Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωμα Riemann

4.1 Ο ορισμός του Darboux

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann για **φραγμένες** συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα. Για μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με μη αρνητικές τιμές, θα θέλαμε το ολοκλήρωμα να δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο γράφημα της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα $y = 0$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Ορισμός 4.1.1. (α) Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. **Διαμέριση** του $[a,b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \tag{4.1.1}$$

του $[a,b]$ με $x_0 = a$ και $x_n = b$. Θα υποθέτουμε πάντα ότι τα $x_k \in P$ είναι διατεταγμένα ως εξής:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b. \tag{4.1.2}$$

Θα γράφουμε

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \tag{4.1.3}$$

για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη. Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό, κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία: το a και το b (τα άκρα του $[a,b]$).

(β) Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης P το μεγαλύτερο από τα μήκη αυτών των υποδιαστημάτων. Δηλαδή, το πλάτος της διαμέρισης ισούται με

$$\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}. \tag{4.1.4}$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε να ισαπέχουν τα x_k (τα n υποδιαστήματα δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο μήκος).

(γ) Η διαμέριση P_1 λέγεται **εκλέπτυνση** της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη κάποιων (πεπερασμένων το πλήθος) σημείων. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε επίσης ότι η P_1 είναι *λεπτότερη* από την P.

(δ) Έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Η **κοινή εκλέπτυνση** των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$. Εύκολα βλέπουμε ότι η P είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ότι αν P' είναι μια διαμέριση λεπτότερη τόσο από την P_1 όσο και από την P_2 τότε $P' \supseteq P$ (δηλαδή, η $P = P_1 \cup P_2$ είναι η μικρότερη δυνατή διαμέριση του $[a,b]$ που εκλεπτύνει ταυτόχρονα την P_1 και την P_2).

Θεωρούμε τώρα μια **φραγμένη** συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Η P διαμερίζει το $[a,b]$ στα υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f,P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \tag{4.1.5}$$

και

$$M_k(f,P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}. \tag{4.1.6}$$

Όλοι αυτοί οι αριθμοί ορίζονται καλά: η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, άρα είναι φραγμένη σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$. Για κάθε k, το σύνολο $\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$ είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα έχει supremum και infimum.

Για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ορίζουμε τώρα το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P με τον εξής τρόπο:

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.7}$$

είναι το **άνω άθροισμα της f ως προς** P, και

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.8}$$

είναι το **κάτω άθροισμα της f ως προς** P.

Από τις (4.1.7) και (4.1.8) βλέπουμε ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f,P) \leq U(f,P) \tag{4.1.9}$$

αφού $m_k \leq M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Σε σχέση με το «εμβαδόν» που προσπαθούμε να ορίσουμε, πρέπει να σκεφτόμαστε το κάτω άθροισμα $L(f,P)$ σαν μια *προσέγγιση από κάτω* και το άνω άθροισμα $U(f,P)$ σαν μια *προσέγγιση από πάνω*.

Θα δείξουμε ότι ισχύει μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα από την (4.1.9):

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2). \tag{4.1.10}$$

Παρατηρήστε ότι η (4.1.9) είναι ειδική περίπτωση της (4.1.10): αρκεί να πάρουμε $P = P_1 = P_2$ στην Πρόταση 4.1.2.

Η απόδειξη της Πρότασης 4.1.2 θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ *και* $x_k < y < x_{k+1}$ *για κάποιο* $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Αν* $P_1 = P \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < y < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$, *τότε*

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq U(f, P_1) \leq U(f, P). \tag{4.1.11}$$

Δηλαδή, με την προσθήκη ενός σημείου y στην διαμέριση P, το άνω άθροισμα της f «μικραίνει» ενώ το κάτω άθροισμα της f «μεγαλώνει».

Απόδειξη του Λήμματος 4.1.3. Θέτουμε

$$m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y\} \tag{4.1.12}$$

και

$$m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leq x \leq x_{k+1}\}. \tag{4.1.13}$$

Τότε, $m_k \leq m_k^{(1)}$ και $m_k \leq m_k^{(2)}$ (άσκηση: αν $A \subseteq B$ τότε $\inf B \leq \inf A$). Γράφουμε

$$\begin{aligned} L(f, P_1) &= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) + \cdots \\ &\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &\geq [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(y - x_k) + m_k(x_{k+1} - y) + \cdots \\ &\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(x_{k+1} - x_k) + \cdots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &= L(f, P). \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $U(f, P_1) \leq U(f, P)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.1.2. Για να αποδείξουμε την (4.1.10) θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με διαδοχική προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.1.3 πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P)$.

