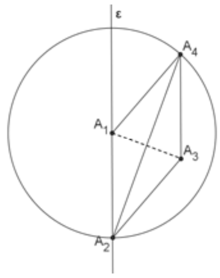
$$A_1A_2=A_1A_4=A_2A_3=A_2A_4, \text{ σχήμα 7.}$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε πρώτα το σημείο A_4 πάνω στο κύκλο $c(A_1, A_1A_2)$ έτσι ώστε $A_1A_2=A_1A_4$ και στη συνέχεια θεωρούμε το σημείο A_3 συμμετρικό του A_1 ως προς την ευθεία A_2A_4.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να θεωρηθούν τα σημεία A_3 και A_4 στο άλλο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ε.

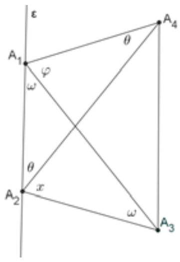


Σχήμα 6

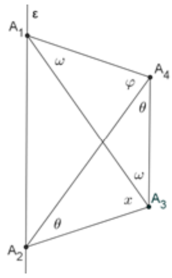


Σχήμα 7

- Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει τα σημεία A_3 και A_4 σε ένα από τα δύο ημιεπίπεδα, έτσι ώστε να σχηματίζονται από αυτά τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, σχήμα 8 και 9. Εργαζόμενοι όπως στην τρίτη υποπερίπτωση του (α), λαμβάνουμε τις ισότητες $\omega = \theta = 36^0$ και $\varphi = x = 72^0$.



Σχήμα 8

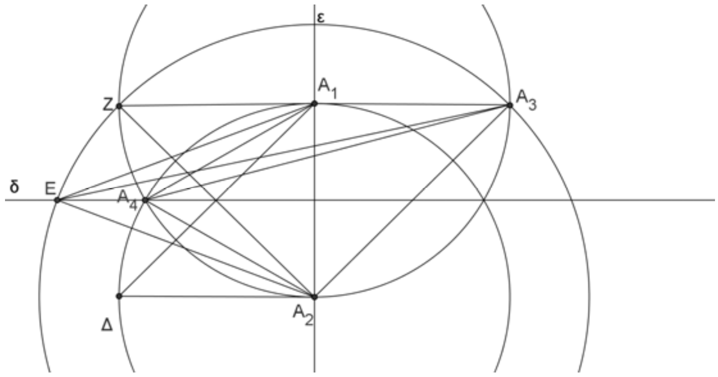


Σχήμα 9

Παρατηρήσεις

1. Σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις έχουμε ισοσκελές τραπέζιο $A_1A_2A_3A_4$ του οποίου οι δύο ίσες πλευρές ισούνται με τη μικρή βάση του. Οι τρεις ίσες πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου $A_1A_2A_3A_4$ αντιστοιχούν σε πλευρές κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο που περνάει από τρεις κορυφές του, σχήματα 9 και 10. Αντίστοιχη παρατήρηση μπορεί να γίνει για την τρίτη υποπερίπτωση του (α), σχήμα 4.

2. Στην περίπτωση (α) θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το σημείο A_3 σε τέτοια θέση, ώστε να ισχύουν: $A_1A_3 = A_1A_2$ και $A_1A_3 \perp A_1A_2$, οπότε το τρίγωνο $A_1A_2A_3$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, σχήμα 10. Στη συνέχεια το σημείο A_4 πρέπει να τοποθετηθεί σε διαφορετικό ημιεπίπεδο σε σχέση με το A_3. Οι πιθανές θέσεις του φαίνονται στο σχήμα 10, αλλά στις τρεις περιπτώσεις ορίζονται τρία ακριβώς ισοσκελή τρίγωνα και στην τέταρτη με $A_4 \equiv \Delta$ μόνο δύο. Επομένως σε αυτή την περίπτωση δεν επιτυγχάνεται ο ορισμός του μέγιστου δυνατού αριθμού ισοσκελών τριγώνων.



Σχήμα 10

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Θέματα μικρών τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

(α) Να γράψετε την παράσταση $\mathrm{A}=k^4+4$, όπου k θετικός ακέραιος, ως γινόμενο δύο παραγόντων που ο καθένας τους να είναι άθροισμα δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.
(β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K}=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n)^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left((2n-1)^4+\frac{1}{4}\right)}$$

και να τη γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων δύο διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Λύση
(α) Έχουμε

$$k^4+4=\left(k^2\right)^2+4k^2+2^2-4k^2=\left(k^2+2\right)^2-(2k)^2$$
$$=\left(k^2+2-2k\right)\left(k^2+2+2k\right)=\left[(k-1)^2+1^2\right]\left[(k+1)^2+1^2\right].$$

(β) Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος επί $\left(2^4\right)^n$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{K}=\frac{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n)^4+\frac{1}{4}\right]}{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdots\left[(2n-1)^4+\frac{1}{4}\right]}$$
$$=\frac{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\cdots\left[(4n)^4+4\right]}{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\cdots\left[(4n-2)^4+4\right]}$$
$$=\frac{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]\left[(4n+1)^2+1\right]}{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\left(11^2+1\right)\left(13^2+1\right)\cdots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]}$$
$$=\frac{(4n+1)^2+1}{1^2+1}=8n^2+4n+1=4n^2+4n^2+4n+1=(2n)^2+(2n+1)^2.$$

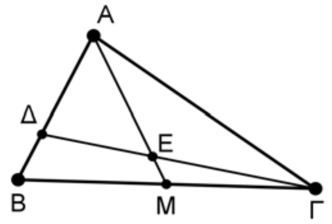
Παρατήρηση. Για το ερώτημα (β) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την παραγοντοποίηση

$$k^4+\frac{1}{4}=\left(k^2+\frac{1}{2}\right)^2-k^2=\left(k^2+\frac{1}{2}-k\right)\left(k^2+\frac{1}{2}+k\right)=\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right].$$

Για την απλοποίηση του κλάσματος εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

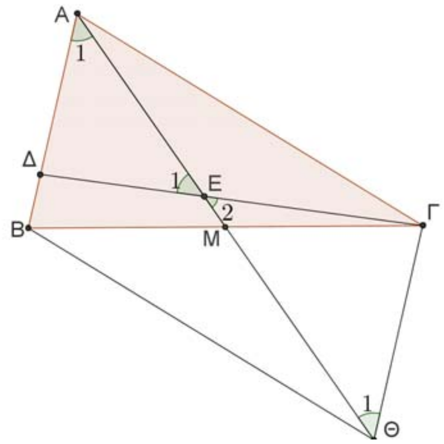
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $ΑΒ < ΑΓ$. Έστω $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΒΓ$. Στην πλευρά $ΑΒ$ θεωρούμε σημείο $Δ$ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $ΓΔ$ τέμνει τη διάμεσο $ΑΜ$ στο σημείο $Ε$, τότε ισχύει ότι $ΑΔ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΓΕ$.



Λύση (1ος τρόπος)

Προεκτείνουμε τη διάμεσο $ΑΜ$ κατά τμήμα $ΜΘ = ΑΜ$. Επειδή οι διαγώνιες του τετραπλεύρου $ΑΒΘΓ$ διχοτομούνται το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 1

Άρα είναι $ΑΒ \parallel ΓΘ$ και $\hat{Α}_1 = \hat{Θ}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $ΑΔ = ΔΕ$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$ και επιπλέον $\hat{Ε}_1 = \hat{Ε}_2$, ως κατά κορυφή. Άρα είναι και $\hat{Θ}_1 = \hat{Ε}_2$, οπότε το τρίγωνο $ΕΓΘ$ είναι ισοσκελές με $ΓΕ = ΓΘ$. Όμως από το παραλληλόγραμμο $ΑΒΘΓ$ έχουμε ότι $ΑΒ = ΓΘ$, οπότε από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει το ζητούμενο $ΑΒ = ΓΕ$.

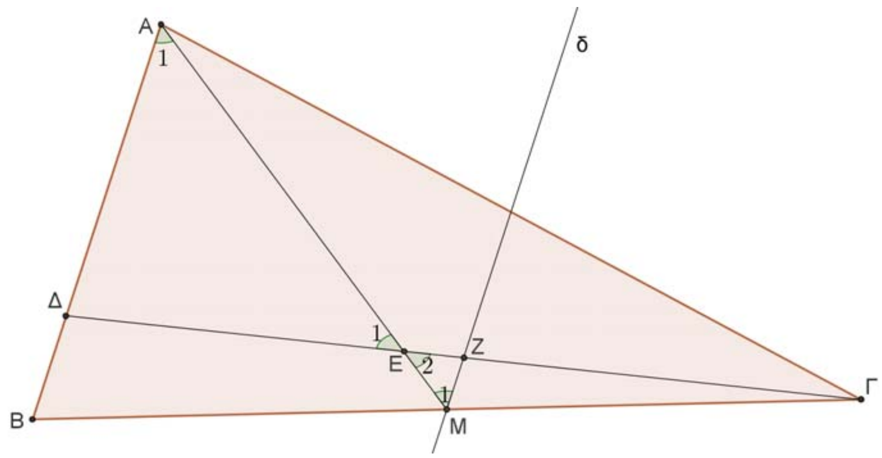
2ος τρόπος

Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθεία δ παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ, άρα και προς την πλευρά ΒΔ του τριγώνου ΒΓΔ, η οποία τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, έστω στο σημείο Ζ. Τότε το Ζ θα είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ, δηλαδή

$$ΓΖ = ΖΔ \qquad (1)$$

και επιπλέον ισχύει ότι

$$ΒΔ = 2\cdot ΜΖ. \qquad (2)$$



Σχήμα 2

Επίσης έχουμε $\hat{A}_1 = \hat{M}_1$, (εντός εναλλάξ γωνίες). Όμως από την ισότητα $A\Delta = \Delta E$ της υπόθεσης έπεται ότι $\hat{A}_1 = \hat{E}_1$ και επιπλέον $\hat{E}_1 = \hat{E}_2$, ως κατά κορυφή.

Άρα είναι και $\hat{M}_1 = \hat{E}_2$, οπότε το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές με

$$ZM = EZ. \qquad (3)$$

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \Gamma E &= \Gamma Z + ZE \\ &= \Delta Z + ZE && \text{(λόγω της (1))} \\ &= \Delta E + 2\cdot ZM && \text{(λόγω της (3))} \\ &= A\Delta + \Delta B = AB. && \text{(λόγω της υπόθεσης και της (2))} \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Έστω $A = \overline{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$ τετραψήφιος θετικός ακέραιος με ψηφία τέτοια ώστε να ισχύουν: $a \geq 7$ και $a > b > c > d > 0$. Θεωρούμε και τον θετικό ακέραιο $B = \overline{dcba} = d\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + b\cdot 10 + a$, που προκύπτει από τον A με αντίστροφη γραφή των ψηφίων του. Αν δίνεται ότι ο αριθμός $A+B$ έχει όλα τα ψηφία του περιττούς ακέραιους, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$A + B = (a+d)\cdot 10^3 + (b+c)\cdot 10^2 + (b+c)\cdot 10 + (a+d).$$

Από την υπόθεση, όλα τα ψηφία του ακέραιου $A+B$ είναι περιττοί ακέραιοι. Όμως για την εύρεση των ψηφίων του ακεραίου $A+B$ πρέπει να ξέρουμε αν οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$ είναι μικρότεροι του 10. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Έστω $a+d \geq 10$ και $b+c \geq 10$. Τότε, επειδή $a > b > c > d > 0$, θα έχουμε:

$$a + d = 10 + k, k = 0,1,2,...,5,$$
$$b + c = 10 + \ell,\ \ \ell = 0,1,2,...,5.$$

Έτσι ο αριθμός $A+B$ γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} A + B &= (10+k)\cdot 10^3 + (10+\ell)\cdot 10^2 + (10+\ell)\cdot 10 + (10+k) \\ &= 10^4 + (k+1)\cdot 10^3 + (\ell+1)\cdot 10^2 + (\ell+1)\cdot 10 + k, \end{aligned}$$

δηλαδή έχει ψηφία $1, k+1, \ell+1, \ell+1, k$, τα οποία πρέπει να είναι περιττοί ακέραιοι, που είναι άτοπο, λόγω της ύπαρξης των διαδοχικών ακέραιων k και $k+1$.

(β) Έστω $a+d\geq 10$ και $b+c<10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $a+d=10+k, k=0,1,2,...,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (10+k)\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c)\cdot 10+(10+k)\\ &=10^4+k\cdot 10^3+(b+c)\cdot 10^2+(b+c+1)\cdot 10+k,\end{aligned}$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b+c=9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφίο δεκάδων το 0, που είναι άρτιος, άτοπο.
- Αν $b+c<9$, τότε ο $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ έχει ψηφία τους ακέραιους $b+c$ και $b+c+1$ που δεν είναι δυνατόν να είναι και οι δύο περιττοί.

(γ) Έστω $a+d<10$ και $b+c\geq 10$. Τότε, επειδή $a>b>c>d>0$, θα έχουμε: $b+c=10+\ell, \ell=0,1,2,...,5$ και ο αριθμός $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ γράφεται

$$\begin{aligned}\mathrm{A}+\mathrm{B} &= (a+d)\cdot 10^3+(10+\ell)\cdot 10^2+(10+\ell)\cdot 10+(a+d)\\ &=(a+d+1)\cdot 10^3+(\ell+1)\cdot 10^2+\ell\cdot 10+(a+d),\end{aligned}$$

οπότε οι ακέραιοι ℓ και $\ell+1$ είναι ψηφία του $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, άτοπο.

(δ) Έστω $a+d<10$ και $b+c<10$. Τότε τα ψηφία του αριθμού $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ είναι οι ακέραιοι $a+d$ και $b+c$, οι οποίοι πρέπει να είναι περιττοί. Λόγω των περιορισμών $a>b>c>d>0$ και $a\geq 7$, έπεται ότι $a+d=9$ και επίσης $5\geq c\geq 2, 6\geq b\geq 3$, οπότε $10>b+c\geq 5$, δηλαδή $b+c\in\{5,7,9\}$ Επομένως, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=9$ με $b=7$, $c=2$ ή $b=6$, $c=3$ ή $b=5$, $c=4$
  Επομένως, προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8721}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8631}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8541}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=9$ με $b=6$, $c=3$ ή $b=5$, $c=4$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{7632}$, $\mathrm{A}=\mathbf{7542}$
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=7$ με $b=5$, $c=2$ ή $b=4$, $c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτουν οι αριθμοί: $\mathrm{A}=\mathbf{8521}$, $\mathrm{A}=\mathbf{8431}$.
- $a+d=9$ με $a=7, d=2$ και $b+c=7$ με $b=4$, $c=3$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{7432}$.
- $a+d=9$ με $a=8, d=1$ και $b+c=5$ με $b=3$, $c=2$.
  Στη περίπτωση αυτή προκύπτει ο αριθμός: $\mathrm{A}=\mathbf{8321}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να βρείτε όλες τις τριάδες (x,y,z) θετικών ακέραιων αριθμών που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=1$$

Λύση

Αν είναι $x\geq 3$ και $y\geq 3$, τότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}\leq\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{4}{z}=1-\frac{4}{z}<1,$$

οπότε η εξίσωση δεν επαληθεύεται. Επομένως θα είναι: $x\leq 2$ ή $y\leq 2$, οπότε πρέπει να ισχύει ένα από τα επόμενα: $x=1$ ή $x=2$ ή $y=1$ ή $y=2$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=2y \Leftrightarrow y=k,\ z=2k,$ όπου k θετικός ακέραιος, οπότε έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(1,k,2k), k\in\mathbb{Z}$ θετικός.
- Για $x=2$ η εξίσωση γίνεται:
$$\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{y}=\frac{8+z}{2z} \Leftrightarrow y=\frac{4z}{z+8} \Leftrightarrow y=\frac{4(z+8)-32}{z+8} \Leftrightarrow y=4-\frac{32}{z+8}.$$
Επειδή ο y πρέπει να είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι ο $z+8$ πρέπει να είναι θετικός διαιρέτης του 32 και μεγαλύτερος του 8. Άρα οι δυνατές τιμές του $z+8$ είναι 16 ή 32, οπότε $z=8$ ή $z=24$. Για $z=8$ λαμβάνουμε $y=2$, ενώ για $z=24$ λαμβάνουμε $y=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(2,2,8) \text{ ή } (x,y,z)=(2,3,24).$$
- Για $y=1$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x}-\frac{4}{z}=-1 \Leftrightarrow \frac{4}{z}=\frac{1+x}{x} \Leftrightarrow z=\frac{4x}{1+x}=4-\frac{4}{1+x}.$
Επειδή πρέπει ο z να είναι θετικός ακέραιος, πρέπει ο $1+x$ να είναι θετικός διαιρέτης του 4 και μεγαλύτερος του 1, δηλαδή πρέπει $1+x=2$ ή $1+x=4$ $\Leftrightarrow x=1$ *ή* $x=3$ Για $x=1$ λαμβάνουμε $z=2$, ενώ για $x=3$ λαμβάνουμε $z=3$. Άρα στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις
$$(x,y,z)=(1,1,2) \text{ ή } (x,y,z)=(3,1,3).$$
- Για $y=2$ η εξίσωση γίνεται: $\frac{1}{x}-\frac{4}{z}=0 \Leftrightarrow z=4x \Leftrightarrow x=\ell,\ z=4\ell,$ όπου ℓ θετικός ακέραιος. Άρα, στην περίπτωση αυτή έχουμε τις λύσεις $(x,y,z)=(\ell,2,4\ell)$, όπου ℓ θετικός ακέραιος.

Συνολικά, λαμβάνοντας υπόψη και τις επικαλύψεις των λύσεων που βρήκαμε, έχουμε τις λύσεις:
$$(x,y,z)=(1,k,2k), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(\ell,2,4\ell), \text{ όπου } \ell \text{ θετικός ακέραιος,}$$
$$(x,y,z)=(3,1,3) \text{ και } (x,y,z)=(2,3,24).$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μικρών τάξεων

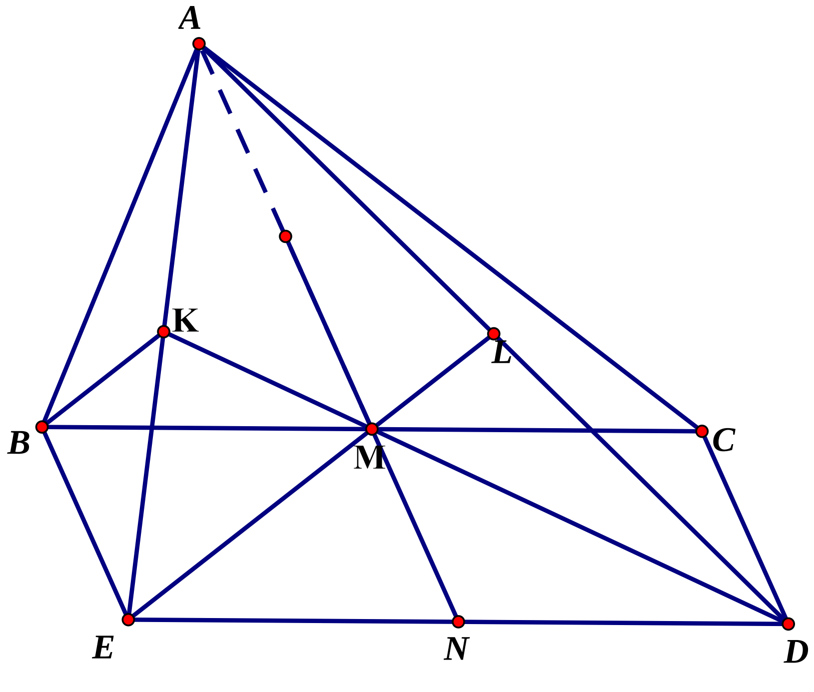
Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC. Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο BCDE, τέτοιο ώστε: $\mathrm{BE} \parallel \mathrm{AM}$ και $\mathrm{BE} = \dfrac{\mathrm{AM}}{2}$

Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD.

Λύση

Προεκτείνουμε την AM μέχρι να τμήσει την ED στο σημείο N. Τότε το τετράπλευρο $BMNE$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $EN = BM = MC = ND$. Άρα το N είναι το μέσον του ED. Επιπλέον παρατηρούμε ότι $\dfrac{AM}{MN} = 2$ και το M είναι πάνω στη διάμεσο του τριγώνου EAD, οπότε το M είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου AED. Επομένως η ευθεία EM είναι η ευθεία της διαμέσου του τριγώνου AED που άγεται από την κορυφή E, οπότε θα τέμνει την πλευρά AD στο μέσο της.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 2
Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p,m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m)+p=(m+1)^3.$$

Λύση
Η δεδομένη εξίσωση γράφεται

$$p(p+m+1)=(m+1)^3, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι ο πρώτος αριθμός p είναι διαιρέτης του $(m+1)^3$. Επομένως, αφού p πρώτος, έπεται ότι $p|(m+1)$, οπότε θα υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε $m+1=kp$. Τότε, από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$p(p+kp)=(kp)^3 \Leftrightarrow k+1=k^3 p \Rightarrow k^3|(k+1) \Rightarrow k|(k+1) \Rightarrow k=1.$$

Άρα είναι $p=2,\ m=1$ και $(p,m)=(2,1)$.

Πρόβλημα 3
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z},\ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x},\ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}.$$

Λύση
Για $x,y,z\in\mathbb{R}$, που ικανοποιούν την συνθήκη $xyz\neq 0$, το σύστημα γράφεται:

$$x^3yz=z^2-2y^2 \qquad (1)$$

$$y^3zx=x^2-2z^2 \qquad (2)$$

$$z^3xy=y^2-2x^2 \qquad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz\left(x^2+y^2+z^2\right)=-\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+z^2\right)(xyz+1)=0.$$

Επειδή είναι $xyz\neq 0$ έχουμε $x^2+y^2+z^2>0$, οπότε από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι :

$$xyz=-1 \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4) στο σύστημα των εξισώσεων (1), (2) και (3) έχουμε:

$$x^2=-z^2+2y^2 \qquad (5)$$

$$y^2=-x^2+2z^2 \qquad (6)$$

$$z^2=-y^2+2x^2 \qquad (7)$$

Από τις (5) και (6) λαμβάνουμε $y^2=z^2$, ενώ από τις (6) και (7) λαμβάνουμε $x^2=z^2$, οπότε:

$$x^2=y^2=z^2\Leftrightarrow x=y=\pm z \text{ ή } x=-y=\pm z. \qquad (8)$$

Τελικά, από τις εξισώσεις (8) και (4) έχουμε τις λύσεις:

$$(x,y,z)=(-1,-1,-1),\ (x,y,z)=(1,1,-1),\ (x,y,z)=(1,-1,1),\ (x,y,z)=(-1,1,1).$$

Πρόβλημα 4.
Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ...,20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

Λύση
Το 1 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Το 2 μπορεί να βαφεί με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Τώρα όλοι οι άρτιοι πρέπει να πάρουν το χρώμα του 2, οπότε οι αριθμοί 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 παίρνουν το χρώμα του 2.
Επίσης όλοι οι αριθμοί που έχουν κοινό διαιρέτη με αυτούς παίρνουν το χρώμα του 2, δηλαδή οι αριθμοί 3,5,7,9,15 παίρνουν το χρώμα του 2.
Οι αριθμοί που απέμειναν (που είναι οι πρώτοι μεγαλύτεροι του 10, δηλαδή οι 11,13,17,19) μπορούν να βαφούν με 2 τρόπους (ή άσπρο ή μαύρο).
Επομένως, συνολικά ο χρωματισμός μπορεί να γίνει με $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ τρόπους. Πρέπει όμως να αφαιρέσουμε και τις δύο περιπτώσεις που τους βάφουμε όλους μαύρους ή όλους άσπρους. Άρα έχουμε συνολικά 62 τρόπους.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μικρών τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (*εκτός από αυτές τις λύσεις κάθε άλλη τεκμηριωμένη λύση, είναι αποδεκτή*)

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2+(\alpha-2)x-(\alpha-1)(2\alpha-3)=0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Λύση

Έχουμε $\Delta=(\alpha-2)^2+4(\alpha-1)(2\alpha-3)=9\alpha^2-24\alpha+16=(3\alpha-4)^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{2-\alpha\pm(3\alpha-4)}{2}\Leftrightarrow x_1=\alpha-1,\ x_2=-2\alpha+3.$$

Επομένως ζητάμε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

$$x_1=x_2^2 \text{ ή } x_2=x_1^2 \Leftrightarrow \alpha-1=(-2\alpha+3)^2 \text{ ή } -2\alpha+3=(\alpha-1)^2$$
$$\Leftrightarrow \alpha-1=4\alpha^2-12\alpha+9 \quad \text{ή} \quad -2\alpha+3=\alpha^2-2\alpha+1$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha^2-13\alpha+10=0 \text{ ή } \alpha^2=2 \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ ή } \alpha=\frac{5}{4} \text{ ή } \alpha=\sqrt{2} \text{ ή } \alpha=-\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m,n) με $m\geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathrm{A}=(m+n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $\mathrm{B}=2n(3m^2+n^2)+8$.

.

Λύση

Έστω $\mathrm{A}=(m+n)^3,\mathrm{B}=2n(3m^2+n^2)+8$. Επειδή $(m+n)^3\,|\,2n(3m^2+n^2)+8$ πρέπει να είναι:

$$(m+n)^3\leq 2n(3m^2+n^2)+8\Leftrightarrow m^3+3m^2n+3mn^2+n^3\leq 6m^2n+2n^3+8$$

$$\Leftrightarrow m^3-3m^2n+3mn^2-n^3\leq 8\Leftrightarrow (m-n)^3\leq 8 \overset{m\geq n}{\Longleftrightarrow} m-n\leq 2\Leftrightarrow m-n\in\{0,1,2\}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $m-n=0\Leftrightarrow m=n.$ Τότε $\mathrm{A}=8m^3,\mathrm{B}=8m^3+8$, οπότε
  $\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}\Leftrightarrow 8m^3\,|\,8m^3+8\Leftrightarrow 8m^3\,|\,8\Leftrightarrow m=1,$ αφού $m>0\Rightarrow (m,n)=(1,1).$
- $m-n=1$. Τότε έχουμε

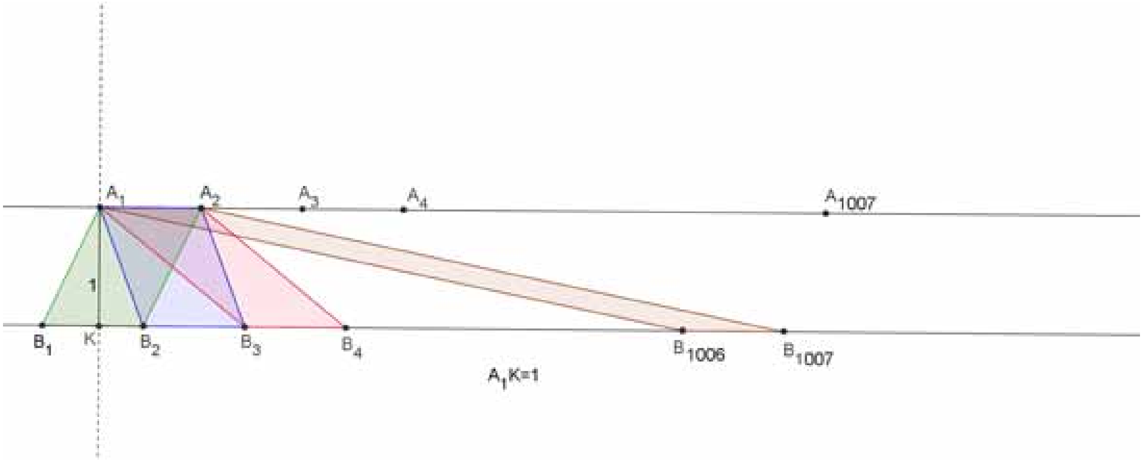
$$\mathrm{A} = (2n+1)^3, \mathrm{B} = 2n\left(3(n+1)^2 + n^2\right) + 8 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 8 = (2n+1)^3 + 7.$$

Επομένως, $\mathrm{A} | \mathrm{B} \Leftrightarrow (2n+1)^3 | 7 \Rightarrow 2n+1 = 1 \Leftrightarrow n = 0,\ m = 1$ και $(m,n) = (1,0)$.

- $m - n = 2$. Τότε $\mathrm{A} = 8(n+1)^3 = \mathrm{B}$, οπότε έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων της μορφής $(k+2, k)$, με $k \geq 0$.

Πρόβλημα 3.
Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Λύση
Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που να έχουν απόσταση 1. Τοποθετούμε σε κάθε μία από αυτές από 1007 σημεία ώστε τα οποία να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1. Τότε στην ε_1 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα και στην ε_2 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα. Οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_1 με οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_2 δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμο εμβαδού 1. Επομένως, συνολικά τα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 είναι: $1006 \cdot 1006 = 1006^2$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} \leq \mathrm{A\Gamma}$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(\mathrm{O}, R)$. Η κάθετη από την κορυφή Α προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ.

(α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

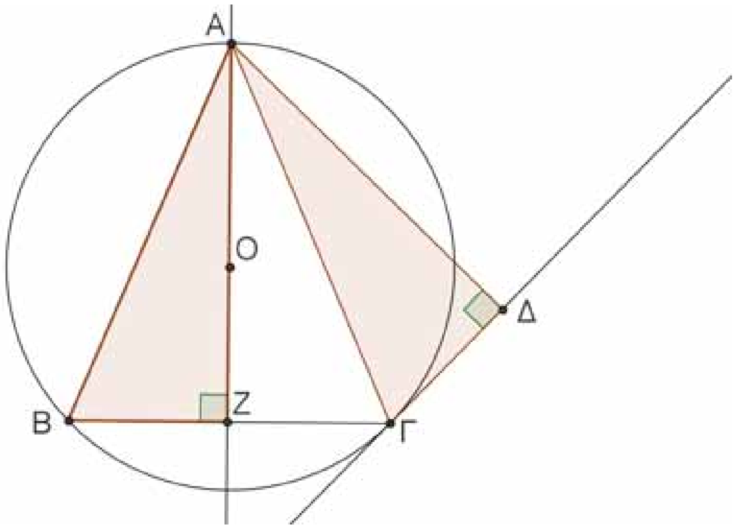
(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Λύση
(α) Αν Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε η ΑΖ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

- ΑΓ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

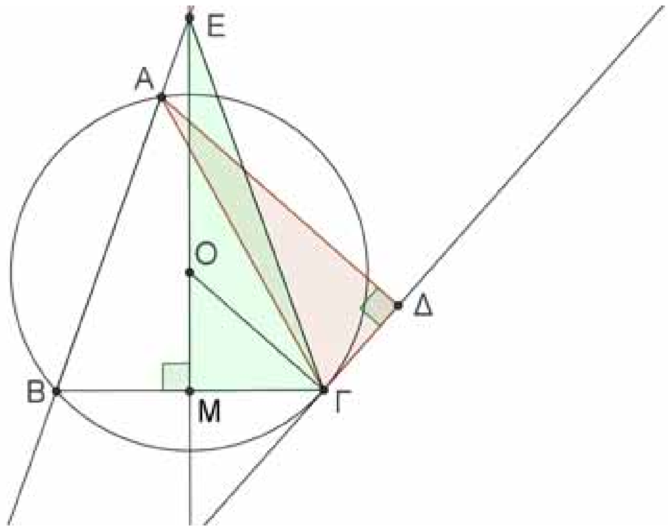
- $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}\Gamma$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}Z$, αφού $AB = A\Gamma$.

Επομένως θα είναι και $\Gamma\Delta = \Gamma Z = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο M της $B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της AB στο E. Τότε $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\Gamma\Delta = B\Gamma = 2BM$, οπότε $\Gamma\Delta = BM$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα EBM και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, οπότε θα είναι $A\Gamma = EB$. Όμως $EB = E\Gamma$, οπότε $A\Gamma = E\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $E\hat{A}\Gamma = 180° - \hat{A}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο $EA\Gamma$ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ ισοσκελές.



Σχήμα 3

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Οι θετικοί ακέραιοι p, q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους p, q κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} pqr=n \\ (p+1)(q+1)r=n+138 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} pqr=n \\ pqr+(p+q)r+r=n+138 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} pqr=n \\ (p+q+1)r=138 \end{matrix}\right\}.$$

Από την εξίσωση

$$(p+q+1)r=138=2\cdot 3\cdot 23 \qquad (1)$$

θα προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές των p, q, r και στη συνέχεια από την εξίσωση $pqr=n$ θα βρούμε τις δυνατές τιμές του n.

Επειδή οι θετικοί ακέραιοι p, q, r είναι πρώτοι, οι δυνατές τιμές του r είναι 2 ή 3 ή 23, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $r=2$, τότε $p+q+1=69 \Leftrightarrow p+q=68$, από την οποία, αφού p, q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:
$$(p,q)=(7,61),\ (p,q)=(61,7),\ (p,q)=(31,37), (p,q)=(37,31).$$
Επομένως για το αρχικό γινόμενο προκύπτουν οι τιμές:
$$n=7\cdot 61\cdot 2=\mathbf{854} \quad \text{ή} \quad n=31\cdot 37\cdot 2=\mathbf{2294}.$$
- Αν $r=3$, τότε προκύπτει η εξίσωση $p+q+1=46 \Leftrightarrow p+q=45$, από την οποία, αφού p, q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:
$$(p,q)=(2,43),\ (p,q)=(43,2) \text{ και η τιμή } n=2\cdot 43\cdot 3=\mathbf{258}.$$
- Αν $r=23$, τότε $p+q+1=6 \Leftrightarrow p+q=5 \Leftrightarrow (p,q)=(2,3)$ ή $(p,q)=(3,2)$, οπότε θα είναι $n=2\cdot 3\cdot 23=\mathbf{138}$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι: **138, 258, 854** και **2294**.

Πρόβλημα 2
Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, με $x \neq z$, είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\left(x+y\right)^2+\left(2-xy\right)=9,$$
$$\left(y+z\right)^2-\left(3+yz\right)=4.$$
Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:
$$\mathrm{A}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}\right).$$

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γίνονται:
$$x^2+y^2+xy=7, \qquad (1)$$
$$y^2+z^2+yz=7, \qquad (2)$$
από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:
$$x^2-z^2+xy-yz=0 \Leftrightarrow \left(x-z\right)\left(x+z\right)+y\left(x-z\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-z\right)\left(x+z+y\right)=0.$$
Από την τελευταία ισότητα, επειδή είναι από την υπόθεση $x-z\neq 0$, έπεται ότι:
$$x+y+z=0\,. \qquad (3)$$
Θεωρούμε τώρα καθέναν χωριστά τους παράγοντες της παράστασης A. Έχουμε
$$\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2y},\ \frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}=\frac{x^3+y^3+z^3}{y^2z},$$
$$\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}=\frac{x^3+y^3+z^3}{z^2x},\ \text{οπότε η παράσταση γίνεται:}$$
$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}. \qquad (4)$$
Από τη σχέση (3) λαμβάνουμε: $z=-x-y$, οπότε
$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+\left(-x-y\right)^3=x^3+y^3-\left(x+y\right)^3$$
$$=-3xy\left(x+y\right)=-3xy\left(-z\right)=3xyz. \qquad (5)$$
Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα και από την ταυτότητα του Euler.
Επομένως, από τη σχέση (4) λαμβάνουμε
$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=\frac{\left(3xyz\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=27.$$

Πρόβλημα 3

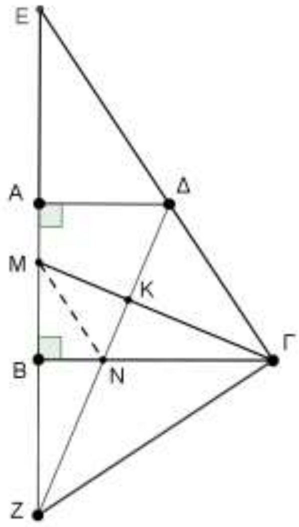
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ΑΔ < ΒΓ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

Λύση

Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τις ΓΜ, ΒΓ στα Κ, Ν αντίστοιχα. Τότε στο τρίγωνο ΑΔΖ, έχουμε ότι Β μέσον του ΑΖ και ΒΝ // ΑΔ, οπότε έχουμε ότι Ν μέσον του ΖΔ.
Επομένως στο τρίγωνο ΖΕΔ η ΜΝ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε:
$$\mathrm{MN} \,//\, \mathrm{E\Delta} \qquad (1)$$
Επιπλέον στο τρίγωνο ΜΓΖ, τα ΓΒ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο Ν είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε:

$$MN \perp Z\Gamma \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Z\Gamma \perp E\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4.

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος.

Λύση

Το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος, αν και μόνο αν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2, 4,6.

Αν δεν έχουμε καθόλου 1, οι δυνατές επιλογές είναι 2^6, αφού για καθέναν από τους a_i έχουμε δύο επιλογές (0 ή 2)

Αν έχουμε δύο 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 4 θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4 \cdot \binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^2 \cdot \binom{6}{4}$ δυνατές εξάδες. Αν έχουμε έξι 1, τότε είναι φανερό ότι έχουμε έναν τρόπο.

Επομένως, συνολικά έχουμε: $2^6 + 2^4 \cdot \binom{6}{2} + 2^2 \cdot \binom{6}{4} + 1 = 64 + 16 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 1 = 365$ εξάδες.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

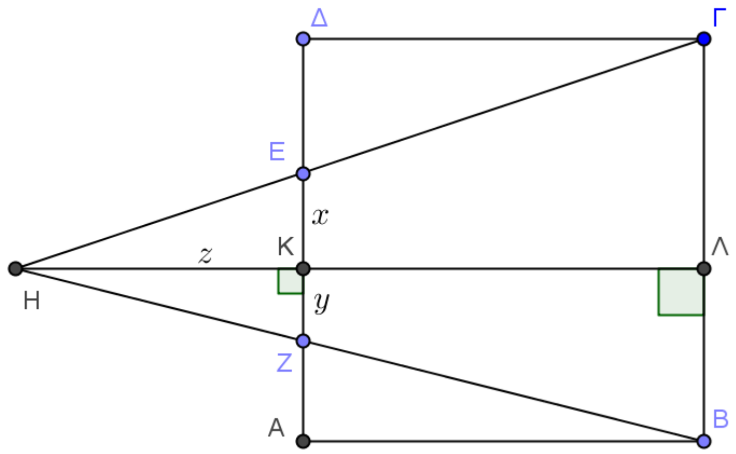
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Πάνω στην πλευρά ΑΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\Delta E = \frac{\alpha}{3}$ και $AZ = \frac{\alpha}{4}$. Αν οι ευθείες ΒΖ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Η, να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ ως συνάρτηση του α.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Φέρνουμε το ύψος ΗΛ του τριγώνου ΒΓΗ το οποίο τέμνει κάθετα την ΑΔ στο σημείο Κ. Θέτουμε ΕΚ = x, ΚΖ = y και ΚΗ = z. Είναι ΗΛ = $\alpha + z$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΗ είναι ίσο με

$$E = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma \cdot H\Lambda = \frac{1}{2}\alpha\left(\alpha + z\right) \quad . \tag{1}$$

Αρκεί να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του α.

