Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Κατάλογος Γνωστών Ανισοτήτων για Διαγωνισμούς

Έκδοση 4 - Φεβρουάριος 2020

1 Βασικές

i. $a^2 \geq 0$

ii. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

iii. $(a+b)^2 \geq 4ab$

iv. $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$

v. $a + \frac{1}{a} \leq -2, \forall a < 0$

vi. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a \cdot b > 0$

vii. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2, \forall a \cdot b < 0$

viii. Γενικά ανισότητες που προκύπτουν από τις βασικές ταυτότητες: $(a-b)^2 \geq 0,\ (a+b)^2 \geq 0$.

ix. $a^3 + b^3 \geq ab(a+b), \forall a, b > 0$

x. $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2), \forall a, b > 0$

1.1 Ανισότητες ΑΜΓΜ

Ανισότητες που προκύπτουν σχεδόν άμεσα από την Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου (ΑΜΓΜ).

i. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$

Αποδεικνύεται από τη βασική ταυτότητα και η ισότητα ισχύε για $a = b$.

ii. $a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$

iii. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \forall a, b > 0$

Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού-Αρμονικού Μέσου (ΑΓΑΜ), με την ισότητα να ισχύει για $a = b$ πάλι.

iv. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$

v. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \forall a, b > 0$

1.2 Γενίκευση ΑΜΓΜ

i. Ανισότητα ΑΓΑΜ για τρεις όρους

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \forall a, b, c > 0$$

ii. Γενικευμένη ανισότητα ΑΓΑΜ

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \forall a_i > 0$$

Οι ισότητες στις παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους και μόνο τότε.

2 Ειδικότερες

i. Ανισότητα των Βαρών ή των μέσων

$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n}, \forall a_i > 0, w_i > 0, w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$

Ισότητα ισχύει αποκλειστικά για

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

ii. Ανισότητα τετραγωνικού - Αριθμητικού Μέσου (ΤΜ-ΑΜ)

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

iii. Ανισότητα από ταυτότητα Lagrange

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2, \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$$

iv. Ανισότητα Cauchy - Schwartz Δες και εδώ

v. Ανισότητα Cauchy - Schwartz 3 όρων

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+w^2) \geq (ax+by+cw)^2$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{w}$

vi. Γενικευμένη Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$$(a_1^2+\dots+a_n^2)(x_1^2+\dots+x_n^2) \geq (a_1x_1+\dots+a_nx_n)^2$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a_i, x_i.

3 Προχωρημένες

3.1 «Γνωστές» Ανισότητες

i. Γενικευμένη Ανισότητα Μέσων $a_i > 0, k < m$

$$\left(\frac{a_1^k+\dots+a_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{a_1^m+\dots+a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

ii. Ανισότητα Αναδιάταξης (Αγαπημένη! Rearrangement Inequality)

Αν $a_1 < \dots < a_n$ και $b_1 < \dots < b_n$ τότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} a_1b_1+\dots+a_nb_n &\geq \\ a_1c_1+\dots a_nc_n &\geq \\ a_1b_n+\dots a_nb_1 & \end{aligned}$$

όπου οι c_i είναι ανακατεμένοι (αναδιαταγμένοι) οι b_i.

iii. Ανισότητα Holder

$$\begin{aligned} (a_1^p+\dots a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q+\dots+b_n^q)^{\frac{1}{q}} &\geq \\ \geq a_1b_1+\dots+a_nb_n & \end{aligned}$$

όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a_i, b_i > 0$.

Η ισότητα ισχύει για $\frac{a_1}{b_1}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$ Για $p=q=2$ αποτελεί την ανισότητα Cauchy - Schwarz.

Η ανισότητα γενικεύεται και για ολοκληρώματα, αλλά και για περισσότερες ομάδες αριθμών όπως φαίνεται εδώ.

iv. Γενικευμένη ανισότητα Holder Αν $a,b,x,y,k,l > 0, p+q+r=1$, τότε ισχύει:

$$(a+b)^p(x+y)^q(k+l)^r \geq a^px^qk^r+b^py^ql^r$$

η οποία ισχύει αντίστοιχα και για $n-$άδες.

v. Ανισότητα Minkowski Αν $a_i, b_i \geq 0, p > 0$ τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} ((a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p)^{\frac{1}{p}} &\leq \\ (a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}, &\ \forall p > 1 \\ ((a_1+b_1)^p+(a_2+b_2)^p)^{\frac{1}{p}} &\geq \\ (a_1^p+a_2^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+b_2^p)^{\frac{1}{p}}, &\ \forall 0 < p < 1 \end{aligned}$$

3.2 Ανισότητες Jensen

Οι ανισότητες Jensen αποτελούν γενικότερες ανισότητες που στηρίζονται στην κυρτότητα των συναρτήσεων. Πρακτικά «μεταφράζει» την ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων σύμφωνα με την οποία μία τέμνουσα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από αυτήν, μεταξύ των σημείων τομής τους. Οπότε χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση μπορεί κανείς να οδηγηθεί και στις αντίστοιχες ανισότητες. Οπότε με βάση την παρατήρηση αυτή και το Σχετικό Σχήμα προκύπτει ότι αν f **κυρτή συνάρτηση**:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{n}$$