Όμοια βλέπουμε ότι $U(f, P) \leq U(f, P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f, P) \leq U(f, P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \tag{4.1.14}$$

□

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

$$A(f) = \left\{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\} \tag{4.1.15}$$

και

$$B(f) = \left\{ U(f, Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\}. \tag{4.1.16}$$

Από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε: για κάθε $a \in A(f)$ και κάθε $b \in B(f)$ ισχύει $a \leq b$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\sup A(f) \leq \inf B(f)$ (άσκηση). Αν λοιπόν ορίσουμε σαν **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \left\{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b] \right\} \tag{4.1.17}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \Big\{ U(f,Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a,b] \Big\}, \tag{4.1.18}$$

έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.1.19}$$

Ορισμός 4.1.4. Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = I = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.1.20}$$

Ο αριθμός I (η κοινή τιμή του κάτω και του άνω ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$) λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f. \tag{4.1.21}$$

4.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι δύσχρηστος: δεν είναι εύκολο να τον χρησιμοποιήσει κανείς για να δει αν μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Συνήθως, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας.

Θεώρημα 4.2.1 (κριτήριο του Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4.2.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.2.2}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος ως supremum του $A(f)$ και από τον ε-χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει διαμέριση $P_1 = P_1(\varepsilon)$ του $[a,b]$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.3}$$

Ομοίως, από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση $P_2 = P_2(\varepsilon)$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.4}$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$. Τότε, από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &< L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0 \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4.2.5}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon. \tag{4.2.6}$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx, \tag{4.2.7}$$

και αφού η αντίστροφη ανισότητα ισχύει πάντα, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Το κριτήριο του Riemann διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 4.2.2 (κριτήριο του Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(f,P_n) - L(f,P_n)\big) = 0. \tag{4.2.8}$$

Παραδείγματα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Riemann για να εξετάσουμε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Riemann ολοκληρώσιμες:
(α) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$:

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}. \tag{4.2.9}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= f(0)\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}+f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n}+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{1}{n}\to 0. \tag{4.2.10}$$

Από το Θεώρημα 4.2.2 συμπεραίνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Μπορούμε μάλιστα να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2} &= L(f,P_n) \\ &\leq \underline{\int_0^1} x^2dx=\int_0^1 x^2dx=\overline{\int_0^1} x^2dx \\ &\leq U(f,P_n) \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\to\frac{1}{3}\quad\text{και}\quad\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\to\frac{1}{3}, \tag{4.2.11}$$

έπεται ότι

$$\frac{1}{3}\leq\int_0^1 x^2dx\leq\frac{1}{3}. \tag{4.2.12}$$

Δηλαδή,

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}. \tag{4.2.13}$$

(β) Η συνάρτηση $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $u(x)=\sqrt{x}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακολουθία διαμερίσεων του προηγούμενου παραδείγματος για να δείξετε ότι ικανοποιείται το κριτήριο του Riemann.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική ακολουθία διαμερίσεων. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n=\left\{0<\frac{1}{n^2}<\frac{2^2}{n^2}<\cdots<\frac{(n-1)^2}{n^2}<\frac{n^2}{n^2}=1\right\}. \tag{4.2.14}$$

Η u είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$L(u,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right) \tag{4.2.15}$$

και

$$U(u,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right). \tag{4.2.16}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(u,P_n)-L(u,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}\to 0. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.2.2 συμπεραίνουμε ότι η u είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αφήνουμε σαν άσκηση να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty}L(u,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(u,P_n)=\frac{2}{3}. \tag{4.2.17}$$

Η συγκεκριμένη επιλογή διαμερίσεων που κάναμε έχει το πλεονέκτημα ότι μπορείτε εύκολα να γράψετε τα $L(u,P_n)$ και $U(u,P_n)$ σε κλειστή μορφή. Από την (4.2.17) έπεται ότι

$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}. \tag{4.2.18}$$

(γ) Η συνάρτηση του Dirichlet $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n=1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Υπολογίζουμε το κάτω και το άνω άθροισμα της g ως προς την P. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ υπάρχουν ρητός q_k και άρρητος α_k στο (x_k,x_{k+1}). Αφού $g(q_k)=1$, $g(\alpha_k)=0$ και $0\le g(x)\le 1$ στο $[x_k,x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k=0$ και $M_k=1$. Συνεπώς,

$$L(g,P)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}0\cdot(x_{k+1}-x_k)=0 \tag{4.2.19}$$