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΓΔΕ και ΕΗΚ είναι όμοια, αφού $\Gamma\hat{\Delta}E = E\hat{K}H = 90^o$ και $\Delta\hat{E}\Gamma = K\hat{E}H$ ως κατά κορυφή. Επομένως, έχουμε

$$\frac{KH}{\Gamma\Delta} = \frac{KE}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha} = \frac{x}{\frac{\alpha}{3}} \Leftrightarrow z = 3x \tag{2}$$

Ομοίως, τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΖΚΗ είναι όμοια, οπότε παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{KZ}}{\mathrm{AZ}} \Leftrightarrow \frac{z}{\alpha}=\frac{y}{\frac{\alpha}{4}} \Leftrightarrow z=4y \quad . \tag{3}$$

Ακόμα, έχουμε ότι

$$x+y=\mathrm{A\Delta}-\mathrm{AZ}-\mathrm{\Delta E}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12} \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (4) παίρνουμε

$$x+y=\frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow \frac{z}{3}+\frac{z}{4}=\frac{5\alpha}{12} \Leftrightarrow z=\frac{5\alpha}{7} \ ,$$

οπότε η (1) γίνεται

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\left(\alpha+\frac{5\alpha}{7}\right)=\frac{12\alpha^2}{14}=\frac{6\alpha^2}{7}.$$

2^{ος} τρόπος. Από τα δεδομένα παίρνουμε ότι $\mathrm{ZE}=\alpha-\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha}{3}=\frac{5\alpha}{12}$. Επομένως το εμβαδόν του τραπεζίου $\mathrm{ZE\Gamma B}$ είναι:

$$(\mathrm{ZE\Gamma B})=\frac{\frac{5\alpha}{12}+\alpha}{2}\cdot a=\frac{17a^2}{24}.$$

Επιπλέον τα τρίγωνα ZHE και $\mathrm{BH\Gamma}$ είναι όμοια, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου της ομοιότητας αυτών, δηλαδή

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{ZHE})}=\left(\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{ZE}}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{5\alpha/12}\right)^2=\left(\frac{12}{5}\right)^2.$$

Επομένως, έχουμε

$$\frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-(\mathrm{BZE\Gamma})}=\left(\frac{12}{5}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{BH\Gamma})}{(\mathrm{BH\Gamma})-\frac{17\alpha^2}{24}}=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

και λύνοντας ως προς $(\mathrm{BH\Gamma})$ παίρνουμε ότι $(\mathrm{BH\Gamma})=\frac{6\alpha^2}{7}$.

Πρόβλημα 2

Αν x,y,z θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να λύσετε το σύστημα:

$$\{x(6-y)=9,\ y(6-z)=9,\ z(6-x)=9\}..$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Επειδή είναι $x,y,z>0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0<x<6,\ 0<y<6,\ 0<z<6.$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε:

$$xyz(6-x)(6-y)(6-z)=9^3 \Leftrightarrow x(6-x)y(6-y)z(6-z)=9^3. \tag{1}$$

Όμως ισχύει ότι

$$0<x(6-x)=6x-x^2=9-(3-x)^2\le 9. \tag{2}$$

Η ισότητα ισχύει για $x=3$. Ομοίως ισχύουν και οι σχέσεις

$$0\le y(6-y)\le 9 \tag{3}$$

$$0 \le z(6-z) \le 9 \qquad (4)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (2), (3) και (4), λαμβάνουμε

$$0 < x(6-x)y(6-y)z(6-z) \le 9^3, \qquad (5)$$

οπότε σε σύγκριση με την (1) προκύπτει ότι οι σχέσεις (2), (3) και (4) πρέπει να ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή $x = y = z = 3$.

Εναλλακτικά οι σχέσεις (2) , (3) και (4) μπορούν να προκύψουν με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου. Για παράδειγμα, αφού $x, 6-x > 0$, έχουμε

$$0 < \sqrt{x(6-x)} \le \frac{x+6-x}{2} = 3 \Rightarrow 0 < x(6-x) \le 9.$$

2^{ος} τρόπος: Επειδή είναι $x, y, z > 0$, από τις δεδομένες εξισώσεις προκύπτει ότι

$$0 < x < 6,\ 0 < y < 6,\ 0 < z < 6.$$

Από τους τρεις αριθμούς κάποιος είναι ο μικρότερος, έστω $x \le y$ και $x \le z$. Τότε έχουμε

$$9 = x(6-y) \le x(6-x) \le z(6-x) = 9,$$

οπότε έπεται ότι

$$x(6-x) = 9 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη και στην τελευταία σχέση βρίσκουμε ότι $y = 3$ και $z = 3$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $a, b, p,$ όπου p πρώτος, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2 + b^2\right) = a^2 b^2 \qquad (1)$$

Επειδή p πρώτος, από την (1) προκύπτει ότι: $p \mid a$ ή $p \mid b$.

Υποθέτουμε ότι $p \mid a$, οπότε $a = pa_1, a_1 \in \mathbb{N}^*$.

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{b^2} \Rightarrow b^2 > p \Rightarrow b^2 \ge p+1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{b^2} \ge \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p(p+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2 a_1^2} \ge \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2+p} \ge \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} \ge \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^2 \le 2 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a = p.$$

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$p\left(p^2 + b^2\right) = p^2 b^2 \Leftrightarrow p^2 + b^2 = pb^2 \Leftrightarrow p^2 = (p-1)b^2 \Leftrightarrow p^2 - 1 = (p-1)b^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(p+1) = (p-1)b^2 - 1 \Rightarrow (p-1) \mid 1 \overset{p-1>0}{\Longleftrightarrow} p-1 = 1 \Leftrightarrow p = 2.$$

Επομένως, έχουμε $a = p = 2$ και από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $b = 2$.

Ομοίως εργαζόμαστε, αν υποθέσουμε ότι $p \mid b$.

2^{ος} τρόπος. Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$p\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2 \tag{1}$$

Λύνοντας ως προς a^2 έχουμε ότι

$$a^2=\frac{pb^2}{b^2-p}=\frac{p(b^2-p)+p^2}{b^2-p}=p+\frac{p^2}{b^2-p}. \tag{2}$$

Αφού ο a^2 είναι ακέραιος, θα πρέπει $b^2-p \mid p^2$, επομένως

$$b^2-p=1,\quad ή\quad b^2-p=p,\quad ή\quad b^2-p=p^2.$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι, $b^2-p=1 \Leftrightarrow p=b^2-1=(b-1)(b+1)$ και αφού p πρώτος, θα πρέπει $b-1=1$, άρα $b=2$ και $p=3$. Τότε είναι $a^2=12$, άτοπο.

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $b^2=2p$. Τότε b άρτιος, έστω $b=2b_1$, οπότε $4b_1^2=2p$, άρα $2\mid p$, άρα και πάλι $p=2$ και $b=2$, οπότε και $a=2$. Στην τρίτη περίπτωση η (2) δίνει $a^2=p+1 \Leftrightarrow p=a^2-1=(a-1)(a+1)$, οπότε αφού p πρώτος, θα πρέπει $a-1=1$, άρα $a=2$ και $p=3$, οπότε προκύπτει $b^2=3$, άτοπο.

Πρόβλημα 4.

Μία παρέα που αποτελείται από n άτομα παίζει ένα επιτραπέζιο παιχνίδι με τους εξής κανόνες.

(α) Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα

(β) Το παιχνίδι ολοκληρώνεται μετά από n γύρους

(γ) Κάθε δυάδα παικτών έχει παίξει μαζί σε τουλάχιστον ένα γύρο.

Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του n.

Λύση

Αφού σε κάθε γύρο του παιχνιδιού παίζουν ακριβώς 3 άτομα, το πλήθος των δυάδων σε κάθε γύρο είναι $\binom{3}{2}=3$. Επομένως όταν το παιχνίδι ολοκληρωθεί μετά από n γύρους, θα έχουν παίξει μαζί $3n$ δυάδες ατόμων. Για να ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη και να παίξουν όλες οι δυάδες παικτών, πρέπει το $3n$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το συνολικό πλήθος των δυάδων, που είναι $\binom{n}{2}$. Δηλαδή, πρέπει:

$$\binom{n}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}\le 3n \Leftrightarrow \frac{n-1}{2}\le 3 \Leftrightarrow n\le 7.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η τιμή $n=7$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή, αφού ικανοποιεί τους κανόνες του προβλήματος. Πράγματι, για $n=7$ είναι

$$\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21=3\cdot 7$$

και αν υποθέσουμε ότι τα επτά μέλη της παρέας είναι οι : Α,Β,.Γ,Δ,Ε,Ζ,Η, τότε είναι δυνατόν να ορίσουμε επτά τριάδες που θα παίξουν στους επτά γύρους που πρέπει να γίνουν, έτσι ώστε όλα τα μέλη της παρέας ανά δύο να έχουν παίξει ένα παιγνίδι σε ένα τουλάχιστον γύρο. Μία τέτοια περίπτωση δίνουν οι τριάδες:

(Α, Β, Γ), (Α, Δ, Ε), (Α, Ζ, Η), (Β, Δ, Η), (Β, Ε, Ζ), (Γ, Δ, Ζ), (Γ, Ε, Η).

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μικρών τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1
(α) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε οι αριθμοί $x+\sqrt{3}$ και $x^2+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.
(β) Να εξετάσετε, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε οι αριθμοί $y+\sqrt{3}$ και $y^3+\sqrt{3}$ να είναι και οι δύο ρητοί.

Λύση
(α) Έστω $x+\sqrt{3}=q,\ x^2+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$x=q-\sqrt{3}\Rightarrow x^2=q^2-2q\sqrt{3}+3$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^2-2q\sqrt{3}+3\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(2q-1\right)=p-q^2-3$$

Τότε πρέπει $2q-1=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση $p=q^2+3\Rightarrow q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4}$ και $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

(β) Έστω $y+\sqrt{3}=q,\ y^3+\sqrt{3}=p$ με $p,q\in\mathbb{Q}$. Τότε

$$y=q-\sqrt{3}\Rightarrow y^3=q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}$$

οπότε αν αντικαταστήσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$\left(q^3-3q^2\sqrt{3}+9q-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=p\Leftrightarrow -\sqrt{3}\left(3q^2+2\right)=p-q^3-9q\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}=\frac{q^3+9q-p}{3q^2+2}\in\mathbb{Q}$$

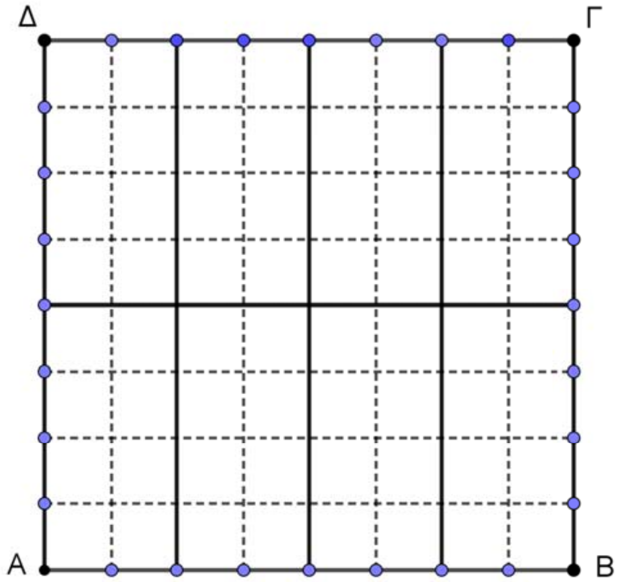
που είναι άτοπο.

Πρόβλημα 2
Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 8 cm το οποίο υποδιαιρούμε με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του σε 64 μικρά τετράγωνα πλευράς 1cm. Χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, ενώ όλα τα υπόλοιπα 57 μικρά τετράγωνα είναι λευκά. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε ανεξάρτητα από τη θέση των 7 μαύρων μικρών τετραγώνων, υπάρχει ορθογώνιο εμβαδού k cm^2 με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του ΑΒΓΔ και με όλα τα μικρά τετράγωνα από τα οποία

αποτελείται να είναι λευκά, που μπορεί να αποκοπεί από το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του k.

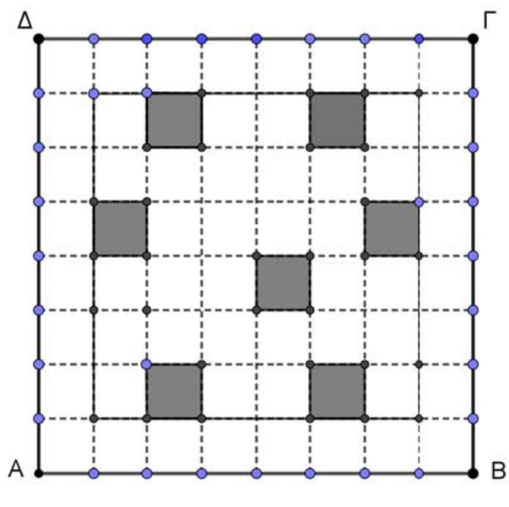
Λύση

Μπορούμε να χωρίσουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε 8 ορθογώνια 4×2. Έτσι μπορούμε να χρωματίσουμε στα επτά 4×2 ορθογώνια από ένα μαύρο μικρό τετράγωνο, οπότε από την αρχή του Περιστερώνα θα μείνει με λευκά μικρά τετράγωνα τουλάχιστον ένα 4×2 ορθογώνιο εμβαδού $8\,\text{cm}^2$.



Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει χρωματισμός των 7 μικρών τετραγώνων έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\text{cm}^2$. Στο τετράγωνο του παρακάτω σχήματος 2 αφήνουμε όλα τα συνοριακά μικρά τετράγωνα λευκά και στο 6×6 εσωτερικό τετράγωνο χρωματίζουμε 7 μικρά τετράγωνα μαύρα, έτσι ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με λευκά τετράγωνα εμβαδού μεγαλύτερου των $8\,\text{cm}^2$.



Σχήμα 2

Σημείωση: Για το πρώτο κομμάτι της άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε τις 8 γραμμές ή τις 8 στήλες του πίνακα και να κάνουμε το επιχείρημα όπως στην παραπάνω λύση με την αρχή του Περιστερώνα.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τους θετικούς ακεραίους a, b τέτοιους ώστε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$$

να είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο b είναι περιττός, τότε ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση

Έστω $\frac{(a+b)^2+4a}{ab}=\kappa\in\mathbb{Z}$. Η τελευταία γράφεται ως

$$(a+b)^2+4a=\kappa ab \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι ο a είναι περιττός. (2) Πράγματι, αν $2|a$, τότε θα πρέπει $2|(a+b)^2$, τότε θα πρέπει και ο b να είναι άρτιος, άτοπο. Θεωρούμε τώρα την (1) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς b, στη μορφή:

$$b^2+b(2-\kappa)a+a^2+4a=0$$

Για να έχει αυτή ακέραιες λύσεις, η διακρίνουσά της θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο. Έχουμε ότι $\Delta=a^2(\kappa-2)^2-4(a^2+4a)=a(a(\kappa-2)^2-4a-16)$. Επομένως το γινόμενο των a, $a(\kappa-2)^2-4a-16$ είναι τέλειο τετράγωνο. Επειδή όμως ο a είναι περιττός είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε ο καθένας τους θα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο, άρα ο a είναι τέλειο τετράγωνο.

2^{ος} τρόπος:

Έστω $d=(a,b)$ και γράφουμε $a=dx, b=dy$, με $(x,y)=1$. Παρατηρούμε ότι επειδή $d|b$ και ο b είναι περιττός, θα πρέπει d περιττός. Τότε ο αριθμός

$$\frac{(a+b)^2+4a}{ab}=\frac{d^2(x+y)^2+4dx}{d^2xy}=\frac{d(x+y)^2+4x}{dxy}$$

είναι ακέραιος. Άρα $x|d(x+y)^2+4x \Rightarrow x|dy^2$ και επειδή $(x,y)=1$, πρέπει $x|d$. Επίσης, $d|d(x+y)^2+4x \Rightarrow d|4x$ και αφού d περιττός, $d|x$. Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε $d=x$, άρα $a=d^2$.

Πρόβλημα 4

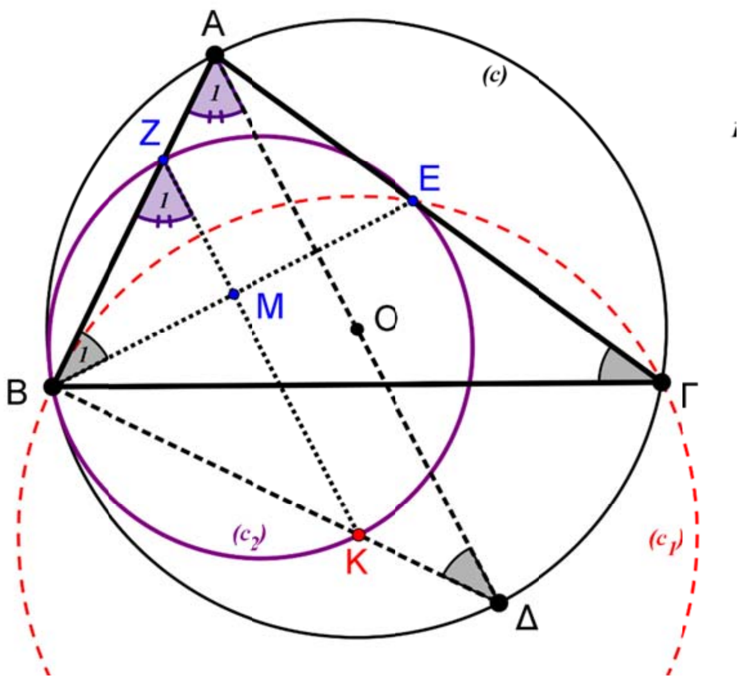
Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}<\mathrm{B\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο c με κέντρο O και ακτίνα R. Ονομάζουμε Δ το αντιδιαμετρικό της κορυφής A. Δίνεται επίσης ο κύκλος c_1 του οποίου το κέντρο K βρίσκεται επάνω στο τμήμα $\mathrm{B\Delta}$ και περνάει από τα σημεία B και Γ. Αν ο κύκλος c_1 τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΚΕ, έστω c_2, εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου c.

Λύση (1^{ος} Τρόπος)

Έστω Ζ η τομή του κύκλου c_2 με την ΑΒ και Μ η τομή της ΚΖ με την ΒΕ. Η γωνία $\mathrm{A\hat{B}\Delta}$ (άρα και η γωνία $\mathrm{Z\hat{B}K}$) είναι ορθή διότι βαίνει στη διάμετρο ΑΔ του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$.

Εφόσον $\mathrm{Z\hat{B}K} = 90°$, η ΖΚ είναι διάμετρος του κύκλου c_2 και κατά συνέπεια η ΖΚ θα είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΒΕ των κύκλων c_1 και c_2. Η ΑΒ εφάπτεται στον κύκλο c_1, άρα $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΖ έχουμε:

$$\widehat{Z_1} = 90° - \widehat{\mathrm{B}_1} = 90° - \hat{\Gamma} \quad . \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Οι γωνίες $\hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ, έχουμε: $\hat{\mathrm{A}}_1 = 90° - \hat{\Delta} = 90° - \hat{\Gamma} \quad (2)$.

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\widehat{\mathrm{A}_1} = \widehat{Z_1}$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΚΖ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $ΑΔΚΖ$ είναι τραπέζιο. Εφόσον το $Ο$ είναι το μέσο της $ΑΔ$, συμπεραίνουμε ότι η $ΟΒ$ θα διέρχεται από το μέσο της $ΚΖ$ που είναι το κέντρο του κύκλου c_2. Άρα τα κέντρα των κύκλων c , c_2 και το σημείο $Β$ θα είναι συνευθειακά.

Εναλλακτικά, το τελικό συμπέρασμα (που διατυπώνεται στην τελευταία παράγραφο) θα μπορούσε να προκύψει και με τη βοήθεια του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας:

Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\hat{Α}_1 = \hat{Ζ}_1$, οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ$ και $ΚΖ$ είναι παράλληλα και κατά συνέπεια ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο ομοιοθεσίας το σημείο $Β$.

Εφόσον τα τμήματα $ΑΔ$ και $ΚΖ$ (δηλαδή, οι διάμετροι των κύκλων c και c_2) είναι ομοιόθετα με κέντρο ομοιοθεσίας το $Β$ και οι κύκλοι c και c_2 θα είναι ομοιόθετοι με το ίδιο κέντρο ομοιοθεσίας. Δηλαδή τα κέντρα των κύκλων c , c_2 και το σημείο $Β$ θα είναι συνευθειακά.

2ος τρόπος

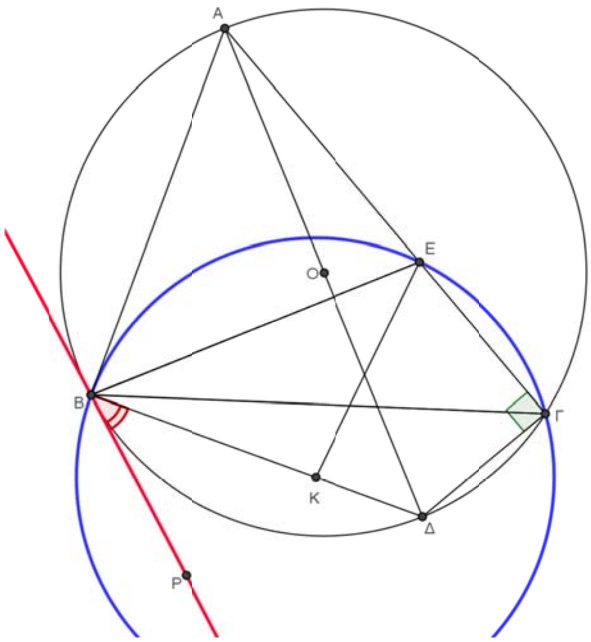
Θα αποδείξουμε ότι ο c_2 εφάπτεται του κύκλου $c(O,R)$ στο σημείο $Β$. Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι οι δύο αυτοί κύκλοι έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $Β$. Έστω $ΒΡ$ η εφαπτομένη του $c(O,R)$ στο σημείο $Β$ και ονομάζουμε $\widehat{ΚΒΡ} = \omega$. Για να δείξουμε ότι η $ΒΡ$ είναι εφαπτομένη του c_2 στο $Β$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\widehat{ΒΕΚ} = \omega \ . \qquad (1)$$

Επειδή η $ΒΡ$ η εφαπτομένη του $c(O,R)$, έχουμε ότι $\widehat{ΔΓΒ} = \omega$. Επιπλέον η $ΑΔ$ είναι διάμετρος, οπότε $\widehat{ΑΓΔ} = 90°$, οπότε $\widehat{ΕΓΒ} = 90° - \omega$. Όμως

$$\widehat{ΒΚΕ} = 2\widehat{ΒΓΕ} = 2(90° - \omega) = 180° - 2\omega, \qquad (2)$$

από τη σχέση επίκεντρης εγγεγραμμένης στον c_1. Όμως το τρίγωνο $ΒΚΕ$ είναι ισοσκελές επομένως λόγω της (2) θα είναι $\widehat{ΚΒΕ} = \widehat{ΚΕΒ} = \omega$, οπότε η (1) ισχύει και έχουμε το ζητούμενο.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020
Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την ανίσωση:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}$$

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}<\mathrm{A\Gamma}$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΖΔΕ συναρτήσει της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{B}\hat{\Theta}\mathrm{Z}$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Πρόβλημα 3
Να βρείτε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\alpha+\beta+\gamma=\nu\alpha\beta\gamma. \qquad \text{(E)}$$

Για τις τιμές του ν που θα βρείτε, να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (E).

Πρόβλημα 4
Γράφουμε 99 κύκλους σε μία σειρά και στο εσωτερικό τους γράφουμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 99:

Χρωματίζουμε καθέναν από τους κύκλους με ένα από τα δύο χρώματα που διαθέτουμε: το κόκκινο και το πράσινο. Λέμε ότι ένας χρωματισμός είναι «*καλός*», αν έχει την ιδιότητα:

Οι κόκκινοι κύκλοι στο τμήμα των αριθμών από το 1 μέχρι και το 50 είναι περισσότεροι από τους κόκκινους κύκλους στο τμήμα των αριθμών από το 51 μέχρι και το 99.

(α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.

(β) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί «*καλοί*» χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.

(Σημείωση: Δύο χρωματισμοί είναι διαφορετικοί, αν έχουν διαφορετικό χρώμα σε έναν τουλάχιστον κύκλο τους).

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες **Καλή επιτυχία**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+25z^2=6xz+8yz \\ 3x^2+2y^2+z^2=240 \end{array}\right\}$$

Λύση
Η πρώτη εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$x^2-6xz+9z^2+y^2-8yz+16z^2=0 \Leftrightarrow (x-3z)^2+(y-4z)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x-3z=0 \text{ και } y-4z=0 \Leftrightarrow x=3z \text{ και } y=4z.$$

Επομένως, όλες οι τριάδες (x,y,z) πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση είναι της μορφής:

$$(x,y,z)=(3t,\ 4t,\ t),\ t\in\mathbb{R}.$$

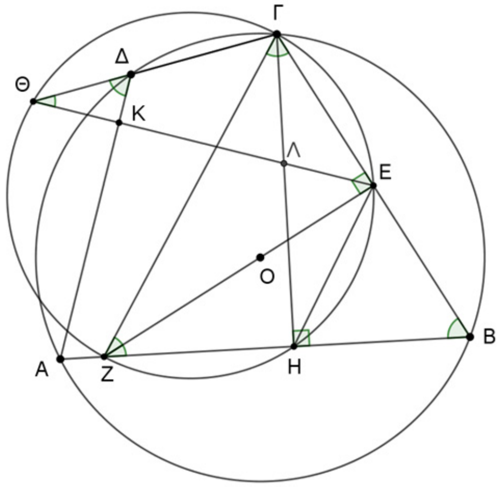
Τότε η δεύτερη εξίσωση γίνεται:

$$3\cdot 9t^2+2\cdot 16t^2+t^2=240 \Leftrightarrow 60t^2=240 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm 2.$$

Για $t=2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(6,8,2)$, ενώ για $t=-2$ προκύπτει η λύση $(x,y,z)=(-6,-8,-2)$.

Πρόβλημα 2
Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Η κάθετη στο μέσον Ε της πλευράς ΒΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ σε σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΓΕΖ τέμνει την πλευρά ΑΒ για δεύτερη φορά στο σημείο Η και την ευθεία ΓΔ σε σημείο Θ διαφορετικό του Δ. Η ευθεία ΕΘ τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΓΗ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Λ, Κ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

Λύση



Σχήμα 1

Επειδή $\Gamma\hat{H}Z = \Gamma\hat{E}Z = 90^\circ$, έπεται ότι $A\hat{H}\Lambda = 90^\circ$ Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$. Επειδή $\Delta\hat{K}\Theta = A\hat{K}\Lambda$ (ως κατά κορυφή γωνίες), αρκεί να αποδείξουμε ότι στο τρίγωνο ΔΘΚ οι δύο οξείες γωνίες του έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή: $\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = 90^\circ$.

Όμως έχουμε ότι:

$\Delta\hat{\Theta}K = \Gamma\hat{\Theta}E = \Gamma\hat{Z}E$ (εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο)

$\Gamma\hat{Z}E = E\hat{Z}B$ (γιατί είναι συμμετρικές ως προς τη μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ)

Άρα έχουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K = E\hat{Z}B \qquad (1).$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$\Theta\hat{\Delta}K = Z\hat{B}E \qquad (2)$$

(εσωτερική και απέναντι εξωτερική γωνία του εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ)

Επομένως με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\Delta\hat{\Theta}K + \Theta\hat{\Delta}K = E\hat{Z}B + Z\hat{B}E = 90^\circ,$$

γιατί το τρίγωνο ΖΒΕ είναι ορθογώνιο στο Ε.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους οι οποίοι είναι ίσοι με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.

Λύση

Έστω κ το πλήθος των ψηφίων του ακέραιου Α ο οποίος ισούται με 13 φορές το άθροισμα των ψηφίων του. Ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος με κ ψηφία είναι ο $10^{\kappa-1}$, ενώ το μεγαλύτερο δυνατό άθροισμα ψηφίων του είναι 9κ. Επομένως, για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος θα πρέπει:

$$10^{\kappa-1} \le 13 \cdot 9\kappa = 117\kappa \ . \qquad (1)$$

Για $\kappa \ge 4$ θα αποδείξουμε ότι: $10^{\kappa-1} > 117\kappa$, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση (1).

Πράγματι, για $\kappa = 4$ έχουμε: $10^{4-1} = 10^3 > 117 \cdot 4 = 468$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει: $10^{\kappa-1} > 117\kappa,$ για το τυχόν $\kappa > 4,$ τότε προκύπτει ότι:

$$10^{(\kappa+1)-1} = 10^{\kappa} = 10 \cdot 10^{\kappa-1} > 10 \cdot 117\kappa = 117 \cdot 10\kappa > 117 \cdot \left(\kappa + 1\right).$$

Επομένως το πλήθος κ των ψηφίων του Α πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο του 3.

- Η περίπτωση με $\kappa = 1$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = \alpha < 13\alpha$, με $0 < \alpha \le 9$.
- Η περίπτωση με $\kappa = 2$ αποκλείεται, αφού $\mathrm{A} = 10\alpha + \beta < 13(\alpha + \beta)$.
- Έστω $\kappa = 3$ και $\mathrm{A} = \overline{\alpha\beta\gamma} = 100\alpha + 10\beta + \gamma,$ με $0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9.$ Τότε πρέπει:

$$100\alpha + 10\beta + \gamma = 13 \cdot \left(\alpha + \beta + \gamma\right), \text{ με } 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9$$

$$\Leftrightarrow 87\alpha = 3\beta + 12\gamma, \text{ με } 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9$$

$$\Leftrightarrow 29\alpha = \beta + 4\gamma,\ 0 < \alpha \le 9,\ 0 \le \beta, \gamma \le 9$$

Επειδή ισχύει: $0 \le \beta + 4\gamma \le 45 \Rightarrow 29\alpha \le 45 \Rightarrow \alpha \le 1 \Rightarrow \alpha = 1$ (αφού $\alpha \ne 0$), οπότε έχουμε:

$$\beta + 4\gamma = 29 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma \ge 0 \Rightarrow 0 \le \beta = 29 - 4\gamma \le 9$$

$$\Rightarrow -29 \le -4\gamma \le -20 \Rightarrow 5 \le \gamma \le \frac{29}{4} \Rightarrow \gamma \in \{5, 6, 7\}$$

- Για $\gamma = 5 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 9$ και $\mathrm{A} = 195.$
- Για $\gamma = 6 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 5$ και $\mathrm{A} = 156.$
- Για $\gamma = 7 \Rightarrow \beta = 29 - 4\gamma = 1$ και $\mathrm{A} = 117.$

Πρόβλημα 4

Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι θετικοί ακέραιοι: 1, 2, 3,…,2018. Ο Γιάννης και η Μαρία έχουν τη δυνατότητα να κάνουν μαζί την παρακάτω κίνηση:

Επιλέγουν δύο αριθμούς α, β από αυτούς που είναι γραμμένοι στον πίνακα και τους αντικαθιστούν με τους αριθμούς $5\alpha - 2\beta$ και $3\alpha - 4\beta$.

Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων κινήσεων μπορούν να τριπλασιαστούν όλοι οι αριθμοί του πίνακα, δηλαδή να προκύψουν οι αριθμοί: 3, 6, 9,…, 6054. Η Μαρία σκέπτεται για λίγο και του απαντά ότι αυτό δεν είναι δυνατό να γίνει. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο και γιατί;

Λύση

Παρατηρούμε ότι σε κάθε κίνηση το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στον πίνακα μεταβάλλεται όσο η διαφορά:

$$\left(5\alpha - 2\beta\right) + \left(3\alpha - 4\beta\right) - \left(\alpha + \beta\right) = 7\alpha - 7\beta = 7\left(\alpha - \beta\right) = \pi o\lambda.7$$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από κάθε εφαρμογή της παραπάνω κίνησης η διαφορά του αθροίσματος $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα μείον το άθροισμα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ των αριθμών που ήταν αρχικά γραμμένοι στον πίνακα είναι αριθμός πολλαπλάσιος του 7, δηλαδή

$$\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o} - \Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}} = \pi o\lambda.7\ .$$

Επομένως τα αθροίσματα $\Sigma_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{o}}$ και $\Sigma_{\nu\acute{\varepsilon}o}$ διαιρούμενα με το 7 πρέπει να δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

Όμως $\Sigma_{αρχικό} = 1+2+3+...+2018 = \dfrac{2018\cdot 2019}{2} = 1009\cdot 2019 \equiv 1\cdot 3 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$.

Επιπλέον, αν μετά από πεπερασμένο πλήθος κινήσεων φθάσουμε στους αριθμούς 3,6,9,…,6054, τότε το άθροισμα τους θα είναι

$$\Sigma_{τελικό} = 3+6+9 = ...+6054 = 3\cdot\Sigma_{αρχικό} \equiv 3\cdot 3 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7$$

Επειδή τα υπόλοιπα των αθροισμάτων $\Sigma_{αρχικό}$ και $\Sigma_{τελικό}$ όταν διαιρούνται με το 7 είναι διαφορετικά συμπεραίνουμε ότι δεν μπορούν να προκύψουν στον πίνακα οι αριθμοί 3,6,9,…,6054 και επομένως έχει δίκιο η Μαρία.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

Θέματα μικρών τάξεων
Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1.

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την ανίσωση:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}.$$

Λύση

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}\Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}+\frac{x}{16}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(x+2)^4-8(x+2)^2x^2+x^4}{16x^3}\geq 0\Leftrightarrow \frac{\left(4(x+2)^2-x^2\right)^2}{16x^3}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4(x+2)^2-x^2\right)^2\geq 0,\ x\neq 0\Leftrightarrow x\geq 0,\ x\neq 0 \text{ ή } 4(x+2)^2-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } (2x+4+x)(2x+4-x)=0\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } (3x+4)(x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } x=-\frac{4}{3} \text{ ή } x=-4.$$

Διαφορετικά μπορούμε για $x\neq 0$ να εργαστούμε ως εξής:

$$\frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}\geq -\frac{x}{16}\Leftrightarrow \frac{(x+2)^4}{x^3}-\frac{(x+2)^2}{2x}+\frac{x}{16}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\frac{(x+2)^4}{x^4}-\frac{(x+2)^2}{2x^2}+\frac{1}{16}\right]\geq 0\Leftrightarrow x\left[\left(\frac{x+2}{x}\right)^2-\frac{1}{4}\right]^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } \frac{x+2}{x}=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>0 \text{ ή } x=-\frac{4}{3} \text{ ή } x=-4$$

Πρόβλημα 2.

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB<A\Gamma$. Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΒΓ και ΒΕ, ΓΖ ύψη του τριγώνου ΑΒΓ. Η ευθεία ΖΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Θ.

(α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $ΖΔΕ$ συναρτήσει της γωνίας $\hat{Α}$ του τριγώνου ΑΒΓ.
(β) Να βρείτε τη γωνία $Β\hat{Θ}Ζ$ συναρτήσει των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο και η ΖΔ είναι η διάμεσος του προς την υποτείνουσα, οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $ΖΔ = \frac{ΒΓ}{2} = ΒΔ$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΔΖ έχουμε:

$$\hat{Δ}_1 = Β\hat{Δ}Ζ = 180^0 - 2\hat{Β} \qquad (1)$$

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2} = ΓΔ$ και από το ισοσκελές τρίγωνο $ΓΔΕ$ βρίσκουμε και την ισότητα

$$\hat{Δ}_2 = Γ\hat{Δ}Ε = 180^0 - 2\hat{Γ} \qquad (2)$$

Άρα είναι

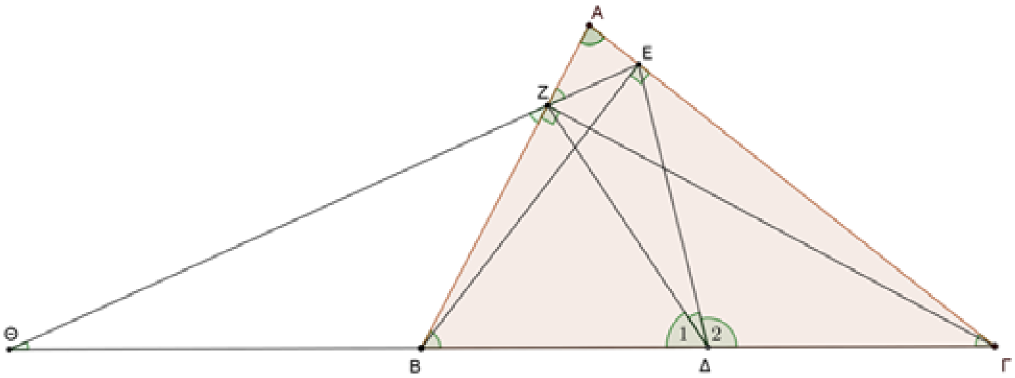
$$\hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_2 = \left(180^0 - 2\hat{Β}\right) + \left(180^0 - 2\hat{Γ}\right) = 360^0 - 2\left(\hat{Β} + \hat{Γ}\right) = 360^0 - 2\left(180^0 - \hat{Α}\right) = 2\hat{Α} \ ,$$

οπότε

$$Ζ\hat{Δ}Ε = 180^0 - \left(\hat{Δ}_1 + \hat{Δ}_2\right) = 180^0 - 2\hat{Α}.$$

Επιπλέον, επειδή το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ισοσκελές (αφού $ΔΖ = ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$), έχουμε:

$$Δ\hat{Ζ}Ε = Δ\hat{Ε}Ζ = \frac{180 - (180^0 - 2\hat{Α})}{2} = \hat{Α}.$$



Σχήμα 1

(β) Από το τρίγωνο ΒΘΖ και τη σχέση μιας εξωτερικής γωνίας με τις απέναντι εσωτερικές έχουμε

$$\hat{Β} = Β\hat{Θ}Ζ + Β\hat{Ζ}Θ. \qquad (3)$$

Όμως είναι

$$Β\hat{Ζ}Θ = Α\hat{Ζ}Ε \qquad (4)$$

ως κατά κορυφή, ενώ από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΖΕΓ (αφού $Β\hat{Ζ}Γ = Β\hat{Ε}Γ = 90^0$) έχουμε

$$Α\hat{Ζ}Ε = \hat{Γ} \ . \qquad (5)$$

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις λαμβάνουμε:

$$B\hat{\Theta}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}\ .$$

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλες τις τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\alpha+\beta+\gamma=\nu\alpha\beta\gamma. \qquad \text{(E)}$$

Για τις τιμές του ν που θα βρείτε, να προσδιορίσετε όλες τις λύσεις της εξίσωσης (E).