ενώ αν f **κοίλη συνάρτηση**

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$f\left(\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_n)}{n}$$

Αν γνωρίζεις ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}, x \geq 0$ είναι κοίλη ποια γνωστή ανισότητα προκύπτει για δύο σημεία με εφαρμογή της ανισότητας Jensen;

Αν γνωρίζεις ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή ποια γνωστή ανισότητα προκύπτει για δύο σημεία με εφαρμογή της ανισότητας Jensen;

3.3 Ανισότητα *Chebyshev*

Αν $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, τότε:

i. Αν $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ τότε:

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n) \geq (a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

ii. Αν $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ τότε:

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n) \leq (a_1+a_2+\dots+a_n)(b_1+b_2+\dots+b_n)$$

3.4 Βασικές ασκήσεις

i. $a_i > 0$,

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

ii. Από ανισότητα Cauchy - Schwarz προκύπτουν οι εξής για κάθε $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$ Μορφή Engel

και

$$\frac{x^n}{a^{n-1}} + \frac{y^n}{b^{n-1}} \geq \frac{(x+y)^n}{(a+b)^{n-1}}$$

Οι ανισότητες ισχύουν και για ν προσθεταίους.

iii. Για $a_i, x_i > 0$ ισχύει:

$$(a_1 x_1 + \cdots a_n x_n)\left(\frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}\right) \geq (a_1 + \cdots + a_n)^2$$

4 Φύλλο Εργασίας 1

Θεμα 1. *Αν* $a, b, c > 0$, *τότε να αποδειχθεί ότι:* $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

Θεμα 2. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$a + b + c \geq \sqrt[4]{ab^3} + \sqrt[4]{bc^3} + \sqrt[4]{ca^3}$$

Θεμα 3 (Ανισότητα *Shapiro*)**.** *Αν* $a, b, c, d > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

Θεμα 4 (Αρχιμήδης 2010)**.** *Αν* $x, y > 0$ *και* $x + y = 2a, a > 0$, *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$x^3y^3(x^2+y^2)^2 \leq 4a^{10}$$

5 Φύλλο Εργασίας 2

Θεμα 5. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{a}{a+2c} + \frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2b} \geq 1$$

Θεμα 6. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

Θεμα 7. *Αν* $a, b, c > 0$, $a + b + c = 3$ *τότε νδο:*

$$\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2} \leq \frac{1}{abc}$$

Θεμα 8 (*IMO Shortlist*)**.** *Αν* $a, b, c > 0$ *ώστε να ισχύει* $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$$

6 Φύλλο Εργασίας 3

Θεμα 9. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$8(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Θεμα 10. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1$$

Θεμα 11. *Αν* $a, b, c > 0$ *και* $abc = 1$*, τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Θεμα 12 (IMO 2012)**.** *Αν* $n \geq 3$ *και* $a_2, a_3, \ldots, a_n$ *θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ώστε* $a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n$$

Θεμα 13 (Αρχιμήδης 2008)**.** *Αν* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}_+$ *και* k, t *ο ελάχιστος και ο μέγιστος από αυτούς αντίστοιχα, τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{\frac{tn}{k}} \geq a_1 a_2 \ldots a_n$$

7 Φύλλο Εργασίας 4

Θεμα 14. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Θεμα 15. *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Θεμα 16. *Αν* $a, b, c > 0$ *και* $a+b+c=1$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$ab+bc+ca \leq \frac{2}{7} + \frac{9abc}{7}$$

Θεμα 17 ($JBMO$ 2015)**.** *Αν* $a, b, c > 0,\ a+b+c=3,$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{2-a^3}{a} + \frac{2-b^3}{b} + \frac{2-c^3}{c} \geq 3$$

Θεμα 18 (Αρχιμήδης 2007)**.** *Αν* a, b, c *μήκη πλευρών τριγώνου τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\frac{(a+c-b)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(a+c-b)} \geq ab+bc+ca$$

8 Φύλλο Εργασίας 5

Θέμα 19 (*Crux*). *Αν* $a, b, c > 0$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$3 \max\left\{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}, \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right\} \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Θέμα 20. *Αν* $a, b, c > 0$ *και* $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geq 2$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$abc \leq \frac{1}{8}$$

Θέμα 21. *Να αποδειχθεί η ανισότητα* $Nesbitt$ *με χρήση της ανισότητας* $Cauchy$–$Schwartz$.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall a, b, c > 0$$

Θέμα 22. *Αν* $a, b, c > 1$ *και* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 2$ *τότε να αποδειχθεί ότι:*

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}$$

Θέμα 23 (Εφαρμογή κυρτής συνάρτησης). *Αν* $a, b, c, d > 0$ *και ισχύει ότι* $a+b+c+d = 4$, *τότε :*

i. *Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση* $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ *είναι κυρτή.*

ii. *Να αποδειχθεί η ανισότητα:*

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{d^2+d}+\frac{d}{a^2+a} \geq \frac{8}{(a+c)(b+d)}$$