και

$$U(g,P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot(x_{k+1}-x_k)=1. \tag{4.2.20}$$

Αφού η P ήταν τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$, παίρνουμε

$$\underline{\int_0^1} g(x)dx=0 \qquad \text{και} \qquad \overline{\int_0^1} g(x)dx=1. \tag{4.2.21}$$

Άρα, η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = 1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχει άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $h(\alpha_k) = 0$ και $0 \leq h(x) \leq 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k = 0$. Συνεπώς,

$$L(h,P) = 0. \tag{4.2.22}$$

Επίσης, υπάρχει ρητός $q_k > (x_k + x_{k+1})/2$ στο (x_k, x_{k+1}), άρα $M_k \geq h(q_k) > (x_k + x_{k+1})/2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(h,P) &> \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) \\ &= \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$U(h,P) - L(h,P) > \frac{1}{2} \tag{4.2.23}$$

για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$, το κριτήριο του Riemann δεν ικανοποιείται (πάρτε $\varepsilon = 1/3$). Άρα, η h δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(ε) Η συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Εύκολα ελέγχουμε ότι $L(w,P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in [0,1] : w(x) \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $w(x) \geq \varepsilon$ τότε $x = p/q$ και $w(x) = 1/q \geq \varepsilon$ δηλαδή $q \leq 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1 + 2 + \cdots + [1/\varepsilon]$ – εξηγήστε γιατί)].

Έστω $z_1 < z_2 < \cdots < z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα υποδιαστήματα $[a_i, b_i]$ του $[0,1]$ που έχουν μήκη $b_i - a_i < \varepsilon/N$ και ικανοποιούν τα εξής: $a_1 > 0$, $a_i < z_i < b_i$ αν $i < N$ και $a_N < z_N \leq b_N$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon \leq 1$ τότε $z_N = 1$ οπότε πρέπει να επιλέξουμε $b_N = 1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon = \{0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leq 1\}, \tag{4.2.24}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} U(w,P_\varepsilon) &\leq \varepsilon\cdot(a_1-0)+1\cdot(b_1-a_1)+\varepsilon\cdot(a_2-b_1)+\cdots+1\cdot(b_{N-1}-a_{N-1})\\ &\quad +\varepsilon\cdot(a_N-b_{N-1})+1\cdot(b_N-a_N)+\varepsilon\cdot(1-b_N)\\ &\leq \varepsilon\cdot\Big(a_1+(a_2-b_1)+\cdots+(a_N-b_{N-1})+(1-b_N)\Big)\\ &\quad +\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Για το τυχόν $\varepsilon>0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(w,P_\varepsilon)-L(w,P_\varepsilon)<2\varepsilon. \tag{4.2.25}$$

Από το Θεώρημα 4.2.1, η w είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann (Θεώρημα 4.2.1) θα δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς συναρτήσεις $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 4.3.1. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη: για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε

$$f(a)\leq f(x)\leq f(b). \tag{4.3.1}$$

Άρα, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος για την f.

Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $n\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε για τη διαμέριση

$$P_n=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+\frac{2(b-a)}{n},\dots,a+\frac{n(b-a)}{n}=b\right\} \tag{4.3.2}$$

του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα να ισχύει

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon. \tag{4.3.3}$$

Θέτουμε

$$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n},\qquad k=0,1,\dots,n. \tag{4.3.4}$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})\frac{b-a}{n}\\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_0)+\cdots+f(x_{n-1})\right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$U(f,P_n)-L(f,P_n) = \frac{[f(x_n)-f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b)-f(a)](b-a)}{n}, \tag{4.3.5}$$

το οποίο γίνεται μικρότερο από το $\varepsilon > 0$ που μας δόθηκε, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Από το Θεώρημα 4.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. $\square$

Θεώρημα 4.3.2. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta. \tag{4.3.6}$$

Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση

$$P_n = \left\{a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}, \dots, a+\frac{n(b-a)}{n} = b\right\}. \tag{4.3.7}$$

Ορίζουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0,1,\dots,n. \tag{4.3.8}$$

Έστω $k = 0,1,\dots,n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$M_k = f(y_k') \qquad \text{και} \qquad m_k = f(y_k''). \tag{4.3.9}$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y_k' - y_k''| < \delta. \tag{4.3.10}$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{4.3.11}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f,P_n)-L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1}-x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

4.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε αυστηρά μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann. Οι αποδείξεις των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση που θα σας βοηθήσει να εξοικειωθείτε με τις διαμερίσεις, τα άνω και κάτω αθροίσματα κλπ.