Λύση

Επειδή η εξίσωση είναι συμμετρική ως προς α,β,γ θα βρούμε ασχοληθούμε με την περίπτωση που ισχύει $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Τότε έχουμε:

$$\alpha \leq \alpha+\beta+\gamma \leq 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq \nu\alpha\beta\gamma \leq 3\alpha \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} 1 \leq \nu\beta\gamma \leq 3.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\nu > 3$. Τότε $\nu\beta\gamma > 3$, άτοπο.
- $\nu = 3$. Τότε $1 \leq 3\beta\gamma \leq 3 \Rightarrow \beta\gamma = 1 \Rightarrow \beta=\gamma=1$, οπότε $\alpha+2=3\alpha \Leftrightarrow \alpha=1$.
  Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,1)$.
- $\nu = 2$. Τότε $1 \leq 2\beta\gamma \leq 3 \Rightarrow \beta\gamma = 1 \Rightarrow \beta=\gamma=1$, οπότε $\alpha+2=2\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$.
  Άρα έχουμε τη λύση $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,1,1)$ και λόγω συμμετρίας τις λύσεις
  $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,1)$ και $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,2)$.
- $\nu = 1$. Τότε $1 \leq \beta\gamma \leq 3 \Rightarrow \beta\gamma \in \{1,2,3\}$.
  Αν $\beta\gamma=1$, τότε $\beta=\gamma=1$ και $\alpha+2=1$, αδύνατη.
  Αν $\beta\gamma=2$, τότε $\beta=2$, $\gamma=1$ και $\alpha+3=2\alpha \Leftrightarrow \alpha=3$.
  Επομένως, $(\alpha,\beta,\gamma)=(3,2,1)$ και λόγω συμμετρίας λύσεις είναι και οι τριάδες:
  $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,1,3),(\alpha,\beta,\gamma)=(3,2,1),(\alpha,\beta,\gamma)=(3,1,2),(\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,3),(\alpha,\beta,\gamma)=(2,3,1)$.
  Αν $\beta\gamma=3$, τότε $\beta=3$, $\gamma=1$ και $\alpha+4=3\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$. (απορρίπτεται, γιατί $\alpha<\beta$).

Επομένως οι τιμές του θετικού ακέραιου ν για τις οποίες υπάρχουν τριάδες θετικών ακέραιων (α,β,γ) που είναι λύσεις της εξίσωσης $\alpha+\beta+\gamma=\nu\alpha\beta\gamma$ είναι: $\nu=1$ ή 2 ή 3.

Πρόβλημα 4

Γράφουμε 99 κύκλους σε μία σειρά και στο εσωτερικό τους γράφουμε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 99:

Χρωματίζουμε καθέναν από τους κύκλους με ένα από τα δύο χρώματα που διαθέτουμε: το κόκκινο (Κ) και το πράσινο (Π). Λέμε ότι ένας χρωματισμός είναι «*καλός*», αν έχει την ιδιότητα:

Οι κόκκινοι κύκλοι στο τμήμα των αριθμών από το 1 μέχρι και το 50 είναι περισσότεροι από τους κόκκινους κύκλους στο τμήμα των αριθμών από το 51 μέχρι και το 99.

(α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.
(β) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί «*καλοί»* χρωματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν.
(Σημείωση: Δύο χρωματισμοί είναι διαφορετικοί, αν έχουν διαφορετικό χρώμα σε έναν τουλάχιστον κύκλο).

Λύση

(α) Κάθε κύκλος μπορεί να χρωματιστεί με 2 διαφορετικά χρώματα, ανεξάρτητα από το χρωματισμό των υπολοίπων κύκλων. Επομένως σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή οι διαφορετικοί χρωματισμοί που μπορούν να κατασκευαστούν είναι:

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\ldots\cdot 2}_{99-\text{φορές}} = 2^{99}.$$

(β) Θεωρούμε ένα χρωματισμό $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{y-\text{κόκκινοι}}$. Ο χρωματισμός Χ είναι «*καλός*», αν $x > y$, ενώ ο χρωματισμός Χ είναι *όχι καλός*, αν $x \le y$.

Έστω Α το σύνολο των «καλών» χρωματισμών και Β το σύνολο των όχι καλών χρωματισμών. Θα αποδείξουμε ότι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται ένα στοιχείο του συνόλου Β και αντιστρόφως.

Πράγματι, αν $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{y-\text{κόκκινοι}} \in A$, τότε $x > y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{(50-x)-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{(49-y)-\text{κόκκινοι}}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Β των *όχι καλών* χρωματισμών, γιατί:

$$x > y \Rightarrow -x < -y \Rightarrow 49 - x < 49 - y \Rightarrow 50 - x \le 49 - y .$$

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Β.

Αντίστροφα, αν $X:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{x-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{y-\text{κόκκινοι}} \in B$, τότε $x \le y$. Αλλάζοντας το χρώμα κάθε αριθμού, προκύπτει ο χρωματισμός $Y:\underbrace{1\ 2\ 3.........50}_{(50-x)-\text{κόκκινοι}}\ \underbrace{51.............98\ 99}_{(49-y)-\text{κόκκινοι}}$, ο οποίος ανήκει στο σύνολο Α των *καλών* χρωματισμών, γιατί:

$$x \le y \Rightarrow -x \ge -y \Rightarrow 49 - x \ge 49 - y \Rightarrow 50 - x > 49 - y.$$

Έτσι σε κάθε στοιχείο του συνόλου Β αντιστοιχίσαμε ένα στοιχείο του συνόλου Α.

Επομένως, μεταξύ των συνόλων Α και Β υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, οπότε τα δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, δηλαδή το πλήθος των καλών χρωματισμών είναι $\frac{2^{99}}{2} = 2^{98}$.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ με περίκεντρο O και $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών $\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{A\Gamma}$ και AB αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_1}$ με $\lambda > 0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\mathrm{AA}_2, \mathrm{BB}_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5, \mathrm{A}_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1w^2 + z_3w + z_5 = 0 \quad (\mathrm{I}),$$
$$z_2w^2 + z_4w + z_6 = 0 \quad (\mathrm{II})$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3\mathrm{A}_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|$.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y .$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α, όπου $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^3 y^3 \left(x^2 + y^2\right)^2 \leq 4\alpha^{10} .$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID, IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2 και C_1, C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ είναι ομοκυκλικά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Στο επίπεδο θεωρούμε $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με $k>1$ και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π. χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα). Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε “*καλό*” όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες. Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των “*καλών*” χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

"Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2(2y-x)=x^2y^4-36.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathrm{O}xy$ θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_1(40,1)$, $\mathrm{A}_2(40,2)$, $\ldots$, $\mathrm{A}_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου $\mathrm{O}xy$ θα το ονομάζουμε “*καλό*”, όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $\mathrm{OA}_1,\mathrm{OA}_2,\ldots,\mathrm{OA}_{40}$, θα το ονομάζουμε “*καλό*”, όταν περιέχει ένα τουλάχιστον “*καλό*” σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των “*καλών*” σημείων και το πλήθος των “*καλών*” ευθυγράμμων τμημάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο Z. Να αποδείξετε ότι:

$$MZ\perp BC \Leftrightarrow \left(CA=CB \quad \text{ή} \quad Z\equiv O\right),$$

δηλαδή ότι “η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA=CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$”.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

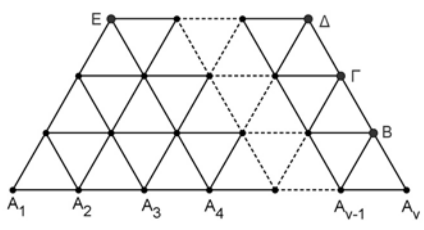
Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1
Οι θετικοί ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση
$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q,$$
όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (p,q).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2
Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε
$$P\left(x^2\right)+Q(x)=P(x)+x^5Q(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ$), εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Κ. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{O}_1,R_1)$ (που έχει το κέντρο στην ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α , Δ), τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ, N είναι τα μέσα των ΖΓ και ΒΕ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Τ), οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4
Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά $\mathrm{A}_1\mathrm{E}$ έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_\nu$ έχει μήκος $\nu-1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).



Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία $\mathrm{B},\Gamma,\Delta,\mathrm{E}$, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013
Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n), $n = 1,2,3,...$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο a_{2013}.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση: $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ τέτοια ώστε $|\mathrm{A}_i| = i,\ i = 1,2,...,160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, ..., \mathrm{M}_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου M_1. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο M_2. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $\mathrm{M}_3, ..., \mathrm{M}_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O},\mathrm{R})$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και έστω Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ (διαφορετικό από το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{BO\Delta}$, έστω c_1, τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},\mathrm{R})$ στο σημείο K και την AB στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{\Gamma O\Delta}$, έστω c_2, τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},\mathrm{R})$ στο σημείο M και την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E. Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AEZ, έστω c_3, τέμνει τον κύκλο $c(\mathrm{O},\mathrm{R})$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και KMN είναι ίσα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 45 λεπτά.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία***

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n\times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\ldots n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R<AB<2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0<r<R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Διάρκεια εξέτασης 4 ώρες .
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία!***

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

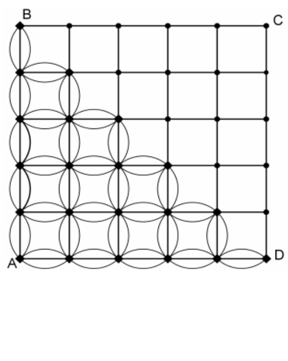
Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων (x, y, p), όπου p πρώτος, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{xy^3}{x+y} = p.$$

Πρόβλημα 2
Έστω $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$ και $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ πολυώνυμα μεταβλητής x, όπου a, b, c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $b > 0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες x_0, x_1, x_2, οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)$, τότε:
(α) Να αποδείξετε ότι: $abc > 28$.
(β) Αν a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $b > 0$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές τους;

Πρόβλημα 3
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}} = 105^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A} = 45^\circ$. Να αποδείξετε ότι:
(α) Αν το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε $\hat{\Gamma} = 30^\circ$
(β) Αν $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, τότε το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4
Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 5$). Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x, y, z) με $x \le y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x + y^2 = 3\cdot 2016^z + 77$$

Πρόβλημα 2

Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\ ,\ P(1)=1,$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ (με $ΑΒ = ΑΓ$) και το ύψος του $ΓΔ$. Ο κύκλος $c_2(Γ, ΓΔ)$ τέμνει την $ΑΓ$ στο σημείο $Κ$, την προέκταση της $ΑΓ$ στο σημείο $Ζ$ και τον κύκλο $c_1(B, BΔ)$ στο σημείο $Ε$. Η $ΔΖ$ τέλος τέμνει τον κύκλο c_1 στο σημείο $Μ$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $Ζ\hat{Δ}Ε = 45^0$, **(β)** Τα σημεία $Ε, Μ$ και $Κ$ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία,

(γ) Η ευθεία $ΒΜ$ είναι παράλληλη με την ευθεία $ΕΓ$.

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε “*καλό*”, όταν:

- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος,
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$.

Να βρεθεί συναρτήσει του n (με κλειστό τύπο) το πλήθος των “*καλών*” ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AC})$ τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράψιμο.

Πρόβλημα 2
Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) το οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3
Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a,b,c) με $a>0>b>c,$ που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $\mathrm{N}=2017-a^3b-b^3c-c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+x-4=0$. Το πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi)=2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0+a_1+\ldots+a_n\equiv 1(\bmod 2)$

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0+a_1+\ldots+a_n$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020
Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα μη σταθερά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα:

$$P\left((Q(x))^3\right) = xP(x)(Q(x))^3.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και πάνω σε αυτό σημείο Γ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB} = 3 \cdot \mathrm{A\Gamma}$. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΑΓΔΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Gamma} = \Delta\mathrm{E} = \Gamma\mathrm{E} > \mathrm{AE}$. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $\mathrm{A\hat{E}Z} = \mathrm{A\hat{\Gamma}E} = \omega$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο Β προς την ευθεία ΕΓ και η κάθετη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ, πάνω στην ευθεία ΕΖ.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα είναι γραμμένοι σε μία ευθεία οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 2030 σε αύξουσα σειρά. Έχουμε το δικαίωμα της «*κίνησης*» Κ:

Επιλέγουμε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς α, β που είναι γραμμένοι σε διαδοχικές θέσεις και αντικαθιστούμε το ζευγάρι (α, β) με τον αριθμό $(\alpha - \beta)^{2020}$.

Εκτελούμε την κίνηση Κ αρκετές φορές μέχρι που να μείνει στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να είναι ο αριθμός αυτός:

(α) ο 2020^{2020}, (β) ο 2021^{2020}.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλες τις τιμές του θετικού ακεραίου κ που ικανοποιούν την ιδιότητα:

Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β ώστε η παράσταση

$$\mathrm{A}(\kappa, \alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \kappa^2\beta^2 - \kappa^2\alpha\beta}$$

να είναι ένας σύνθετος θετικός ακέραιος.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Καλή επιτυχία

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
26^{η} Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2009

ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

Λύση

Αρκεί να υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}^*$ με $(a,b)=1$ τέτοιοι ώστε:

$$\frac{9n-1}{n+7} = \frac{a^2}{b^2}. \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$n = \frac{7a^2+b^2}{9b^2-a^2} = \frac{7(a^2-9b^2)+64b^2}{9b^2-a^2} = -7 + \frac{64b^2}{9b^2-a^2} \qquad (2)$$

Επειδή είναι $(a,b)=1$, έπεται ότι $(a^2,b^2)=1$ και $(9b^2-a^2,b^2)=1$, οπότε από τη σχέση (2) προκύπτει ότι ο αριθμός n είναι ακέραιος, αν, και μόνον αν, ο ακέραιος $9b^2-a^2$ είναι διαιρέτης του 64.

Επειδή οι αριθμοί a,b και n είναι θετικοί ακέραιοι, προκύπτει ότι $9b^2-a^2 \geq 8$, οπότε θα είναι:

$$9b^2-a^2 = (3b+a)(3b-a) \in \{8,16,32,64\}. \qquad (3)$$

Επειδή οι παράγοντες $3b+a$, $3b-a$ έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 6 και διαφορά πολλαπλάσιο του 2 και είναι $3b+a > 3b-a$, από τη σχέση (3) οι μόνες δυνατές περιπτώσεις που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$(3b+a, 3b-a) = (4,2) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(8,4) \text{ ή } (3b+a,3b-a)=(16,2)$$

$$\Leftrightarrow (a,b)=(1,1) \text{ ή } (a,b)=(2,2) \text{ ή } (a,b)=(7,3).$$

Το ζευγάρι $(a,b)=(2,2)$ απορρίπτεται, γιατί ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a,b είναι 2, οπότε προκύπτουν τελικά οι τιμές $n=1$ ή $n=11$.

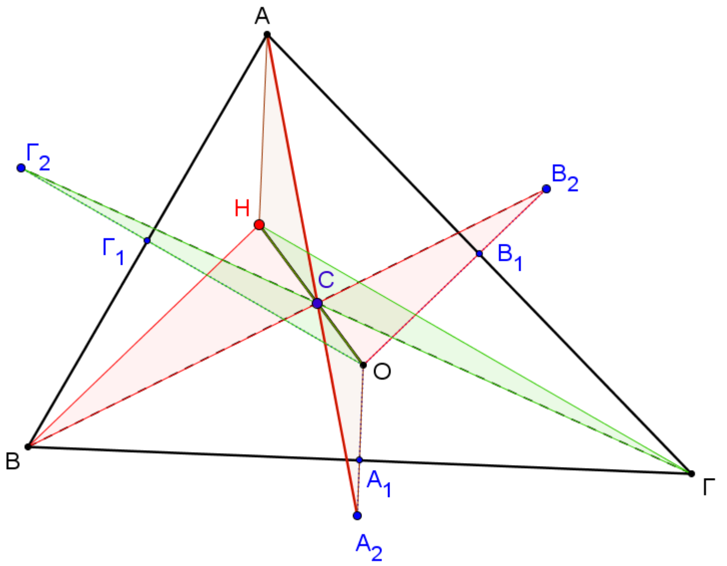
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με περίκεντρο Ο και $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \Gamma_2$ έτσι ώστε: $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ και $\overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}\Gamma_1}$ με $\lambda > 0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $\mathrm{AA}_2, \mathrm{BB}_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

Λύση

Έστω H το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$. Τότε θα ισχύει $\overrightarrow{AH} = 2 \cdot \overrightarrow{OA_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OA_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA_1}$, καταλήγουμε στη σχέση: $\overrightarrow{AH} = \dfrac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{OA_2}$.

Αν τώρα C είναι το σημείο τομής των AA_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων CHA και COA_2), έχουμε: $\overrightarrow{HC} = \dfrac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{CO}$. Δηλαδή η AA_2 περνάει από το σημείο C που χωρίζει το OH σε λόγο $\dfrac{2}{\lambda}$.



Ομοίως, θα ισχύει $\overrightarrow{BH} = 2 \cdot \overrightarrow{OB_1}$. Δεδομένου όμως ότι $\overrightarrow{OB_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB_1}$, καταλήγουμε

$$\overrightarrow{BH} = \frac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{OB_2}.$$

Αν τώρα C' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH (από την ομοιότητα των τριγώνων $C'HA$ και $C'OB_2$), έχουμε: $\overrightarrow{HC'} = \dfrac{2}{\lambda} \cdot \overrightarrow{C'O}$. Δηλαδή η BB_2 περνάει από το σημείο C' που χωρίζει το OH σε λόγο $\dfrac{2}{\lambda}$.

Αν τώρα C'' είναι το σημείο τομής των BB_2 και OH, τότε με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η $ΓΓ_2$ περνάει από το σημείο C'' που χωρίζει το OH σε λόγο $\dfrac{2}{\lambda}$.

Τα σημεία όμως C, C', C'' ταυτίζονται. Άρα οι ευθείες $AA_2, BB_2, ΓΓ_2$ συντρέχουν.

Παρατηρήσεις

(1) Αν $\lambda = 1$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

(2) Αν $\lambda = 2$ τότε το σημείο C ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου του Euler του τριγώνου $ΑΒΓ$. Στη περίπτωση αυτή τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $A_2B_2Γ_2$ είναι ίσα και έχουν κοινό κύκλο του Euler.

(3) Σε κάθε περίπτωση τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $A_2B_2Γ_2$ είναι όμοια με τις πλευρές τους παράλληλες. Το ένα τρίγωνο είναι “εικόνα” του άλλου μέσα από ομοιοθεσίες, οπότε μπορεί να προκύψει λύση και μέσω ομοιοθεσιών.

(4) Λύσεις του προβλήματος μπορούν να δοθούν με χρήση Ααλυτικής Γεωμετρίας ή μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \le 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε στην πρώτη φάση τη γνωστή ανισότητα $2\alpha\beta \le \alpha^2 + \beta^2$, η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $\alpha = \beta$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
&x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = \frac{1}{2}\left(2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2xyz\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2xy \cdot xy + 2yz \cdot yz + 2zx \cdot zx + 2xyz\right)\\
&\le \frac{1}{2}\left[xy\left(x^2+y^2\right) + yz\left(y^2+z^2\right) + yz\left(y^2+z^2\right) + 2xyz\right] \qquad (1)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) - xyz^2 - yzx^2 - zxy^2 + 2xyz\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) - xyz\left(x+y+z-2\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right], \quad \text{(αφού } x+y+z=2\text{).}
\end{aligned}$$

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \le \frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right], \qquad (2)$$

ενώ η ισότητα ισχύει, όπως προκύπτει από την (1), όταν :

$$x = y = z \text{ ή } x = y, z = 0 \text{ ή } y = z, x = 0 \text{ ή } z = x, y = 0,$$

οπότε, αφού είναι $x + y + z = 2$, η ισότητα αληθεύει όταν:

$$\left(x, y, z\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ ή } \left(1,1,0\right) \text{ ή } \left(1,0,1\right) \text{ ή } \left(0,1,1\right). \qquad (3)$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ανισότητα $\alpha\beta \le \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, θεωρώντας $\alpha = 2xy + 2yz + 2zx,\ \beta = x^2 + y^2 + z^2$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(xy+yz+zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\left(2xy+2yz+2zx\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\\
&\le \frac{1}{4}\left(\frac{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(x+y+z\right)^4 = 1. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Από τις (2) και (4) λαμβάνουμε τη ζητούμενη ανισότητα

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \le 1.$$

Η ισότητα στην ανισότητα (4) ισχύει όταν:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2,$$

η οποία συναληθεύει με τις ισότητες (3) για $\left(x, y, z\right) = \left(1,1,0\right)$ ή $\left(1,0,1\right)$ ή $\left(0,1,1\right)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $A_1, A_2, A_3,\ A_4, A_5, A_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r>0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2+z+1=0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 w^2 + z_3 w + z_5 = 0 \quad \text{(I)},$$

$$z_2 w^2 + z_4 w + z_6 = 0 \quad \text{(II)}$$

να αποδείξτε ότι:

(α) Το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο,

(β) $|z_1-z_2|+|z_2-z_3|+|z_3-z_4|+|z_4-z_5|+|z_5-z_6|+|z_6-z_1|==3|z_1-z_4|=3|z_2-z_5|=3|z_3-z_6|$**.**

Λύση

(α) Εφόσον ο μιγαδικός w είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+z+1=0$, θα ισχύει $w^2+w+1=0$**.** Πολλαπλασιάζοντας τη τελευταία εξίσωση με w, έχουμε:

$$w^3+w^2+w=0 \Leftrightarrow w^3+\underbrace{w^2+w+1}_{0}=1 \Leftrightarrow w^3=1.$$

Από τη τελευταία εξίσωση συμπεραίνουμε ότι $|w|=1$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I) $w^2=-w-1$, έχουμε:

$$z_1(-1-w)+z_3w+z_5=0 \Leftrightarrow -z_1-z_1w+z_3w+z_5=0 \Leftrightarrow (z_3-z_1)w=z_1-z_5.$$

Άρα

$$|(z_3-z_1)w|=|z_1-z_5| \Leftrightarrow |z_3-z_1||w|=|z_1-z_5| \Leftrightarrow \boxed{|z_3-z_1|=|z_1-z_5|} \quad \text{(A)}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (I) $w=-w^2-1$, έχουμε:

$$z_1w^2+z_3(-w^2-1)+z_5=0 \Leftrightarrow z_1w^2-z_3w^2-z_3+z_5=0 \Leftrightarrow (z_1-z_3)w^2=z_5-z_3.$$

Άρα έχουμε

$$|(z_1-z_3)w^2|=|z_5-z_3| \Leftrightarrow |z_1-z_3||w^2|=|z_5-z_3| \Leftrightarrow \boxed{|z_3-z_1|=|z_5-z_3|} \quad \text{(B)}.$$

Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε τις ισότητες:

$$|z_1-z_3|=|z_3-z_5|=|z_5-z_1|,$$

δηλαδή το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο.

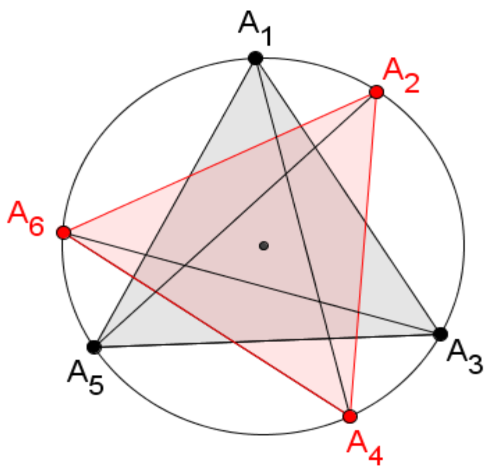
(β) Με όμοιο τρόπο (χρησιμοποιώντας τη σχέση (II)) αποδεικνύουμε ότι και το τρίγωνο $A_2A_4A_6$ είναι ισόπλευρο.

Από γνωστή πρόταση της γεωμετρίας έχουμε ότι $A_1A_2+A_1A_6=A_1A_4$, οπότε χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_1-z_2|+|z_6-z_1|=|z_1-z_4|. \qquad (1)$$

Ομοίως, από την ισότητα $A_3A_2+A_3A_4=A_3A_6$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_2-z_3|+|z_3-z_4|=|z_3-z_6|. \qquad (2)$$



Ομοίως , από την ισότητα $A_5A_4 + A_5A_6 = A_5A_2$ χρησιμοποιώντας μέτρα μιγαδικών λαμβάνουμε:

$$|z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| = |z_2 - z_5|. \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) και (3) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τις ισότη-τες

$$|z_1 - z_4| = |z_3 - z_6| = |z_2 - z_5|$$

λαμβάνουμε:

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
27η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"

ΣΑΒΒΑΤΟ, 27 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4-6x^2+1=7\cdot 2^y. \qquad (1)$$

Λύση (1ος τρόπος)

Παρατηρούμε ότι για $y<0$ η δεδομένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει ακέραιες λύσεις. Ομοίως για $y=0$ η (1) δεν έχει ακέραια λύση

Για $y\in\mathbb{Z},\ y\geq 1,$ η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^4-6x^2+\left(1-7\cdot 2^y\right)=0 \qquad (2)$$

η οποία για να έχει ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσα της αντίστοιχης επιλύουσας της (2) να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, δηλαδή πρέπει

$$\Delta=36-4\left(1-7\cdot 2^y\right)=32+4\cdot 7\cdot 2^y=4\cdot\left(8+7\cdot 2^y\right)$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Επειδή είναι $4=2^2$, για να είναι ο αριθμός Δ τέλειο τετράγωνο ακέραιου πρέπει και αρκεί ο αριθμός

$$\mathrm{A}=8+7\cdot 2^y,\ y\geq 1$$

να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Όμως ο αριθμός Α είναι άρτιος, οπότε, αν είναι τέλειο τετράγωνο, τότε θα ισχύει ότι

$$\mathrm{A}=8+7\cdot 2^y=(2\kappa)^2=4\kappa^2,\kappa\in\mathbb{Z},\kappa>0.$$

$$\Leftrightarrow 2+7\cdot 2^{y-2}=\kappa^2,\kappa\in\mathbb{Z},\kappa>0 \qquad (3)$$

Η εξίσωση (3) για $y=1$ είναι αδύνατη, ενώ για $y=2$ δίνει $\kappa=3$, οπότε είναι $\mathrm{A}=36$ και $\Delta=4\cdot 36=12^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2=\frac{6\pm 12}{2}\Leftrightarrow x^2=9 \text{ ή } x^2=-3 \text{ (απορρίπτεται)} \Leftrightarrow x=\pm 3.$$

Για $y=3$, η εξίσωση (3) δίνει $\kappa=4$, οπότε είναι $\mathrm{A}=64$ και $\Delta=4\cdot 64=16^2$. Έτσι η εξίσωση (2) έχει τις λύσεις

$$x^2=\frac{6\pm 16}{2}\Leftrightarrow x^2=11 \text{ ή } x^2=-5,$$

από τις οποίες καμία δεν είναι αποδεκτή.

Για $y \geq 4$, αφού ο ακέραιος $\mathrm{B} = 2 + 7 \cdot 2^{y-2}$ είναι άρτιος, η εξίσωση (3) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$2 + 7 \cdot 2^{y-2} = (2\lambda)^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0 \Leftrightarrow 1 + 7 \cdot 2^{y-3} = 2\lambda^2, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 0,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Άρα οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης είναι οι: $(x, y) = (\pm 3, 2)$.

2^{ος} τρόπος

Όπως και στον πρώτο τρόπο παρατηρούμε ότι για $y \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη στους ακέραιους.

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\left(x^2 + 2x - 1\right)\left(x^2 - 2x - 1\right) = 7 \cdot 2^y, \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 + 2x - 1 = 2^a,\ a \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b, b \in \mathbb{Z}_+ \\ a + b = y \end{matrix}\right\} (\Sigma_1) \text{ ή } \left\{\begin{matrix} x^2 - 2x - 1 = 2^\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}_+ \\ x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 2^\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}_+ \\ \kappa + \lambda = y \end{matrix}\right\} (\Sigma_2)$$

Λύση (Σ_1)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^a$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4\left(1 + 2^a\right) = 4\left(2 + 2^a\right)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $\mathrm{K} = 2 + 2^a$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $a = 0$ ή $a = 2$ ο αριθμός Κ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $a = 1$ είναι $\mathrm{K} = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = -3$ ή $x = 1$.

Για $x = -3$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $14 = 7 \cdot 2^b$ η οποία έχει τη λύση $b = 1$, οπότε προκύπτει $y = a + b = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (-3, 2)$

Για $x = 1$ η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 7 \cdot 2^b$ δίνει την εξίσωση $-2 = 7 \cdot 2^b$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a \geq 3$, αφού ο αριθμός $\mathrm{K} = 2 + 2^a$ είναι άρτιος, πρέπει

$$\mathrm{K} = 2 + 2^a = (2m)^2, m \in \mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow 1 + 2^{a-2} = 2m^2, m \in \mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

Λύση (Σ_2)

Για να έχει ακέραια λύση η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^\kappa$ **πρέπει** η διακρίνουσά της $\Delta = 4 + 4\left(1 + 2^\kappa\right) = 4\left(2 + 2^\kappa\right)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου, για το οποίο **πρέπει και αρκεί** ο αριθμός $\Lambda = 2 + 2^\kappa$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου.

Για $\kappa = 0$ ή $\kappa = 2$ ο αριθμός Λ δεν είναι τέλειο τετράγωνο, ενώ για $\kappa = 1$ είναι $\Lambda = 4 = 2^2$, οπότε η εξίσωση $x^2 - 2x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ έχει τις λύσεις $x = 3$ ή $x = -1$.

Για $x = 3$ η εξίσωση $x^2 + 2x - 1 = 7 \cdot 2^\lambda$ δίνει την εξίσωση $14 = 7 \cdot 2^\lambda$ η οποία έχει τη λύση $\lambda = 1$, οπότε προκύπτει $y = \kappa + \lambda = 2$ και για την δεδομένη εξίσωση η λύση $(x, y) = (3, 2)$

Για $x=-1$ η εξίσωση $x^2+2x-1=7\cdot 2^{\lambda}$ δίνει την εξίσωση $-2=7\cdot 2^{\lambda}$ η οποία είναι αδύνατη.

Για $a\geq 3$, αφού ο αριθμός $\Lambda=2+2^{\lambda}$ είναι άρτιος πρέπει

$$\Lambda=2+2^{\kappa}=\left(2m\right)^2, m\in\mathbb{Z}_+ \Leftrightarrow 1+2^{\kappa-2}=2m^2, m\in\mathbb{Z}_+,$$

η οποία είναι αδύνατη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα $2\alpha,$ όπου $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

$$x^3y^3\left(x^2+y^2\right)^2\leq 4\alpha^{10}. \qquad (1)$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x,y δίνεται ότι $x+y=2\alpha$, $\alpha>0$, μπορούμε να θέσουμε:

$$x=\alpha+t,\ y=\alpha-t,\ -\alpha\leq t\leq\alpha.$$

Με αντικατάσταση των x,y στην (1), προκύπτει ότι, αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha+t\right)^3\left(\alpha-t\right)^3\left[\left(\alpha+t\right)^2+\left(\alpha-t\right)^2\right]^2\leq 4\alpha^{10}\\
\Leftrightarrow\quad &4\left(\alpha^2-t^2\right)^3\left(\alpha^2+t^2\right)^2\leq 4\alpha^{10}\\
\Leftrightarrow &\left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^2-t^2\right)^2\left(\alpha^2+t^2\right)^2\leq\alpha^{10}\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^4-t^4\right)^2\leq\alpha^{10},
\end{aligned}$$

η οποία αληθεύει, αφού λόγω της υπόθεσης $-\alpha\leq t\leq\alpha$ για τη νέα μεταβλητή t, έχουμε

$$\left(\alpha^2-t^2\right)\left(\alpha^4-t^4\right)^2\leq\alpha^2\cdot\alpha^8=\alpha^{10}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $t=0$, δηλαδή όταν $x=y=\alpha$.

Παρατήρηση

Για $x+y=2\alpha$ ισχύει ότι

$$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\alpha^2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow x^3y^3\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^6=\alpha^6 \qquad (2)$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x=y=\alpha$.

Επίσης, για $x+y=2\alpha$ ισχύει ότι

$$2\alpha^2\leq x^2+y^2\leq 4\alpha^2 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow 4\alpha^4\leq\left(x^2+y^2\right)^2\leq 16\alpha^4 \qquad (4)$$

όπου η ισότητα αριστερά ισχύει για $x=y=\alpha$, ενώ η ισότητα δεξιά ισχύει για $\left(x,y\right)=\left(2\alpha,0\right)$ ή $\left(0,2\alpha\right)$.

Όμως από τις (2) και (4) δεν μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα. Επομένως πρέπει να προσδιορίσουμε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y)=x^3y^3\left(x^2+y^2\right)^2=xy\left[xy\left(x^2+y^2\right)\right]^2=xyg(x,y),$$

υπό τη συνθήκη $x+y=2\alpha$. Όμως η συνάρτηση $g(x,y)=x^2y^2\left(x^2+y^2\right)^2$ έχει μέγιστη τιμή, όταν η συνάρτηση $h(x,y)=xy\left(x^2+y^2\right)$έχει μέγιστη τιμή, δηλαδή όταν η συνάρτηση

$$\varphi(x)=h(x,2\alpha-x)=x(2\alpha-x)\left(2x^2-4\alpha x+4\alpha^2\right),0\le x\le 2\alpha$$

έχει μέγιστη τιμή $\varphi(\alpha)=2\alpha^4$, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση παραγώγων. Από αυτό και την (1) μπορεί να προκύψει η ζητούμενη ανισότητα.

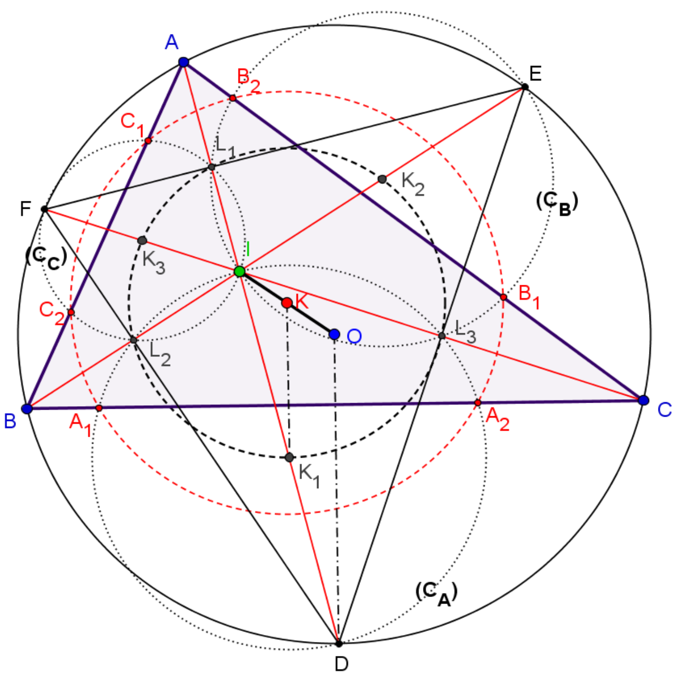
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI,BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D,E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID,IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC,AC και AB στα σημεία A_1,A_2, B_1,B_2 και C_1,C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι τα σημεία A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2 είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Έστω (C_A) ο κύκλος με κέντρο το K_1 και διάμετρο ID (K_1 το μέσο του ID), (C_B) ο κύκλος με κέντρο το K_2 και διάμετρο IE (K_2 το μέσο του IE) και (C_C) ο κύκλος με κέντρο το K_3 και διάμετρο IF (K_3 μέσο του IF).



Σχήμα 1

Θεωρούμε τις γνωστές ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων:

$$DI=DB=DC,\ EI=EA=EC\ \text{και}\quad FI=FA=FB \qquad (1)$$

Οι κύκλοι (C_A) και (C_C) τέμνονται στα σημεία I και L_2.

Οι γωνίες $D\hat{L}_2I$ και $F\hat{L}_2I$ είναι ορθές διότι βαίνουν στις διαμέτρους DI και FI των κύκλων (C_A) και (C_C) οπότε τα σημεία D, L_2, F είναι συνευθειακά.

Σε συνδυασμό με τις ισότητες (1) καταλήγουμε ότι η DF είναι μεσοκάθετη της IB. Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι η DE είναι μεσοκάθετη της IC και η EF είναι μεσοκάθετη της IA.

Άρα το σημείο I είναι ορθόκεντρο του τριγώνου DEF του οποίου το περίκεντρο ταυτίζεται με το περίκεντρο O του τριγώνου ABC.

Τα σημεία K_1, K_2, K_3 και L_1, L_2, L_3 ανήκουν στο κύκλο του EULER του τριγώνου DEF που έχει κέντρο το μέσο K του ευθύγραμμου τμήματος IO.

Στο τρίγωνο IOD, έχουμε: K_1 το μέσο του ID και K το μέσο του IO.

Άρα $KK_1 // OD$ και επειδή $OD \perp BC$ συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη του A_1A_2. Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το K ανήκει στη μεσοκάθετη των B_1B_2 και C_1C_2.

Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K.

Θεωρώντας τη δύναμη του σημείου A ως προς τους κύκλους (C_B) και (C_C) έχουμε:

$$AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2 = AI \cdot AL_1 .$$

Άρα τα σημεία B_1, B_2, C_1, C_2 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το σημείο K.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

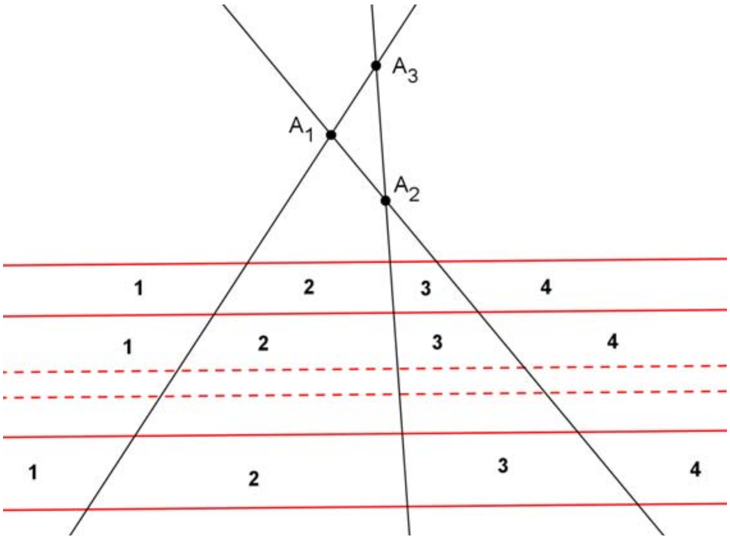
Στο επίπεδο θεωρούμε $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με $k>1$ και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π. χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα). Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "*καλό*" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες. Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "*καλών*" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n.

