Προτυπο Γενικο Λυκειο Ευαγγελικης Σχολης Σμυρνης

Καταλογος Γνωστων Ανισοτητων για Διαγωνισμους

Έκδοση 3 - Οκτώβριος 2018

1 Βασικές

i. $a^2 \geq 0$

ii. $a^2 + b^2 \geq 2ab$

iii. $(a+b)^2 \geq 4ab$

iv. $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a > 0$

v. $a + \frac{1}{a} \leq -2, \forall a < 0$

vi. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \forall a \cdot b > 0$

vii. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2, \forall a \cdot b < 0$

viii. Γενικά ανισότητες που προκύπτουν από τις βασικές ταυτότητες: $(a-b)^2 \geq 0,\ (a+b)^2 \geq 0$.

ix. $a^3 + b^3 \geq ab(a+b), \forall a, b > 0$

x. $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2), \forall a, b > 0$

1.1 Ανισότητες ΑΜΓΜ

Ανισότητες που προκύπτουν σχεδόν άμεσα από την Αριθμητικού - Γεωμετρικού Μέσου (ΑΜΓΜ).

i. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$

Αποδεικνύεται από τη βασική ταυτότητα και η ισότητα ισχύε για $a = b$.

ii. $a + b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a, b \geq 0$

iii. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \forall a, b > 0$

Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού-Αρμονικού Μέσου (ΑΓΑΜ), με την ισότητα να ισχύει για $a = b$ πάλι.

iv. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$

v. $\frac{4}{a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \forall a, b > 0$

1.2 Γενίκευση ΑΜΓΜ

i. Ανισότητα ΑΓΑΜ για τρεις όρους

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}, \forall a, b, c > 0$$

ii. Γενικευμένη ανισότητα ΑΓΑΜ

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}, \forall a_i > 0$$

Οι ισότητες στις παραπάνω περιπτώσεις ισχύουν όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους και μόνο τότε.

2 Ειδικότερες

i. Ανισότητα των Βαρών ή των μέσων

$w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n \geq a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdots a_n^{w_n}, \forall a_i > 0, w_i > 0, w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$

Ισότητα ισχύει αποκλειστικά για

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

ii. Ανισότητα από ταυτότητα Lagrange

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2, \forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$$

iii. Ανισότητα Cauchy - Schwartz Δες και εδώ

iv. Ανισότητα Cauchy - Schwartz 3 όρων

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+w^2) \geq (ax+by+cw)^2$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{w}$

v. Γενικευμένη Ανισότητα Cauchy - Schwartz

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+\cdots+x_n^2) \geq (a_1 x_1+\cdots+a_n x_n)^2$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a_i, x_i.

3 Προχωρημένες

3.1 «Γνωστές» Ανισότητες

i. Γενικευμένη Ανισότητα Μέσων $a_i > 0, k < m$

$$\left(\frac{a_1^k + \cdots + a_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \le \left(\frac{a_1^m + \cdots + a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

ii. Ανισότητα Αναδιάταξης (Αγαπημένη! Rearrangement Inequality)

Αν $a_1 < \cdots < a_n$ και $b_1 < \cdots < b_n$ τότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} a_1b_1 + \cdots + a_nb_n &\ge \\ a_1c_1 + \cdots a_nc_n &\ge \\ a_1b_n + \cdots a_nb_1 & \end{aligned}$$

όπου οι c_i είναι ανακατεμένοι (αναδιαταγμένοι) οι b_i.

iii. Ανισότητα Holder

$$\begin{aligned} (a_1^p + \cdots a_n^p)^{\frac{1}{p}}(b_1^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} &\ge \\ \ge a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & \end{aligned}$$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_i, b_i > 0$.

Η ισότητα ισχύει για $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ Για $p = q = 2$ αποτελεί την ανισότητα Cauchy - Schwarz.

Η ανισότητα γενικεύεται και για ολοκληρώματα, αλλά και για περισσότερες ομάδες αριθμών όπως φαίνεται εδώ.

iv. Γενικευμένη ανισότητα Holder Αν $a, b, x, y, k, l > 0, p + q + r = 1$, τότε ισχύει:

$$(a+b)^p(x+y)^q(k+l)^r \ge a^px^qk^r + b^py^ql^r$$

η οποία ισχύει αντίστοιχα και για $n-$άδες.

v. Ανισότητα Minkowski Αν $a_i, b_i \ge 0, p > 0$ τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} ((a_1+b_1)^p + (a_2+b_2)^p)^{\frac{1}{p}} &\le \\ (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p)^{\frac{1}{p}}&, \ \forall p > 1 \\ ((a_1+b_1)^p + (a_2+b_2)^p)^{\frac{1}{p}} &\ge \\ (a_1^p + a_2^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p)^{\frac{1}{p}}&, \ \forall 0 < p < 1 \end{aligned}$$

3.2 Ανισότητες Jensen

Οι ανισότητες Jensen αποτελούν γενικότερες ανισότητες που στηρίζονται στην κυρτότητα των συναρτήσεων. Πρακτικά «μεταφράζει» την ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων σύμφωνα με την οποία μία τέμνουσα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από αυτήν, μεταξύ των σημείων τομής τους. Οπότε χρησιμοποιώντας κατάλληλη συνάρτηση μπορεί κανείς να οδηγηθεί και στις αντίστοιχες ανισότητες. Οπότε με βάση την παρατήρηση αυτή και το Σχετικό Σχήμα προκύπτει ότι αν f **κυρτή συνάρτηση**:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right) \le \frac{f(a_1)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

ενώ αν f **κοίλη συνάρτηση**

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right) \ge \frac{f(a_1)+\cdots+f(a_n)}{n}$$

Αν γνωρίζεις ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \ge 0$ είναι κοίλη ποια γνωστή ανισότητα προκύπτει για δύο σημεία με εφαρμογή της ανισότητας Jensen;

Αν γνωρίζεις ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ είναι κυρτή ποια γνωστή ανισότητα προκύπτει για δύο σημεία με εφαρμογή της ανισότητας Jensen;

3.3 Βασικές ασκήσεις

i. $a_i > 0$,

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$$

ii. Από ανισότητα Cauchy - Schwarz προκύπτουν οι εξής για κάθε $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \ge \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

και

$$\frac{x^n}{a^{n-1}} + \frac{y^n}{b^{n-1}} \ge \frac{(x+y)^n}{(a+b)^{n-1}}$$

Οι ανισότητες ισχύουν και για ν προσθεταίους.

iii. Για $a_i, x_i > 0$ ισχύει:

$$(a_1x_1 + \cdots a_nx_n)\left(\frac{a_1}{x_1} + \cdots + \frac{a_n}{x_n}\right) \ge (a_1 + \cdots + a_n)^2$$