Θεώρημα 4.4.1. *Αν $f(x)=c$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a). \tag{4.4.1}$$

Απόδειξη: Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ έχουμε $m_k=M_k=c$. Άρα,

$$L(f,P)=U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}c(x_{k+1}-x_k)=c(b-a). \tag{4.4.2}$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.3}$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a). \tag{4.4.4}$$

□

Θεώρημα 4.4.2. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.5}$$

Απόδειξη. Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{(f+g)(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ M_k &= \sup\{(f+g)(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ m_k' &= \inf\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ M_k' &= \sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ m_k'' &= \inf\{g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\} \\ M_k'' &= \sup\{g(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m_k' + m_k'' \leq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$m_k' + m_k'' \leq m_k. \tag{4.4.6}$$

Ομοίως, για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $M_k' + M_k'' \geq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$M_k' + M_k'' \geq M_k. \tag{4.4.7}$$

Έπεται ότι

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P). \tag{4.4.8}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P_1) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.9}$$

και

$$U(g,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b g(x)dx < L(g,P_2) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.10}$$

Αν θεωρήσουμε την κοινή τους εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P) + U(g,P) - \varepsilon &\leq U(f,P_1) + U(g,P_2) - \varepsilon \\ &< \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &< L(f,P_1) + L(g,P_2) + \varepsilon \\ &\leq L(f,P) + L(g,P) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας με την (4.4.8) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} (f+g)(x)dx - \varepsilon &\leq U(f+g,P) - \varepsilon \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &\leq L(f+g,P) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} (f+g)(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\overline{\int_a^b} (f+g)(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \underline{\int_a^b} (f+g)(x)dx. \tag{4.4.11}$$

Όμως,

$$\underline{\int_a^b} (f+g)(x)dx \leq \overline{\int_a^b} (f+g)(x)dx. \tag{4.4.12}$$

Άρα,

$$\overline{\int_a^b} (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \underline{\int_a^b} (f+g)(x)dx. \tag{4.4.13}$$

Έπεται το Θεώρημα. □

Θεώρημα 4.4.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε, η tf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.14}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $t > 0$. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Αν για $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίσουμε

$$m_k = \inf\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},\ M_k = \sup\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \tag{4.4.15}$$

και

$$m_k' = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},\ M_k' = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \tag{4.4.16}$$

είναι φανερό ότι

$$m_k = tm_k' \ \text{ και } \ M_k = tM_k'. \tag{4.4.17}$$

Άρα,

$$L(tf, P) = tL(f, P) \ \text{ και } \ U(tf, P) = tU(f, P). \tag{4.4.18}$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} (tf)(x)dx = t\underline{\int_a^b} f(x)dx \ \text{ και } \ \overline{\int_a^b} (tf)(x)dx = t\overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.19}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.20}$$

Έπεται ότι η tf είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.21}$$

Αν $t < 0$, η μόνη αλλαγή στο προηγούμενο επιχείρημα είναι ότι τώρα $m_k = tM_k'$ και $M_k = tm_k'$. Συμπληρώστε την απόδειξη μόνοι σας.

Τέλος, αν $t = 0$ έχουμε $tf \equiv 0$. Άρα,

$$\int_a^b tf = 0 = 0 \cdot \int_a^b f. \tag{4.4.22}$$ □

Από τα Θεωρήματα 4.4.2 και 4.4.3 προκύπτει άμεσα η «γραμμικότητα του ολοκληρώματος».