Λύση

Προφανώς οι k (διαφορετικές μεταξύ τους) παράλληλες ευθείες ορίζουν $k-1$ διαδοχικές παράλληλες "λωρίδες" στο επίπεδο. Επίσης οι n διαφορετικές, μη παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, τέμνονται ανά δύο σε $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ σημεία.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

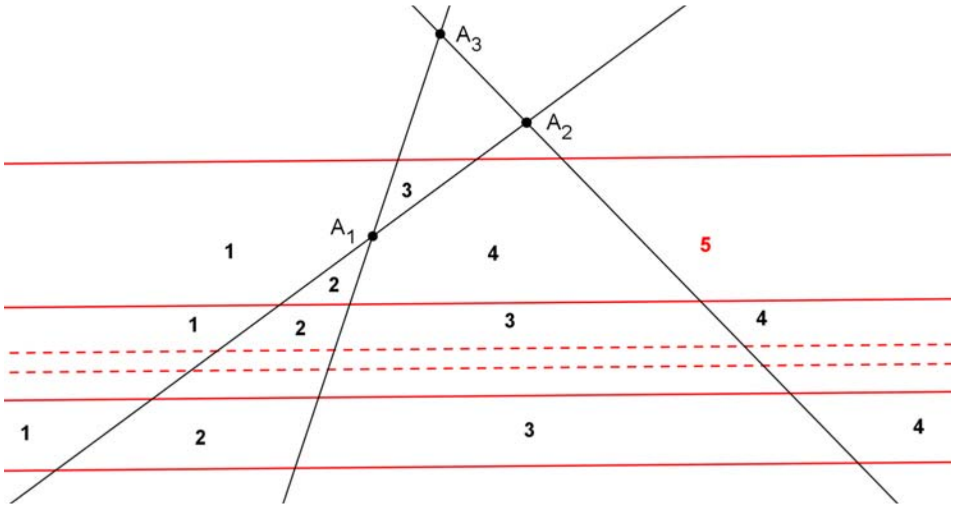
1η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εκτός των παράλληλων "λωρίδων".



Σχήμα 2

Στη περίπτωση αυτή κάθε μία από τις n ευθείες ορίζει σε κάθε "λωρίδα" $n+1$ "καλά" χωρία. Άρα ορίζονται συνολικά $(k-1)(n+1)$ συνολικά "καλά" χωρία. Στο σχήμα 2 βλέπουμε τα "καλά" χωρία που δημιουργούνται από $n=3$ ευθείες.

Αν τώρα ένα από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών το θεωρήσουμε μέσα σε μία λωρίδα των παράλληλων ευθειών, τότε στη λωρίδα αυτή θα δημιουργηθεί ένα επί πλέον "καλό" χωρίο (σχήμα 3).

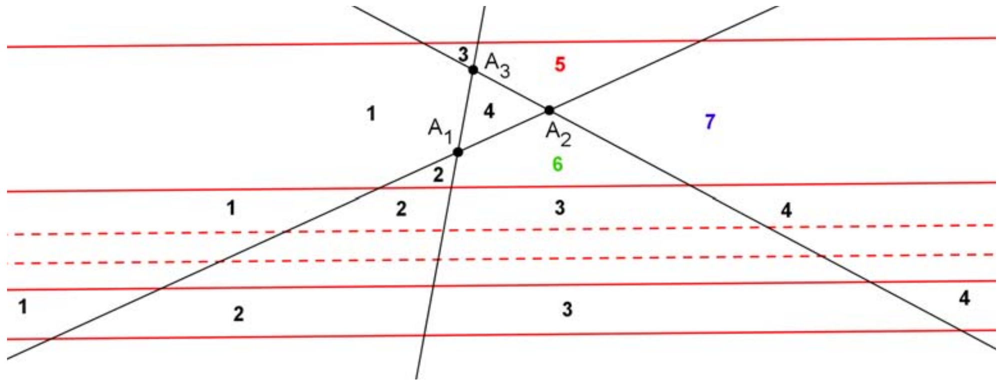


Σχήμα 3

Άρα $(k-1)(n+1)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός "καλών" χωρίων που μπορούν να δημιουργηθούν, διότι με την είσοδο καθενός από τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής στις λωρίδες, αυξάνεται ο αριθμός των "καλών" χωρίων.

2η Περίπτωση: Τα $\binom{n}{2}$ σημεία τομής των n ευθειών (που τέμνονται ανά δύο), βρίσκονται εντός των παράλληλων λωρίδων.

Συνεχίζοντας τη διαδικασία εισαγωγής των σημείων τομής μέσα στις “λωρίδες”, θα προστίθεται κάθε φορά και ένα “καλό” χωρίο. Έτσι στο τέλος θα έχουμε επί πλέον $\binom{n}{2}$ “καλά” χωρία.



Σχήμα 4

Τελικά ο μέγιστος αριθμός των “καλών” χωρίων είναι:

$$(k-1)(n+1)+\frac{n(n-1)}{2}.$$

Εφόσον τώρα (σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος), ο ελάχιστος αριθμός των “καλών” χωρίων είναι 176 και ο μέγιστος 221, θα ισχύει:

$$\begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ (k-1)(n+1)+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k-1)(n+1)=176 \\ 176+\dfrac{n(n-1)}{2}=221 \end{cases}. \Leftrightarrow k=17, n=10\,.$$

Δεύτερος τρόπος υπολογισμού του μέγιστου αριθμού των καλών χωρίων.

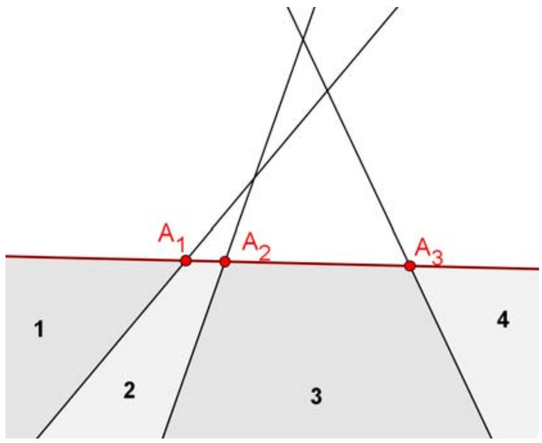
Με τη συλλογιστική που αναπτύχθηκε στον προηγούμενο τρόπο, ο μέγιστος αριθμός των καλών χωρίων επιτυγχάνεται όταν τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρεθούν μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες.

Θα υπολογίσουμε λοιπόν όλα τα χωρία που δημιουργούνται από τις $k+n$ διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα χωρία που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων (έχοντας πάντα υπ΄ όψιν ότι τα σημεία τομής των τεμνομένων ευθειών βρίσκονται μέσα στις λωρίδες που δημιουργούν οι παράλληλες ευθείες).

Έστω $p(m)$ το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από m ευθείες οι οποίες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο.

Προφανώς $p(1)=2$. Θεωρούμε τώρα ότι $p(m)$ είναι το πλήθος των χωρίων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από τις m ευθείες και φέρουμε μία επί πλέον ευθεία με σκοπό να υπολογίσουμε επαγωγικά το $p(m+1)$.

Προφανώς $p(m+1)=p(m)+r$, όπου r είναι το πλήθος των επί πλέον χωρίων που “δημιουργούνται” με τη χάραξη της $(m+1)^{ης}$ ευθείας.



Σχήμα 5

Με τη χάραξη λοιπόν της $(m+1)^{ης}$ ευθείας "δημιουργούνται" τόσα επί πλέον χωρία, όσα είναι τα σημεία τομής της με τις υπόλοιπες ευθείες αυξημένα κατά ένα. Αν δηλαδή η $(m+1)$-ευθεία είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι $m-1$ και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m$ επί πλέον χωρία.

Αν όμως η $m+1$ ευθεία δεν είναι παράλληλη με κάποια από τις προηγούμενες ευθείες, τότε τα σημεία τομής της θα είναι m και κατά συνέπεια "δημιουργούνται" $r=m+1$ επί πλέον χωρία.

Αν λοιπόν οι ευθείες δεν είναι ανά δύο παράλληλες μεταξύ τους και δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, μπορούμε να διατυπώσουμε την αναδρομική σχέση:

$$p(m)=p(m-1)+m \text{ και } p(1)=2\,.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει:

$$p(m)=\frac{m^2+m+2}{2}\,.$$

Θεωρώντας τώρα τα δεδομένα του προβλήματος, συμπεραίνουμε ότι τα χωρία που "δημιουργούνται", είναι: $\frac{n^2+n+2}{2}+k(n+1)$. Τα καλά χωρία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τα $2(n+1)$ που βρίσκονται εκτός των παραλλήλων ευθειών.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΕΜΕ
28η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011
Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3y^2\left(2y-x\right)=x^2y^4-36.$$

Λύση

Μετά τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^2y^2\left(x-y\right)^2-6^2=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow\left[xy\left(x-y\right)-6\right]\cdot\left[xy\left(x-y\right)+6\right]=0,\ x,y\in\mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x-y\right)=6,\ \ x,y\in\mathbb{Z},\qquad \text{ή}\quad xy\left(x-y\right)=-6,\ x,y\in\mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow xy\left(x-y\right)=6,\ \ x,y\in\mathbb{Z},\quad (1)\quad \text{ή}\quad xy\left(y-x\right)=6,\ x,y\in\mathbb{Z}.\qquad (2)$$

Από τη μορφή των (1) και (2) προκύπτει ότι, αν $\left(x_0,y_0\right)$ είναι λύση της (1), τότε το ζευγάρι $\left(y_0,x_0\right)$ είναι λύση της (2) και αντιστρόφως. Επομένως, αρκεί να λύσουμε μόνον την εξίσωση (1). Επειδή $x,y\in\mathbb{Z}$, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με :

$$\left\{xy=6,x-y=1\right\}\left(\Sigma_1\right)\text{ή }\left\{xy=-6,x-y=-1\right\}\left(\Sigma_2\right)$$

$$\text{ή}\left\{xy=3,x-y=2\right\}\left(\Sigma_3\right)\text{ή }\left\{xy=-3,x-y=-2\right\}\left(\Sigma_4\right)$$

$$\text{ή}\left\{xy=1,x-y=6\right\}\left(\Sigma_5\right)\text{ ή }\left\{xy=-1,x-y=-6\right\}\left(\Sigma_6\right)$$

$$\text{ή}\left\{xy=2,x-y=3\right\}\left(\Sigma_7\right)\text{ή }\left\{xy=-2,x-y=-3\right\}\left(\Sigma_8\right).$$

Από τα 8 συστήματα μόνον τα $\left(\Sigma_1\right),\left(\Sigma_3\right),\ \left(\Sigma_8\right)$ δίνουν τις ακέραιες λύσεις:

$$\left(x,y\right)=\left(3,2\right),\left(x,y\right)=\left(-2,-3\right),\left(x,y\right)=\left(3,1\right),$$

$$\left(x,y\right)=\left(-1,-3\right),\left(x,y\right)=\left(-2,1\right)\text{και }\left(x,y\right)=\left(-1,2\right).^{\cdot}$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η εξίσωση (2) έχει στους ακέραιους τις λύσεις

$$\left(x,y\right)=\left(2,3\right),\left(x,y\right)=\left(-3,-2\right),\left(x,y\right)=\left(1,3\right),$$

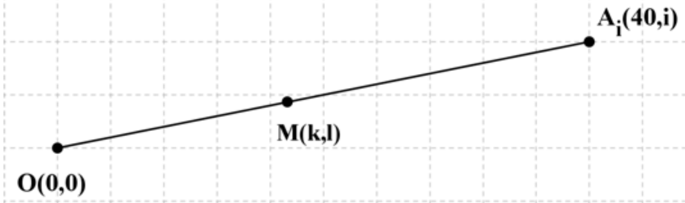
$$\left(x,y\right)=\left(-3,-1\right),\left(x,y\right)=\left(1,-2\right)\text{και }\left(x,y\right)=\left(2,-1\right).^{\cdot}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1)$, $A_2(40,2)$, …, $A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i=1,2,3,\ldots,40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1,OA_2,\ldots,OA_{40}$, θα το ονομάζουμε "*καλό*", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "*καλό*" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "*καλών*" σημείων και το πλήθος των "*καλών*" ευθυγράμμων τμημάτων.

Λύση.

Στη λύση που ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με ΜΚΔ(k,l), το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων αριθμών k,l.



Σχήμα 1

Ένα σημείο Μ(k,l) θα ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος ΟΑ_i, αν και μόνο αν, τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΟΜ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΟΑ}_i}$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$), δηλαδή πρέπει να ισχύει $\frac{i}{40}=\frac{l}{k}$ (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0<k\le 40$).

Για να είναι τώρα το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_i "καλό", θα πρέπει το κλάσμα $\frac{i}{40}$ να μην είναι ανάγωγο (ώστε να δημιουργούνται ισοδύναμα με το $\frac{i}{40}$ κλάσματα με ακέραιους όρους που θα δημιουργούν το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{l}{k}$ και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του "καλού" σημείου Μ(k,l)).

Επομένως, για να υπάρχει "καλό" σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_i (ώστε να χαρακτηριστεί και το ίδιο ως "καλό") θα πρέπει ΜΚΔ$(40,i)>1$. Αν τώρα ΜΚΔ$(40,i)>1$, τότε θα υπάρχουν ΜΚΔ$(40,i)-1$ "καλά" σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i. Στο σημείο $\text{Α}_2(40,2)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_2, στο οποίο ανήκει το "καλό" σημείο $(20,1)$. Στο σημείο $\text{Α}_4(40,4)$ αντιστοιχεί το "καλό" ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ_4, στο οποίο ανήκουν τα "καλά" σημεία $(10,1)$, $(20,2)$, $(30,3)$. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τον πίνακα:

A2(40,2)	ΜΚΔ(40,2)=2	1	A40(40,40)	ΜΚΔ(40,40)=40	39
A4(40,4)	ΜΚΔ(40,4)=4	3	A38(40,38)	ΜΚΔ(40,38)=2	1
A5(40,5)	ΜΚΔ(40,5)=5	4	A36(40,36)	ΜΚΔ(40,36)=4	3
A6(40,6)	ΜΚΔ(40,6)=2	1	A35(40,35)	ΜΚΔ(40,35)=5	4
A8(40,8)	ΜΚΔ(40,8)=8	7	A34(40,34)	ΜΚΔ(40,34)=2	1
A10(40,10)	ΜΚΔ(40,10)=10	9	A32(40,32)	ΜΚΔ(40,32)=8	7
A12(40,12)	ΜΚΔ(40,12)=4	3	A30(40,30)	ΜΚΔ(40,30)=10	9
A14(40,14)	ΜΚΔ(40,14)=2	1	A28(40,28)	ΜΚΔ(40,28)=4	3
A15(40,15)	ΜΚΔ(40,15)=5	4	A26(40,26)	ΜΚΔ(40,26)=2	1
A16(40,16)	ΜΚΔ(40,16)=8	7	A25(40,25)	ΜΚΔ(40,25)=5	4

A18(40,18)	ΜΚΔ(40,18)=2	1	A24(40,24)	ΜΚΔ(40,24)=8	7
A20(40,20)	ΜΚΔ(40,20)=20	19	A22(40,22)	ΜΚΔ(40,22)=2	1
		60			**80**

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των "καλών" τμημάτων είναι 24 και το πλήθος των καλών σημείων 140.

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω πίνακας έχει ευρεία ανάπτυξη για διδακτικούς λόγους.
2. Ο υπολογισμός του πίνακα διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του μέγιστου κοινού διαιρέτη:
$$\text{ΜΚΔ}\,(k,l)=\text{ΜΚΔ}\,(l,k)=\text{ΜΚΔ}\,(l-k,k)=\text{ΜΚΔ}\,(|l-k|,|k|).$$
3. Το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης ϕ του Euler. Είναι γνωστό ότι $n-\phi(n)$ παριστά το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον n και δεν είναι πρώτοι προς αυτόν. Επειδή όμως $40=5\cdot 2^3$, έχουμε:
$$\phi(40)=40\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=40\frac{1}{2}\frac{4}{5}=16.$$
Άρα το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων είναι $40-\phi(40)=24$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a,b,c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:
$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}.$$

.

Λύση.

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου ως εξής:
$$\sqrt[3]{a^2+2bc}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(a^2+2bc\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{a^2+2bc+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(a^2+2bc+24\right),$$
$$\sqrt[3]{b^2+2ca}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(b^2+2ca\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{b^2+2ca+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(b^2+2ca+24\right),$$
$$\sqrt[3]{c^2+2ab}=\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\sqrt[3]{\left(c^2+2ab\right)\cdot 12\cdot 12}\le\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\cdot\frac{c^2+2ab+12+12}{3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(c^2+2ab+24\right),$$
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε
$$S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab}\le\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+72\right)$$
$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}}\left[\left(a+b+c\right)^2+72\right]=\frac{36}{\sqrt[3]{12^2}}=\frac{18}{\sqrt[3]{18}}=3\sqrt[3]{12}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$
\begin{aligned}
& a^2+2bc=12,\ b^2+2ca=12,\ c^2+2ab=12 \\
& \Leftrightarrow (a-b)(a+b-2c)=0,(b-c)(b+c-2a)=0,c^2+2ab=12 \\
& \Leftrightarrow (a-b)(6-3c)=0,(b-c)(6-3a)=0,c^2+2ab=12 \\
& \Leftrightarrow a=b=c=2.
\end{aligned}
$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $3\sqrt[3]{12}$ και λαμβάνεται όταν είναι $a=b=c=2$.

Παρατήρηση

1. *Η επιλογή του αριθμού 12 ως δεύτερου και τρίτου όρου για την εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου οφείλεται στο ότι μόνον για αυτόν είναι δυνατόν να αληθεύει η ισότητα και στις τρεις επιμέρους ανισότητες. Αυτό είναι αναγκαίο για είναι δυνατόν η παράσταση να πάρει την τιμή που εμφανίζεται ως ένα πάνω φράγμα της. Για παράδειγμα, αν είχαμε χρησιμοποιήσει τις ανισότητες*

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{a^2+2bc} &= \sqrt[3]{\left(a^2+2bc\right)\cdot 1\cdot 1} \le \frac{a^2+2bc+2}{3}, \\
\sqrt[3]{b^2+2ca} &= \sqrt[3]{\left(b^2+2ca\right)\cdot 1\cdot 1} \le \frac{b^2+2ca+2}{3}, \\
\sqrt[3]{c^2+2ab} &= \sqrt[3]{\left(c^2+2ab\right)\cdot 1\cdot 1} \le \frac{c^2+2ab+2}{3},
\end{aligned}
$$

τότε με πρόσθεση κατά μέλη θα βρίσκαμε

$$
\begin{aligned}
S=\sqrt[3]{a^2+2bc}+\sqrt[3]{b^2+2ca}+\sqrt[3]{c^2+2ab} &\le \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+6}{3} \\
&= \frac{(a+b+c)^2+6}{3}=\frac{42}{3}=14.
\end{aligned}
$$

Η ισότητα στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να αληθεύει, όπως προκύπτει από το σύστημα

$$
\begin{aligned}
& a^2+2bc=1,\ b^2+2ca=1,\ c^2+2ab=1 \\
& \Rightarrow (a+b+c)^2=3, \text{ άτοπο.}
\end{aligned}
$$

2. *Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό*

$$
x=\sqrt[3]{a^2+2bc},\ y=\sqrt[3]{b^2+2ca},\ z=\sqrt[3]{c^2+2ab},
$$

μέσω του οποίου η συνάρτηση γίνεται $S(x,y,z)=x+y+z$, *της οποίας ζητάμε τη μέγιστη τιμή υπό τη συνθήκη* $x^3+y^3+z^3=(a+b+c)^2=36$. *Στη συνέχεια θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει* ***τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange****, χωρίς σοβαρό πρόβλημα στις πράξεις. Επίσης θα μπορούσε κάποιος να εργαστεί χρησιμοποιώντας και άλλες κλασικές ανισότητες, όπως η ανισότητα του Holder ή την ανισότητα των δυνάμεων.*

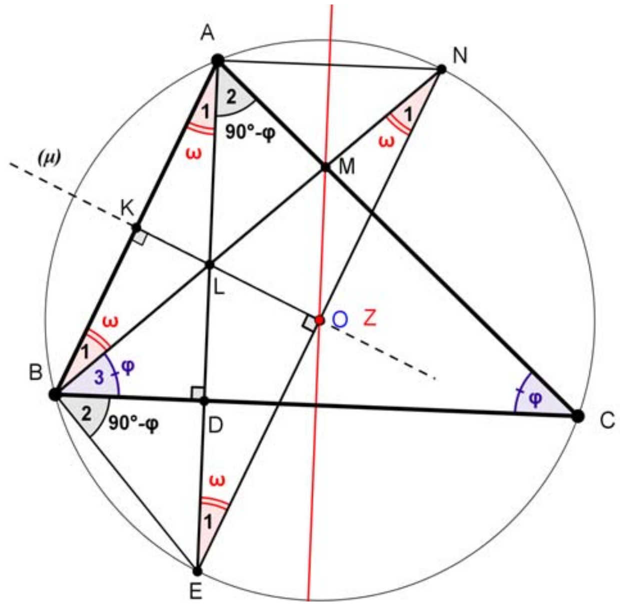
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB<AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο $\boldsymbol{Z}$.

Να αποδείξετε ότι: $MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O)$, δηλαδή ότι "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

Λύση

Επειδή το σημείο L ανήκει στη μεσοκάθετη του AB, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega}$ και κατά συνέπεια $AN = BE$. Άρα το τετράπλευρο $ABEN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB // EN$, οπότε η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN και $\hat{E}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\omega}$.



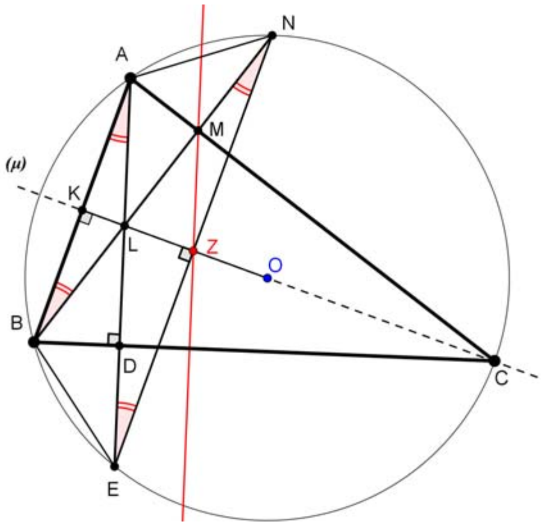
Σχήμα 2

Έστω ότι το σημείο Z ***ταυτίζεται με το σημείο*** O (Σχήμα 2).

Τότε η EN γίνεται διάμετρος του κύκλου, οπότε $E\hat{B}N = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$. Αν $\hat{C} = \hat{\varphi}$ τότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$ έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 90^o - \hat{\varphi}$.

Από τη τελευταία ισότητα (σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$) έχουμε: $\hat{B}_3 = \hat{\varphi}$. Άρα το M ανήκει στη μεσοκάθετη του BC ($MB = MC$). Το σημείο O ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη του BC και επειδή ταυτίζεται με το σημείο Z, συμπεραίνουμε ότι η MZ είναι μεσοκάθετος της BC.

Έστω ότι το τρίγωνο ABC ***είναι ισοσκελές*** **(**$CA = CB$**).** Τότε η μεσοκάθετος (μ) της AB είναι ύψος του τριγώνου ABC (Σχήμα 2), δηλαδή το L είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και κατά συνέπεια ***το σημείο*** M ***είναι το μέσο του τμήματος*** LN (η BM είναι ύψος και το σημείο N είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου L ως προς την AC).



Σχήμα 3

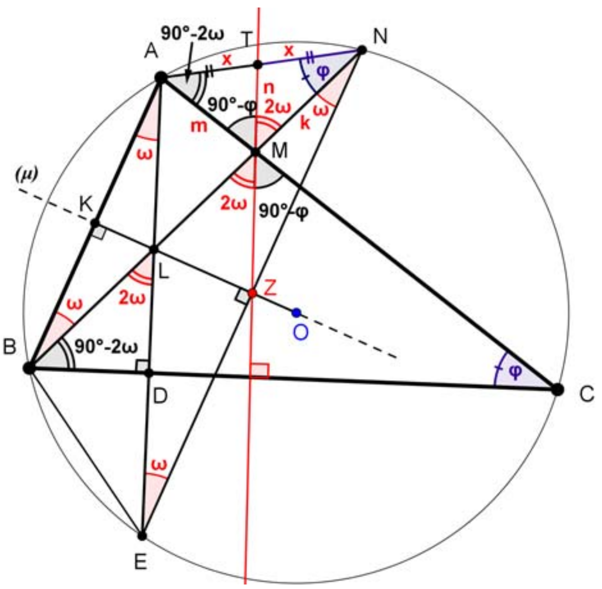
Το σημείο Z είναι το μέσο του τμήματος EN (διότι η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN).

Άρα η MZ είναι παράλληλη με την AD.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η MZ είναι κάθετη στην BC και θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου (Σχήμα 4).

Έστω λοιπόν ότι η MZ είναι κάθετη στην BC. Τότε η MZ θα είναι παράλληλη με την AE ($MZ // AE$).

Αν T είναι η τομή της MZ με την AN τότε το T είναι το μέσο AN (διότι Z είναι το μέσο της NE και $MZ // AE$). Άρα τα τρίγωνα MTA και MTN έχουν το ίδιο εμβαδό ($E_1 = (MTA) = (MTN) = E_2$).



Σχήμα 4

Από την παραλληλία $MZ // AE$, προκύπτει η “μεταφορά” γωνιών στο τρίγωνο AMN στο οποίο η MT είναι διάμεσος. Σημειώνουμε ότι:

$B\hat{L}D = 2\hat{\omega}$ (διότι η $B\hat{L}D$ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου LEN).
$L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$ (διότι $LD \,//\, MZ$ οπότε $B\hat{L}D = L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$).

Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ για το εμβαδό τριγώνου, έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2}mn\,\eta\mu(90-\varphi) = \frac{1}{2}mx\,\eta\mu(90-2\omega)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}kn\,\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2}kx\,\eta\mu\varphi$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\eta\mu\,2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\,2\omega}{\eta\mu\,\varphi} \Leftrightarrow \eta\mu\,2\varphi = \eta\mu\,4\omega\,.$$

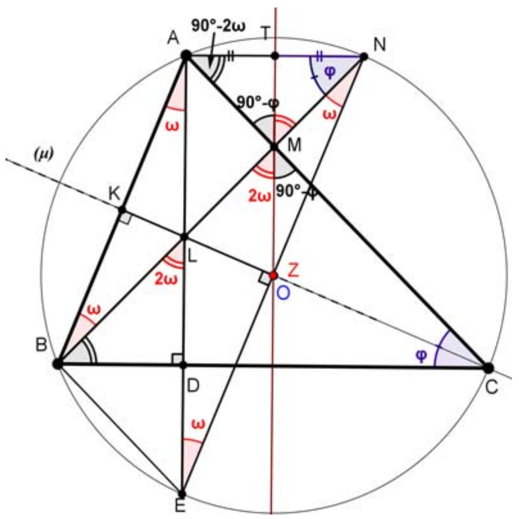
Από τη τελευταία ισότητα ημιτόνων (και με δεδομένο ότι οι γωνίες ω,φ είναι γωνίες τριγώνου) καταλήγουμε στις ισότητες:

$$2\varphi = 4\omega \Leftrightarrow \varphi = 2\omega \qquad (A) \quad ή \quad 2\varphi = \pi - 4\omega \Leftrightarrow \varphi + 2\omega = \frac{\pi}{2} \qquad (B)\,.$$

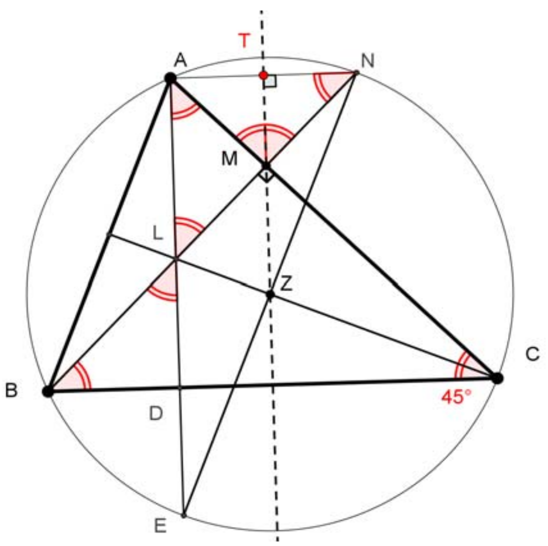
Από την ισότητα (A) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ισοσκελές ($TM = TN$) και κατά συνέπεια το τρίγωνο AMN είναι ορθογώνιο στο M ($A\hat{M}N = 90^o$). Άρα η BM είναι ύψος του τριγώνου ABC και επομένως το L ορθόκεντρο, δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) διότι η μεσοκάθετος KZ είναι και ύψος.

Από την ισότητα (B) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ορθογώνιο στο T, δηλαδή η MT είναι μεσοκάθετος της AN. Άρα η MT θα διέρχεται από το O (οπότε $Z \equiv O$).

Παρατήρηση



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ και $\hat{C} = \hat{\varphi} = 45^o$, τότε τα τρίγωνα TMN, TMA και AMN είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Το τετράπλευρο $ABCN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα η TM είναι μεσοκάθετη της BC.

Στη περίπτωση αυτή και το σημείο Z *ταυτίζεται με το σημείο* O*, οπότε η διάζευξη των προτάσεων* $\left(CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O\right)$ *είναι εγκλειστική.*

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
29η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2012

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους και ικανοποιούν την εξίσωση

$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q,$$

όπου η παράμετρος n είναι θετικός ακέραιος. Βρείτε όλα τα δυνατά ζεύγη (p,q).

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$q(q-1)=p\left[\left(n^2+1\right)p-1\right]. \qquad (1)$$

Επειδή είναι ΜΚΔ$\{p,q\}=1$, από την (1) έπεται ότι $p\,\big|\,q-1$, $q\,\big|\left(n^2+1\right)p-1$ και

$$\frac{q-1}{p}=\frac{\left(n^2+1\right)p-1}{q}=k, \qquad (2)$$

όπου k θετικός ακέραιος. Από τις εξισώσεις (2) λαμβάνουμε

$$q=kp+1 \text{ και } p=\frac{k+1}{n^2+1-k^2}. \qquad (3)$$

Επειδή ο p είναι θετικός ακέραιος, από την (3) έπεται ότι:

$$0<n^2+1-k^2\le k+1 \Rightarrow k^2<n^2+1\le k^2+k+1$$

$$\Rightarrow k^2-1<n^2\le k^2+k \Rightarrow k^2\le n^2\le k^2+k<(k+1)^2,$$

οπότε προκύπτει ότι $k=n$. Έτσι από τις σχέσεις (3) λαμβάνουμε:

$$p=\frac{n+1}{n^2+1-n^2}=n+1 \text{ και } q=n(n+1)+1=n^2+n+1.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ζευγάρι $(p,q)=\left(n+1,\, n^2+n+1\right)$ επαληθεύει τη δεδομένη εξίσωση και ότι ισχύει: ΜΚΔ$\{p,q\}=1$. Πράγματι, αν είναι ΜΚΔ$\{p,q\}=d$, τότε $d\,\big|(q-np)=1$, οπότε θα είναι $d=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, ελαχίστου δυνατού βαθμού, τέτοια ώστε

$$P\left(x^2\right)+Q(x)=P(x)+x^5Q(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

Η δεδομένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$P\left(x^2\right)-P\left(x\right)=\left(x^5-1\right)Q\left(x\right), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Το πολυώνυμο του δεύτερου μέλους έχει μεταξύ των ριζών του τις ρίζες πέμπτης τάξεως της μονάδας: $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, όπου $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, για τις οποίες ισχύει ότι: $\omega^5=1$ και $\omega^6=\omega,\ \omega^8=\omega^3$.

Από την (1) λαμβάνουμε

$$P(\omega)=P\left(\omega^2\right), P\left(\omega^2\right)=P\left(\omega^4\right), P\left(\omega^3\right)=P\left(\omega^6\right)=P(\omega), P\left(\omega^4\right)=P\left(\omega^8\right)=P\left(\omega^3\right),$$

οπότε θα έχουμε

$$P(\omega)=P\left(\omega^2\right)=P\left(\omega^3\right)=P\left(\omega^4\right).$$

Αν b είναι η κοινή τιμή των $P(\omega), P\left(\omega^2\right), P\left(\omega^3\right)$ και $P\left(\omega^4\right)$, τότε το πολυώνυμο $P(x)-b$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, οπότε θα ισχύει:

$$P(x)-b=(x-\omega)\left(x-\omega^2\right)\left(x-\omega^3\right)\left(x-\omega^4\right)R(x)$$

$$\Leftrightarrow P(x)=\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)R(x)+b.$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το πολυώνυμο $R(x)$ και επίσης πρέπει $b\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, πρέπει το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού, έπεται ότι το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι του ελάχιστου δυνατού βαθμού. Αν είναι $R(x)=0$, οπότε δεν ορίζεται ο βαθμός του, τότε από την (1) προκύπτει ότι $\left(x^5-1\right)Q(x)=0$, από την οποία, δεδομένου ότι ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$ των πολυωνύμων πραγματικής μεταβλητής δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, έπεται ότι $Q(x)=0$, που είναι μη αποδεκτό. Επομένως το πολυώνυμο $R(x)$ πρέπει να είναι μηδενικού βαθμού, δηλαδή σταθερό πολυώνυμο, έστω $R(x)=a\neq 0$. Τότε θα έχουμε

$$P(x)=a\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)+b=a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)+c,$$

όπου $a\in\mathbb{R}^*$, $c=a+b\in\mathbb{R}$.

Επομένως, η σχέση (1) γίνεται

$$P\left(x^2\right)-P(x)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^8+x^6+x^4+x^2\right)-a\left(x^4+x^3+x^2+x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^8-x^3+x^6-x\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a\left(x^3+x\right)\left(x^5-1\right)=\left(x^5-1\right)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^5-1\right)\left[a\left(x^3+x\right)-Q(x)\right]=0.$$

Από την τελευταία ισότητα πολυωνύμων έπεται ότι: $Q(x)=a\left(x^3+x\right),\ a\in\mathbb{R}^*$.

2^{ος} τρόπος

Ο ελάχιστος δυνατός βαθμός του πολυωνύμου του δευτέρου μέλους της (1) είναι 5, ενώ ο βαθμός του πολυωνύμου του πρώτου μέλους είναι άρτιος, οπότε θα έχουμε

$$\min\deg Q(x)=1 \text{ και } \min\deg P(x)=3.$$

Αν υποθέσουμε ότι $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}$, $a_3\neq 0$, τότε από τη δεδομένη ισότητα πολυωνύμων λαμβάνουμε

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\big|P(x^2)-P(x)=a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\big|a_3(x^6-x^3)+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\big|a_3\left[x(x^5-1)+(x-x^3)\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\big|a_3\left[x(x^5-1)\right]+a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $a_2x^4-a_3x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0$, οπότε λαμβάνουμε $a_2=a_3=0$, $a_1-a_2=0$, $a_1-a_3=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$, άτοπο.

Επομένως δεν υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε να ισχύει η δεδομένη ισότητα. Στη συνέχεια θεωρούμε $P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, με $a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}, a_4\in\mathbb{R}^*$. Εργαζόμενοι, όπως παραπάνω, λαμβάνουμε:

$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)Q(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\big|P(x^2)-P(x)=a_4x^8+a_3x^6+a_2x^4+a_1x^2+a_0-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x-a_0$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\big|a_4\left[(x^5-1)x^3+x^3\right]+a_3\left[(x^5-1)x+x\right]+a_2x^4+a_1x^2-a_4x^4-a_3x^3-a_2x^2-a_1x$$

$$\Rightarrow (x^5-1)\big|(x^5-1)(a_4x^3+a_3x)+(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$(a_2-a_4)x^4+(a_4-a_3)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_3-a_1)x=0\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=a_4\in\mathbb{R}^*,$$

οπότε λαμβάνουμε

$$P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=a_4(x^4+x^3+x^2+x)+a_0, a_4\in\mathbb{R}^*, a_0\in\mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

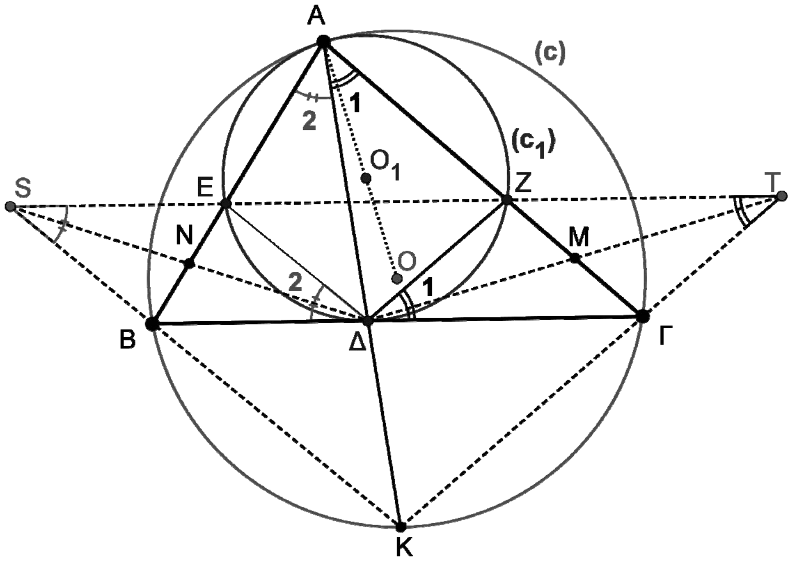
$$P(x^2)-P(x)=(x^5-1)(a_4x^3+a_4x)=(x^5-1)Q(x)\Rightarrow Q(x)=a_4(x^3+x), a_4\in\mathbb{R}^*.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R). Η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(\mathrm{O},R)$ στο σημείο Κ. Ο κύκλος $c_1(\mathrm{O}_1,R_1)$ (που έχει το κέντρο στην ΟΑ και περνάει από τα σημεία Α, Δ), τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ, N είναι τα μέσα των ΖΓ και ΒΕ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες ΕΖ, ΔΜ, ΚΓ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Τ), οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω S) και ότι η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS.

Λύση

Εφόσον το κέντρο του κύκλου c_1 βρίσκεται επάνω στην ΟΑ, οι κύκλοι c και c_1 θα εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο Α. Δηλαδή οι κύκλοι c και c_1 είναι ομοιόθετοι στη ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο Α και λόγο λ (λ είναι ο λόγος των ακτίνων των δύο κύκλων).



Σχήμα 1

Αν λοιπόν κάποια ευθεία περνάει από το σημείο Α και τέμνει τους κύκλους c και c_1 στα σημεία Θ και Θ_1 αντίστοιχα, τότε $\mathrm{A\Theta} = \lambda \mathrm{A\Theta_1}$.

Με βάση τις προηγούμενες σκέψεις έχουμε:

Η ΒΓ είναι ομοιόθετη της ΕΖ, οπότε $\mathrm{B\Gamma // EZ}$. Η ΚΓ είναι ομοιόθετη της ΔΖ, οπότε $\mathrm{K\Gamma // \Delta Z}$. Έστω Τ το σημείο τομής των ΕΖ και ΚΓ. Τότε το ΔΖΤΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα και η ΔΜ θα περνάει από το σημείο Τ.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και το ΔESB είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι ευθείες ΕΖ, ΔΝ, ΚΒ περνάνε από το σημείο S.

Εφόσον το Ο είναι το ομοιόθετο του $\mathrm{O_1}$ και Κ το ομοιόθετο του Δ, συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{O_1\Delta // OK}$ και επειδή $\mathrm{OK \perp B\Gamma}$ (διότι Κ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ), συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{O_1\Delta \perp B\Gamma}$.

Άρα η ΒΓ εφάπτεται του κύκλου $c_1(\mathrm{O_1}, R_1)$ στο σημείο Δ.

Εφόσον Δ είναι το σημείο επαφής έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{A}}_2 = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}.$$

(οι γωνίες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ σχηματίζονται από χορδή και εφαπτομένη)

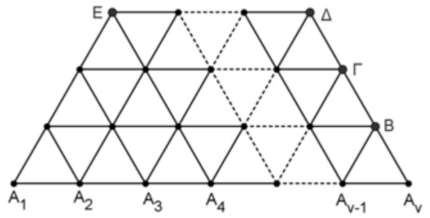
Σε συνδυασμό τώρα με τα παραλληλόγραμμα ΔESB και ΔΖΤΓ, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{T}} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}.$$

Άρα το τετράπλευρο ΒΓTS είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια η ΟΚ είναι μεσοκάθετη της TS (διότι είναι μεσοκάθετη της βάσης του ΒΓ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά $\mathrm{A_1E}$ έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του $\mathrm{A_1A_\nu}$ έχει μήκος $\nu - 1$. Ξεκινάμε από το σημείο $\mathrm{A_1}$ και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά).

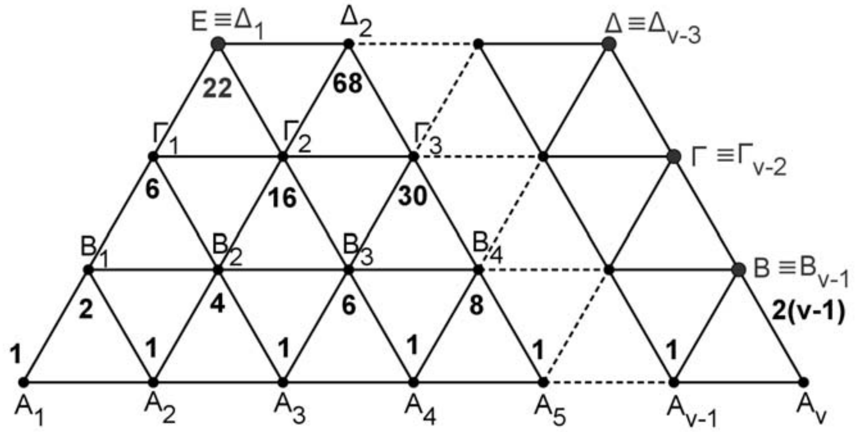


Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία $\mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}$, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.

Λύση

Στη μεγάλη βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_\nu$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_{\nu-1} \equiv \mathrm{B}$. Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_{\nu-2} \equiv \Gamma$. Στη μικρή τέλος βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $\mathrm{E} \equiv \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_{\nu-3} \equiv \Delta$.

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα). Για παράδειγμα, με β_1 συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο B_1.



Σχήμα 2

Προφανώς $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \cdots = \alpha_\nu = 1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι μπορούμε να κινηθούμε μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων, γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά). Έτσι έχουμε:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\beta_2 = \beta_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + a_2 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_1 + \alpha_3),$$

$$\beta_3 = \beta_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + 2a_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$= \alpha_1 + 2(a_2 + \alpha_3) + \alpha_4 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_4),$$

και γενικά λαμβάνουμε

$$\beta_k = 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{k+1})-(\alpha_1+\alpha_{k+1}) = 2(k+1)-2 = 2k, \ ,$$

για $k=1,2,3,\ldots,(\nu-1)$.

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\beta = \beta_{\nu-1} = 2(\nu-1)}.$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης των σημείων της τρίτης από κάτω γραμμής και της μικρής βάσης.

$$\begin{aligned}\gamma_i &= 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_{i+1})-(\beta_1+\beta_{i+1}) = \\ &= 2(2+4+\cdots+2(i+1))-(2+2i+2) = \\ &= 4(1+2+\cdots+(i+1))-(4+2i) = \\ &= 2(i+1)(i+2)-2(i+2) = \\ &= 2i(i+2), \qquad i=1,2,3,\ldots,(\nu-2).\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\gamma = \gamma_{\nu-2} = 2\nu(\nu-2)}.$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned}\delta_m &= 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_{m+1})-(\gamma_1+\gamma_{m+1}) = \\ &= 4\underbrace{\left(1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3)\right)}_{S}-2\left(1\cdot 3+(m+1)(m+3)\right) = \\ &= 4\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}-2\left(1\cdot 3+(m+1)(m+3)\right) = \ldots\ldots.. \\ &= \frac{2}{3}m(2m^2+12m+19), \qquad m=1,2,3,\ldots,(\nu-3)..\end{aligned}$$

Άρα έχουμε:

$$\boxed{\delta = \delta_{\nu-3} = \frac{2}{3}(\nu-3)(2\nu^2+1)}.$$

Απ' ευθείας μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι: $\varepsilon = 22$.

<u>**Υπολογισμός του αθροίσματος**</u>: $S = 1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3)$.

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $x(x+2)=x^2+2x$ για $x=1, x=2.\ldots, x=m$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}1\cdot 3 &= 1^2+2\cdot 1 \\ 2\cdot 4 &= 2^2+2\cdot 2 \\ 3\cdot 5 &= 3^2+2\cdot 3 \\ &\vdots \\ m(m+2) &= m^2+2m\end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+2\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+7)}{6}.$$

Θέτουμε όπου m το $m+1$ και έχουμε $S = \dfrac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$.

Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n), $n=1,2,3,...$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο a_{2013}.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{3}{1}\cdot a_1 = 3\cdot 2, a_3 = \frac{4}{2}\cdot\left(a_1 + a_2\right) = \frac{4}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4\cdot 2^2,$$

$$a_4 = \frac{5}{3}\cdot\left(a_1 + a_2 + a_3\right) = \frac{5}{3}\cdot 24 = 5\cdot 2^3 a_5 = \frac{6}{4}\cdot\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4\right) = \frac{6}{4}\cdot 64 = 6\cdot 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_n = (n+1)\cdot 2^{n-1}$, για κάθε $n = 1,2,3,...,k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για $n = k+1$, δηλαδή ότι ισχύει: $a_{k+1} = (k+2)\cdot 2^k$.

Πράγματι, έχουμε

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k\right) = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \cdots + (k+1)\cdot 2^{k-1}\right)$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2\cdot 2^0 + 3\cdot 2^1 + 4\cdot 2^2 + \cdots + (k+1)\cdot 2^{k-1}\right) \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) επί 2, λαμβάνουμε

$$2a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(2^1 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + (k+1)\cdot 2^k\right), \qquad (2)$$

οπότε με αφαίρεση της (1) από τη (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(-2 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^{k-1} + (k+1)\cdot 2^k\right)$$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k}\cdot\left(-1 - \frac{1-2^k}{1-2} + (k+1)\cdot 2^k\right)$$

$$= \frac{k+2}{k}\cdot\left(-2^k + (k+1)\cdot 2^k\right) = (k+2)\cdot 2^k.$$

Άρα έχουμε: $a_{2013} = 2014\cdot 2^{2012}$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τις σχέσεις

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2, \qquad (3)$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right),\ n \geq 1, \qquad (4)$$

από τις οποίες λαμβάνουμε

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)a_n, n \geq 2 \qquad (5)$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right) a_{n+1},\ n \geq 1. \qquad (6)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (5) από τη σχέση (6) κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n = \left(\frac{n}{n+2}\right) a_{n+1} - \left(\frac{n-1}{n+1}\right) a_n \Rightarrow a_{n+1} = \left(\frac{2(n+2)}{n+1}\right) a_n,\ n \geq 1 \qquad (7)$$

Επομένως έχουμε

$$a_n = \left(\frac{2(n+1)}{n}\right) a_{n-1} = \left(\frac{2(n+1)}{n}\right)\left(\frac{2n}{n-1}\right) a_{n-2} = \ldots$$

$$= \left(\frac{2(n+1)}{n}\right)\left(\frac{2n}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{2\cdot 4}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right) a_1 = (n+1)\cdot 2^{n-2}\cdot a_1 = (n+1)\cdot 2^{n-1},$$

αφού είναι $a_1 = 2$. Άρα έχουμε $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2012}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση:

$$y = 2x^2 + 5xy + 3y^2.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y = 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 \Leftrightarrow y = (x+y)(2x+3y). \qquad (1)$$

Αν θέσουμε $x + y = z$, τότε πρέπει $z \in \mathbb{Z}$ και η εξίσωση (1) γίνεται

$$y = z(2z+y) \Leftrightarrow y = 2z^2 + yz \Leftrightarrow (z-1)y = -2z^2. \qquad (2)$$

Για $z = 1$ η εξίσωση (2) γίνεται $0 \cdot y = -2$ (αδύνατη).

Για $z \neq 1$ η εξίσωση γίνεται

$$y = -\frac{2z^2}{z-1} = -\frac{2(z^2-1)+2}{z-1} = -2(z+1) - \frac{2}{z-1}. \qquad (3)$$

Για να είναι ο y ακέραιος πρέπει ο $z-1$ να είναι διαιρέτης του 2, δηλαδή πρέπει

$$z - 1 \in \{-1, 1, -2, 2\} \Leftrightarrow z \in \{0, 2, -1, 3\}.$$

- Για $z = 0$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y) = (0,0)$.
- Για $z = 2$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y) = (10,-8)$.
- Για $z = -1$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y) = (-2,1)$.
- Για $z = 3$, λαμβάνουμε τη λύση $(x,y) = (12,-9)$.

2ος τρόπος

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y = 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 \Leftrightarrow (x+y-1)(2x+3y+2) = -2 \qquad (4)$$

Επειδή ζητάμε λύσεις στους ακέραιους, οι δύο παράγοντες στο πρώτο μέρος πρέπει να είναι ακέραιοι, οπότε από την εξίσωση (4) έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\left.\begin{cases} x+y-1=-1 \\ 2x+3y+2=2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

- $\left.\begin{cases} x+y-1=1 \\ 2x+3y+2=-2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(10,-8)$
- $\left.\begin{cases} x+y-1=2 \\ 2x+3y+2=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=-3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(12,-9)$
- $\left.\begin{cases} x+y-1=-2 \\ 2x+3y+2=1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-2,1)$

3^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2x^2+5yx+3y^2-y=0, \tag{5}$$

δηλαδή είναι δευτεροβάθμια ως προς x με ακέραιους συντελεστές. Για να έχει η εξίσωση αυτή ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσά της να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου , δηλαδή πρέπει $\Delta = y^2+8y = y(y+8)=\rho^2$, όπου ρ ακέραιος .

- Αν είναι $\rho=0$, τότε θα είναι $\Delta=0$ και $y=0$ ή $y=-8$. Για $y=0$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x=0$, δηλαδή είναι $(x,y)=(0,0)$. Για $y=-8$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x=10$, οπότε έχουμε τη λύση $(x,y)=(10,-8)$.
- Αν είναι $\rho \neq 0$, τότε **πρέπει** η εξίσωση

$$y^2+8y-\rho^2=0, \tag{6}$$

να έχει ακέραιες λύσεις ως προς y για κατάλληλες τιμές του ρ. Άρα, πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης (6) να είναι τέλειο τετράγωνο ακέραιου. Άρα πρέπει να είναι $\Delta' = 64+4\rho^2 = 8^2+(2\rho)^2 = w^2$, οπότε η τριάδα $(8,2\rho,w)$ πρέπει να είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα. Όμως όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες είναι της μορφής

$\left(k\cdot(m^2-n^2), k\cdot 2mn, k\cdot(m^2+n^2)\right)$, όπου k,m,n θετικοί ακέραιοι, $m>n$. Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι:

$$k\cdot(m^2-n^2)=8,\ k\cdot 2mn=2\rho \tag{7}$$

$$\text{ή } k\cdot 2mn=8,\ k\cdot(m^2-n^2)=2\rho. \tag{8}$$

Για $k=1$ η σχέση (7) μπορεί να αληθεύει με $(m,n)=(3,1)$, οπότε $\rho=3$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται $y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=-9$, δηλαδή έχει ακέραιες λύσεις Από την εξίσωση (5) λαμβάνουμε τις λύσεις $x=-2$, για $y=1$ και $x=12$, για $y=-9$, οπότε έχουμε τις λύσεις: $(x,y)=(-2,1)$ και $(x,y)=(12,-9)$. Για $k\geq 2$, από το σύστημα (7) δεν προκύπτει ακέραια τιμή για το ρ. Ομοίως, από το σύστημα (8) δεν προκύπτουν ακέραιες τιμές για το ρ.

Εναλλακτικά, όταν φθάσουμε στην αναγκαία συνθήκη $\Delta' = 64+4\rho^2 = w^2$ μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\Delta' = 64+4\rho^2 = w^2 \Leftrightarrow w^2-4\rho^2=64 \Leftrightarrow (w-2\rho)(w+2\rho)=64.$$

Στη συνέχεια, για την επιλογή των ακέραιων παραγόντων του πρώτου μέλους, παρατηρούμε ότι:

$(w+2\rho)+(w-2\rho)=2w$ =πολλαπλάσιο του 2

$(w+2\rho)-(w-2\rho)=4\rho$ =πολλαπλάσιο του 4.

Επομένως οι περιπτώσεις που οδηγούν σε θετικές ακέραιες λύσεις για τα w και ρ είναι μόνον οι εξής:

- $\left.\begin{cases} w+2\rho=16 \\ w-2\rho=4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (w,\rho)=(10,3)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:

  $y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow y=-9$ ή $y=1$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(12,-9)$ και $(x,y)=(-2,1)$.

- $\left.\begin{cases} w+2\rho=8 \\ w-2\rho=8 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow (w,\rho)=(8,0)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:

  $y^2+8y=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $y=-8$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(0,0)$ και $(x,y)=(10,-8)$.

Μπορούμε ακόμη να θεωρήσουμε την εξίσωση ως τριώνυμο μεταβλητής y και να εργαστούμε ανάλογα, όπως στη παραπάνω περίπτωση . Τότε καταλήγουμε στην αναγκαία συνθήκη να είναι τέλειο η διακρίνουσα $\Delta=x^2-10x+24=(x-5)^2-1$, δηλαδή $(x-5)^2-1=\omega^2 \Leftrightarrow (x-5)^2-\omega^2=1 \Leftrightarrow (x-5-\omega)(x-5+\omega)=1$, από την οποία προκύπτουν τελικά οι ακέραιες λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_{160}$ τέτοια ώστε $|\mathrm{A}_i|=i,\ i=1,2,\ldots,160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα $\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\ldots,\mathrm{M}_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου M_1. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο M_2. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $\mathrm{M}_3,\ldots,\mathrm{M}_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού n.

Λύση

Υποθέτουμε ότι κατά το πρώτο βήμα αφαιρούμε από όλα τα επιλεγμένα σύνολα k_1 στοιχεία, κατά το δεύτερο βήμα αφαιρούμε k_2 στοιχεία και ομοίως κατά το $n-$στό βήμα αφαιρούμε k_n στοιχεία. Όταν εξαντληθούν τα στοιχεία όλων των συνόλων $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_n$, τότε θα πρέπει το κάθε $i=|\mathrm{A}_i|,\ i=1,2,\ldots,160$, να είναι άθροισμα κάποιων όρων από τους $k_1,k_2,\ldots,k_n$. Όμως τα δυνατά αθροίσματα που δημιουργούνται από όρους που ανήκουν στο σύνολο $\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$ είναι 2^n, αφού για τη δημιουργία τέτοιων αθροισμάτων για κάθε όρο υπάρχουν δύο επιλογές, δηλαδή μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον όρο στο άθροισμα ή όχι. Επομένως πρέπει να ισχύει ότι $2^n \geq 160$, οπότε πρέπει $n \geq 8$ και η ελάχιστη πιθανή τιμή του n είναι το 8.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για $n=8$ μπορούμε να επιτύχουμε την εξάντληση των στοιχείων των δεδομένων συνόλων με την προβλεπόμενη διαδικασία, οπότε η ελάχιστη δυνατή τιμή του n θα είναι 8.

Στο πρώτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $A_{81},...A_{160}$ και αφαιρούμε από το καθένα από αυτά 80 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_1 θα έχει $80 \cdot 80 = 6400$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 80 στοιχείων ως $A^1_{81},...,A^1_{160}$. Τότε τα σύνολα A_i και A^1_{80+i}, $i = 1,2,...,80$ έχουν από i στοιχεία. Στο δεύτερο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $A_{41},...,A_{80}$, $A^1_{121},...,A^1_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 40 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_2 θα έχει $80 \cdot 40 = 3200$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 40 στοιχείων ως $A^1_{41},...,A^1_{80}$ και $A^2_{121},...,A^2_{160}$. Τότε τα σύνολα A_i, A^1_{40+i}, A^1_{80+i} και $A^2_{120+i}, i = 1,2,...,40$ έχουν το καθένα από i στοιχεία. Στο τρίτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα $A_{21},...,A_{40}$, $A^1_{60+i},...,A^1_{100+i}$, $A^2_{140+i}, i = 1,2,...,20$ αφαιρούμε από καθένα από αυτά 20 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_3 θα έχει $80 \cdot 20 = 1600$ στοιχεία.

Συνεχίζουμε ομοίως με ανάλογους συμβολισμούς, θεωρώντας στο τέταρτο βήμα τα σύνολα $A_{10+i}, A^1_{30+i}, A^2_{50+i}, A^2_{70+i}, A^2_{90+i}, A^2_{110+i}, A^3_{130+i}, A^3_{150+i}, i = 1,2,...,10$, και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 10 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_4 θα έχει $80 \cdot 10 = 800$ στοιχεία. Τα σύνολα που απομένουν έχουν το καθένα το πολύ 10 στοιχεία. Στο πέμπτο βήμα επιλέγουμε τα μισά από αυτά, δηλαδή τα $A^{\ell}_{5+i(\text{mod}10)}, i = 1,2,3,4,5$ με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell = 1,2,3,4$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 5 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_5 θα έχει $80 \cdot 5 = 400$ στοιχεία. Έτσι έχουν απομείνει 32 ομάδες συνόλων που έχουν από ένα μέχρι πέντε στοιχεία. Στο έκτο βήμα επιλέγουμε από αυτά τα $A^{\ell}_{2+i(\text{mod}5)}, i = 1,2,3$, συνολικά 96 σύνολα, με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell = 1,2,...,5$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 3 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_6 θα έχει $96 \cdot 3 = 288$ στοιχεία. Τότε τα 32 σύνολα $A^{\ell}_{3(\text{mod}5)}$ γίνονται κενά , τα σύνολα A_1, $A^{\ell}_{1(\text{mod}3)}$ έχουν από ένα στοιχείο, ενώ τα σύνολα A_2, $A^{\ell}_{2(\text{mod}3)}$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell = 1,2,...,6$ έχουν από δύο στοιχεία. Στο έβδομο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_2, $A^{\ell}_{2(\text{mod}3)}$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell = 1,2,...,6$ και τους αφαιρούμε από δύο στοιχεία, οπότε γίνονται κενά, ενώ στο όγδοο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_1, $A^{\ell}_{1(\text{mod}3)}, \ell = 1,2,...,6$ και τους αφαιρούμε από ένα στοιχείο, οπότε γίνονται κενά.

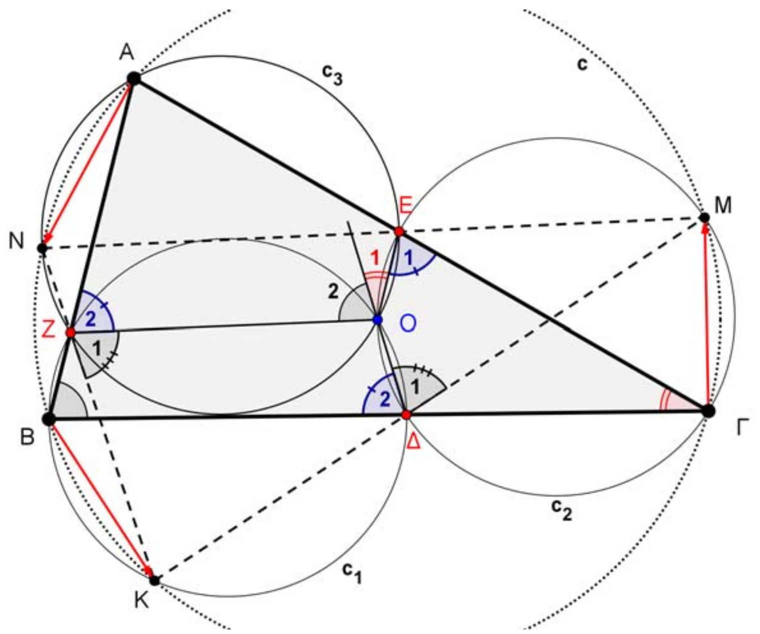
Έτσι το σύνολο M_7 θα έχει 128 στοιχεία, ενώ το σύνολο M_8 θα έχει 64 στοιχεία.

Παρατήρηση. Η προηγούμενη απόδειξη για ότι ο αριθμός των βημάτων μπορεί να είναι 8, δεν είναι μοναδική. Θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να πάρουμε τα 81 σύνολα $A_{80}, A_{81},...,A_{160}$ και να τους αφαιρέσουμε από 80 στοιχεία με ανάλογη συνέχεια στα επόμενα βήματα. Τότε θα αφαιρούσαμε στο πρώτο βήμα $81 \cdot 80 = 6480$ στοιχεία που είναι και το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων που μπορεί να αφαιρεθούν στο πρώτο βήμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα R) και έστω Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ (διαφορετικό από το μέσο της ΒΓ). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΟΔ (έστω c_1) τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Κ και την ΑΒ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\Gamma O\Delta$, έστω c_2, τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο M και την $A\Gamma$ στο σημείο E. Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AEZ έστω c_3, τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και KMN είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 1

Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος c_3 περνάει από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε: $\hat{O}_2 = \hat{B}$.

Από τη πρόσθεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων ισοτήτων γωνιών λαμβάνουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \ E\hat{O}Z = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o - \hat{A},$$

οπότε το τετράπλευρο $AEOZ$ είναι εγγράψιμο (άθροισμα απέναντι γωνιών 180^o).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 είναι ίσοι μεταξύ τους.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε; $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$.

Επομένως έχουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2 = \hat{E}_1$. Οι τρεις αυτές ίσες γωνίες βαίνουν στις ίσες χορδές $OB, O\Gamma$ και OA των κύκλων c_1, c_2 και c_3 αντίστοιχα. Άρα οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 έχουν ίσες ακτίνες, οπότε είναι ίσοι μεταξύ τους.

Στους ίσους κύκλους c_1 και c_2, οι γωνίες $\hat{Z}_1$ και $\hat{\Delta}_1$ βαίνουν στις ίσες χορδές OK και OM ($OK = OM = R$), οπότε θα είναι: $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα σημεία K, Δ, M είναι συνευθειακά. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία M, E, N και τα σημεία N, Z, K είναι επίσης συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{M}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{N}$ (που είναι κατά κορυφή) προκύπτει η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων $\mathrm{AN} = \mathrm{BK} = \Gamma\mathrm{M}$ (τα οποία είναι χορδές του κύκλου $c(\mathrm{O}, R)$**.**

Τα τρίγωνα $\mathrm{AB}\Gamma$ και KMN έχουν κοινό περίκεντρο O και το KMN είναι η εικόνα του $\mathrm{AB}\Gamma$ στη στροφή με κέντρο το σημείο O και γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{N} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{K} = \Gamma\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M} = \hat{\omega}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

Παρατήρηση. Το περίκεντρο του τριγώνου $\mathrm{AB}\Gamma$, ταυτίζεται με το σημείο Miquel που αντιστοιχεί στα σημεία $\Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}$ των πλευρών του τριγώνου. Έτσι μπορεί να προκύψει άμεσα ότι το τετράπλευρο ΑΕΟΖ είναι εγγράψιμο.

Ενδεικτικές λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $\mathrm{P}(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$\left(x^2-6x+8\right)\mathrm{P}(x)=\left(x^2+2x\right)\mathrm{P}(x-2),$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Η δεδομένη ισότητα γράφεται στη μορφή

$$(x-2)(x-4)\mathrm{P}(x)=x(x+2)\mathrm{P}(x-2),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, \qquad (1)$$

οπότε, για $x=0,-2$ και 4 προκύπτουν οι ισότητες: $\mathrm{P}(0)=\mathrm{P}(-2)=\mathrm{P}(2)=0$.

Επομένως το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει παράγοντες τους $x, x+2$ και $x-2$, οπότε έχουμε:

$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x), \qquad (2)$$

όπου το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές.

Λόγω της (2) η σχέση (1) γίνεται:

$$(x-2)(x-4)^2\,x(x+2)Q(x)=x(x+2)(x-2)x(x-4)Q(x-2), \qquad (3)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα, έχουμε

$$x(x+2)(x-2)(x-4)\left[(x-2)Q(x)-xQ(x-2)\right]=0,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (4)$$

Από τη σχέση (4), επειδή το πολυώνυμο $x(x-2)(x+2)(x-4)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, προκύπτει η ισότητα:

$$(x-2)Q(x)-xQ(x-2)=0,\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

Από την τελευταία σχέση για $x=0$ λαμβάνουμε ότι $Q(0)=0$, οπότε $Q(x)=xR(x)$, όπου $R(x)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Λόγω της (5) η σχέση (4) γίνεται:

$$(x-2)xR(x)-x(x-2)R(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2)\left[R(x)-R(x-2)\right]=0,$$

από την οποία, αφού $x(x-2)\neq 0(x)$, προκύπτει ότι:

$$R(x)=R(x-2),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $R(x)=R(x+2k),\ k\in\mathbb{Z}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε το πολυώνυμο $R(x)$ παίρνει την ίδια τιμή για άπειρες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για παράδειγμα ισχύει $c=R(0)=R(2k), k\in\mathbb{Z}$. Άρα είναι $R(x)=c$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$$\mathrm{P}(x)=x(x+2)(x-2)Q(x)=x(x+2)(x-2)xR(x)=cx^2\left(x^2-4\right).$$

Πρόβλημα 2

Βρείτε τις τιμές του ακέραιου αριθμού n για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A}=\dfrac{8n-25}{n+5}$ ισούται με τον κύβο ρητού αριθμού.

Λύση (1$^{\text{ος}}$ τρόπος)

Έστω $p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0$, με $(p,q)=1$ και τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{A}=\frac{8n-25}{n+5}=\left(\frac{p}{q}\right)^3. \tag{1}$$

Τότε θα είναι και $\left(p^3,q^3\right)=1$, ενώ από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$q^3\left(8n-25\right)=p^3\left(n+5\right), \tag{2}$$

από την οποία έπεται ότι

$$p^3\left|(8n-25)\right. \text{ και } q^3\left|(n+5)\right.\Rightarrow \text{υπάρχει } k\in\mathbb{Z} \text{ έτσι ώστε:}$$

$$8n-25=kp^3 \text{ και } n+5=kq^3. \tag{3}$$

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $8n-25=kp^3$, $k\in\mathbb{Z}$, τότε από τη σχέση (2) λαμβάνουμε τις σχέσεις (3). Από τις σχέσεις (3) προκύπτει ότι:

$$8(n+5)-(8n-25)=k\left(8q^3-p^3\right)$$

$$\Rightarrow k(2q-p)\left(4q^2+2qp+p^2\right)=65.$$

Επομένως οι αριθμοί $k,\ 2q-p$ και $4q^2+2qp+p^2$ είναι διαιρέτες του 65. Παρατηρούμε όμως ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\equiv 1(\bmod 3)$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13\Leftrightarrow 3q^2+(p+q)^2=13,$$

οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- $4q^2+2qp+p^2=13,\ k=\pm1,\ 2q-p=\pm5.$ Τότε έχουμε:

$p=2q\mp5$ και $4q^2+2q(2q\mp5)+(2q\mp5)^2=13\Leftrightarrow p=2q\mp5,\ 2q^2\mp5q+2=0$

$\Leftrightarrow p=2q\mp5,\ q=\pm2\Leftrightarrow p=\mp1,\ q=\pm2$. Τότε και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^3=-\dfrac{1}{8}$, οπότε θα είναι: $\dfrac{8n-25}{n+5}=-\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow 8(8n-25)=-(n+5)\Leftrightarrow n=3$.

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

Όπως στον πρώτο τρόπο φθάνουμε στη σχέση (2) και τη λύνουμε ως προς n, οπότε λαμβάνουμε:

$$n=\frac{5\left(5q^3+p^3\right)}{8q^3-p^3}. \tag{4}$$

Έστω $d=\left(5q^3+p^3,8q^3-p^3\right)$. Τότε $d\left|5q^3+p^3+8q^3-p^3=13q^3\right.$ και αφού $(p,q)=1$ έπεται ότι $d\left|13\right.$. Επομένως

$$\frac{8q^3-p^3}{d}\Big|5\Rightarrow\left(8q^3-p^3\right)\Big|5\cdot13\Rightarrow(2q-p)\left(4q^2+2pq+p^2\right)\Big|65.$$

Παρατηρούμε ότι $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\equiv 1(\bmod 3)$ και επιπλέον ισχύει $4q^2+2pq+p^2=3q^2+(p+q)^2\geq 3$, οπότε, αφού ο αριθμός $4q^2+2pq+p^2$ είναι διαιρέτης του 65 η μοναδική δυνατή τιμή του είναι

$$4q^2+2pq+p^2=13\Leftrightarrow 3q^2+(p+q)^2=13. \qquad (5)$$

Από τη σχέση (5) προκύπτει ότι $|q|\leq 2$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $|q|=0$ ή $|q|=1$, οπότε $(p+q)^2=13$ ή $(p+q)^2=10$, αδύνατες με $p,q\in\mathbb{Z}$.
- Αν $|q|=2$, τότε $(p+q)^2=1$, από την οποία προκύπτουν οι λύσεις :

  $(p,q)=(-1,2)$ ή $(p,q)=(1,-2)$ ή $(p,q)=(-3,2)$ ή $(p,q)=(3,-2)$.

  Επειδή $(2q-p)|65$, δεκτές είναι μόνο οι λύσεις $(p,q)=(-1,2)$ ή $(p,q)=(1,-2)$, από τις οποίες προκύπτει ότι $n=3$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε μια $n\times n$ σκακιέρα, όπου n άρτιος θετικός ακέραιος, στην οποία τοποθετούνται όλοι οι αριθμοί $1,2,3,\ldots,n^2$, ένας σε κάθε τετραγωνάκι. Καλούμε S_1 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα άσπρα τετράγωνα και S_2 το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα μαύρα τετράγωνα. Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί n που είναι τέτοιοι, ώστε να είναι δυνατή μία τοποθέτηση, για την οποία ισχύει:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{39}{64}.$$

Λύση

Η δεδομένη σχέση είναι ισοδύναμη με την $S_1=\frac{39}{103}(S_1+S_2)$. Παρατηρούμε ότι :

$$S_1+S_2=1+2+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

Επειδή ο S_1 είναι φυσικός αριθμός, από τις παραπάνω θα έχουμε ότι $103\left|\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)\right.$. Όμως ο 103 είναι πρώτος της μορφής 4κ+3, οπότε ο 103 δεν διαιρεί τον n^2+1. Επομένως πρέπει να διαιρεί τον n^2 και αφού είναι πρώτος, πρέπει $103|n$. Αφού επιπλέον ο n είναι άρτιος, θα έχουμε ότι είναι πολλαπλάσιο του 206, δηλαδή πρέπει: $n=206k, k\in\mathbb{N}^*$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι για κάθε πολλαπλάσιο του 206 είναι δυνατή μια τέτοια τοποθέτηση. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του S_1 είναι:

$$1+2+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{\frac{n^2}{2}\left(\frac{n^2}{2}+1\right)}{2}=A,$$

ενώ η μέγιστη τιμή είναι:

$$\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\left(\frac{n^2}{2}+1\right)+\cdots+n^2=B.$$

Εύκολα ελέγχουμε την ανισότητα,

$$A < S_1 = \frac{39}{103}\left(S_1 + S_2\right) < B$$

Τώρα θα πάρουμε το ζητούμενο δείχνοντας ότι το S_1 μπορεί να πάρει κάθε δυνατή τιμή ανάμεσα στα A, B Πράγματι, ο αριθμός $A+1$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+1$. Ο αριθμός $A+2$ μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,\frac{n^2}{2}+2$, και ούτω καθεξής. Όταν φτάσουμε στο βήμα όπου χρειάζεται η τοποθέτηση των αριθμών $1,2,...,\frac{n^2}{2}-1,n^2$, για να πάρουμε τον επόμενο αριθμό ως άθροισμα, θα επιλέξουμε στα άσπρα τετράγωνα τους αριθμούς $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2},n^2$, και στον επόμενο τους $1,2,...,\frac{n^2}{2}-2,\frac{n^2}{2}+1,n^2$, και ούτω καθεξής. Αυξάνοντας λοιπόν με την παραπάνω διαδικασία το άθροισμα κατά 1, ξεκινώντας από το *A*, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλους τους αριθμούς μέχρι το *B*.

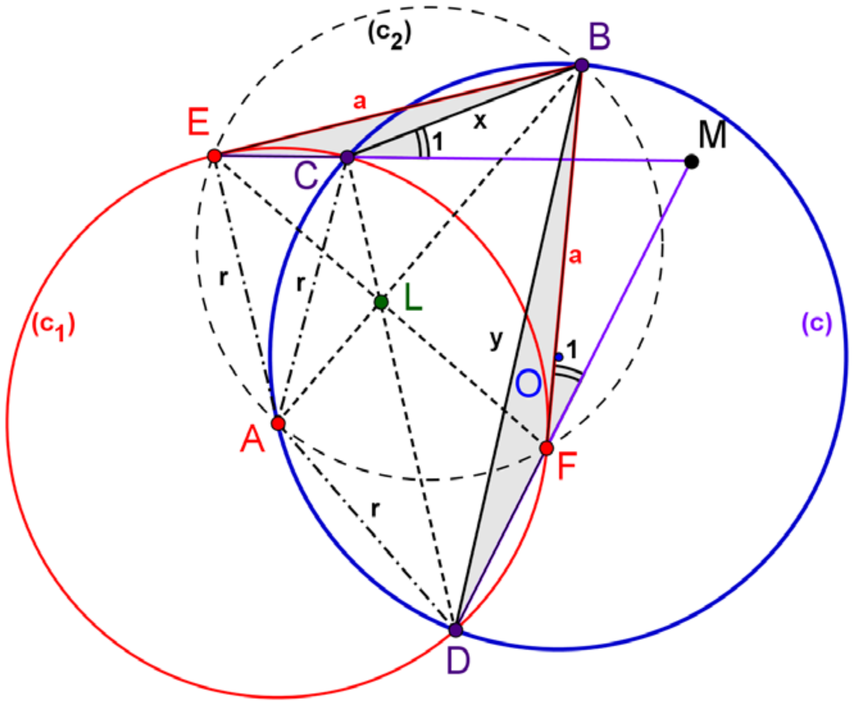
Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και δύο σημεία του A,B τέτοια, ώστε $R < AB < 2R$. Ο κύκλος $c_1(A,r)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα r, $0<r<R$), τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$, στα σημεία C και D (το σημείο C ανήκει στο μικρό τόξο AB). Από το σημείο B, θεωρούμε τις εφαπτόμενες BE και BF στον κύκλο $c_1(A,r)$, έτσι ώστε από τα σημεία επαφής E,F, το σημείο E βρίσκεται εκτός του κύκλου $c(O,R)$. Οι ευθείες EC και DF τέμνονται στο σημείο M. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Το τετράπλευρο $AEBF$ είναι εγγράψιμο (διότι οι BE και BF είναι εφαπτόμενες, οπότε: $A\hat{E}B = A\hat{F}B = 90^o$) και έστω c_2 ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Το τμήμα CD είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_1). Το τμήμα AB είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c) και (c_2). Το τμήμα EF είναι η κοινή χορδή των κύκλων (c_1) και (c_2). Άρα οι τρεις παραπάνω χορδές θα συντρέχουν στο ριζικό κέντρο, έστω L, των τριών κύκλων.

Η AB είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{B}F$ (διότι BE και BF είναι εφαπτόμενες του κύκλου $c_1(A,r)$**).** Η AB είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας $C\hat{B}D$, γιατί οι γωνίες $A\hat{B}C$ και $A\hat{B}D$ είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο $c(O,R)$ και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AC}$ και $\overset{\frown}{AD}$. Άρα οι γωνίες $E\hat{B}C$ και $F\hat{B}D$ είναι ίσες.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια της ισότητας $E\hat{B}C = F\hat{B}D$, θα αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BF}{BD} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{y}{a} \Leftrightarrow xy = a^2,$$

όπου θέσαμε (χάριν συντομίας): $BE = BF = a$, $BC = x$ και $BD = y$.

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCB και LAD έχουμε:

$$\frac{LC}{LA} = \frac{CB}{AD} \Rightarrow \frac{LC}{LA} = \frac{x}{r} \qquad (1).$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων LCA και LBD, έχουμε:

$$\frac{LB}{LC} = \frac{BD}{CA} \Rightarrow \frac{LB}{LC} = \frac{y}{r} \qquad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{xy}{r^2} \qquad (\mathrm{A}).$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE, το τμήμα AL είναι το ύψος προς την υποτείνουσα, άρα:

$$\frac{LB}{LA} = \frac{EB^2}{EA^2} = \frac{a^2}{r^2} \qquad (\mathrm{B}).$$

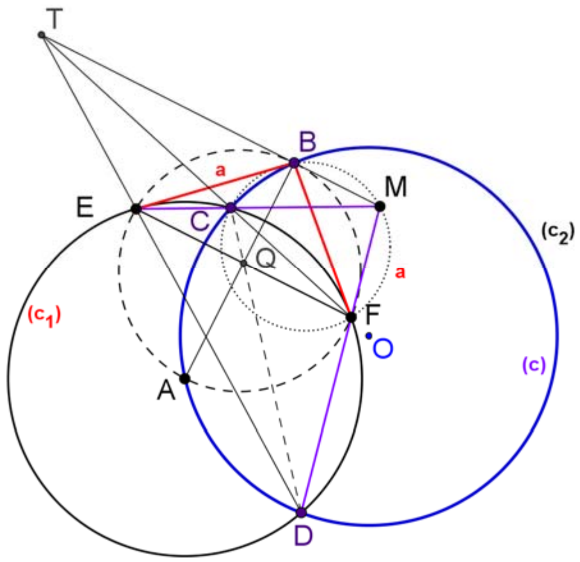
Από τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε: $xy = a^2$.