Θεώρημα 4.4.4 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος). *Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf + sg)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.23}$$ □

Θεώρημα 4.4.5. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c\in(a,b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.4.24}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1 του $[a,c]$ και P_2 του $[c,b]$ ώστε

$$L(f,P_1)\le \int_a^c f(x)dx \le U(f,P_1) \ \text{ και } \ U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.25}$$

και

$$L(f,P_2)\le \int_c^b f(x)dx \le U(f,P_2) \ \text{ και } \ U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.26}$$

Το σύνολο $P_\varepsilon = P_1\cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ισχύουν οι

$$L(f,P_\varepsilon)=L(f,P_1)+L(f,P_2) \text{ και } U(f,P_\varepsilon)=U(f,P_1)+U(f,P_2). \tag{4.4.27}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon) &= (U(f,P_1)-L(f,P_1))+(U(f,P_2)-L(f,P_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (κριτήριο του Riemann). Επιπλέον, για την P_ε έχουμε

$$L(f,P_\varepsilon)\le \int_a^b f(x)dx \le U(f,P_\varepsilon) \tag{4.4.28}$$

και, από τις (4.4.25), (4.4.26) και (4.4.27),

$$L(f,P_\varepsilon)\le \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \le U(f,P_\varepsilon). \tag{4.4.29}$$

Επομένως,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\right)\right| \le U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon, \tag{4.4.30}$$

και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.4.31}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και θεωρούμε $\varepsilon>0$. Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon. \tag{4.4.32}$$

Αν $c \notin P$ θέτουμε $P' = P \cup \{c\}$, οπότε πάλι έχουμε

$$U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon. \tag{4.4.33}$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $c \in P$. Ορίζουμε $P_1 = P \cap [a,c]$ και $P_2 = P \cap [c,b]$. Οι P_1, P_2 είναι διαμερίσεις των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα, και

$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2)\ ,\ U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2). \tag{4.4.34}$$

Αφού

$$(U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon, \tag{4.4.35}$$

έπεται ότι

$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon \ \text{ και } U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon. \tag{4.4.36}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το κριτήριο του Riemann δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τώρα, από το πρώτο μέρος της απόδειξης παίρνουμε την ισότητα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \square \tag{4.4.37}$$

Θεώρημα 4.4.6. *Εστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{4.4.38}$$

Σημείωση. Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{4.4.39}$$

είναι η **μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Αρκεί να διαπιστώσετε ότι για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ισχύει

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a) \tag{4.4.40}$$

(το οποίο είναι πολύ εύκολο). $\square$

Πόρισμα 4.4.7. (α) *Εστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \tag{4.4.41}$$

(β) *Εστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.42}$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.4.6: μπορούμε να πάρουμε $m = 0$.

(β) Η $f - g$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $(f - g)(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Εφαρμόζουμε το (α) για την $f - g$ και χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. □

Θεώρημα 4.4.8. *Έστω $f : [a, b] \to [m, M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\phi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a, b]$ με την ιδιότητα $U(\phi \circ f, P) - L(\phi \circ f, P) < \varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[m, M]$, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $A > 0$ ώστε $|\phi(\xi)| \leq A$ για κάθε $\xi \in [m, M]$. Επίσης, η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν θέσουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2A + b - a) > 0$, υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon_1$ ώστε, για κάθε $\xi, \eta \in [m, M]$ με $|\xi - \eta| < \delta$ ισχύει $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, βρίσκουμε διαμεριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2. \tag{4.4.43}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} I &= \{0 \leq k \leq n - 1 : M_k(f) - m_k(f) < \delta\} \\ J &= \{0 \leq k \leq n - 1 : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $k \in I$, τότε για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $|f(x) - f(x')| \leq M_k(f) - m_k(f) < \delta$. Παίρνοντας $\xi = f(x)$ και $\eta = f(x')$, έχουμε $\xi, \eta \in [m, M]$ και $|\xi - \eta| < \delta$. Άρα,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| = |\phi(\xi) - \phi(\eta)| < \varepsilon_1.$$

Αφού τα x, x' ήταν τυχόντα στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f) \leq \varepsilon_1$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\sum_{k \in I} (M_k(\phi \circ f) - m_k(\phi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leq \varepsilon \sum_{k \in I} (x_{k+1} - x_k) \leq (b - a)\varepsilon_1. \tag{4.4.44}$$

(ii) Για το J έχουμε, από την (4.4.43),

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leq \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2, \tag{4.4.45}$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1. \tag{4.4.46}$$

Επίσης,

$$|(\phi \circ f)(x) - (\phi \circ f)(x')| \leq |(\phi \circ f)(x)| + |(\phi \circ f)(x')| \leq 2A \tag{4.4.47}$$

για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, άρα $M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f) \leq 2A$ για κάθε $k \in J$. Έπεται ότι

$$\sum_{k\in J}(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k) \leq 2A\sum_{k\in J}(x_{k+1}-x_k) < 2A\varepsilon_1. \tag{4.4.48}$$