Άρα τα τρίγωνα BCE και BFD είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις γωνίες τους ίσες (μία προς μία). Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει η ισότητα: $\hat{C} = \hat{F}$. Άρα το τετράπλευρο $BCFM$ είναι εγγράψιμο.

2^{ος} τρόπος.

Σημειώνουμε με Q το σημείο τομής των EF, CD Από το **θεώρημα Pascal** στο εκφυλισμένο εξάγωνο $EEDFFC$ παίρνουμε ότι, αν T είναι το σημείο τομής των

ED, CF, τότε τα σημεία T, B, M είναι συνευθειακά. Επιπλέον, στο εγγεγραμμένο $ECFD$, τα σημεία T, M είναι τα σημεία τομής των απέναντι πλευρών και το Q είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Επομένως η ευθεία TM είναι η **πολική** του Q, οπότε η AQ είναι κάθετη στην πολική (αφού Α κέντρο του κύκλου), οπότε έχουμε ότι $A\hat{B}T = 90^\circ$. Έτσι, έπεται ότι $EF \parallel TM$ αφού $AB \perp EF$, οπότε έχουμε ότι $B\hat{M}C = M\hat{E}F = C\hat{F}B$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Από τις ισότητες των γωνιών των τριγώνων BCE και BFD, προκύπτει επίσης ότι και το τετράπλευρο $BEDM$ είναι εγγράψιμο.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι λύσεις που δίνονται παρακάτω δεν είναι μοναδικές. Στα περισσότερα προβλήματα έχουν δοθεί και άλλες λύσεις από τους μαθητές που είναι τεκμηριωμένες και ως εκ τούτου αποδεκτές.

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων (x,y,p), όπου p πρώτος, οι οποίες ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{xy^3}{x+y}=p.$$

Λύση

Έστω $d=(x,y)$ ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών x,y. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι a,b τέτοιοι ώστε

$$x=da,\ y=db,\ (a,b)=1.$$

Με αντικατάσταση στη δεδομένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\frac{d^3ab^3}{a+b}=p. \qquad (1)$$

Όμως, από τη σχέση $(a,b)=1$, έχουμε ότι $(a,a+b)=1$ και $(b^3,a+b)=1$, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $a+b\mid d^3$. Γράφουμε

$$\frac{d^3}{a+b}=k, \qquad (2)$$

όπου k θετικός ακέραιος. Τότε η (1) γίνεται: $kab^3=p$, οπότε $b^3\mid p$. Επομένως πρέπει $b=1$ και $ka=p$. Επομένως , έχουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $k=p, a=1$, τότε η (2) γίνεται $\frac{d^3}{2}=p$, οπότε $2p=d^3$, οπότε $2\mid d$ άρα $8\mid d^3$ και έπεται ότι $8\mid 2p$, άτοπο.

(ii) $k=1,\ a=p$. Τότε η (2) γίνεται $d^3=p+1\Rightarrow d^3-1=p\Rightarrow (d-1)(d^2+d+1)=p$.

Επομένως, έχουμε ότι $d-1=1, d^2+d+1=p$ (αφού $d^2+d+1>d-1$), $\Leftrightarrow d=2, p=7$, από όπου έχουμε: $(x,y,p)=(14,2,7)$.

Πρόβλημα 2

Έστω $P(x)=ax^3+(b-a)x^2-(c+b)x+c$ και $Q(x)=x^4+(b-1)x^3+(a-b)x^2-(c+a)x+c$ πολυώνυμα μεταβλητής x, όπου a,b,c είναι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και

$b>0$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει τρεις άνισες πραγματικές ρίζες x_0, x_1, x_2, οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)$, τότε:

(α) Να αποδείξετε ότι: $abc > 28$.

(β) Αν a,b,c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με $b>0$, ποιες είναι οι δυνατές τιμές τους;

Λύση

(α) Επειδή το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου $P(x)$ ισούται με 0 έπεται ότι μία ρίζα του είναι το 1, οπότε έχουμε

$$P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c = (x-1)(ax^2 + bx - c)$$

Αν θέσουμε $x_0 = 1$, από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ και } x_1 x_2 = -\frac{c}{a} \neq 0, \qquad (1)$$

οπότε θα είναι $x_1, x_2 \neq 0$.

Επιπλέον, από την υπόθεση έπεται ότι οι x_0, x_1, x_2 θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} F(x) = Q(x) - P(x) &= x^4 + (b-a-1)x^3 + 2(a-b)x^2 + (b-a)x \\ &= x\left(x^3 + (b-a-1)x^2 + 2(a-b)x + b - a\right) \\ &= x\left[x^3 - x^2 + (b-a)(x^2 - x) + (a-b)(x-1)\right] \\ &= x(x-1)\left[x^2 + (b-a)x + (a-b)\right]. \end{aligned}$$

Επειδή $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x^2 + (b-a)x + (a-b) = 0$ και $x_0, x_1, x_2 \neq 0$, έπεται ότι:

$$x_0 = 1, \; x_1 + x_2 = a - b, \; x_1 x_2 = a - b \; . \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$a - b = -\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$b = c \qquad (3) \qquad \text{και} \qquad a^2 - ab = -b \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε:

$$a^2 = b(a-1) \Rightarrow a > 1 \text{ (αφού } b > 0) \text{ και } b = c = \frac{a^2}{a-1}.$$

Έχουμε ότι

$$abc = a\left(\frac{a^2}{a-1}\right)^2 = \frac{a^5}{(a-1)^2} \overset{x=a-1>0}{=} \frac{(x+1)^5}{x^2} = \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}{x^2}$$

$$\Rightarrow abc = x^3 + \left(5x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(10x + \frac{5}{x}\right) + 10. \qquad (5)$$

Όμως ισχύουν:

- $x^3 > 0, \; 5x^2 + \frac{1}{x^2} > 4 \Leftrightarrow 5x^4 - 4x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^4 + (2x^2 - 1)^2 > 0$, ισχύει,
- $10x + \frac{5}{x} > 14 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 10x^2 - 14x + 5 > 0$, ισχύει αφού $\Delta = -4 < 0$.

Άρα από τη σχέση (5) έχουμε: $abc > 28$.

(β) Από το ερώτημα (α) και τη σχέση $b = a+1+\frac{1}{a-1}$, επειδή οι αριθμοί b, $a+1$ είναι ακέραιοι, προκύπτει ότι και ο αριθμός $\frac{1}{a-1} \in \mathbb{Z}$, οπότε πρέπει:

$$a-1=\pm 1 \Leftrightarrow a=0 \,(\text{απορρίπτεται, γιατί } a\neq 0) \quad \text{ή} \quad a=2. \text{ Τότε } b=c=\frac{a^2}{a-1}=4.$$

Για τις τιμές αυτές το πολυώνυμο

$$P(x)=ax^3+(b-a)x^2-(c+b)x+c=2x^3+2x^2-8x+4=2(x-1)\left(x^2+2x-2\right)$$

έχει ρίζες $x_0=1,\ x_{1,2}=-1\pm\sqrt{3}$ οι οποίες είναι ρίζες και του πολυωνύμου

$$F(x)=Q(x)-P(x)=x(x-1)\left(x^2+(b-a)x+(a-b)\right)=x\left(x^2+2x-2\right),$$

οπότε θα είναι ρίζες και του πολυωνύμου $Q(x)=F(x)+P(x)$.

Πρόβλημα 3

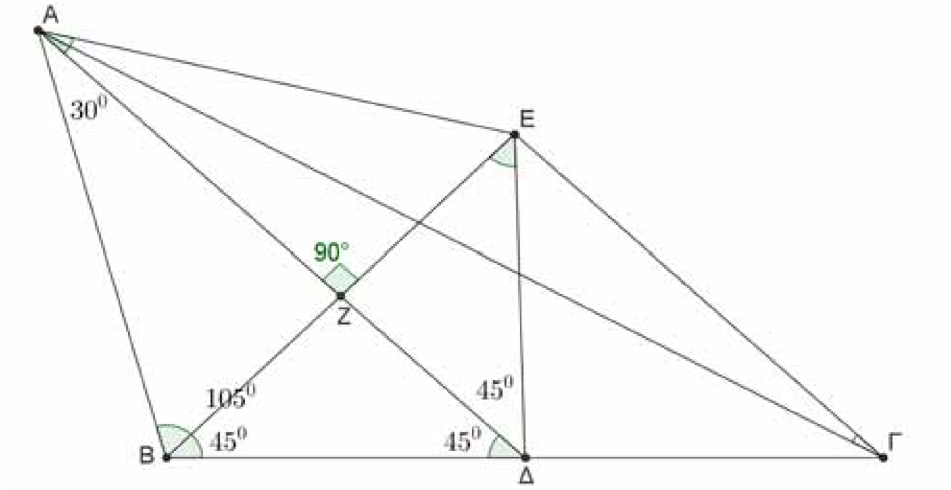
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}=105^\circ$. Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A}=45^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε $\hat{\Gamma}=30^\circ$

(β) Αν $\hat{\Gamma}=30^\circ$, τότε το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Ευθύ. Έστω ότι το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι: $\hat{\Gamma}=30^\circ$.



Σχήμα 1

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=180^\circ-\left(105^\circ+45^\circ\right)=30^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΒΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{AE}$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}=2\cdot\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta=60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BE}=\mathrm{AE} \qquad (1)$$

$$\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E}=\mathrm{A}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{B}=60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $\mathrm{B}\hat{\mathrm{Z}}\Delta=90^\circ$, έχουμε: $\Delta\mathrm{BZ}=45^\circ$.

Επιπλέον, στο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε, λόγω συμμετρίας, ότι η διάμεσος ΕΔ ισούται με

$$E\Delta = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Άρα το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{B}\Gamma = 45^\circ \text{ και } BE = E\Gamma. \qquad (3)$$

Επομένως το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές $B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$. Επειδή είναι και $A\hat{Z}E = 90^\circ$, έπεται ότι: $A\Delta \parallel E\Gamma$. Τότε προκύπτει η ισότητα των γωνιών

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{\Gamma}A \qquad (4)$$

Επιπλέον, από τις ισότητες (1) και (3) λαμβάνουμε ότι $AE = E\Gamma$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές με

$$E\hat{\Gamma}A = E\hat{A}\Gamma \qquad (5)$$

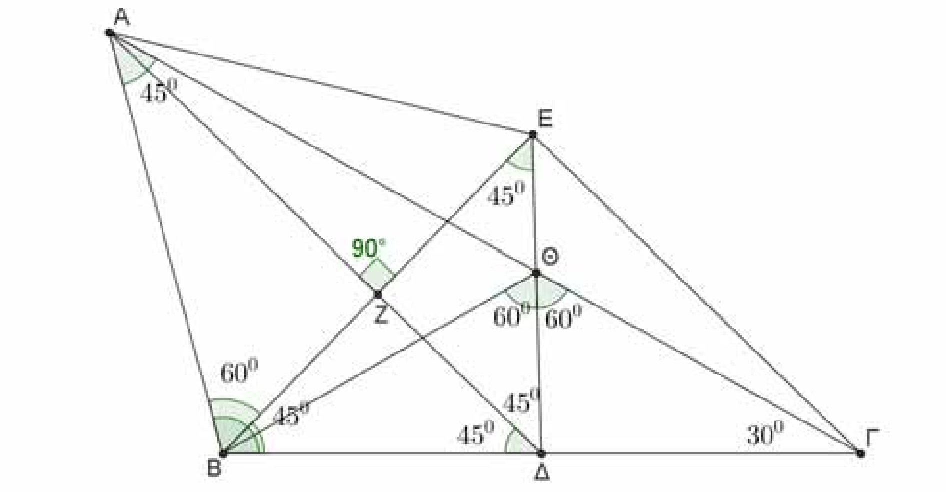
Από τις σχέσεις (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\Delta\hat{A}\Gamma = E\hat{A}\Gamma = \frac{\Delta\hat{A}E}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ,$$

οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ προκύπτει ότι:

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{B} - \left(B\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}\Gamma\right) = 180^\circ - 105^\circ - \left(30^\circ + 15^\circ\right) = 30^\circ.$$

Αντίστροφο. Έστω ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι το μέσο της ΒΓ.



Σχήμα 2

Παρατηρούμε ότι $B\hat{A}\Delta = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$ και $B\hat{A}\Gamma = 45^\circ$. Έστω Ε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς την ευθεία ΑΔ και έστω Ζ το μέσο της ΑΕ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με $AB = AE$ και $B\hat{A}E = 2 \cdot B\hat{A}\Delta = 60^\circ$. Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, οπότε

$$AB = BE = AE \qquad (1)$$

$$A\hat{B}E = A\hat{E}B = B\hat{A}E = 60^\circ \qquad (2)$$

Τότε, από το τρίγωνο ΒΖΔ με $B\hat{Z}\Delta = 90^\circ$, έχουμε: $\Delta BZ = 45^\circ$.
Επιπλέον, λόγω συμμετρίας έχουμε

$$B\hat{E}\Delta = \Delta\hat{B}Z = 45^\circ, \qquad (3)$$

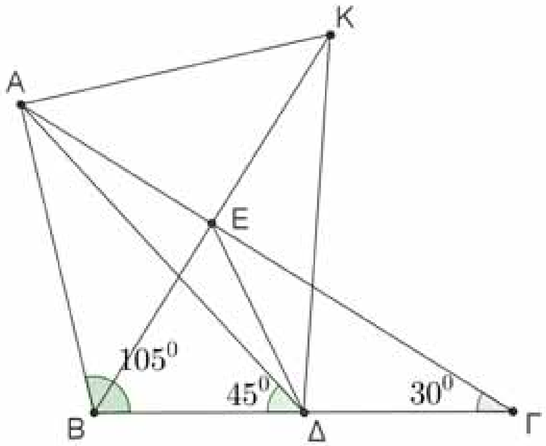
$$E\hat{\Delta}B = 2 \cdot Z\hat{\Delta}B = 90^\circ. \qquad (4)$$

Έστω Θ το σημείο τομής της ΔΕ με την ΑΓ. Τότε, από τη σχέση (4) προκύπτει ότι το ΘΔ είναι **ύψος** του τριγώνου ΒΘΓ.

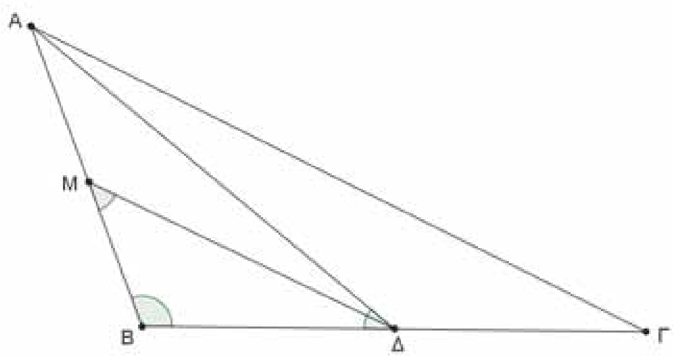
Επιπλέον, από τη σχέση (3) λαμβάνουμε $\mathrm{B\hat{E}\Theta} = \mathrm{B\hat{E}\Delta} = 45^\circ = \mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \mathrm{B\hat{A}\Theta}$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΘΕ είναι εγγράψιμο. Άρα έχουμε $\mathrm{B\hat{\Theta}\Delta} = \mathrm{B\hat{A}E} = 60^\circ$ και $\mathrm{\Delta\hat{\Theta}\Gamma} = \mathrm{A\hat{\Theta}E} = \mathrm{A\hat{B}E} = 60^\circ$. Επομένως είναι $\mathrm{B\hat{\Theta}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{\Theta}\Gamma} = 60^\circ$, οπότε η ΘΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Theta}\Gamma}$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ΘΔ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΒΘΓ, οπότε το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ισοσκελές και θα έχει τη ΘΔ διάμεσο, δηλαδή το Δ είναι το μέσο της ΒΓ.

2ος τρόπος

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\hat{\Gamma} = 30°$ (σχήμα 3). Θεωρούμε το συμμετρικό Κ του Β ως προς την ευθεία ΑΓ και έστω ότι η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Τότε έχουμε ότι $\mathrm{K\hat{B}\Gamma} = 60°$, οπότε $\mathrm{A\hat{B}E} = 45°$, επομένως $\mathrm{A\hat{K}B} = 45°$ και το τρίγωνο ΒΑΚ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Ισχύει επομένως ότι $\mathrm{A\hat{\Delta}B} = \mathrm{A\hat{K}B} = 45°$, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΔΚ είναι εγγράψιμο. Αν η ΚΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε, τότε ισχύει $\mathrm{EA = EB = EK}$, άρα το Ε είναι το κέντρο του κύκλου, άρα $\mathrm{E\Delta = EB}$, και αφού $\mathrm{K\hat{B}\Gamma} = 60°$, το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα $\mathrm{EB = E\Delta}$ (1). Επιπλέον, θα είναι $\mathrm{\Delta\hat{E}\Gamma} = 30°$, άρα το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ισοσκελές, οπότε $\mathrm{\Delta E = \Delta\Gamma}$ (2). Από τις (1),(2) έχουμε ότι $\mathrm{\Delta B = \Delta\Gamma}$.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι Δ μέσον του ΒΓ (σχήμα 4). Θεωρούμε σημείο Μ του ΑΒ τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Delta = 45°$. Τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α) στο τρίγωνο ΑΒΔ, αφού $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = 30°$, οπότε το σημείο Μ είναι μέσον του ΑΒ, οπότε $\Delta\mathrm{M}//\mathrm{A}\Gamma$. Επομένως $\hat{\Gamma} = \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{M} = 180^\circ - \left(105^\circ + 45^\circ\right) = 30^\circ$

3^{ος} τρόπος (τριγωνομετρικά):

Έστω ότι η γωνία $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{B} = x$. Από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\frac{\mathrm{B}\Delta}{\eta\mu 30°} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\eta\mu 105°} \Rightarrow \mathrm{B}\Delta = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°}.$$

Όμοια από το νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε: $\Delta\Gamma = \dfrac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x}$.

Επομένως, το Δ είναι μέσο αν και μόνο αν:

$$\frac{\mathrm{A}\Delta\,\eta\mu(45° - x)}{\eta\mu x} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{2\eta\mu 105°} \Leftrightarrow 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu 105°\eta\mu 45°\sigma\upsilon\nu x = (1 + 2\eta\mu 105°\eta\mu 45°)\eta\mu x$$

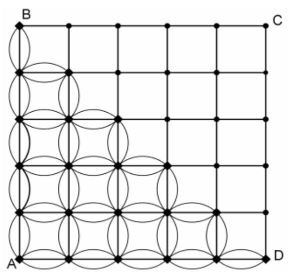
Όμως ισχύει ότι:

$$2\eta\mu 45°\eta\mu 105° = 2\eta\mu 45°\eta\mu\left(60^\circ + 45^\circ\right) = (\eta\mu 45°)^2(\eta\mu 60° + \sigma\upsilon\nu 60°) = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} = \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{x<45°}{\Leftrightarrow} x = 30°\cdot$$

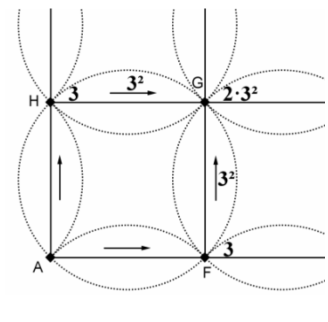
Πρόβλημα 4



Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του (στο σχήμα φαίνεται η περίπτωση για $n = 5$). Τα σημεία που πλέγματος που βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD συνδέονται μεταξύ τους και με δύο τόξα κύκλων. Ξεκινώντας από το σημείο A, κινούμαστε προς τα δεξιά και προς τα άνω (η κίνηση γίνεται επάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα στοιχειώδη τετράγωνα και τα τόξα των κύκλων). Πόσες είναι οι δυνατές διαδρομές από το σημείο A μέχρι το σημείο C;

Λύση

Υποθέτουμε ότι το τετράγωνο είναι τοποθετημένο σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή το σημείο A και τους άξονες να ταυτίζονται



Σχήμα 5

με τις πλευρές AB και AD. Τότε όλα τα σημεία του πλέγματος θα έχουν θετικές ακέραιες συντεταγμένες.

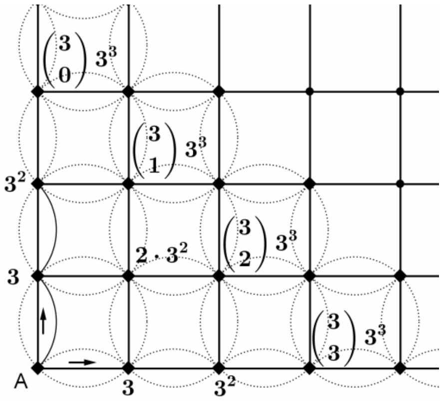
Παρατηρούμε (Σχήμα 1) ότι το σημείο $F(1,0)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.

Με όμοιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι και το σημείο $H(0,1)$, μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $A(0,0)$) με 3 τρόπους.

Το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $H(0,1)$) με 3 τρόπους. Άρα το σημείο $G(1,1)$ μπορούμε να το προσεγγίσουμε (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$) με 3^2 τρόπους (πολλαπλασιαστική αρχή), ακλουθώντας τη διαδρομή A,H,G.

Με όμοιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ (ακλουθώντας τη διαδρομή A,F,G) είναι 3^2 τρόποι.

Άρα τελικά όλοι οι δυνατοί τρόποι προσέγγισης του σημείου $G(1,1)$ είναι $2\cdot 3^2$.



Σχήμα 6

Κάθε λοιπόν σημείο του πλέγματος $M(i,j)$ (που βρίσκεται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD) μπορούμε να το προσεγγίσουμε με $\binom{i+j}{i}\cdot 3^{i+j}=\binom{i+j}{j}\cdot 3^{i+j}$ τρόπους (από το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$).

Τα σημεία του πλέγματος που βρίσκονται επάνω στη διαγώνιο BD (δηλ τα σημεία $(0,n),(1,n-1)),\ (2,n-2),\dots,(n-1,1),(n,0)$ μπορούμε να τα προσεγγίσουμε με $\binom{n}{0}\cdot 3^n,\binom{n}{1}\cdot 3^n,\binom{n}{2}\cdot 3^n,\dots,\binom{n}{n-1}\cdot 3^n,\binom{n}{n}\cdot 3^n$ τρόπους αντίστοιχα.

Τα υπόλοιπα σημεία του πλέγματος (δηλαδή τα σημεία του πλέγματος που δεν βρίσκονται στις πλευρές και το εσωτερικό του τριγώνου ABD), συνδέονται μεταξύ τους μόνο με ευθύγραμμα τμήματα. Η μετακίνηση από το σημείο (i,j) στο σημείο $(i+k,j+m)$ του πλέγματος (κινούμενοι προς τα δεξιά και άνω), μπορεί να γίνει με $\binom{k+m}{k}=\binom{k+m}{m}$ τρόπους.

Άρα η μετακίνηση από το σημείο $(0,n)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{0}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(1,n-1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(2,n-2)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{2}$ τρόπους.

. . . .

Η μετακίνηση από το σημείο $(n-1,1)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n-1}$ τρόπους.

Η μετακίνηση από το σημείο $(n,0)$ στο σημείο (n,n) μπορεί να γίνει με $\binom{n}{n}$ τρόπους.

Άρα το σημείο $C(n,n)$, μπορεί να προσεγγιστεί από το σημείο A με:

$$3^n\left(\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2\right)=3^n\binom{2n}{n} \text{ τρόπους.}$$

2^{ος} τρόπος

Αν δεν υπήρχαν τα τόξα των κύκλων, έχουμε $\binom{n+n}{n}$ διαφορετικές διαδρομές για να πάμε από το A στο C.

Πράγματι, από τα συνολικά $2n$ βήματα που πρέπει να κάνουμε είτε δεξιά είτε πάνω, σε ακριβώς n πρέπει να πάμε δεξιά και σε ακριβώς n πρέπει να πάμε πάνω. Αν επομένως σταθεροποιήσουμε τα βήματα στα οποία πάμε δεξιά, τότε προσδιορίζεται όλη η διαδρομή. Επομένως πρέπει να επιλέξουμε τα n βήματα από τα συνολικά $2n$. Αυτό γίνεται με $\binom{2n}{n}$ τρόπους.

Τώρα, κάθε σημείο της διαγωνίου BD είναι της μορφής $(k,n-k)$, οπότε για να φτάσουμε σε καθένα από αυτά χρειαζόμαστε ακριβώς $k+n-k=n$ βήματα.

Με τα τόξα, το μόνο που αλλάζει είναι ότι στα πρώτα n βήματα, δηλαδή ακριβώς στα βήματα πριν τη διαγώνιο, έχω 3 επιλογές για τη μετακίνηση από το ένα σημείο στο άλλο. Δηλαδή για κάθε διαδρομή χωρίς τόξα, έχω 3^n διαδρομές με τμήματα και τόξα. Επομένως αφού οι διαδρομές χωρίς τόξα είναι $\binom{2n}{n}$, με τμήματα και τόξα είναι $3^n\cdot\binom{2n}{n}$.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x, y, z) με $x \le y$, που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$$

Λύση
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
Αν $z = 0$, τότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = 80$.
Τότε πρέπει οι x, y να είναι πολλαπλάσια του 4, δηλαδή $x = 4a, y = 4b$, $0 \le a \le b$, και η εξίσωση γίνεται $a^2 + b^2 = 5$ οπότε $(a,b) = (1,2)$, δηλαδή $(x, y) = \mathbf{(4,8)}$.
Αν $z > 0$, τότε $7 \mid 2016^z$ (επειδή $7 \mid 2016$) και $7 \mid 77$, επομένως το 7 πρέπει να διαιρεί και το αριστερό μέλος, δηλαδή $7 \mid x^2 + y^2$. Τα πιθανά υπόλοιπα ενός τετραγώνου με το 7 είναι τα ίδια με τα υπόλοιπα των $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ που είναι $0,1,2,4$. Οπότε, για να ισχύει $7 \mid x^2 + y^2$ πρέπει $7 \mid x, 7 \mid y$ και γράφουμε $x = 7x_1$ και $y = 7y_1$, με $0 \le x_1 \le y_1$.
Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 2016^z + 77$.
Αν $z \ge 2$, τότε $49 \mid 2016^z$, οπότε αφού διαιρεί και το αριστερό μέλος, θα πρέπει $49 \mid 77$, που είναι άτοπο.
Αν $z = 1$, τότε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 7 \cdot 288 + 77 = 7(3 \cdot 288 + 11) = 7 \cdot 7 \cdot 125$. Δηλαδή πρέπει $x_1^2 + y_1^2 = 125$. Αφού $x_1 \le y_1$, έχουμε ότι $2y_1^2 \ge 125 \Rightarrow y_1 \ge 8$. Για $y_1 = 8,9,10,11$, βρίσκουμε τις λύσεις $(x_1, y_1) \in \{(5,10),(2,11)\}$
Τελικά οι λύσεις είναι:

$$(x, y) \in \{\mathbf{(4,8),(35,70),(14,77)}\}.$$

Πρόβλημα 2
Τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 1 και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},\ P(1) = 1,$$

Να βρείτε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$.

Λύση

Έστω $Q(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$. Τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου $Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)-Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)$ προέρχεται από το ανάπτυγμα των μεγιστοβάθμιων όρων $\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)^n-\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)^n$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του τελευταίου ισούται με

$$\frac{2nx^{2n-1}}{2^n}+\frac{2nx^{2n-1}}{2^n}=\frac{4n}{2^n}x^{2n-1} \qquad (1).$$

Όμως ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου στο αριστερό μέλος ισούται με 2, οπότε πρέπει $\frac{4n}{2^n}=2 \Leftrightarrow 2^{n+1}=4n$. Όμως $2^{n+1}>4n$ για $n\geq 3$, οπότε $n=1$ ή $n=2$ και από την (1) ο βαθμούς του P είναι $2-1=1$ ή $2\cdot 2-1=3$.

Για $x=0$ στην αρχική σχέση παίρνουμε $2P(0)=Q(1/2)-Q(1/2)=0$, άρα $P(0)=0$.

- Αν τώρα $n=1$, τότε $P(x)=ax$ και αφού $P(1)=1$, θα είναι

$$P(x)=x \text{ και } Q(x)=x+a_0,\ a_0\in\mathbb{R}.$$

- Αν $n=2$, τότε αν $Q(x)=x^2+bx+c$, έχουμε:

$$2P(x)=Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)-Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)=\frac{1}{4}\left((x+1)^4-(x-1)^4\right)+\frac{b}{2}\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(8x^3+8x)+\frac{b}{2}(4x)=2x^3+2(1+b)x.$$

Επομένως, $P(x)=x^3+(1+b)x$. Επειδή επιπλέον $P(1)=1$, πρέπει $b=-1$, οπότε

$$P(x)=x^3 \text{και } Q(x)=x^2-x+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$) και το ύψος του $\Gamma\Delta$. Ο κύκλος $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνει την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο K , την προέκταση της $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο Z και τον κύκλο $c_1(B,B\Delta)$ στο σημείο E. Η $\Delta\mathrm{Z}$ τέλος τέμνει τον κύκλο $\boldsymbol{c_1}$ στο σημείο M.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{E}=45^0$, **(β)** Τα σημεία E,M και K βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία,

(γ) Η ευθεία BM είναι παράλληλη με την ευθεία $\mathrm{E\Gamma}$.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{B\Gamma\Delta}$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1=90^0-\hat{\mathrm{B}}$.

Η διάκεντρος $\mathrm{B\Gamma}$ των κύκλων c_1 και c_2 είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους $\Delta\mathrm{E}$.

Αν λοιπόν T είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{E}$,

τότε (από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\mathrm{T}\Delta$) έχουμε: $\hat{\Gamma}_1+\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=90^0$, δηλαδή

$$\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}. \qquad (1)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta\mathrm{Z}$ έχουμε: $\hat{\Delta}_1=\hat{\mathrm{Z}}_1$ και $\hat{\Gamma}_2=2\hat{\Delta}_1=90^0-\hat{\mathrm{A}}$, οπότε

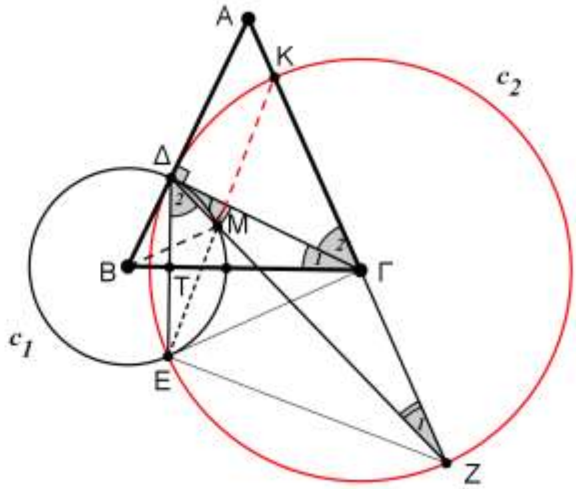
$$\hat{\Delta}_1=45^0-\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}. \qquad (2)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ έχουμε:

$$\hat{B} = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{B} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{B} - \hat{\Delta}_1 \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_2 = 90^0 - \frac{\hat{A}}{2} - \left(45^0 - \frac{\hat{A}}{2}\right) = 45^0.$$



Σχήμα 1

(β) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ σχηματίζεται από την χορδή ΔM και την εφαπτομένη $\Delta\Gamma$ του κύκλου c_1, άρα $\Delta\hat{E}M = \hat{\Delta}_1$. Ισχύει επίσης $\Delta\hat{E}K = \Delta\hat{Z}K = \hat{Z}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c_2 και βαίνουν στο τόξο ΔK). Επειδή όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{Z}_1$, θα ισχύει $\Delta\hat{E}M = \Delta\hat{E}K$, οπότε τα σημεία E, M, K είναι συνευθειακά.

(γ) Θα αποδείξουμε ότι $\Delta\hat{B}M = 90^0 - \hat{A}$.
Ισχύει: $\Delta\hat{B}M = 2\Delta\hat{E}M = 2\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 90 - \hat{A}$, οπότε $BM \perp A\Gamma$.
Επιπλέον, ισχύει $E\hat{K}Z = E\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 = 45^0$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο EZK είναι ισοσκελές και η διάμεσός του $E\Gamma$ είναι και ύψος, δηλαδή $E\Gamma \perp KZ$.
Άρα $BM // E\Gamma$ (ως κάθετες στην ευθεία AZ).

Πρόβλημα 4

Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε "*καλό*", όταν:

- δεν είναι τετράγωνο
- οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος,
- οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$.

Να βρεθεί συναρτήσει του n (με κλειστό τύπο) το πλήθος των "*καλών*" ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

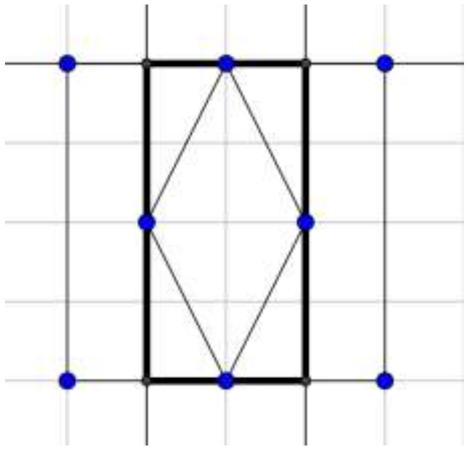
Λύση

Από τις κορυφές του ρόμβου φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές τους πλέγματος, οπότε βρίσκουμε το ελάχιστο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχει το ρόμβο. Λόγω της συμμετρίας ως προς κέντρο του ρόμβου, θα πρέπει το ορθογώνιο αυτό να έχει άρτια μήκη πλευρών.

Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τα ορθογώνια με άρτια μήκη πλευρών $2s\times 2t$ για τα οποία ισχύει $s\neq t$. Για το σκοπό αυτό θα μετρήσουμε όλα τα ορθογώνια $2s\times 2t$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$.

- Έστω ότι $n=2k$

Αριθμούμε τις κάθετες ευθείες του πλέγματος από αριστερά προς τα δεξιά $1,2,3,\ldots,2k+1$ και τις γραμμές του πλέγματος, από κάτω προς τα πάνω $1,2,3,\ldots,2k+1$. Ένα ορθογώνιο $2s\times 2t$ προσδιορίζεται από δύο κάθετες γραμμές του πλέγματος και δύο οριζόντιες που έχουν άρτια



Σχήμα 2

απόσταση. Για να έχουν άρτια απόσταση πρέπει και οι δύο να έχουν άρτιο αριθμό ή και οι δύο περιττό αριθμό. Για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτιο αριθμό έχουμε $\binom{k}{2}$ επιλογές, ενώ για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με περιττό αριθμό έχουμε $\binom{k+1}{2}$ επιλογές. Οπότε για να επιλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτια απόσταση έχουμε $\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}=k^2$ επιλογές.

Όμοια, έχουμε k^2 επιλογές για τις στήλες. Οπότε συνολικά έχουμε $k^2\cdot k^2=k^4$ ορθογώνια $2s\times 2t$. Μένει τώρα να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$. Τα 2×2 τετράγωνα είναι $(n-2+1)^2=(2k-2+1)^2$. Τα 4×4 είναι $(n-4+1)^2=(2k-4+1)^2$. Γενικά τα $2s\times 2s$ είναι $(n-2s+1)^2=(2k-2s+1)^2$. Άρα όλα μαζί είναι

$$\sum_{s=1}^{k}(2k-2s+1)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+1)^2-4s(2k+1)+4s^2=$$
$$k(2k+1)^2-2(2k+1)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Επομένως οι ρόμβοι είναι: $k^4-\dfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3}=\dfrac{k(k-1)(3k^2-k-1)}{3}$.

- Όταν $n=2k+1$, εντελώς όμοια με παραπάνω έχουμε $\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{2}=k(k+1)$

επιλογές για την επιλογή των δύο κάθετων γραμμών και $k(k+1)$ επιλογές για την επιλογή των οριζόντιων. Επομένως έχουμε συνολικά $(k(k+1))^2$ ορθογώνια $2s\times 2t$ και πρέπει να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$ που είναι $(n-2s+1)^2=(2k+1-2s+1)^2=(2k+2-2s)^2$. Δηλαδή συνολικά

$$\sum_{s=1}^{k}(2k+2-2s)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+2)^2-4(2k+2)s+4s^2$$
$$=k(2k+2)^2-2(2k+2)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

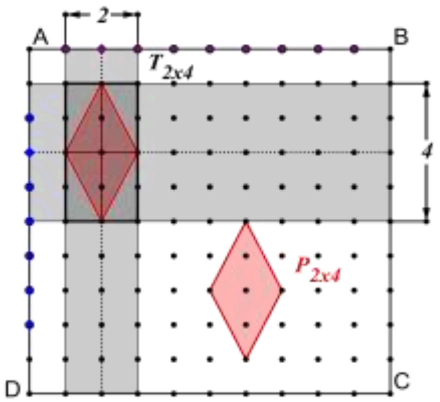
Επομένως, οι ρόμβοι είναι συνολικά:

$$(k(k+1))^2-\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k+1)(3k^2-k-2)}{3}$$

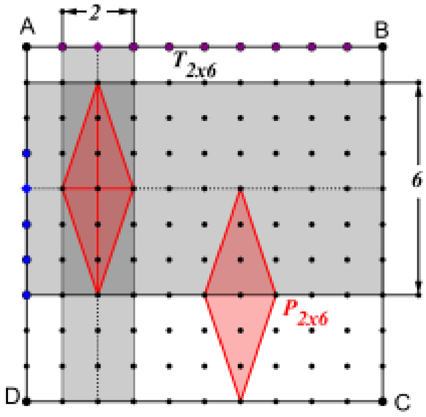
2ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι το μήκος των πλευρών των στοιχειωδών τετραγώνων είναι 1.

Αν οι διαγώνιες του ρόμβου είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου, τότε οι κορυφές του θα είναι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη πολλαπλάσια του 2 και είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου.



Σχήμα 3



Σχήμα 4

Στα δύο παραπάνω σχήματα βλέπουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$).

Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x4} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x4}.

Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x6} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x6} …

Για να προσδιορίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{(2m)x(2k)}$, όπου m,k ακέραιοι με $1 \le m < k \le l$, όταν $n = 2l$.

Για $m=1$ και $k=2$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x4} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x2}) είναι $(n-1)(n-3)$.

Για $m=1$ και $k=3$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x2}) είναι $(n-1)(n-5)$.

…………

Για $m=1$ και $k=l$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{2x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x2}$) είναι $(n-1)(n-2l+1)=(n-1)\cdot 1$.

Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 2, είναι: $S_2 = 2\big((n-1)(n-3)+(n-1)(n-5)+\cdots+(n-1)\cdot 1\big)=$

$$= 2(n-1)\big((n-3)+(n-5)+\cdots+1\big)=$$

$$=2(n-1)\frac{1+(n-3)}{2}\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}.$$

Για $m=2$ και $k=3$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x4}) είναι $(n-3)(n-5)$.
Για $m=2$ και $k=4$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους 8, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-7$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x8} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{8x4}) είναι $(n-3)(n-7)$.
…………
Για $m=2$ και $k=l$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).
Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{4x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x4}$) είναι $(n-3)(n-2l+1)=(n-3)\cdot 1$.
Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 4, είναι: $S_4=2\big((n-3)(n-5)+(n-3)(n-7)+\cdots+(n-3)\cdot 1\big)=$
$$=2(n-3)\big((n-5)+(n-7)+\cdots+1\big)=$$
$$=\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}.$$
Ανακεφαλαιώνοντας και επεκτείνοντας τη διαδικασία έχουμε:
$$S_2=2(n-1)(n-l-1)(l-1)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-2)^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{(n-3)(n-1)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$
$$S_4=2(n-3)(n-l-2)(l-2)=\begin{cases}\dfrac{(n-3)(n-4)^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{(n-5)(n-3)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$
$$S_6=2(n-5)(n-l-3)(l-3)=\begin{cases}\dfrac{(n-5)(n-6)^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{(n-7)(n-5)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$
………………………………………………

$$S_{2l-4}=\begin{cases}\frac{5\cdot 4^2}{2}, & n=2l\\ \frac{6\cdot 8^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l-2}=\begin{cases}\frac{3\cdot 2^2}{2}, & n=2l\\ \frac{4\cdot 6^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l}=\begin{cases}0, & n=2l\\ \frac{2\cdot 4^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}+\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}+\cdots+\frac{5\cdot 4^2}{2}+\frac{3\cdot 2^2}{2}.$$

$$=\frac{(n-2)^3+(n-2)^2}{2}+\frac{(n-4)^3+(n-4)^2}{2}+\ldots+\frac{4^3+4^2}{2}+\frac{2^3+2^2}{2}$$

Γράφοντας $n=2l$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S=\frac{8(l-1)^3+4(l-1)^2}{2}+\frac{8(l-2)^3+4(l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{8\cdot 2^3+4\cdot 2^2}{2}+\frac{8+4}{2}=$$

$$=4((l-1)^3+(l-2)^3+\ldots+1)+2((l-1)^2+\ldots+1)=$$

$$=\left(l(l-1)\right)^2+2\cdot\frac{(l-1)l(2l-1)}{6}=l(l-1)\left(l(l-1)+\frac{2l-1}{3}\right)=\frac{l(l-1)(3l^2-l-1)}{3}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l+1$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S'=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}+S_{2l}=\frac{(n-3)(n-1)^2}{2}+\frac{(n-5)(n-3)^2}{2}+\cdots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}$$

Γράφοντας $n=2l+1$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S'=\frac{(2l-2)(2l)^2}{2}+\frac{(2l-4)(2l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}=$$

$$=4(l^3-l^2)+4((l-1)^3-(l-1)^2)+\ldots+4(3^3-2^3)+4(2^3-2^2)+4(1^3-1^2)=$$

$$=4((l^3+(l-1)^3+\ldots+1)-(l^2+(l-1)^2+\ldots+1))=$$

$$=(l(l+1))^2-2\frac{l(l+1)(2l+1)}{3}=\frac{l(l+1)(3l^2-l-2)}{3}.$$

Τους δύο τύπους μπορούμε να τους συνοψίσουμε με τη βοήθεια του ακεραίου μέρους ως:

$$\frac{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left(3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor\right)}{3}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

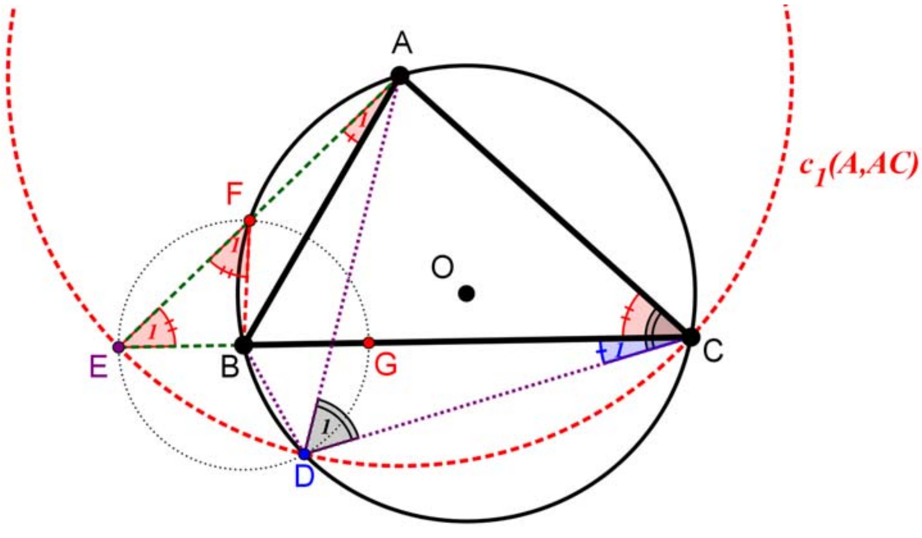
GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
34η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
4 Μαρτίου 2017

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC με AB < AC < BC, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Ο κύκλος $c_1(\mathrm{A},\mathrm{AC})$ τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο D και την προέκταση της πλευράς CB στο σημείο E. Αν η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο σημείο F και G είναι το συμμετρικό του E ως προς το B, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο FEDG είναι εγγράψιμο.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα: $\hat{\mathrm{F}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}}$.

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_1)) άρα:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \mathrm{A}\hat{\mathrm{C}}\mathrm{B} = \hat{\mathrm{C}} \quad .$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{F}}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BF} \qquad (1).$$

Ονομάζουμε $\hat{\mathrm{C}}_1 = x$ και από τον κύκλο (c_1) θα έχουμε ότι $\mathrm{E}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{D} = 2x$, (ως επίκεντρη), οπότε

$$E\hat{A}B + B\hat{A}D = 2x \qquad (2)$$

Επιπλέον, από τον κύκλο (c) έχουμε ότι:

$$B\hat{A}D = \hat{C}_1 = x \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι $E\hat{A}B = B\hat{A}D = x$, οπότε η AB είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο EAD. Συνεπώς είναι μεσοκάθετος της ED, άρα

$$BE=BD. \qquad (4)$$

Από τις ισότητες (1) και (4), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

2^{ος} τρόπος. Το τετράπλευρο AFBC είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (c), άρα:

$$\hat{F}_1 = A\hat{C}B = \hat{C}.$$

Το τρίγωνο AEC είναι ισοσκελές (οι AE και AC είναι ακτίνες του κύκλου (c_2)) άρα:

$$\hat{E}_1 = A\hat{C}B = \hat{C}.$$

Από τις ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\hat{F}_1 = \hat{E}_1$, οπότε το τρίγωνο BEF είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια:

$$BE = BF \qquad (5).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ABDC έχουμε: $\hat{D}_1 = A\hat{B}C = \hat{B}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ADC έχουμε: $\hat{D}_1 = A\hat{C}D$ Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, έχουμε ότι $A\hat{C}D = \hat{B}$ και κατά συνέπεια

$$\hat{C}_1 = \hat{B} - \hat{C} \quad .$$

Από το τρίγωνο ABE έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{B} - \hat{E}_1 = \hat{B} - \hat{C}$, οπότε: $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \hat{B} - \hat{C}$ και επειδή οι γωνίες $\hat{A}_1, \hat{C}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c), θα ισχύει:

$$BD = BF \qquad (6).$$

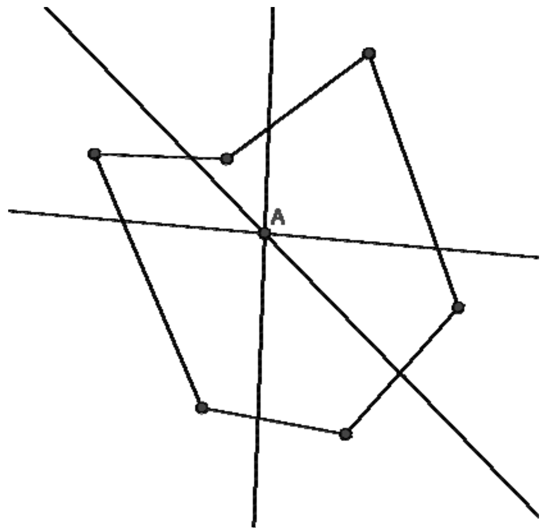
Από τις ισότητες (5) και (6), καθώς και από την προφανή (λόγω συμμετρίας) ισότητα BE=BG , συμπεραίνουμε ότι BE = BF = BG = BD, οπότε το τετράπλευρο DEFG είναι εγγράψιμο σε κύκλο με κέντρο το B.

Πρόβλημα 2

Θεωρούμε σημείο A του επιπέδου και τρεις ευθείες που περνούν από αυτό και χωρίζουν το επίπεδο σε 6 τομείς. Σε κάθε τομέα υπάρχουν στο εσωτερικό του 5 σημεία. Υποθέτουμε ότι τα 30 σημεία που βρίσκονται στους 6 τομείς είναι ανά τρία μη συνευθειακά. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 1000 τρίγωνα με κορυφές τα σημεία αυτά (των 6 τομέων) το οποία περιέχουν το A είτε στο εσωτερικό τους είτε στις πλευρές τους.

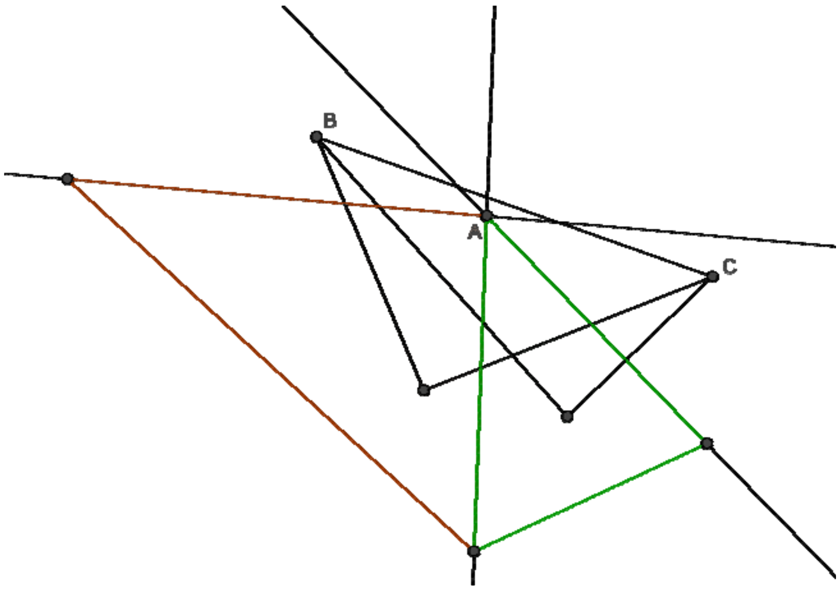
Λύση

Παρατηρούμε αρχικά ότι οποιαδήποτε για οποιαδήποτε επιλογή 6 σημείων, ένα από κάθε τομέα, δημιουργείται ένα εξάγωνο (κυρτό ή μη κυρτό) το οποίο περιέχει το σημείο A.



Σχήμα 2

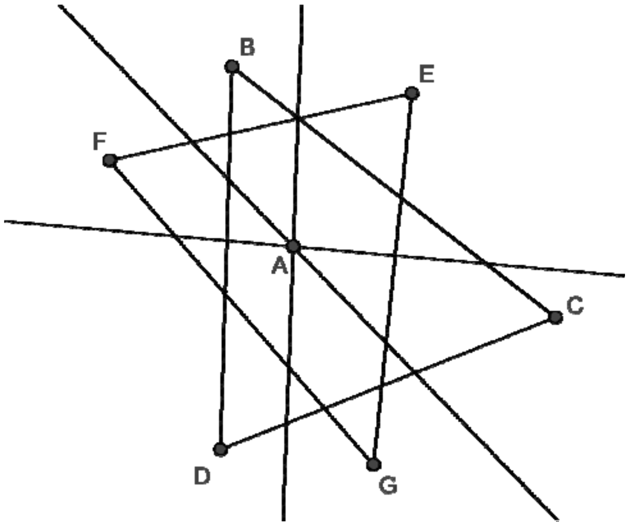
Από τα 6 αυτά σημεία δημιουργούνται $\binom{6}{3}=20$ τρίγωνα σε σύνολο. Θα υπολογίσουμε πόσα τουλάχιστον από αυτά περιέχουν το σημείο Α. Αν έχω δύο σημεία από κατά κορυφή τομείς, τότε παρατηρώ ότι έχω επιλογή για την τρίτη κορυφή του τριγώνου από δύο τομείς. Για παράδειγμα, για τα σημεία Β, C του παρακάτω σχήματος, όποιο σημείο και πάρουμε από τον κόκκινο ή τον πράσινο τομέα έχουμε τρίγωνο που περιέχει το σημείο Α.



Σχήμα 3

Υπάρχουν 3 ζεύγη κατά κορυφή τομέων, επομένως και έχουμε $5\cdot 5$ επιλογές για τη βάση BC και η τρίτη κορυφή επιλέγεται με $2\cdot 5$ τρόπους. Επομένως έχουμε συνολικά τουλάχιστον $3\cdot 2\cdot 5^3 = 6\cdot 5^3$ τέτοια τρίγωνα που περιέχουν το Α .

Αν τώρα έχω κορυφές σε εναλλάξ τομείς (όπως φαίνεται παρακάτω), τότε πάλι έχω τρίγωνο που περιέχει το σημείο Α. Αυτά μπορεί να είναι είτε σαν το CBD είτε σαν το EFG.



Σχήμα 4

Σαν το CBD υπάρχουν $5\cdot5\cdot5=5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο Α και σαν το EFG υπάρχουν επίσης $5\cdot5\cdot5=5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο Α. Συνολικά σε αυτή την περίπτωση έχουμε $2\cdot5^3$ τρίγωνα που περιέχουν το σημείο Α.

Αθροίζοντας, έχουμε τουλάχιστον $6\cdot5^3+2\cdot5^3=8\cdot5^3=1000$ τρίγωνα τα οποία περιέχουν το Α είτε στο εσωτερικό τους είτε πάνω στις πλευρές τους.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν όλες οι τριάδες ακεραίων (a,b,c) με $a>0>b>c,$ που έχουν άθροισμα ίσο με μηδέν και ο αριθμός $\mathrm{N}=2017-a^3b-b^3c-c^3a$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Αφού $a+b+c=0$, έχουμε ότι

$$a^3b+b^3c+c^3a=a^3b+b^3(-a-b)+(-a-b)^3a=-b^4-2b^3a-3a^2b^2-2a^3b-a^4=$$

$$=-(a^2+ab+b^2)^2 \qquad (1)$$

Επομένως, αν $2017-a^3b-b^3c-c^3a=k^2$, τότε

$$2017+(a^2+ab+b^2)^2=k^2 \Leftrightarrow (k-a^2-ab-b^2)(k+a^2+ab+b^2)=2017 \qquad (2)$$

Αφού ο 2017 είναι πρώτος, θα πρέπει

$$\begin{cases} k-a^2-ab-b^2=1 \\ k+a^2+ab+b^2=2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k-a^2-ab-b^2=1 \\ 2k=2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+ab+b^2=1008 \\ k=1009 \end{cases} \qquad (3)$$

Για να ισχύει

$$a^2+ab+b^2=1008 \qquad (4)$$

πρέπει οι a,b να είναι και οι δύο άρτιοι, διαφορετικά, το αριστερό μέλος είναι περιττός. Επιπλέον, έχουμε ότι $9|1008$, άρα $9|a^2+ab+b^2$, οπότε πρέπει $3|a$ και $3|b$. Επομένως. οι a,b διαιρούνται από 6, οπότε γράφουμε $a=6m$ και $b=6n$, οπότε η (1) γίνεται

$$m^2+mn+n^2=28 \qquad (5)$$

Ομοίως, οι m,n πρέπει να είναι άρτιοι, οπότε $m=2x$ και $n=2y$. Τότε η (7) γίνεται

$$x^2+xy+y^2=7 \qquad (6)$$

Για να έχει ακέραιες λύσεις η τελευταία πρέπει η διακρίνουσα ως προς y να είναι μη αρνητική και τέλειο τετράγωνο. Όμως $\Delta=x^2-4(x^2-7)=28-3x^2$, οπότε:

$$x^2=1 \text{ ή } x^2=4 \text{ ή } x^2=9.$$

Επειδή, $a>0$ θα έχουμε $x>0$, οπότε $x\in\{1,2,3\}$. Επειδή $y<0$, παίρνουμε τα ζεύγη $(x,y)\in\{(1,-3),(2,-3),(3,-2),(3,-1)\}$, οπότε, αφού $a=12x,\ b=12y$ έχουμε ότι

$$(a,b)\in\{(12,-36),\ (24,-36,),\ (36,-24),(36,-12)\}$$

Λόγω του ότι $a+b+c=0$ και του περιορισμού $a>0>b>c$, έχουμε τη μοναδική λύση

$$(a,b,c)=(36,-12,-24).$$

Πρόβλημα 4. Έστω ξ η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+x-4=0$. Το πολυώνυμο $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, όπου n θετικός ακέραιος, έχει συντελεστές μη αρνητικούς ακέραιους και αριθμητική τιμή $P(\xi)=2017$.

(i) Να αποδείξετε ότι: $a_0+a_1+\ldots+a_n\equiv 1(\bmod 2)$

(ii) Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος: $a_0+a_1+\ldots+a_n$.

Λύση

(i) Επειδή ο αριθμός $\xi=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ είναι άρρητος και το πολυώνυμο $F(x)=P(x)-2017$ έχει ρητούς συντελεστές και ρίζα τον αριθμό ξ, θα έχει ρίζα και τον συζυγή του $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$, οπότε θα διαιρείται με το πολυώνυμο $\varphi(x)=x^2+x-4$.

Αυτό προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα της διαίρεσης

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)+\kappa x+\lambda,$$

Από την οποία για $x=\xi$ λαμβάνουμε $\kappa\xi+\lambda=0$, από την οποία προκύπτει ότι $\kappa=\lambda=0,$ αφού ο αριθμός ξ είναι άρρητος.

Άρα υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο ώστε:

$$F(x)=P(x)-2017=(x^2+x-4)Q(x)$$

$$\Leftrightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-2017=(x^2+x-4)Q(x) \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) για $x=1$ λαμβάνουμε:

$$a_0+a_1+\ldots+a_n-2017=-2Q(1)$$
$$\Rightarrow a_0+a_1+\ldots+a_n=2017-2Q(1)\equiv 1(\bmod 2)$$

(ii) Θεωρούμε το σύνολο $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$ με στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους που ικανοποιούν τα παρακάτω:

(α) $a_n\xi^n+a_{n-1}\xi^{n-1}+\ldots+a_1\xi+a_0=2017$

(β) το άθροισμα $a_0+a_1+\ldots+a_n$ είναι το ελάχιστο δυνατό.

Παρατηρούμε πρώτα ότι αληθεύει η σχέση:

$$0\le a_i\le 3,\ \text{για κάθε } i=1,2,\ldots,n-2.$$

Πράγματι, αν ήταν διαφορετικά για κάποιο $i=1,2,\ldots,n-2$, τότε το σύνολο

$$\{a_0,\ldots,a_{i-1},a_i-4,a_{i+1}+1,a_{i+2}+1,a_{i+3},\ldots a_n\}$$

θα είχε στοιχεία μη αρνητικούς ακέραιους, θα ικανοποιούσε τη σχέση (α), ενώ θα είχε άθροισμα στοιχείων μικρότερο από αυτό του συνόλου $\{a_0,\ a_1,\ldots,a_n\}$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα $Q(x)=b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$. Τότε από την ταυτότητα

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0-2017=\left(x^2+x-4\right)\left(b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\ldots+b_1x+b_0\right)$$

προκύπτουν οι ισότητες:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_0-2017 & =-4b_0\\ a_1 & =-4b_1+b_0\\ a_2 & =-4b_2+b_1+b_0\\ a_3 & =-4b_3+b_2+b_1\\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-2} & =-4b_{n-2}+b_{n-3}+b_{n-4}\\ a_{n-1} & =b_{n-2}+b_{n-3}\\ a_n & =b_{n-2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} a_0-2017 & =-4b_0\\ a_1-b_0 & =-4b_1\\ a_2-b_1-b_0 & =-4b_2\\ a_3-b_2-b_1 & =-4b_3\\ \ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-2}-b_{n-3}-b_{n-4} & =-4b_{n-2}\\ a_{n-1}-b_{n-2} & =b_{n-3}\\ a_n & =b_{n-2}\end{array}\right\}$$

Γενικά ισχύει ότι: $a_{i+2}-b_{i+1}-b_i=-4b_{i+2}$, για κάθε $i=0,1,\ldots,n-4$

Επειδή είναι $0\le a_i\le 3$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n-2,$ από την πρώτη εξίσωση από τις παραπάνω προκύπτει ότι $a_0=1$ και $b_0=504$. Από τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε $a_1=0$ και $b_1=126$. Από την τρίτη εξίσωση λαμβάνουμε $a_2=2$ και $b_2=157.$ Συνεχίζοντας ομοίως λαμβάνουμε τα σύνολα

$$\{b_0,b_1,b_2,\ldots b_{14}\}=\{504,126,157,70,56,31,21,13,8,5,3,2,1,0,0\}$$
$$\{a_0,a_1,a_2,\ldots a_{14}\}=\{1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 1\}$$

Επομένως η ελάχιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a_0+a_1+\ldots+a_n$ είναι **23.**

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία (x_n), $n \in \mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, με $x_1 = \frac{a}{b}$, όπου a, b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Θα δείξουμε ότι αν ο x_{n+1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, τότε και ο x_n είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε επαγωγικά θα πάρουμε το ζητούμενο.
Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αφού ο 3 δεν διαιρεί τον b, δεν θα διαιρεί κανέναν παρονομαστή όρου της ακολουθίας.

Από την αναδρομική σχέση έχουμε $x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1}$. Θέτουμε $x_{m-1} = \frac{p}{q}$ όπου ο q δεν διαιρείται με 3 (*) και $(p, q) = 1$. Τότε

$$x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1} = \frac{3p^3 + pq^2}{q^3} = \frac{p(3p^2 + q^2)}{q^3}.$$

Αφού $(p, q) = 1$, αυτή είναι η ανάγωγη μορφή του x_m. Πράγματι, οι αριθμοί $p(3p^2 + q^2)$, q^3 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν ένας πρώτος s διαιρεί και τους δύο, τότε $s \mid q^3 \Rightarrow s \mid q$ και $s \mid 3p^2 + q^2$ τότε $s \mid 3p^2$. Αφού όμως s δεν διαιρεί τον p, θα έχουμε $s \mid 3 \Rightarrow s = 3$, $3 \mid q$, άτοπο από την (*).

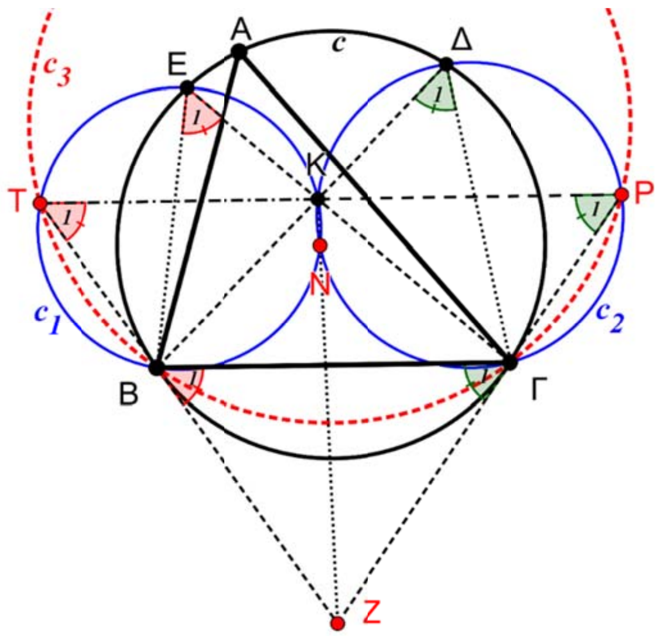
Από την εκφώνηση ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι τέλεια τετράγωνα.
Για να είναι ο παρονομαστής τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο q να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $q = a^2$. Για να είναι ο αριθμητής τέλειο τετράγωνο, έστω $p(3p^2 + q^2) = \kappa^2$, πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι τέλεια τετράγωνα αφού είναι σχετικά πρώτοι. Πράγματι, αν ένας πρώτος t διαιρεί τον p και τον $3p^2 + q^2$, τότε $t \mid q$, που είναι άτοπο αφού $(p, q) = 1$.

Έτσι $p = b^2$, $2p^2 + q^2 = c^2$. Επομένως $x_{m-1} = \frac{p}{q} = \frac{b^2}{a^2}$, άρα ο x_{m-1} είναι τέλειο

τετράγωνο ρητού.
Όμοια τώρα, πηγαίνοντας προς τα πίσω δείχνουμε ότι ο x_{m-2} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, κ.ο.κ μέχρι να φτάσουμε στον x_1.

Πρόβλημα 2
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο O και ακτίνα R. Στα μικρά τόξα $ΑΓ$ και $ΑΒ$ θεωρούμε τα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Έστω $Κ$ είναι το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $ΒΚΕ$, έστω c_1, και $ΓΚΔ$ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία $Α, Κ, Ν$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο $Κ$ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου $ΑΒΓ$, που αντιστοιχεί στην κορυφή $Α$.
Σημείωση: *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

Λύση



Σχήμα 1

1ος Τρόπος
Έστω $Κ$ το σημείο τομής των $ΒΔ$, $ΓΕ$ και $Ν$ το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη $Ζ$ το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία $Β, Γ$ του κύκλου c. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $Κ, Ν, Ζ$ είναι συνευθειακά.

Σημειώνουμε με $Τ$ τη τομή της $ΒΖ$ με τον c_1 και $Ρ$ τη τομή της $ΖΓ$ με τον c_2, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\hat{Ε}_1 = \hat{Τ}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_1 και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΒΚ$)

$\hat{Ε}_1 = \hat{Β}_1$: (η $\hat{Β}_1$ δημιουργείτε από τη χορδή $ΒΓ$ και την εφαπτομένη $ΒΖ$ στο κύκλο c)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Ρ}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_2 και βαίνουν στο ίδιο τόξο $ΓΚ$)

$\hat{Δ}_1 = \hat{Γ}_1$: (η $\hat{Γ}_1$ είναι γωνία της χορδής $ΒΓ$ και την εφαπτομένης $ΓΖ$ στο κύκλο c)

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$: (οι ZB και $Z\Gamma$ είναι εφαπτόμενες στο κύκλο c)

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν τα εξής:

$$\hat{B}_1 = \hat{T}_1 \text{ , άρα } KT//B\Gamma \text{ και } \hat{\Gamma}_1 = \hat{P}_1 \text{, άρα } KP//B\Gamma .$$

Επομένως το τετράπλευρο $B\Gamma PT$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια εγγράψιμο σε κύκλο (έστω c_3).

Άρα η κοινή χορδή KN των κύκλων c_1 και c_2 θα διέρχεται από το ριζικό κέντρο Z των κύκλων c_1, c_2, c_3.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά, τότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N, T είναι συνευθειακά , δηλαδή τα σημεία A, K, N θα ανήκουν στη συμμετροδιάμεσο AT.

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι το σημείο K ανήκει στη συμμετροδιάμεσο AT , τότε τα σημεία A, K, T θα είναι συνευθειακά. Οπότε (επειδή και τα σημεία K, N, T είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, K, N είναι συνευθειακά.

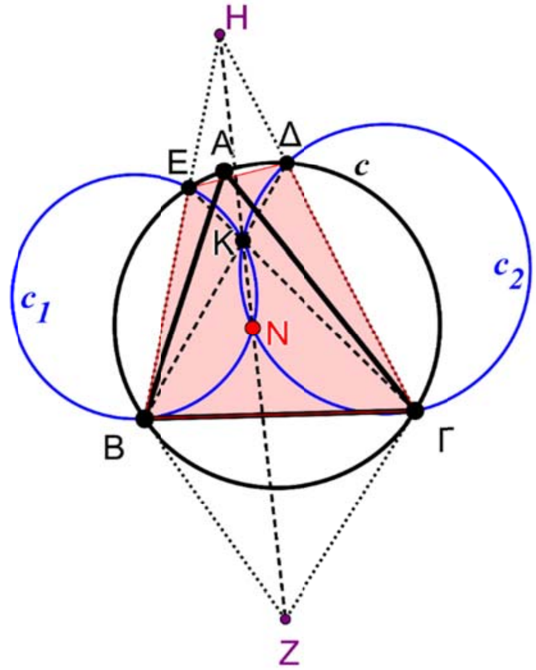
2ος Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $B\Delta$, ΓE και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, Γ του κύκλου c. Αν H είναι το σημείο τομής των EB και $\Delta\Gamma$, θα αποδείξουμε ότι τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $BB\Gamma\Gamma\Delta E$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία H, K, Z είναι συνευθειακά.

Το σημείο H έχει την ίδια δύναμη ως προς το κύκλο c. Δηλ. $HE \cdot HB = H\Delta \cdot H\Gamma$.

Άρα τα σημεία K, N, H είναι συνευθειακά. Οπότε τα σημεία K, N, Z, H είναι συνευθειακά.



Σχήμα 2

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά, το σημείο K θα ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ.

Αντίστροφα, αν το K ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ τότε τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3
(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί n, m με $n < m$ και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$|P(a_i) - P(a_j)| = |a_i - a_j|, \quad (1)$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.
(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \geq 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε

$$|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|,$$

για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq m$.

Λύση

(α) Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ερώτημα (α). Λόγω της συμμετρίας υποθέτουμε ότι $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$ και για ευκολία θέτουμε $d_i = P(a_i) - P(a_{i+1})$. Τότε λόγω της (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_{m-1}| = \\
&= |P(a_1) - P(a_2)| + |P(a_2) - P(a_3)| + \ldots + |P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{m-1} - a_m| \\
&= a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{m-1} - a_m \\
&= a_1 - a_m = |a_1 - a_m| \\
&= |P(a_1) - P(a_m)| = |P(a_1) - P(a_2) + P(a_2) - P(a_3) + \ldots + P(a_{m-1}) - P(a_m)| \\
&= |d_1 + d_2 + \ldots + d_{m-1}|
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι ομόσημοι. Οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις.
1η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι θετικοί. Είναι Τότε από την (1) έχουμε ότι $P(a_1) - P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2$. Όμοια $P(a_2) - a_2 = P(a_3) - a_3, \ldots,$ $P(a_{m-1}) - a_{m-1} = P(a_m) - a_m$. Έπεται ότι

$$P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = \ldots = P(a_m) - a_m = k \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - x - k$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = x + k$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

2η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, ..., d_{m-1}$ είναι αρνητικοί. Τότε από την (1) έχουμε ότι $-P(a_1) + P(a_2) = a_1 - a_2 \Rightarrow P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2$.Επομένως

$$P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda \quad (3)$$

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $R(x) = P(x) + x - \lambda$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m > n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$). Έπεται ότι το $R(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x) = -x + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως δύο πολυώνυμα, το $P(x) = x + k$ και το $P(x) = -x + \lambda$ είναι τα μόνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

2ος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $m \geq 3$ και ότι υπάρχουν $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ ώστε να ισχύει:

$$P(p) - P(q) = p - q, \ P(p) - P(r) = r - p \ .$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε ότι

$$P(r) - P(q) = 2p - q - r \ . (4)$$

Όμως από την συνθήκη της εκφώνησης έχουμε ότι $P(r) - P(q) = r - q$ ή $P(r) - P(q) = q - r$. Στην πρώτη περίπτωση η (4) γίνεται $2r = 2p \Rightarrow r = p$, άτοπο αφού οι $p, r \in \{a_1, ..., a_m\}$ που είναι διακεκριμένοι. Όμοια, αν $P(r) - P(q) = q - r$ τότε η (4) δίνει $q = p$, πάλι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι είτε $m < 3$, είτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$.

1η περίπτωση: Αν $m < 3$, τότε $n = 1$ ή $n = 0$. Προφανώς η $n = 0$ απορρίπτεται αφού κανένα σταθερό πολυώνυμο δεν ικανοποιεί. Η $n = 1$ δίνει $P(x) = ax + b$, οπότε πρέπει

$$| a \cdot a_i + b - a \cdot a_j - b | = | a_i - a_j | \Leftrightarrow | a | = 1$$

οπότε $P(x) = x + b$, ή $P(x) = -x + b$.

2η περίπτωση: Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι $p, q, r \in \{a_1, ..., a_m\}$, τότε είτε $P(a_1) - a_1 = P(a_2) - a_2 = ... = P(a_m) - a_m = k$, οπότε οδηγούμαστε στην 1η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο, είτε $P(a_1) + a_1 = P(a_2) + a_2 = ... = P(a_m) + a_m = \lambda$, οπότε οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο.

(β) Θα δείξουμε ότι αν $Q(x) = x^n$ και $| a_i | < \frac{1}{n}$ για κάθε $1 \leq i \leq m$ τότε ισχύει η ζητούμενη ανισότητα. Πράγματι,

$$|Q(a_i)-Q(a_j)|=|a_i^n-a_j^n|=|a_i-a_j|\cdot|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\,(1)$$

και

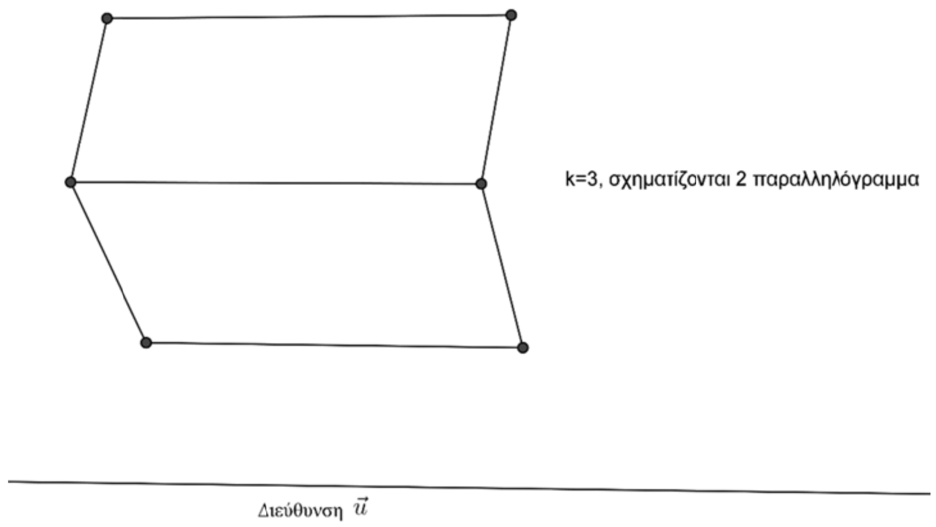
$$|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\le|a_i^{n-1}|+|a_i^{n-2}a_j|+\ldots+|a_j^{n-1}|<\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{n^{n-1}}=\frac{n}{n^{n-1}}<1$$

οπότε από την (1) έχουμε $|P(a_i)-P(a_j)|<|a_i-a_j|$.

Σημείωση: Στο δεύτερο ερώτημα υπάρχουν και άλλες πιθανές κατασκευές που μπορεί να γίνουν.

Πρόβλημα 4.
Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n\ge 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n)\le\dfrac{n^2-3n}{4}$, για κάθε $n\ge 4$.

Λύση
Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\vec{u}$ στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτή τη διεύθυνση μπορεί να έχουμε το πολύ δύο σημεία. Ας υποθέσουμε ότι σε ότι υπάρχουν k ζεύγη σημείων για αυτή τη διεύθυνση. Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $k=3$), σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 με αυτά τα k ζεύγη σημείων.



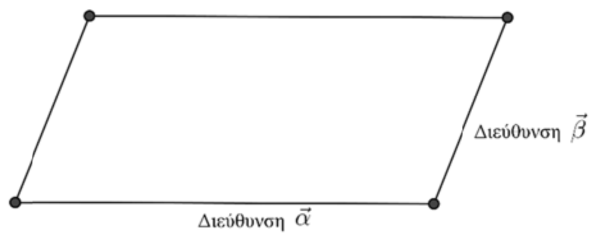
Σχήμα 3

Επομένως σε μία διεύθυνση με k ζεύγη σημείων, σχηματίζονται πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, αν αθροίσουμε τα παραλληλόγραμμα σε όλες τις διευθύνσεις, θα πάρουμε

$$\sum(k-1)=\left(\sum k\right)-s\ ,$$

όπου s είναι το συνολικό πλήθος των διευθύνσεων στις οποίες βρίσκονται σημεία. Το άθροισμα όμως $\left(\sum k\right)$ είναι το άθροισμα όλων των τμημάτων, που είναι $\dbinom{n}{2}$.