Από τις (4.4.44) και (4.4.48) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(\phi\circ f, P) - L(\phi\circ f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k) \\ &= \sum_{k\in I}(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k) \\ &\quad + \sum_{k\in J}(M_k(\phi\circ f) - m_k(\phi\circ f))(x_{k+1}-x_k) \\ &< (b-a)\varepsilon_1 + 2A\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.4.8 μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από την σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 4.4.9. *Εστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*
(α) *η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{4.4.49}$$

(β) *η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*
(γ) *η fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Τα (α) και (β) είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 4.4.8. Για το (γ) γράψτε

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \tag{4.4.50}$$

και χρησιμοποιήστε το (β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι $f+g$, $f-g$ είναι ολοκληρώσιμες. □

Μια σύμβαση. Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a < b$ (δουλεύαμε στο κλειστό διάστημα $[a,b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a \geq b$ ως εξής:
(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).
(β) αν $a > b$ και η $f : [b,a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{4.4.51}$$

4.5 Ο ορισμός του Riemann*

Ο ορισμός που δώσαμε για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός 4.5.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P, τότε
>
> $$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$ είναι το (R)-ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$.

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε Ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ και $\sum(f, P, \Xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k). \tag{4.5.1}$$

Παρατηρήστε ότι τώρα το Ξ «υπεισέρχεται» στο συμβολισμό $\sum(f, P, \Xi)$ αφού για την ίδια διαμέριση P μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Η βασική ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum (f, P, \Xi) \tag{4.5.2}$$

όταν το πλάτος της P τείνει στο μηδέν και τα ξ_k επιλέγονται αυθαίρετα στα υποδιαστήματα που ορίζει η P. Επειδή δεν έχουμε συναντήσει τέτοιου είδους «όρια» ως τώρα, καταφεύγουμε στον «εψιλοντικό ορισμό».

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών ολοκληρωσιμότητας:

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε $I(f)$ για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.5.3}$$

Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi_k', \xi_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{και} \quad M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{4.5.4}$$

Άρα,

$$L(f,P) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.5}$$

και

$$U(f,P) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'')(x_{k+1} - x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.6}$$

Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon, \tag{4.5.7}$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.5.8}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I(f). \tag{4.5.9}$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = I(f). \tag{4.5.10}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.5.11}$$

Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6nM} > 0. \tag{4.5.12}$$

Έστω P' διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$, **η οποία είναι και εκλέπτυνση της** P. Τότε, για κάθε επιλογή Ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P' έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} &< L(f,P) \leq L(f,P') \leq \sum(f,P',\Xi) \\ &\leq U(f,P') \leq U(f,P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum(f,P',\Xi)-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.13}$$

Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για **τυχούσα** διαμέριση P_1 με πλάτος μικρότερο από δ (η δυσκολία είναι ότι μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της P).

Έστω $P_1=\{a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a,b]$. Θα «προσθέσουμε» στην P_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της P τα οποία δεν ανήκουν στην P_1 (αυτά είναι το πολύ $n-1$).

Ας πούμε ότι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l<y_{l+1}$ της P_1. Θεωρούμε την $P_2=P_1\cup\{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{m-1}\}$ με $\xi_l\in[y_l,y_{l+1}]$, $l=0,1,\dots,m-1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l'\in[y_l,x_k]$ και $\xi_l''\in[x_k,y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\Xi^{(2)}=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{l-1},\xi_l',\xi_l'',\dots,\xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην P_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_2,\Xi^{(2)})\right| &= |f(\xi_l)(y_{l+1}-y_l)-f(\xi_l')(x_k-y_l)\\ &\quad -f(\xi_l'')(y_{l+1}-x_k)|\\ &\leq 3M\max_l|y_{l+1}-y_l|<3M\delta\\ &= \frac{\varepsilon}{2n}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη $(P_1,\Xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(P_k,\Xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της P, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση P_0 και μια επιλογή σημείων $\Xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η P_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των P και P_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) αφού η P_0 είναι εκλέπτυνση της P, όπως στην (4.5.13) έχουμε

$$\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.14}$$

(γ) αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην P_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right|<n\frac{\varepsilon}{2n}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση P_1 πλάτους $<\delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της P_1, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\int_a^b f(x)dx\right| &< \left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right|\\ &\quad+\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})-\int_a^b f(x)dx\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και ότι οι $I(f)$ και $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσοι. □