Επομένως, το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το $\binom{n}{2}-s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε κάθε παραλληλόγραμμο δύο φορές. Μία φορά για την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και μία φορά για τη διεύθυνση $\vec{\beta}$, όπως φαίνεται στο σχήμα:

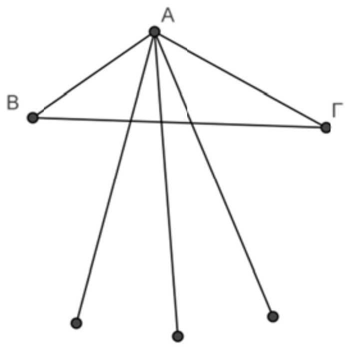


Σχήμα 4

Επομένως το συνολικό πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-s}{2}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε $n \geq 4$ σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά, τότε το πλήθος των διευθύνσεων είναι $s \geq n$. Πράγματι ας πάρουμε τρία γειτονικά σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ (σε κυρτή θέση) όπως στο σχήμα:



Σχήμα 5

Το σημείο Α συνδέεται με $n-1$ τμήματα με τα υπόλοιπα σημεία. Όλα αυτά τα τμήμα έχουν κοινό σημείο το Α, οπότε ορίζουν $n-1$ διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον το τμήμα ΒΓ δεν είναι παράλληλο σε κανένα από αυτά τα τμήματα, αφού τα τέμνει όλα, άρα ορίζει μία ακόμη διεύθυνση. Επομένως έχουμε τουλάχιστον $n-1+1=n$ διαφορετικές διευθύνσεις, οπότε το πλήθος των παραλληλογράμμων είναι το πολύ

$$\frac{\binom{n}{2}-n}{2}=\frac{n^2-3n}{4}.$$

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
36η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα « Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
23 Φεβρουαρίου 2019
Θέματα και ενδεικτικές λύσεις μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία α_ν έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1},\ \ \nu \geq 2.$$

Να υπολογίσετε το γενικό όρο α_ν και να βρείτε τη μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον όρο a_k, όπου $k = 2^{2019}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Σύμφωνα με τον ορισμό της ακολουθίας έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 5\alpha_1 + 3 \\ \alpha_3 = 5\alpha_2 + 3^2 \\ \alpha_4 = 5\alpha_3 + 3^3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{\nu-1} = 5\alpha_{\nu-2} + 3^{\nu-2} \\ \alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5^{\nu-1}\alpha_1 = 5^{\nu-1} \\ 5^{\nu-2}\alpha_2 = 5^{\nu-1}\alpha_1 + 5^{\nu-2}\cdot 3 \\ 5^{\nu-3}\alpha_3 = 5^{\nu-2}\alpha_2 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2 \\ 5^{\nu-4}\alpha_4 = 5^{\nu-3}\alpha_3 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 5\alpha_{\nu-1} = 5^2\alpha_{\nu-2} + 5\cdot 3^{\nu-2} \\ \alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1} + 3^{\nu-1} \end{array}\right\} \overset{\substack{\textit{πρόσθεση} \\ \textit{κατά μέλη}}}{\Rightarrow}$$

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1} + 5^{\nu-2}\cdot 3 + 5^{\nu-3}\cdot 3^2 + 5^{\nu-4}\cdot 3^3 + \dots + 5\cdot 3^{\nu-2} + 3^{\nu-1} = \frac{5^\nu - 3^\nu}{5-3} = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),$$

για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$.

Διαφορετικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\alpha_\nu = 5^{\nu-1}\cdot\left[1 + \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^{\nu-1}\right] = 5^{\nu-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^\nu}{1-\frac{3}{5}}$$

$$= 5^{\nu-1}\cdot\frac{5}{2\cdot 5^\nu}\left(5^\nu - 3^\nu\right) = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right),\ \text{για κάθε } \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Επομένως έχουμε: $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(5^\nu - 3^\nu\right)$, για κάθε $\nu = 1, 2, 3, \dots$

Για την εύρεση του γενικού όρου, εναλλακτικά μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

Από τον ορισμό της ακολουθίας διαπιστώνουμε ότι:

$$\alpha_1=1=\frac{1}{2}\left(5-3\right),\ \alpha_2=5\cdot 1+3=8=\frac{1}{2}\left(5^2-3^2\right),\ \alpha_3=5\cdot 8+3^2=49=\frac{1}{2}\left(5^3-3^3\right),..$$

Ισχυριζόμαστε ότι πρέπει να ισχύει $\alpha_\nu=\frac{1}{2}\left(5^\nu-3^\nu\right)$, για κάθε $\nu=1,2,3,\dots$, το οποίο αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή.

Τώρα για $k=2^{2019}$, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων, έχουμε

$$2a_k=5^{2^{2019}}-3^{2^{2019}}=2\cdot(5+3)(5^2+3^2)...(5^{2^{2018}}+3^{2^{2018}}),$$

οπότε

$$a_k=(5+3)(5^2+3^2)...(5^{2^{2018}}+3^{2^{2018}}).$$

Παρατηρούμε τώρα, ότι εκτός από την πρώτη παρένθεση που διαιρείται από 8, όλες οι άλλες παρενθέσεις διαιρούνται από το 2 αλλά όχι από το 4.

Πράγματι, ισχύει ότι: $5^{2^\nu}\equiv 1\left(\bmod 4\right)$ και $3^{2^\nu}\equiv 1\left(\bmod 4\right)\Rightarrow 5^{2^\nu}+3^{2^\nu}\equiv 2\left(\bmod 4\right)$, για κάθε $\nu\geq 1$.

Οι παρενθέσεις από το 5^2+3^2 μέχρι το $(5^{2^{2018}}+3^{2^{2018}})$, είναι συνολικά 2018, οπότε η μεγαλύτερη δύναμη του 2 που διαιρεί τον αριθμό είναι $2^3\cdot\underbrace{2^1\cdot\ldots\cdot 2^1}_{2018\ \text{το πλήθος}}=2^{2021}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει μία ειδική μορφή του λήμματος ανύψωσης του εκθέτη (Lifting the Exponent Lemma) το οποίο αφορά το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του 2 που διαιρεί μία διαφορά δυνάμεων με βάσεις ακέραιους. Σημειώνουμε με $\upsilon_p\left(\alpha\right)$ το μέγιστο εκθέτη της δύναμης του πρώτου θετικού ακέραιου p που διαιρεί τον ακέραιο α, δηλαδή ισχύει ότι: $p^{\upsilon_p(a)}\left|\alpha\ \text{και}\ p^{\upsilon_p(a)+1}\right.$ δεν διαιρεί το α.

Λήμμα: Έστω α,β δύο περιττοί ακέραιοι και ν ένας άρτιος θετικός ακέραιος. Τότε ισχύει ότι:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu-\beta^\nu\right)=\upsilon_2\left(\alpha-\beta\right)+\upsilon_2\left(\alpha+\beta\right)+\upsilon_2\left(\nu\right)-1$$

Απόδειξη.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι το τετράγωνο περιττού ακέραιου είναι της μορφής $4\kappa+1$, οπότε ο ακέραιος 4 διαιρεί τη διαφορά $\alpha^2-\beta^2$. Αν ο ν γράφεται στη μορφή $\nu=\mu\cdot 2^\kappa$, τότε:

$$\upsilon_2\left(\alpha^\nu-\beta^\nu\right)=\upsilon_2\left(\alpha^{\mu\cdot 2^\kappa}-\beta^{\mu\cdot 2^\kappa}\right)=\upsilon_2\left(\left(\alpha^2\right)^{2^\kappa}-\left(\beta^2\right)^{2^\kappa}\right)=$$

$$...=\upsilon_2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+\kappa-1=\upsilon_2\left(\alpha-\beta\right)+\upsilon_2\left(\alpha+\beta\right)+\upsilon_2\left(\nu\right)-1.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω λήμμα για τον ακέραιο $2a_{2^{2019}}=5^{2^{2019}}-3^{2^{2019}}$ λαμβάνουμε:

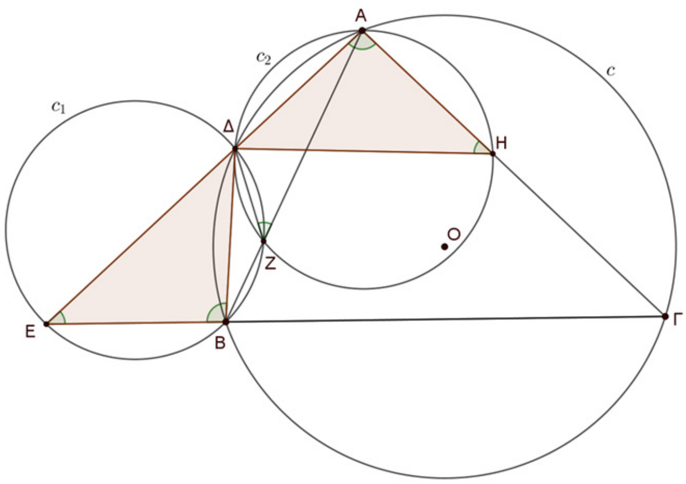
$$\upsilon_2\left(2a_{2^{2019}}\right)=\upsilon_2\left(5^{2^{2019}}-3^{2^{2019}}\right)=\upsilon_2\left(5-3\right)+\upsilon_2\left(5+3\right)+\upsilon_2\left(2^{2019}\right)-1=1+3+2019-1=2022,$$

οπότε τελικά έχουμε: $\upsilon_2\left(a_k\right)=2021$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ με $\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ} < \text{ΒΓ}$ και έστω Δ το μέσο του μικρού τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΕ (έστω c_1) τέμνει την ΑΒ (για δεύτερη φορά) στο σημείο Ζ. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΖ (έστω c_2) τέμνει (για δεύτερη φορά) την ΑΓ στο σημείο Η να αποδείξετε ότι $\text{ΒΕ} = \text{ΑΗ}$.

Λύση (1ος τρόπος)



Σχήμα 1

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΓ έχουμε ότι:

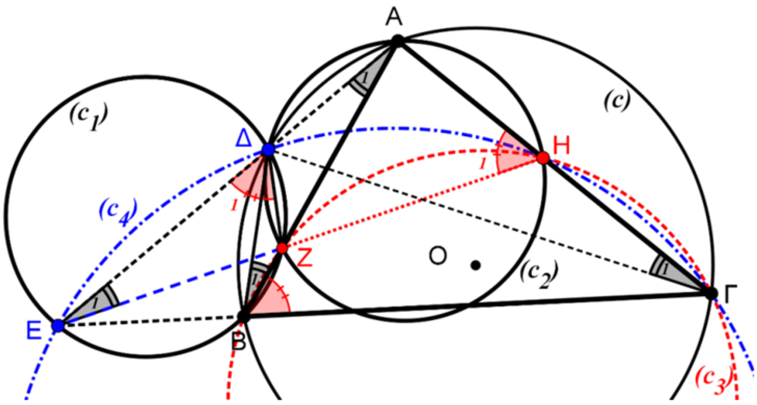
$$\Delta\hat{\text{Α}}\text{Η} = \Delta\hat{\text{Β}}\text{Ε} \qquad (1)$$

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα ΑΕΒΖ και ΑΔΖΗ προκύπτουν οι ισότητες γωνιών:

$$\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \Delta\hat{\text{Ζ}}\text{Α} = \text{Α}\hat{\text{Η}}\Delta \qquad (2)$$

Επειδή το Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ, έπεται ότι: $\text{Α}\Delta = \Delta\text{Β}$. Από τις ισότητες γωνιών (1) και (2) και την ισότητα $\text{Α}\Delta = \Delta\text{Β}$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΔΕΒ είναι ίσα, οπότε θα έχουν και τις πλευρές ΒΕ και ΑΗ ίσες.

2ος τρόπος



Σχήμα 2

Εφόσον το σημείο Δ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΑΒ, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_1 = \frac{\widehat{\Gamma}}{2}.$$

Άρα οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους διότι η (κοινή) χορδή ΔΖ φαίνεται υπό ίσες γωνίες $(\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_1)$.

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι τα τμήματα ΒΕ, ΑΗ (που είναι χορδές των ίσων κύκλων (c_1) και (c_2)) είναι ίσα μεταξύ τους, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες, δηλαδή ότι $\widehat{\mathrm{BZE}} = \widehat{\mathrm{AZH}}$ ή ότι τα σημεία Ε, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

Στο τρίγωνο ΑΕΓ, το σημείο Ζ είναι το σημείο Miquel του τριγώνου, ως σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων ΒΕΔ, ΑΗΔ. Επομένως το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Αυτό προκύπτει εύκολα και από ισότητες γωνιών.

Θεωρούμε τώρα τους κύκλους (c), (c_2) και (c_3). Οι κοινές χορδές τους συντρέχουν στο ριζικό τους κέντρο. Οι κοινές χορδές τους όμως είναι οι ΑΔ, ΖΗ, ΒΓ, οπότε αυτές συντρέχουν. Έπεται ότι η ΖΗ περνά από το σημείο Ε, που είναι το ζητούμενο.

Εναλλακτικά μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση του σημείου Miquel ως εξής. Έχουμε

$$\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma \overset{\text{εξωτερική στο ΒΖΔΕ}}{=} \mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} \overset{\text{εξωτερική στο ΑΔΖΗ}}{=} \mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{Z},$$

οπότε το τετράπλευρο ΒΖΗΓ είναι και αυτό εγγεγραμμένο σε κύκλο έστω (c_3). Από το θεώρημα της δύναμης σημείου Ε ως προς κύκλο (c) έχουμε $\mathrm{EB}\cdot\mathrm{E\Gamma} = \mathrm{E\Delta}\cdot\mathrm{EA}$

Όμως το αριστερό μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_3) και το δεξί μέλος είναι η δύναμη του Ε ως προς τον (c_2). Έπεται ότι το Ε ανήκει στον ριζικό άξονα αυτών των δύο κύκλων, που είναι η κοινή τους χορδή ΖΗ, δηλαδή το Ε ανήκει ΖΗ, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3

Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ρητών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση

$$yx^y = y+1$$

Λύση

Θέτουμε $y = \frac{p}{q}$, σε ανάγωγη μορφή με $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$x^{\frac{p}{q}} = \frac{y+1}{y} = \frac{\frac{p}{q}+1}{\frac{p}{q}} = \frac{p+q}{p} \ ,$$

Και υψώνοντας και τα δύο μέλη στην $\frac{q}{p}$ παίρνουμε:

$$x = \sqrt[p]{\frac{(p+q)^q}{p^q}} \ .$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι ρητός, θα πρέπει το ίδιο να ισχύει και για το δεξί μέλος. Επιπλέον $(p+q,p)=1$, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος να είναι τέλειες p δυνάμεις. Άρα πρέπει

$$p+q=a^p \quad και \quad p=b^p\,,\ \ a,b\in\mathbb{N}^*, a>1$$

Αν όμως $b\geq 2$, έχουμε ότι $b^p \geq 2^p > p$, οπότε πρέπει $b=1$, άρα $p=1$ και $q=a-1$. Επομένως τα ζεύγη λύσεων δίνονται παραμετρικά

$$(x,y)=\left(a^{a-1},\ \frac{1}{a-1}\right),\ a\in\mathbb{N}^*, a>1\ .$$

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε ορθογώνιο $\nu\times\mu$, με $\nu\leq\mu$, το οποίο υποδιαιρούμε με παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του σε $\nu\mu$ μοναδιαία τετράγωνα. Αρχικά τοποθετούμε από ένα μαύρο πιόνι σε Ν μοναδιαία τετράγωνα και στη συνέχεια προσπαθούμε να γεμίσουμε τον πίνακα με μαύρα πιόνια εκτελώντας την παρακάτω επιτρεπόμενη κίνηση:

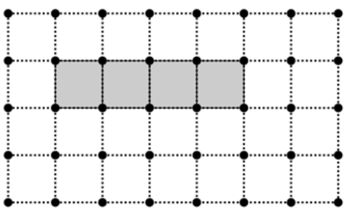
Αν ένα κενό μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με δύο τουλάχιστον μοναδιαία τετράγωνα κατειλημμένα με μαύρο πιόνι, τότε τοποθετούμε και σε αυτό το μοναδιαίο τετράγωνο ένα μαύρο πιόνι.

Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού Ν των μαύρων πιονιών που πρέπει και αρκεί να υπάρχουν σε μία αρχική τοποθέτηση, έτσι ώστε μετά από πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών εφαρμογών της επιτρεπόμενης κίνησης να γεμίσει το ορθογώνιο με μαύρα πιόνια.

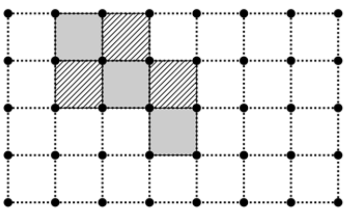
Λύση

Αριθμούμε τις γραμμές του ορθογωνίου από το 1 μέχρι το ν και τις στήλες από το 1 μέχρι το μ.

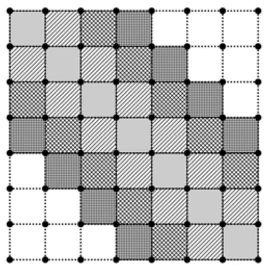
Για $\nu=\mu$ το ορθογώνιο είναι τετράγωνο $\nu\times\nu$, ενώ για $\nu<\mu$ το ορθογώνιο αποτελείται από ένα τετράγωνο $\nu\times\nu$ και από ένα ορθογώνιο $\nu\times(\mu-\nu)$. Παρατηρούμε ότι δύο διπλανά τετράγωνα της ίδιας γραμμής ή της ίδιας στήλης με μαύρα πιόνια δεν δίνουν την δυνατότητα πλήρωσης κάποιου άλλου μοναδιαίου τετραγώνου. Όταν όμως είναι διαδοχικά στην ίδια μεγάλη ή μικρή διαγώνιο τότε δίνουν τη δυνατότητα πλήρωσης δύο μοναδιαίων τετραγώνων, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 2(α)



Σχήμα 2(β)



Σχήμα 2(γ)

Έτσι για την περίπτωση με $\nu=\mu$, αν τοποθετήσουμε στη κύρια διαγώνιο του τετραγώνου ν μαύρα πιόνια, τότε είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι με διαδοχικές κινήσεις μπορούμε να γεμίσουμε το τετράγωνο με μαύρα πιόνια.

Αν υποθέσουμε ότι $\nu < \mu$, τότε στο $\nu \times \nu$ τετράγωνο τοποθετούνε ξανά στη διαγώνιο τα ν μαύρα πιόνια, οπότε μπορούμε να γεμίσουμε το $\nu \times \nu$ τετράγωνο με μαύρα πιόνια. Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\mu - \nu$ περιττός, δηλαδή αν οι μ, ν είναι ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+1-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι. Με αυτό το τετράγωνο μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια. Κάνουμε το ίδιο και για τα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+3), \ldots, (\nu, \nu+2\kappa-1)$ και σταματάμε όταν: $\nu+2\kappa-1=\mu \Leftrightarrow \mu-\nu=2\kappa-1$. Έτσι έχουμε τοποθετήσει μαύρα πιόνια στα μοναδιαία τετράγωνα $(\nu, \nu+2\kappa-1)$, για $\kappa = 1, 2 \ldots, \dfrac{\mu-\nu+1}{2}$ Τότε είναι εύκολο να γεμίσουμε τα ενδιάμεσα τετράγωνα της $\nu-$οστής γραμμής με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu + \frac{\mu-\nu+1}{2} = \frac{\mu+\nu+1}{2}.$$
- Αν $\mu - \nu$ άρτιος, τοποθετούμε στην τομή της $\nu+2\kappa-$στήλης με τη $\nu-$οστή γραμμή ένα μαύρο πιόνι, για $\kappa = 1, 2, \ldots, \dfrac{\mu-\nu}{2}$. Με αυτά τα τετράγωνα μπορούμε πλέον να γεμίσουμε τη $(\nu+1)-$στήλη με μαύρα πιόνια και στη συνέχεια όλες τις στήλες του ορθογωνίου. Παρατηρούμε ότι συνολικά στην περίπτωση αυτή ο **ικανός αριθμός** μαύρων πιονιών είναι
$$\nu + \frac{\mu-\nu}{2} = \frac{\mu+\nu}{2}.$$
Για τις δύο περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό των μαύρων πιονιών που χρησιμοποιήσαμε στην ενιαία μορφή
$$\left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor.$$
Επομένως ο ελάχιστος δυνατός αριθμός Ν πιονιών που απαιτείται για το γέμισμα του πίνακα με μαύρα πιόνια είναι:
$$\mathrm{N} \leq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο παραπάνω αριθμός Ν είναι και αναγκαίος για να ισχύει το ζητούμενο του προβλήματος. Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$\mathrm{N} \geq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor \qquad (2)$$

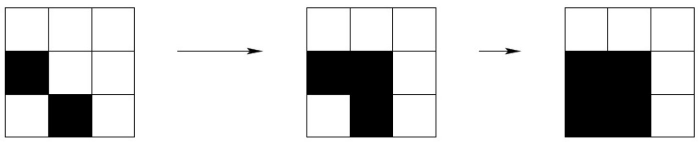
Ονομάζουμε μία πλευρά ενός μοναδιαίου τετραγώνου **ασπρόμαυρη**, αν είναι πλευρά ενός μόνο μοναδιαίου τετραγώνου που έχει μαύρο πιόνι. Για παράδειγμα ασπρόμαυρες είναι όλες οι πλευρές μοναδιαίων τετραγώνων που βρίσκονται πάνω στις πλευρές του δεδομένου ορθογωνίου. Υποθέτουμε ότι μία αρχική τοποθέτηση μαύρων πιονιών στα μοναδιαία τετράγωνα περιέχει Ν μαύρα πιόνια. Τότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός ασπρόμαυρων πλευρών είναι 4Ν.

Σε κάθε κίνηση που εκτελούμε, αν το μοναδιαίο τετράγωνο έχει κοινή πλευρά με $\kappa \geq 2$ μοναδιαία τετράγωνα που έχουν μαύρα πιόνια, τότε στο τετράγωνο αυτό τοποθετείται μαύρο πιόνι και δημιουργούνται $4-\kappa$ ασπρόμαυρες πλευρές. Επειδή $4-\kappa \leq \kappa$, ο αριθμός των ασπρόμαυρων τετραγώνων δεν αυξάνει. Όμως σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τα ασπρόμαυρες πλευρές του ορθογωνίου που υπάρχουν στις πλευρές του ορθογωνίου, ακόμα και όταν όλα τα μοναδιαία τετράγωνα αποκτήσουν μαύρο πιόνι, και συνολικά είναι $2(\nu+\mu)$, δηλαδή πρέπει: $4\mathrm{N} \geq 2(\nu+\mu) \Rightarrow \mathrm{N} \geq \frac{\mu+\nu}{2}$. Επειδή ο Ν είναι ακέραιος, πρέπει $\mathrm{N} \geq \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

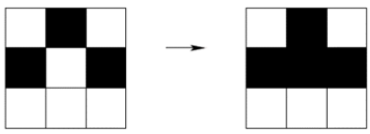
Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\mathrm{N} = \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$.

2ος τρόπος:

Θα ονομάζουμε το σύνολο όλων των μαύρων τετραγώνων «μαύρη περιοχή». Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν ένα λευκό τετράγωνο έχει τουλάχιστον δύο μαύρα γειτονικά τετράγωνα, τότε μετά την επιτρεπόμενη κίνηση η περίμετρος της μαύρης περιοχής δεν μειώνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Στο παραπάνω σχήμα αυτό η περίμετρος της μαύρης περιοχής παραμένει ίσο με 8 μετά τις δύο κινήσεις.



Στο παραπάνω σχήμα η περίμετρος στην αρχή είναι 12 και στη συνέχεια γίνεται 10, δηλαδή μειώνεται κατά 2.

Αν λοιπόν έχουμε στην αρχή N μαύρα τετράγωνα, τότε η αρχική περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι το πολύ $4\mathrm{N}$. (Είναι ακριβώς $4\mathrm{N}$ όταν δεν υπάρχουν γειτονικά μαύρα τετράγωνα). Αν λοιπόν στο τέλος το ορθογώνιο έχει μόνο μαύρα τετράγωνα, η περίμετρος της μαύρης περιοχής είναι η περίμετρος του ορθογωνίου, δηλαδή $2\mu+2\nu$.

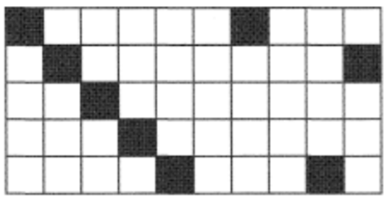
Οπότε από τη βασική παρατήρηση στην αρχική θα έχουμε:

$$4\mathrm{N} \geq \textit{αρχική περίμετρος} \geq \textit{τελική περίμετρος} = 2\mu+2\nu$$

Έπεται ότι, $N \geq \frac{\mu+\nu}{2}$ και αφού ο N είναι ακέραιος, θα έχουμε $N \geq \left\lceil \frac{\mu+\nu}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$. Θα αποδείξουμε ότι πάντα γίνεται με $\left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε αυτή θα είναι και η ελάχιστη τιμή.

Για το παράδειγμα, τοποθετούμε ν μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του $\nu \times \nu$ τετραγώνου πάνω αριστερά. Στο ορθογώνιο που μένει αφήνουμε την πρώτη στήλη άδεια, στη δεύτερη βάζουμε κάπου ένα μαύρο τετράγωνο, αφήνουμε την επόμενη στήλη άδεια κοκ, μέχρι να φτάσουμε στην τελευταία στήλη όπου βάζουμε οπωσδήποτε ένα μαύρο τετράγωνο. Τοποθετούμε με αυτόν τον τρόπο άλλα $\left\lfloor \frac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor$ μαύρα τετράγωνα, οπότε συνολικά $\nu + \left\lfloor \frac{\mu-\nu+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\mu+\nu+1}{2} \right\rfloor$, που είναι το ζητούμενο πλήθος.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το παράδειγμα σε ένα ορθογώνιο 5×10, όπου τοποθετήσαμε 5 μαύρα τετράγωνα στην κύρια διαγώνιο του 5×5 τετραγώνου, αφήσαμε μία στήλη κενή, στην επόμενη βάλαμε ένα μαύρο και στην συνέχεια τοποθετήσαμε και στην τελευταία.



Μένει να δικαιολογήσουμε ότι με την παραπάνω τοποθέτηση που προτείναμε, μετά από πεπερασμένες κινήσεις, όλο το ορθογώνιο θα έχει μαύρα τετράγωνα. Πράγματι, στην αρχή η κύρια διαγώνιος του $\nu \times \nu$, βήμα-βήμα κάνει μαύρα όλα τα τετράγωνα του $\nu \times \nu$ τετραγώνου και στη συνέχεια με τη βοήθεια των μαύρων που έχουμε τοποθετήσει σε στήλη παρά στήλη, κάνουν όλες τις υπόλοιπες στήλες μαύρες.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

100 Χρόνια Ε.Μ.Ε.
ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ
ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 2103616532 - 3617784 - Fax: 2103641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

37η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ» ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

Θέματα μεγάλων τάξεων
Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα μη σταθερά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα:

$$P\left((Q(x))^3\right)=xP(x)(Q(x))^3.$$

Λύση

Έστω ότι: $\deg P(x)=m\geq 1$, $\deg Q(x)=n\geq 1$. Θεωρώντας τους βαθμούς των δύο μελών της δεδομένης σχέσης, λαμβάνουμε την ισότητα:

$$\begin{aligned}&3mn=1+m+3n\Leftrightarrow(m-1)(3n-1)=2\\&\Leftrightarrow m-1=1,3n-1=2 \text{ ή } m-1=2,\ 3n-1=1(\text{αδύνατη στο } \mathbb{N}^*)\\&\Leftrightarrow m=2,\ n=1.\end{aligned}$$

Έστω ότι $P(x)=ax^2+bx+c, a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0,\ Q(x)=dx+e, d,e\in\mathbb{R}, d\neq 0$. Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$a\left((Q(x))^3\right)^2+b(Q(x))^3+c=xP(x)(Q(x))^3, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι το μη σταθερό πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρεί το σταθερό πολυώνυμο c, οπότε $c=0$. Τότε από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}&a\left((Q(x))^3\right)^2+b(Q(x))^3-xP(x)(Q(x))^3=0\\&\Leftrightarrow(Q(x))^3\left(a(Q(x))^3+b-xP(x)\right)\\&\overset{Q(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow} a(Q(x))^3+b-xP(x)=0\\&xP(x)=a(Q(x))^3+b \qquad (2)\end{aligned}$$

Η σχέση (2) γίνεται:

$$x\left(ax^2+bx\right)=a\left(dx+e\right)^3+b$$
$$\Leftrightarrow ax^3+bx^2=ad^3x^3+3ad^2ex^2+3ade^2x+ae^3+b$$
$$\Leftrightarrow a=ad^3,\ b=3ad^2e,\ 3ade^2=0,\ ae^3+b=0$$
$$\overset{a,d\neq 0}{\Longleftrightarrow}\ d=1,\ e=0,\ b=0, a\in\mathbb{R}.$$

Άρα είναι: $P(x)=ax^2,\ Q(x)=x,\ a\in\mathbb{R}$ και εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και πάνω σε αυτό σημείο Γ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB}=3\cdot\mathrm{A\Gamma}$. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΑΓΔΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Gamma}=\Delta\mathrm{E}=\Gamma\mathrm{E}>\mathrm{AE}$. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $\mathrm{A\hat{E}Z}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο Β προς την ευθεία ΕΓ και η κάθετη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ, πάνω στην ευθεία ΕΖ.

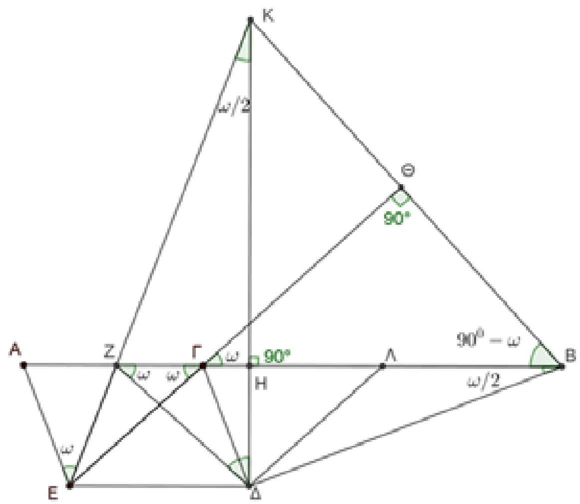
Λύση

Αν $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΘΒ έχουμε:

$$\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Theta=90^0-\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Theta=90^0-\omega, \qquad (1)$$

αφού $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Theta=\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E}=\omega$, ως κατά κορυφή και επιπλέον $\mathrm{B\hat{H}K}=90^0$, με συνέπεια $\Gamma\hat{\mathrm{B}}\Theta+\mathrm{B\hat{H}K}=90^0-\omega+90^0=18\hat{0}-\omega<180^0$, οπότε οι ευθείες ΒΘ και ΔΗ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Κ είναι συνευθειακά.

Παρατηρούμε τώρα ότι το τετράπλευρο ΕΔΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο, αφού $\mathrm{E}\Delta\parallel\mathrm{Z}\Gamma$ και $\mathrm{ZE}=\mathrm{AE}=\Gamma\Delta$. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΓΕ έχουν τη γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ κοινή και $\mathrm{A\hat{E}Z}=\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$, οπότε είναι ισογώνια. Άρα και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές με $\mathrm{A\hat{Z}E}=\mathrm{E\hat{A}Z}$, οπότε: $\mathrm{AE}=\mathrm{ZE}$



Σχήμα 1

Από το ισοσκελές τραπέζιο ΕΔΓΖ έχουμε ότι:

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma = \mathrm{Z}\hat{\Gamma}\Delta = 180^0 - \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = 180^0 - \left(\frac{180^0-\omega}{2}\right) = 90^0 + \frac{\omega}{2} \ . \qquad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΖ είναι

$$\mathrm{Z}\hat{\Delta}\mathrm{H} = 90^0 - \Delta\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = 90^0 - \omega. \qquad (3)$$

Από τις (1) και (3) έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΚ είναι εγγράψιμο.

Θεωρούμε το μέσο Λ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ και παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΕΔΛΓ έχει $\mathrm{E}\Delta \parallel \Gamma\Lambda$, $\Gamma\mathrm{E} = \Delta\mathrm{E} = \mathrm{A}\Gamma = \Gamma\Lambda$, αφού $\mathrm{A}\Gamma = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{AB}$ και Λ μέσον ΓΒ. Άρα το τετράπλευρο ΕΔΛΓ είναι ρόμβος. Επομένως έχουμε $\Lambda\hat{\Gamma}\Delta = \omega$ και επιπλέον $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma = \Lambda\mathrm{B} = \frac{\Gamma\mathrm{B}}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΓΔΒ είναι ορθογώνιο στο Δ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΛΔΒ έχουμε: $\Delta\hat{\mathrm{B}}\Lambda = \frac{\omega}{2}$.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΚ έχουμε:

$$\mathrm{Z}\hat{\mathrm{K}}\Delta = \Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{B}}\Lambda = \frac{\omega}{2}, \qquad (4)$$

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΚ και τη σχέση (4) έπεται ότι:

$$\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = \mathrm{H}\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = 90^0 - \frac{\omega}{2} \qquad (5)$$

Από τις σχέσεις (2) και (5) έπεται ότι:

$$\mathrm{E}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma + \Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = 90^0 + \frac{\omega}{2} + 90^0 - \frac{\omega}{2} = 180^0,$$

οπότε τα σημεία Α, Ε και Κ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα είναι γραμμένοι σε μία ευθεία οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 2030 σε αύξουσα σειρά. Έχουμε το δικαίωμα της «*κίνησης*» Κ:

Επιλέγουμε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς α,β που είναι γραμμένοι σε διαδοχικές θέσεις και αντικαθιστούμε το ζευγάρι (α,β) με τον αριθμό $(\alpha-\beta)^{2020}$.

Εκτελούμε την κίνηση Κ αρκετές φορές μέχρι που να μείνει στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να είναι ο αριθμός αυτός:

(α) ο 2020^{2020}, **(β)** ο 2021^{2020}.

Λύση

(α) Πρώτα από όλα παρατηρούμε τα εξής:

Σε οποιαδήποτε κίνηση Κ, οι αριθμοί $\alpha+\beta$ και $(\alpha-\beta)^{2020}$ είναι ισοϋπόλοιποι modulo 2, δηλαδή είναι και δύο άρτιοι ή είναι και οι δύο περιττοί. Επομένως μετά την αντικατάσταση των α,β από τον αριθμό $(\alpha-\beta)^{2020}$ δεν μεταβάλλεται το άρτιο ή το περιττό του αθροίσματος των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα. Επειδή $S_{2030} = \frac{2030\cdot 2031}{2} = 1015\cdot 2031$ περιττός, έπεται ότι μετά την τελευταία κίνηση ο μοναδικός αριθμός που θα απομείνει θα πρέπει να είναι περιττός, οπότε η απάντηση στο ερώτημα (α) είναι αρνητική.

(β) Έστω ότι οι δύο τελευταίοι αριθμοί που έχουν μείνει είναι οι x, y. Τότε η μόνη περίπτωση να μην είναι κάποιος από αυτούς δύναμη του 2020 είναι να μην έχει λάβει μέρος ως τώρα στη διαδικασία. Αυτό μπορεί να έχει συμβεί μόνο με τους αριθμούς στην άκρη, δηλαδή τον 1 και τον 2030. Επειδή ο 1 είναι 1^{2020}, αρκεί να ελέγξουμε για τον 2030. Δηλαδή αν $x = a^{2020}$ και $y = 2030$, τότε πρέπει $(a^{2020} - 2030)^{2020} = 2021^{2020}$. Για $a = 1$ δεν έχει λύση, οπότε για $a \geq 2$ παίρνουμε $a^{2020} = 4051$, αδύνατο.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, από τη διαδικασία θα έχουμε ότι $x = (a_1 - b_1)^{2020} = m^{2020}$ για κάποιο m και $y = (a_2 - b_2)^{2020} = n^{2020}$. Κάνοντας την τελευταία πράξη, στον πίνακα προκύπτει ο αριθμός $(m^{2020} - n^{2020})^{2020}$.

Θέλουμε τώρα να δούμε αν μπορεί να ισχύει: $(m^{2020} - n^{2020})^{2020} = 2021^{2020}$.

Αν $m = n$, δεν ισχύει. Θεωρούμε χωρίς βλάβη ότι $m > n$. Τότε θέλουμε να δούμε αν μπορεί να ισχύει

$$m^{2020} - n^{2020} = 2021. \qquad (1)$$

Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $m^{2020} - n^{2020}$ είναι η τιμή 1, για $m = 1, n = 0$. Από την (1) έχουμε ότι $m > n$, οπότε $m \geq n + 1$. Επομένως $m^{2020} - n^{2020} \geq (n+1)^{2020} - n^{2020}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία βλέπουμε ότι όλες οι δυνάμεις του n έχουν θετικό συντελεστή, οπότε είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως

$$m^{2020} - n^{2020} \geq (n+1)^{2020} - n^{2020} \geq 2^{2020} - 1 > 2^{11} - 1 = 2047$$

οπότε δεν μπορεί ποτέ να ισούται με 2021.

Σημείωση: Για να δείξουμε ότι η (1) δεν έχει λύση, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής: Για $k = m^{505}, \lambda = n^{505}$ η (1) γίνεται: $k^4 - \lambda^4 = 2021 = 43 \cdot 47 \Leftrightarrow (k - \lambda)(k + \lambda)(k^2 + \lambda^2) = 43 \cdot 47$, οπότε $k^2 + \lambda^2 = 47$, που δεν έχει λύσεις.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλες τις τιμές του θετικού ακεραίου κ που ικανοποιούν την ιδιότητα:
Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β ώστε η παράσταση

$$\mathrm{A}(\kappa, \alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \kappa^2 \beta^2 - \kappa^2 \alpha \beta}$$

να είναι ένας σύνθετος θετικός ακέραιος.

Λύση

Σταθεροποιούμε $\kappa > 1$. Η ιδέα για τη λύση της άσκησης είναι να βρούμε α, β συναρτήσει του κ ώστε ο παρονομαστής να ισούται με 1.

Με άλλα λόγια ζητάμε πολυώνυμα $\alpha = P(\kappa),\ \beta = Q(\kappa)$ τέτοια ώστε

$$P(\kappa)^2 + \kappa^2 Q(\kappa)^2 - \kappa^2 P(\kappa) Q(\kappa) = 1.$$

$$P(\kappa)^2 = \kappa^2 Q(\kappa)\big(P(\kappa) - Q(\kappa)\big) + 1 \qquad (1)$$

Αν τα πολυώνυμα έχουν βαθμούς $m = \deg P(\kappa), n = \deg)Q(\kappa)$ με $m > n \geq 0$, τότε από τη σχέση (1) πρέπει

$$2m = 2 + m + n \Leftrightarrow m = n + 2.$$

Θα ασχοληθούμε με την πιο απλή περίπτωση αναζητώντας, αν υπάρχουν, πολυώνυμα βαθμού 2 και 0 , αντίστοιχα, που ικανοποιούν τη σχέση (1).

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις βρίσκουμε ότι τα $P(\kappa) = \kappa^2 - 1, Q(\kappa) = 1$ ικανοποιούν τη σχέση (1). Επιλέγουμε λοιπόν $\alpha = \kappa^2 - 1, \beta = 1$ και τότε η παράσταση ισούται με $\dfrac{\kappa^2 - 1 + 1}{1} = \kappa^2$, που είναι σύνθετος για κάθε $\kappa > 1$. Επομένως όλες οι τιμές του $\kappa > 1$, δεν ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

Για $\kappa = 1$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει: $0 < \mathrm{A}(\alpha, \beta, \kappa) = \dfrac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta} \leq 2$, οπότε ο ρητός αριθμός $\mathrm{A}(\alpha, \beta, 1)$ δεν μπορεί να είναι σύνθετος θετικός ακέραιος για οποιεσδήποτε τιμές των α, β. Πράγματι, έχουμε

$$\alpha + \beta > 0 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4} > 0, \text{ και}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta} \leq 2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta \geq \alpha + \beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 - \alpha + \beta^2 - \beta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + \alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1) \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$